函数的界

界的定义

设 f 和 g 是定义域为自然数集 $\mathbb{N}$ 上的函数

1. $f(n) = O(g(n))$:
   当存在正数 c 和 n_0 使得对一切 $n > n_0$ 有 $0 \leq f(n) \leq cg(n)$
2. $f(n) = \Omega(g(n))$:
   当存在正数 c 和 n_0 使得对一切 $n > n_0$ 有 $0 \leq cg(n) \leq f(n)$
3. $f(n) = o(g(n))$:
   对所有正数 c 存在 n_0 使得对一切 $n > n_0$ 有 $0 \leq f(n) < cg(n)$
4. $f(n) = \omega(g(n))$:
   对所有正数 c 存在 n_0 使得对一切 $n > n_0$ 有 $0 \leq cg(n) < f(n)$
5. $f(n) = \theta(g(n)) \leftrightarrow f(n) = O(g(n)) \;\; and \;\; f(n) = \Omega(g(n))$

Note: o 和 O 以及 ω 和 Ω 的区别在于 o 和 ω 的关系定义式中 f 和 g 的关系是 **严格** 大于或者 **严格** 小于的关系，而 O 和 Ω 对应的是大于等于或指小于等于。

事实上如果两个函数是 o 关系，那么一定可以判定为 O 关系，但是 O 关系却一般不能转换为 o 关系。可以认为 o 关系下两个函数的增长趋势的差距比 O 关系下的差距要大的多。

界的极限判断法

设 f 和 g 是定义域为自然数集 $\mathbb{N}$ 上的函数

1. 如果 $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$ 存在，那么 $f(n) = \theta(g(n))$
2. 如果 $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ 存在，那么 $f(n) = o(g(n))$
3. 如果 $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ 存在，那么 $f(n) = w(g(n))$

判定问题的复杂性类

- NC 算法：高度可并行的算法，复杂性可达到 $log(n)$
- $P - Complete$ ：时间复杂度函数是 $O(p(n))$ 的算法，其中 $p(n)$ 是 n 的多项式。
- $NP - Complete$: 多项式时间内不可判定但是可以验证的问题。
- $PSPACE$ ： 所用空间为多项式级别的问题。

一些特殊函数

- 阶乘 $n!$
  - stirling 公式：

$$n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1 + \theta(\frac{1}{n}))$$

  - 性质：
    公式一：

$$n! = o(n^n)$$

    公式二：

$$n! = \Omega(2^n)$$

    公式三：

$$log(n!) = \theta(nlog(n))$$

  - 证明公式三：图像直观分析法

$$log(n!) = \sum_{k=1}^{n} log(k) \geq \int_{1}^{n} log(x)dx = loge(nlnn - n + 1) = \Omega(nlogn)$$

$$log(n!) = \sum_{k=1}^{n} log(k) \leq \int_{2}^{n+1} log(x)dx = O(nlogn)$$

- 取整函数:
  - $$\lceil \frac{\lceil \frac{n}{a} \rceil}{b} \rceil = \lceil \frac{n}{ab} \rceil$$
    $$\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{b} \rfloor = \lfloor \frac{n}{ab} \rfloor$$
- 求和函数
  - $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = lnn + O(1)$$