警 示

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条
考 试 作 弊 不 授 予 学 士 学 位

软件学院　　2009-2010 学年第二学期

《数值计算方法》期末考试试题(A 卷 答案)

考试形式：闭卷　　考试时间：　2　小时

一、填空题（25 空×1 分/空=25 分）

1　梯形求积公式为：$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(b)+f(a)]$。

2　拟合三点 A(0,1), B(1,3), C(2,2)的直线是 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$。

3　误差包括模型误差、观测误差、截断误差、舍入误差。

4　设 x^*=0.03000 为 x=0.0300211 的近似值，则 x^*的有效数字的位数是 4 。

5　已知 (x_0, y_0)，(x_1, y_1)，其中 $x_0 \neq x_1$ 拉格朗日线性插值公式是：

$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$。

6　设 $f(x) = x^3 + x - 1$，则差商 $f[0,1,2,3] = 1$，　$f[0,1,2,3,4] = 0$。

7　求 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的 Newton 迭代法格式为 $x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{1}{2}$,收敛阶为 2 。

8　设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 4 & 12 & 0 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$，则 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 24$，$\|\boldsymbol{A}\|_1 = 25$。

9　差商与差分的关系公式为：$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}$。

10　方程 $x = f(x)$ 根的牛顿迭代格式是 $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - f(x_n)}{1 - f'(x_n)}$

11　计算球体积 $V = \frac{4}{3}pR^3$ 时要使相对误差限为 1%，那么测量半径时允许的相对误差限为 $\frac{|r - r^*|}{|r^*|} = \frac{1}{3}\%$。

12　雅克比迭代法的迭代矩阵是 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，高斯-塞德尔迭代法的迭代矩阵是 $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$。

13　有 n 位有效数字，其相对误差限为 $e_r^* \le \frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}$；反之，若 x^* 的误差限满足 $e_r^* \le \frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$，则 x^* 至少有 n 位有效数字。

14　方程 $x^3+3x-6=0$ 在[1,2]之间的实根为 __1.29__（要求有 3 位有效数字）。

15　已知 $f(x)=-6x^9+8x^7+4x-5$，则 $f[1,2,2^2,\cdots,2^9]=$ __-6__，$f[1,2,2^2,\cdots,2^{10}]=$ __0__。

16　要使 $\sqrt{2}$ 的近似值的相对误差不超过 0.1%，应取__4__位有效数字。

二、单项选择题（5 题×1 分/题=5 分）

1　给出以下四对近似数

（A）45800 和 4.58×10^4　　（B）0.00438 和 0.04380×10^{-1}

（C）0.4015×10^2 和 0.04015×10^3　　（D）8070×10^{-4} 和 0.807

其中，哪组近似数中的两个近似数实际上是相同的？

答案：（C）

2　已知自然数 e＝2.718281828459045…，取 e≈2.71828，那么 e 具有的有效数字是

（A）5 位　（B）6 位　（C）7 位　（D）8 位

答案：（__B__）

3　用最小二乘法求数据 (x_k, y_k) $(k=1,2,\ldots,n)$ 的拟合直线，即是求出拟合直线

$\hat{y}=a_0+a_1x$，使得（　　）为最小，其中 $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k$， $\hat{y}=a_0+a_1x$。

（A）$\sum_{k=1}^{n}(y_k-\bar{y})^2$（B）$\sum_{k=1}^{n}(y_k-\hat{y}_k)^2$（C）$\sum_{k=1}^{n}(y_k-\hat{y}_k)$（D）$\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2$

答案：（ B ）

4　下面哪一种计算方法能够得到比较准确的计算值：

(A) 直接求 e^x-1 的值，x 接近于 0；

(B) 求积分值 $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}dx, n=1,2,\cdots 8$，采用递推公式 $I_{n-1}=\frac{1}{5}(\frac{1}{n}-I_n), n=8,7,\cdots 1$；

(C) 求方程 $x^2-(10^9+1)x+10^9=0$ 的根，采用求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

(D) 求 $f=\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{a}$ 的值，n 的值很大，采用 $f=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 的方式计算。

答案：（C）

5.　由数据

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	-2	-1.75	-1	0.25	2	4.25

所确定的插值多项式的次数是（　　）

（A）二次　（B）三次　（C）四次（D）五次

答案：（D）

三、计算题（8 题×5 分/题=40 分）

1　已知函数值 $f(0)=6,\ f(1)=10,\ f(3)=46,\ f(4)=82,\ f(6)=212$，求函数的四阶差商 $f[0,1,3,4,6]$ 和二阶差商 $f[4,1,3]$。

解：采用列表法来计算各阶均差，有

x	y	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差

0	6				
1	10	4			
3	46	18	14/3		
4	82	36	6	1/3	
6	212	65	29/3	11/15	1/15

从表中可查得：$f[0,1,3,4,6]=\dfrac{1}{15}$。

x	y	一阶均差	二阶均差
4	82		
1	10	72/3	
3	46	18	6

故 $f[4,1,3]=6$。其实，根据均差的对称性，$f[4,1,3]=f[1,3,4]=6$，该值在第一个表中就可以查到。

2　已知一组试验数据

x_k	2	2.5	3	4	5	5.5
y_k	4	4.5	6	8	8.5	9

试用直线拟合这组数据。(计算过程保留 3 位小数)

