

命题逻辑等值演算

定义

- 等值式：设公式 A, B 是两个命题变项（也就是真值不确定的命题），若 A, B 构成的等值式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 和 B 是等值的，记作 $A \leftrightarrow B$ 。并且称 $A \leftrightarrow B$ 是等值式。
- 文字：命题变项及其否定统称为文字。
- 简单析取式，简单合取式：仅有有限个文字构成的析取式称作简单析取式，仅有有限个文字构成的合取式称作简单合取式。
- 析取范式，合取范式：由有限个简单合取式构成的析取式称作析取范式，由有限个简单析取式构成的合取式称作合取范式。
- 在含有 n 个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项或者它的否定式按照下标从小到大的字典顺序排列，称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）。
 - 极小项通常用 m_0, m_1, m_2, \dots 表示。析取范式中每一个简单合取式对应的极小项的下标由对所有文字的赋值（1,0）构成的二进制串的十进制值来确定。比如 $p \wedge q \wedge r$ 对应 111 即 m_7 ，而 $p \wedge \neg q \wedge r$ 对应 101 即 m_5 。合取范式的规则完全对称，用 M_0, M_1, M_2, \dots 表示。
 - 如果某一个化简出来的简单合取式中含有的文字个数小于命题公式中的文字个数，比如含 p, q, r 的命题公式化简后含有 $p \wedge q$ 则利用 $p \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$ 来进行扩充后再找对应的极小项和极大项的表示式，比如这里就对应 $m_6 \vee m_7$ 。
 - 当命题公式为矛盾式时，主析取范式为 0，主合取范式含有所有极大项；当命题公式为重言式时，主合取范式是 1，主析取范式含有所有极小项。
- 主析取范式，主合取范式：所有简单合取式都是极小项的析取范式称作主析取范式，所有简单析取式都是极大项的合取范式称作主合取范式。

定理

- 置换规则：设 $\Phi(A)$ 是含有公式 A 的命题公式， $\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中 A 的所有出现后得到的命题公式。若 $B \leftrightarrow A$ ，则 $\Phi(A) \leftrightarrow \Phi(B)$ 。
- 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项及其否定；一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项及其否定。
- 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式；一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。
- 任何命题公式都存在与之等值的析取范式和合取范式。事实上只需要下面几步就可以完成：
 - 利用蕴含表达式的等值等价式消去联结词 $\rightarrow, \leftrightarrow$
 - 利用德摩根律和双重否定律消去联结词 \neg
 - 利用分配律将含有 \vee 和 \wedge 的公式展开。

常用的等值式

- 分配律：

$$\begin{aligned}A \vee (B \wedge C) &\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\A \wedge (B \vee C) &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)\end{aligned}$$

- 双重否定律：

$$\neg \neg A \Leftrightarrow A$$

- 德摩根律：

$$\begin{aligned}\neg(A \vee B) &\Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B) \\ \neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)\end{aligned}$$

4. 蕴含表达式:

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow (\neg A) \vee B$$

5. 等值等价式:

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

6. 假言易位:

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

方法

1. 如何判断是等值式

- 真值表法: 直接判断 A 和 B 的真值是否始终相同。
- 等值演算法: 利用一些已知的等值式进行推算, 若能从 A 不断通过等值式的变形得到 B , 那么 A 和 B 是等值的。
- 主析取范式法: 如果两个命题的主析取范式是相同的, 则两个公式是等值的。

2. 如何判断不是等值式

- 真值表法: 列出两个命题变元的真值, 如果有不相等的, 则不是等值式。
- 观察法: 只要有一个赋值能使得两个命题公式的真值不同。如果需要, 可以将命题利用等值演算化简成容易判断真假的形式再观察。

3. 等值演算的用途:

- 判断命题公式是否等价
- 判断命题公式的类型: 命题公式是重言式的当且仅当 $A \Leftrightarrow 1$, 是矛盾式当且仅当 $A \Leftrightarrow 0$

4. 主析取范式和主合取范式的用途:

- 求公式的成真赋值和成假赋值:
 - 若主析取范式中含有 m_k , 则 k 的二进制表示对应的赋值为成真赋值。
 - 若主合取范式中含有 M_k , 则 k 的二进制表示对应的赋值为成假赋值。
- 判断公式的类型
 - 若主析取范式中含有所有的极小项, 那么该公式为重言式
 - 若主析取范式中含有至少一个项, 那么该公式为可满足式
 - 若主合取范式中含有所有的极大项, 那么该公式为矛盾式
- 利用主析取范式求主合取范式或者反之:
 - 只要认识到主析取范式中的极小项对应的是成真赋值, 而主合取范式中的极大项对应的是成假赋值, 就可以想到主析取范式和主合取范式中的项是互补的。例如含有 2 个文字的命题, 如果主析取范式为 $m_0 \vee m_3$ 那么主合取范式为 $M_1 \wedge M_2$
- 判断两个公式是否等值: 两个公式等值当且仅当主析取范式 (主合取范式) 相同。