

数值代数大作业

史博文

2023 年 2 月

1 问题背景

1.1 Stokes 方程

考虑 Stokes 方程

$$\begin{cases} -\Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{F}, & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0, & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \end{cases}$$

边界条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= b, y = 0, & \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= t, y = 1, \\ \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} &= l, x = 0, & \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} &= r, x = 1, \\ u &= 0, x = 0, 1. & v &= 0, y = 0, 1. \end{aligned}$$

其中 $\vec{u} = (u, v)$ 为速度, p 为压力, $\vec{F} = (f, g)$ 为外力, \vec{n} 为外法向方向. 在区域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ 上, 外力为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -4\pi^2(2\cos(2\pi x) - 1)\sin(2\pi y) + x^2 \\ g(x, y) &= 4\pi^2(2\cos(2\pi y) - 1)\sin(2\pi x). \end{aligned}$$

Stokes 方程的真解为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (1 - \cos(2\pi x))\sin(2\pi y), \\ v(x, y) &= -(1 - \cos(2\pi y))\sin(2\pi x), \\ p(x, y) &= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

1.2 交错网格上的 MAC 格式

设计关于 u, v 和 p 交错的 MAC 格式, 并利用有限差分法对原问题进行离散. 在内部格点直接利用差分格式逼近算子, 在 Neumann 边界处利用影子单元进行离散, 而在强制边界条件处可以不列方程. 由此可得 (下标表示位置):

关于 u 的方程 ($h = 1/N$):

(1) 当 $1 \leq i \leq N-1, 2 \leq j \leq N-1$,

$$-\frac{u_{i+1,j-\frac{1}{2}} - 2u_{i,j-\frac{1}{2}} + u_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{h^2} - \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j-\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{3}{2}}}{h^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h} = f_{i,j-\frac{1}{2}};$$

(2) 当 $1 \leq i \leq N-1 (j=1)$,

$$-\frac{u_{i,\frac{3}{2}} - u_{i,\frac{1}{2}}}{h^2} - \frac{b_{i,0}}{h} - \frac{u_{i+1,\frac{1}{2}} - 2u_{i,\frac{1}{2}} + u_{i-1,\frac{1}{2}}}{h^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}{h} = f_{i,\frac{1}{2}};$$

(3) 当 $1 \leq i \leq N-1 (j = N)$,

$$\frac{u_{i,N-\frac{1}{2}} - u_{i,N-\frac{3}{2}}}{h^2} - \frac{t_{i,N}}{h} - \frac{u_{i+1,N-\frac{1}{2}} - 2u_{i,N-\frac{1}{2}} + u_{i-1,N-\frac{1}{2}}}{h^2},$$

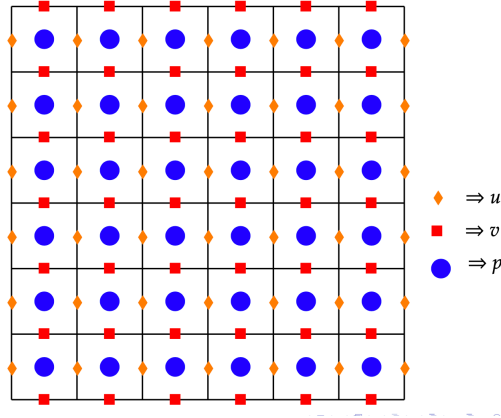


图 1: 交错网格上的 MAC 格式 (图片来源: 胡俊教授)

以及关于 v 的方程 ($h = 1/N$):

(1) 当 $1 \leq j \leq N-1, 2 \leq i \leq N-1$,

$$-\frac{v_{i+\frac{1}{2},j} - 2v_{i-\frac{1}{2},j} + v_{i-\frac{3}{2},j}}{h^2} - \frac{v_{i-\frac{1}{2},j+1} - 2v_{i-\frac{1}{2},j} + v_{i-\frac{1}{2},j-1}}{h^2} + \frac{p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h} = g_{i-\frac{1}{2},j};$$

