支配集，独立集，覆盖集，

着色与匹配

基本概念

设无向图 $G=<V,E>$

- 支配集：设 $V^* \subset V$ 若 $\forall v_i \in V-V^*$，$\exists v_j \in V^*\ st\ v_j$ 与 v_i 相邻。则 V^* 称为支配集。最小支配集中顶点个数记作 γ_0
- 点独立集：设 $V^* \subset V$，$\forall v_i, v_j \in V^*$，$<v_i, v_j> \notin E$ 则 V^* 称为点独立集。最大点独立集中的顶点个数记作 β_0
- 点覆盖集：设 $V^* \subset V$，$\forall e_i \in E$，$\exists v_i \in V^*\ st\ v_i$ 与 e_i 相关联，则 V^* 称为点覆盖集。最小点覆盖集中的顶点数记作 α_0
- 边覆盖集：设 $E^* \subset E$，$\forall v_i \in V$，$\exists e_i \in E^*\ st\ e_i$ 与 v_i 关联。则称 E^* 为边覆盖集。最小边覆盖集中边的个数记作 α_1
- 边独立集（匹配）：设 $E^* \subset E$，$\forall e_i, e_j \in E^*$，e_i与e_j 不相邻。则 E^* 称为边独立集。最大边独立集中边的个数记作 β_1 ,完美匹配指图中每个顶点都与边独立集中某一条边相关联。
- 饱和点，不饱和点：相对于某个匹配而言，与匹配中的边相关联的顶点称为饱和点。
- 交错路径，交错圈：匹配边与非匹配边交错连接形成的路径称为交错路径，形成的圈称作交错圈。

重要定理

- 极大点独立集一定是极小支配集。
- V^* 为点覆盖集当且仅当 $V-V^*$ 为点独立集。
- 设 G 为无孤立顶点的无向图。则 V^* 为极小（最小）点覆盖集当且仅当 $V-V^*$ 为极大（最大）点独立集。因此

$$\alpha_0+\beta_0=|V|$$

- 最大匹配集依次并上每一个非饱和顶点关联的一条边则称为最小边覆盖集；最小边覆盖集依次删去相邻的边中的一条则成为最大匹配集；且有：

$$\alpha_1+\beta_1=|V|$$

- 设 M 为图中的一个匹配，则 M 为最大匹配当且仅当不存在含 M 的可增广的交错路径。
- **二部图中的匹配**
  设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$
  - 二部图中存在完备匹配的充分必要条件是 V_1 中任意 k 个顶点都与 V_2 中至少 k 个顶点相邻。
  - 二部图中存在完备匹配的充分条件是 V_1 中每个顶点至少与 k 条边相关联，而 V_2 中每个顶点至多与 k 个顶点相关联。

着色

- 用 k 种颜色对图中的顶点着色，使得相邻的顶点着不同的颜色，称该图为 k 可着色的。最小的着色颜色数称为该图的色数，记作 $\chi(G)$
- 色数的性质
  (1) $\chi(G)=1$ 当且仅当 G 是零图.
  (2) $\chi(Kn)=n.$
  (3) 偶圈的色数为 2，奇圈为 3，奇阶轮图的色数为 3，偶阶轮图的色数为 4.
  (4) 设 G 至少含一条边，则 $\chi(G)=2$ 当且仅当 G 为二部图.
  (5) 对任意的无环图，均有 $\chi(G) \le \Delta(G)+1$，等号当且仅当图为完全图或奇环时成立。
- 用 k 种颜色对平面图中的面着色，使得相邻的面颜色不同，称该图是 k 可面着色的。最小的着色颜色称为该图的面色数，记作 $\chi^*(G)$ 。
- 地图 G 是 k-可面着色的当且仅当它的对偶图 G^* 是 k-可着色的.

- 用 k 种颜色对图中的边着色，使得相邻的边着不同的颜色，称该图为 k 可着色的。最小的着色颜色数称为该图的边色数，记作 $\chi^{'}(G)$
- 边色数的性质：$\Delta(G) \le \chi^{'}(G) \le \Delta(G)+1$

tricky point

- 如何求 $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1$
  - 求 γ_0 即最小点支配数，直接从1开始枚举尝试
  - 求 β_0 即最大点独立数，直接肉眼观察
  - 求 α_0 即最小点覆盖数，用 $\alpha_0+\beta_0=n$
  - 求 β_1 即最大边独立数，首先找出一个极大匹配，然后尝试找出是否存在包含该匹配的可扩展交错路径，若不存在，则该匹配就是最大匹配（因为有定理：一个匹配是最大匹配当且仅当没有包含该匹配的可扩展交错路径），否则根据交错路径找出更大的独立数，并从头迭代。
  - 求 α_1 即最小边覆盖数，利用 $\alpha_1+\beta_1=n$ 。要具体找出边覆盖集，按以下步骤：
    - 找出最大边独立集作为结果集合的基准
    - 对于每个非饱和点，选出一条与之关联的边加入结果集合
    - 结果集合为最小边覆盖集
- 各种集合之间的关系
  - 点支配，点独立，点覆盖
    - 点独立集是点支配集，在极值意义下成立（极大点独立集是极小点支配集），在最值意义下不成立（最大点独立集不是最小点支配集）；但点支配集不是点独立集。
    - 点独立集的补集是点覆盖集，在极值和最值意义下成立；同时点覆盖集的补集也是点独立集，在极值和最值意义下成立。
  - 边独立，边覆盖
    - 最大边独立数小于等于最小边覆盖数；事实上最大边独立集并上非饱和点关联的一条边等于最小边覆盖集，最小边覆盖集减去相邻的边等于最大边独立集。当最大边独立数等于最小边覆盖数是，边独立集为完美匹配。
  - 不管是边还是点，最大独立数和最小覆盖数的和都是顶点数，即 $\alpha_{(1,0)}+\beta_{(1,0)}=n$