解：作矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2.5\\1 & 3\\1 & 4\\1 & 5\\1 & 5.5\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}4\\4.5\\6\\8\\8.5\\9\end{bmatrix}$$

法方程为

$$(A^TA)X=(A^Ty)$$

即

$$\begin{bmatrix}6 & 22\\22 & 90.5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40\\161.25\end{bmatrix}$$

解得：$a=1.2288$，$b=1.4831$。

其直线拟合函数为 $y=1.2288+1.4831x$。

3　用高斯消元法解方程组：

$$\begin{cases} 4x_1+x_2 & = 3 \\ x_1+4x_2+x_3 & =-3 \\ 4x_2+x_3 & =-3 \end{cases}$$ 。

【答案】$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$

4　取 h=0.1, 用改进欧拉法预报－校正公式求初值问题

$$\begin{cases} y'=1+x+y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

在 x=0.1, 0.2 处的近似值. 计算过程保留 3 位小数。

【解】预报－校正公式为

$$\begin{cases} \overline{y}_{k+1}=y_k+hf(x_x,y_k)=y_k+h(1+x_k+y_k^2) \\ y_{k+1}=y_k+\dfrac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},\overline{y}_{k+1})]=y_k+\dfrac{h}{2}(2+x_k+y_k^2+x_{k+1}+\overline{y}_{k+1}^2) \end{cases}$$

h=0.1,x_0=0，y_0=1，x_1=0.1，于是有

$$\begin{cases} \overline{y}_1=1+0.1(1+0+1^2)=1.2 \\ y_1=1+\dfrac{0.1}{2}(2+0+1^2+0.1+1.2^2)=1.227 \end{cases}$$

h=0.1,x_1=0.1，y_1=1.227，x_2=0.2，于是有

$$\begin{cases} \overline{y}_2=1.227+0.1(1+0.1+1.227^2)=1.488 \\ y_2=1.227+\dfrac{0.1}{2}(2+0.1+1.227^2+0.2+1.488^2)=1.528 \end{cases}$$

所求为 $y(0.1)\approx y_1=1.227$　$y(0.2)\approx y_2=1.528$

5　用牛顿法解方程 $x-e^{-x}=0$ 在 x=0.5 附近的近似根。要求 $|x_{n+1}-x_n|<0.001$。计算过程保留 5 位小数。

【答案】

令 $f(x)=x-e^{-x}$，取 x_0=0.5，则 $f(0.5)f''(0.5)=(0.5-e^{-0.5})(-e^{-0.5})$=0.064 61>0，

于是取初始值 x_0=0.5

牛顿迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n-e^{-x_n}}{1+e^{-x_n}}\quad (n=0,1,2,\dots)$$

x_0=0.5,

$$x_1=0.5-\frac{0.5-e^{-0.5}}{1+e^{-0.5}}=0.56631$$

$$|x_1 - x_0| = 0.066\,31$$

$$x_2 = 0.566\,31 - \frac{0.566\,31 - e^{-0.566\,31}}{1 + e^{-0.566\,31}} = 0.567\,14$$

$$|x_2 - x_1| = 0.000\,83 < 0.001$$

于是取 x=0.56714 为方程的近似根.

6　已知 $\sqrt{1} = 1$，$\sqrt{4} = 2$，$\sqrt{9} = 3$，利用拉格朗日插值方法构造二次插值函数，并估算 $\sqrt{5}$ 的值。

【答案】

$$\begin{aligned}
l_0 &= \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} \\
l_1 &= \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(4-9)} \\
l_2 &= \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)} \\
P(x) &= l_0 y_0 + l_1 y_1 + l_2 y_2
\end{aligned}$$

7　用 ***LU*** 分解法求下面的方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

要求计算过程保留 2 位小数。

【答案】

$x_1 = 1.00$,　$x_2 = 2.00$, $x_3 = 3.00$

8　给定线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

已知该方程组的雅克比迭代格式收敛。写出求解该方程组的迭代格式，并取初值 $x_1^{(0)} = 1$，$x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$，进行 3 次迭代计算。

【解】

雅可比迭代式为：

$$x^{(k+1)}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}x^{(k)}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}，取 x^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

取 $x^{(0)}=(1,0,0)^T$，可得

$x^{(1)}=(1,1,1)^T$，$x^{(2)}=(1,0,-1)^T$，$x^{(3)}=(-1,2,1)^T$

四、问答题（共 30 分）

1　为什么要研究计算方法? 计算方法在解决实际问题中所处的地位如何？（提示：用图示说明）判断数值计算方法好坏的标准是什么？（10 分）

A 找不到解析解、问题本身不具有解析形式、解析方法太复杂、实际需要。

B 实际计算 **à** 数学模型 **à** 数值计算方法 **à** 程序设计 **à** 计算机计算 **à** 结果分析 **à** 结束.

中间有抽象建立，构造选择，　修改，选择等

C 稳定性的好坏、精度的高低、计算量的大小、存储量的大小、逻辑结构是否简单

2　试述遗传算法的发展历史和优点。通过本课程的学习，你对遗传算法的改进是否有新的构想？试述之。（20 分）

本题为开放性问题，根据论述中对遗传算法的理解和新构想的独特性和合理性进行评分。