(2) 当 $1 \leq j \leq N-1 (i = 1)$,

$$-\frac{v_{\frac{3}{2},j} - v_{\frac{1}{2},j}}{h^2} - \frac{l_{0,j}}{h} - \frac{v_{\frac{1}{2},j+1} - 2v_{\frac{1}{2},j} + v_{\frac{1}{2},j-1}}{h^2} + \frac{p_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h} = g_{\frac{1}{2},j};$$

(3) 当 $1 \leq j \leq N-1 (i = N)$,

$$\frac{v_{N-\frac{1}{2},j} - v_{N-\frac{3}{2},j}}{h^2} - \frac{r_{N,j}}{h} - \frac{v_{N-\frac{1}{2},j+1} - 2v_{N-\frac{1}{2},j} + v_{N-\frac{1}{2},j-1}}{h^2} + \frac{p_{N-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{N-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h} = g_{N-\frac{1}{2},j}.$$

不可压条件 ($1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$):

$$\frac{u_{i,j-\frac{1}{2}} - u_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{h} + \frac{v_{i-\frac{1}{2},j} - v_{i-\frac{1}{2},j-1}}{h} = 0.$$

整理可得到如下线性方程组

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中, U 为 $2N(N-1)$ 维向量, P 为 N^2 维向量。注意到, 矩阵 A 可以看作两个混合边界条件下离散 Laplacian 算子矩阵组合成分块对角矩阵, 因此是对称正定的, 所以速度 U 可以被唯一确定。另一方面, 对系数矩作行变换, 消去项 B^T 可得压力 P 前的系数矩阵为 $B^T A^{-1} B$ 。

1.3 V-cycle 多重网格方法

V-cycle 多重网格方法是一种加速求解线性方程组迭代法收敛的算法。主要步骤为:

Algorithm 1 V-cycle 多重网格算法

```
while 误差  $\|r_h\|_2$  大于阈值 do
  repeat
    磨光迭代  $v_1$  次, 计算残量并限制到下一层。
  until 到达底层
  repeat
    磨光迭代  $v_2$  次, 计算残量并提升到上一层。
  until 到达顶层
end while
```

1.4 $B^T A^{-1} B$ 的特征值

下面证明, 矩阵 $B^T A^{-1} B$ 的特征值仅有 0 和 1, 且 0 特征值为单特征值。由此可以推出, 离散压力 P 的解空间是一维的。

如果

$$B^T A^{-1} B P = \lambda P,$$

进一步改写为

$$\begin{cases} AU + BP = 0, \\ -B^T U = \lambda P. \end{cases}$$

注意到, $A, B, -B^T$ 可以看作离散状态的 $\Delta, \text{grad}, \text{div}$ 算子, 于是不妨考虑连续的特征值问题:

$$\begin{cases} -\Delta \vec{u} + \nabla p = 0 \\ \text{div } \vec{u} = \lambda p. \end{cases}$$

即

$$\nabla \text{div } \vec{u} = \lambda \Delta \vec{u}.$$

(1) 取 $\lambda = 0$, 得 $\text{div } \vec{u} = 0$. 此时取 $U = 0, P$ 为所有元素均相等的向量。

(2) 取 $\lambda = 1$, 得 $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = C$. 此时特征值问题

$$\nabla \text{div } \vec{u} = \lambda' \vec{u}, \quad -BB^T x = \lambda' x,$$

的解, 一定是特征值问题

$$\Delta \vec{u} = \lambda' \vec{u}, \quad Ax = \lambda' x$$

的解。

令

$$B_{N-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ & & \ddots & & \\ \cdots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{N-1 \times N-1}, \quad R_N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ & & \ddots & & \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{N \times N}.$$

直接计算可得:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = B_{N-1} \oplus R_N, \quad B^T B = R_N \oplus R_N.$$

其中 \oplus 为 Kronecker 直和, $A \oplus B = I \otimes A + B \otimes I$.

注意到 B_N 的特征值全部非零，且与 R_N 的非零特征值相同。于是由 Kronecker 直和的性质， $B^T B$ 的全部特征值包括在 A 的特征值中（计算重数）。

设 $A^{-1} = P^T D^{-1} P$, $S = PB$. 则 $B^T A^{-1} B = S^T D^{-1} S$. 奇异值分解得

$$S = \sum_{i=1}^r s_i u_i v_i^T,$$

$$S^T D^{-1} S = \sum_{i=1}^r s_i^2 (u_i D^{-1} u_i^T) v_i v_i^T.$$

由于

$$S S^T u_i = s_i^2 u_i,$$

所以

$$B B^T (P^T u_i) = s_i^2 P^T u_i.$$

由上结论可知

$$A(P^T u_i) = s_i^2 P^T u_i,$$

即 $u_i D^{-1} u_i^T = s_i^{-2}$. 所以得 $B^T A^{-1} B$ 得非零特征值都是 1. 同时 $\text{rank}(B^T A^{-1} B) = \text{rank}(B^T B) = N^2 - 1$, 所以 0 特征值为 1 重。

1.5 提升与限制算子

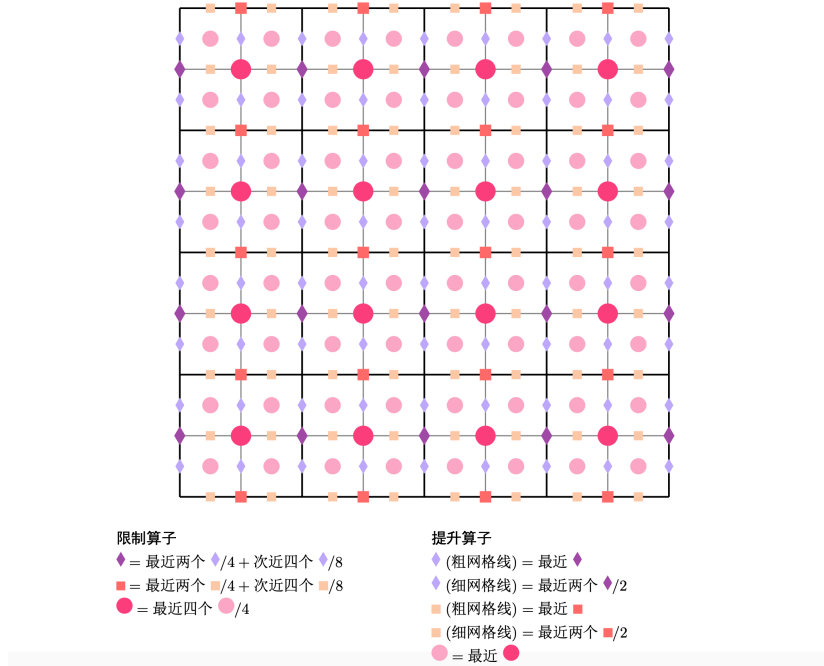


图 2: 提升和限制算子的实现方法 (图片来源: 吴清玉)

2 第一题

2.1 题目要求

分别取 $N = 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$, 以 DGS 为磨光子, 用基于 V-cycle 的多重网格方法求解上述离散问题, 停机标准为 $\|r_h\|_2 / \|r_0\|_2 \leq 10^{-8}$, 对不同的 ν_1, ν_2, L , 比较 V-cycle 的次数和 CPU 时间, 并计

算误差

$$e_N = h \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{N-1} \left| u_{i,j-\frac{1}{2}} - u(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) \right|^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^N \left| v_{i-\frac{1}{2},j} - v(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.2 DGS 迭代法

给定初始值 $U_0 = (u_0^T, v_0^T)^T$ 和 P_0 (均取为零), 令 $k = 0, A = D_A - L_A - U_A$, DGS 迭代法定义如下:

1. 用 Gauss-Seidel 迭代方法更新速度分量

$$U_{k+1/2} = U_k + (D_A - L_A)^{-1} (F - B P_k - A U_k).$$

2. 更新速度与压力:

(1) 对内部单元 (i, j) (四个顶点 $((i-1)h, (j-1)h), (ih, (j-1)h), (ih, jh), ((i-1)h, jh)$), $2 \leq i, j \leq N-1$, 计算散度方程的残量

$$r_{i,j} = -\frac{u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1/2} - u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+1/2}}{h} - \frac{v_{i-\frac{1}{2},j}^{k+1/2} - v_{i-\frac{1}{2},j-1}^{k+1/2}}{h},$$

并令 $\delta = r_{i,j}h/4$.

更新内部单元速度:

$$\begin{aligned} u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+1/2} &= u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+1/2} - \delta, & u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1/2} &= u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1/2} + \delta \\ v_{i-\frac{1}{2},j-1}^{k+1/2} &= v_{i-\frac{1}{2},j-1}^{k+1/2} - \delta, & v_{i-\frac{1}{2},j}^{k+1/2} &= v_{i-\frac{1}{2},j}^{k+1/2} + \delta \end{aligned}$$

更新内部单元的压力:

$$\begin{aligned} p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^k &= p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^k + r_{i,j} \\ p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^k &= p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^k - r_{i,j}/4 \\ p_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}^k &= p_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}^k - r_{i,j}/4 \\ p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k &= p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k - r_{i,j}/4 \\ p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^k &= p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^k - r_{i,j}/4 \end{aligned}$$

(2) 对边界单元 (i, N) (四个顶点 $((i-1)h, (N-1)h), (ih, (N-1)h), (ih, Nh), ((i-1)h, Nh)$), $2 \leq i \leq N-1$, 先计算散度的残量 $r_{i,N}$, 计算公式如前, 并令 $\delta = r_{i,N}h/3$.

速度更新如下:

$$\begin{aligned} u_{i-1,N-\frac{1}{2}}^{k+1/2} &= u_{i-1,N-\frac{1}{2}}^{k+1/2} - \delta, & u_{i,N-\frac{1}{2}}^{k+1/2} &= u_{i,N-\frac{1}{2}}^{k+1/2} + \delta, \\ v_{i-\frac{1}{2},N-1}^{k+1/2} &= v_{i-\frac{1}{2},N-1}^{k+1/2} - \delta. \end{aligned}$$

更新边界单元 (i, N) 的压力:

$$\begin{aligned} p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^k &= p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^k + r_{i,N} \\ p_{i+\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^k &= p_{i+\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^k - r_{i,N}/3 \\ p_{i-\frac{3}{2},N-\frac{1}{2}}^k &= p_{i-\frac{3}{2},N-\frac{1}{2}}^k - r_{i,N}/3 \\ p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{3}{2}}^k &= p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{3}{2}}^k - r_{i,N}/3 \end{aligned}$$

(3) 类似更新边界单元 (N, j) 和 $(1, j)$, $2 \leq j \leq N-1, (i, 1), 2 \leq i \leq N-1$ 的速度和压力.

对顶点单元 $(1, 1)$, 计算散度残量 $r_{1,1}$, 计算公式如前, 令 $\delta = r_{1,1}h/2$. 更新速度如下: 更新内部单元速度:

$$u_{1,\frac{1}{2}}^{k+1/2} = u_{1,\frac{1}{2}}^{k+1/2} + \delta, \quad v_{\frac{1}{2},1}^{k+1/2} = v_{\frac{1}{2},1}^{k+1/2} + \delta.$$

更新压力如下:

$$\begin{aligned}
p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^k &= p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^k + r_{1,1} \\
p_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^k &= p_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^k - r_{1,1}/2, \\
p_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^k &= p_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^k - r_{1,1}/2.
\end{aligned}$$

对其他顶点单元 $(1, N)$, $(N, 1)$ 和 (N, N) , 类似更新速度和压力.

2.3 算法实现

Algorithm 2 以 DGS 迭代法为磨光子的 V-cycle 多重网格算法

```

while  $\|r_h\|_2/\|r_0\|_2 > 10^{-8}$  do
  repeat
    利用 DGS 磨光算子迭代  $v_1$  次, 计算残量并限制到下一层.
  until 到达底层网格, 网格参数为  $N/L$ .
  repeat
    利用 DGS 磨光算子磨光迭代  $v_2$  次, 计算残量并提升到上一层.
  until 到达顶层
end while

```

其中值得注意的是, 在编写 DGS 磨光子时, 更新速度与压力需要覆盖式更新; 为保证计算速度、减少存储, U, P 均用矩阵存储, 实现算法的无系数矩阵运行。同时, 为避免计算提升和限制后的系数矩阵, 可以直接利用网格上的 MAC 格式近似。

提升或限制后的方程如果不再满足散度为 0 条件, 此时待求解的线性方程组将形如

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ D \end{pmatrix}.$$

其中 $D = [d_{i,j}]$ 为负的数值散度. 在利用 DGS 迭代法求解上述线性方程组时, 散度方程的残量 $r_{i,j}$ 将变为

$$r_{i,j} = -\frac{u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}}{h} - \frac{v_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2},j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h} - d_{i,j}.$$

2.4 数值结果

2.4.1 误差

N	64	128	256	512	1024	2048
误差	0.0015	3.7362e-04	9.3391e-05	2.3342e-05	5.8298e-06	1.4521e-06

2.4.2 不同迭代次数与底层网格大小的运行时间和 V-cycle 次数比较

$v_1 = 6, v_2 = 6$, 底层网格参数 $N/L = 2$, 底层网格为 2×2 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.035066	0.116906	0.504635	3.198413	18.449256	115.347889
V-cycle 次数	5	5	5	5	5	5

$v_1 = 6, v_2 = 6$, 底层网格参数 $N/L = 4$, 底层网格为 4×4 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.034006	0.1136572	0.514653	3.28567	18.117632	113.567349
V-cycle 次数	5	5	5	5	5	5

$v_1 = 4, v_2 = 4$, 底层网格参数 $N/L = 2$, 底层网格为 2×2 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.026561	0.088919	0.447595	2.386111	14.182898	95.886059
V-cycle 次数	5	5	5	5	5	5

$v_1 = 4, v_2 = 4$, 底层网格参数 $N/L = 4$, 底层网格为 4×4 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.025837	0.088566	0.390343	2.365471	13.721832	93.78463
V-cycle 次数	5	5	5	5	5	5

$v_1 = 2, v_2 = 2$, 底层网格参数 $N/L = 2$, 底层网格为 2×2 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.024367	0.089628	0.303787	1.827113	10.392901	71.886059
V-cycle 次数	6	6	6	6	6	6

$v_1 = 2, v_2 = 2$, 底层网格参数 $N/L = 4$, 底层网格为 4×4 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.025496	0.095634	0.370122	1.817791	10.566532	73.567349
V-cycle 次数	6	6	6	6	6	6

3 第二题

3.1 题目要求

分别取 $N = 64, 128, 256, 512$, 以 Uzawa Iteration Method 求解上述离散问题, 停机标准为 $\|r_h\|_2 / \|r_0\|_2 \leq 10^{-8}$, 并计算误差

$$e_N = h \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{N-1} \left| u_{i,j-\frac{1}{2}} - u \left(x_i, y_{j-\frac{1}{2}} \right) \right|^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^N \left| v_{i-\frac{1}{2},j} - v \left(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.2 Uzawa 迭代法、共轭梯度法与最优参数 α^* 的选取

Algorithm 3 Uzawa 迭代法

Require: $P_0, k = 0$.

while $\|r_h\|_2 / \|r_0\|_2 > 10^{-8}$ **do**

 利用共轭梯度法求解 $AU_{k+1} = F - BP_k$.

 更新压力 $P_{k+1} = P_k + \alpha (B^T U_{k+1})$.

end while

Algorithm 4 共轭梯度法

Require: x

```
 $k = 0; r = b - Ax; \rho = r^T r$ 
while  $(\sqrt{\rho} > \varepsilon \|b\|_2)$  以及  $(k < k_{\max})$  do
   $k = k + 1$ 
  if  $k = 1$  then
     $p = r$ 
  else
     $\beta = \rho / \tilde{\rho}; \quad p = r + \beta p$ 
  end if
   $w = Ap; \quad \alpha = \rho / p^T w; \quad x = x + \alpha p$ 
   $r = r - \alpha w; \quad \tilde{\rho} = \rho; \quad \rho = r^T r$ 
end while
```

因为

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k + \alpha (B^T A^{-1} (F - B P_k)) \\ &= (I - \alpha B^T A^{-1} B) P_k + \alpha B^T A^{-1} F \end{aligned}$$

因此, 关于压力的更新方法, 相当于下面的线性代数方程组

$$B^T A^{-1} B P = B^T A^{-1} F$$

的迭代格式. 由第一节所得结论, 可知 $I - \alpha B^T A^{-1} B$ 的特征值只有 1 和 $1 - \alpha$. 可知 $\alpha = 1$ 为最优参数。

3.3 数值结果

计算所得误差如下:

N	64	128	256	512
误差	0.0015	3.7363e-04	9.3398e-05	2.3349e-05

4 第三题

4.1 题目要求

分别取 $N = 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$, 以 Inexact Uzawa Iteration Method 为迭代法求解上述离散问题, 停机标准为 $\|r_h\|_2 / \|r_0\|_2 \leq 10^{-8}$, 其中以 V-cycle 多重网格方法为预条件子求解每一步的子问题 $AU_{k+1} = F - BP_k$, 对不同的 $\alpha, \tau, \nu_1, \nu_2, L$, 比较外循环的迭代次数和 CPU 时间, 并计算误差

$$e_N = h \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{N-1} \left| u_{i,j-\frac{1}{2}} - u \left(x_i, y_{j-\frac{1}{2}} \right) \right|^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^N \left| v_{i-\frac{1}{2},j} - v \left(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.2 Inexact Uzawa 迭代方法与 V-cycle 预优共轭梯度法

Algorithm 5 Inexact Uzawa 迭代法

Require: $P_0, k = 0$.

while $\|r_h\|_2 / \|r_0\|_2 > 10^{-8}$ **do**

以 V-cycle 预优共轭梯度法求解 $AU_{k+1} = F - BP_k$, 得到近似解 \hat{U}_{k+1} .

更新压力 $P_{k+1} = P_k + \alpha (B^T \hat{U}_{k+1})$.

end while

设 \hat{U}_{k+1} 是方程 $AU_{k+1} = F - BP_k$ 的近似解. 定义

$$\delta_k = A\hat{U}_{k+1} - F + BP_k$$

若

$$\|\delta_k\|_2 \leq \tau \|B^T \hat{U}_k\|$$

当 τ 充分小时, 上述迭代方法是收敛的.

Algorithm 6 V-cycle 预优共轭梯度法

Require: x

$k = 0; r = b - Ax; \rho = r^T r$

while $(\sqrt{r^T r} > \max(\varepsilon \|b\|_2, \tau \|B^T \hat{U}_k\|))$ 以及 $(k < k_{\max})$ **do**

$k = k + 1$

以对称 Gauss-Seidel 迭代法为磨光子, 利用 V-cycle 多重网格方法求解 $Az = r$.

if $k = 1$ **then**

$p = z; \quad \rho = r^T z$

else

$\tilde{\rho} = \rho; \quad \rho = r^T z \quad \beta = \rho / \tilde{\rho}; \quad p = z + \beta p$

end if

$w = Ap; \quad \alpha = \rho / p^T w \quad x = x + \alpha p; \quad r = r - \alpha w$

end while

其中, 对称 GS 迭代指的是通过分量形式

$$(D_A - L_A)z_{k+1/2} - U_A z_k = r,$$

$$(D_A - U_A)z_k - L_A z_{k+1/2} = r.$$

进行迭代. 由于 A 对称正定, 因此对称 GS 迭代法是收敛的。

数值结果

4.3 数值结果

4.3.1 误差

N	64	128	256	512	1024	2048
误差	0.0015	3.7363e-04	9.3399e-05	2.3349e-05	5.8298e-06	1.4521e-06

4.3.2 不同参数对运行时间和 V-cycle 次数的影响

预优共轭梯度法停机标准为 $\sqrt{r^T r} > \max(\varepsilon \|b\|_2, \tau \|B^T \hat{U}_k\|)$.

V-cycle 多重网格算法停机标准为 $\|r_h\|_2 / \|r_0\|_2 \leq error$

$\tau = 0.001$, $\varepsilon = 1e-8$, $\alpha = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 2$, $error = 1e-3$, 底层网格参数 $N/L = 2$, 底层网格为 2×2 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.0862	0.2712	1.065	4.9174	17.3015	201.7559
Inexact Uzawa 迭代次数	4	4	4	4	2	2
PCG 迭代次数	3,2,3,3	3,2,3,3	3,2,3,3	3,2,3,3	3,3	3,3

$\tau = 0.001$, $\varepsilon = 1e-8$, $\alpha = 1$, $v_1 = 4$, $v_2 = 4$, $error = 1e-3$, 底层网格参数 $N/L = 4$, 底层网格为 4×4 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.0374	0.1360	0.5635	2.4935	14.5262	162.8681
Inexact Uzawa 迭代次数	2	2	2	2	2	2
PCG 迭代次数	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2

$\tau = 0.001$, $\varepsilon = 1e-8$, $\alpha = 1.05$, $v_1 = 2$, $v_2 = 2$, $error = 1e-3$, 底层网格参数 $N/L = 2$, 底层网格为 2×2 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.1014	0.3621	1.71082	6.1803	43.1189	302.3763
Inexact Uzawa 迭代次数	5	5	6	5	5	5
PCG 迭代次数	3,2,3,3,3	3,2,3,3,3	3,2,3,3,3,3	3,2,3,3,3	3,3,3,3,3	3,3,3,3,3

$\tau = 0.001$, $\varepsilon = 1e-8$, $\alpha = 1.05$, $v_1 = 4$, $v_2 = 4$, $error = 1e-3$, 底层网格参数 $N/L = 4$, 底层网格为 4×4 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.1169	0.3876	1.6013	7.4373	46.7608	323.2497
Inexact Uzawa 迭代次数	6	6	6	6	6	6
PCG 迭代次数	2,2,2,2,2,2	2,2,2,2,2,2	2,2,2,2,2,2	2,2,2,2,2,2	2,2,2,2,2,2	2,2,2,2,2,2

$\tau = 0.001$, $\varepsilon = 1e-8$, $\alpha = 0.95$, $v_1 = 2$, $v_2 = 2$, $error = 1e-3$, 底层网格参数 $N/L = 2$, 底层网格为 2×2 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.1006	0.3814	1.6233	6.1435	41.6549	290.2349
Inexact Uzawa 迭代次数	6	6	6	5	5	5
PCG 迭代次数	3,2,3,3,3,3	3,2,3,3,3,3	3,2,3,3,3,3	3,2,3,3,3	3,3,3,3,3	3,3,3,3,3

$\tau = 0.001$, $\varepsilon = 1e-8$, $\alpha = 0.95$, $v_1 = 4$, $v_2 = 4$, $error = 1e-3$, 底层网格参数 $N/L = 4$, 底层网格为 4×4 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.0940	0.3923	1.5030	7.4557	42.18234	279.9145
Inexact Uzawa 迭代次数	6	6	6	6	6	6
PCG 迭代次数	2,2,2,2,2,2	2,2,2,2,2,2	2,2,2,2,2,2	2,2,2,2,2,2	2,2,2,2,2,2	2,2,2,2,2,2

$\tau = 0.0001$, $\varepsilon = 1e-8$, $\alpha = 1$, $v_1 = 4$, $v_2 = 4$, $error = 1e-3$, 底层网格参数 $N/L = 4$, 底层网格为 4×4 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.0270	0.1260	0.4176	2.5128	16.3664	182.8341
Inexact Uzawa 迭代次数	2	2	2	2	2	2
PCG 迭代次数	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2

$\tau = 1e-5$, $\varepsilon = 1e-8$, $\alpha = 1$, $v_1 = 4$, $v_2 = 4$, $error = 1e-3$, 底层网格参数 $N/L = 4$, 底层网格为 4×4 .

N	64	128	256	512	1024	2048
CPU 时间 (秒)	0.0322	0.1187	0.5429	2.4722	15.7753	156.2418
Inexact Uzawa 迭代次数	2	2	2	2	2	2
PCG 迭代次数	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2