

算分第十次作业参考答案

10.1

30% (近似比10%, 给出紧实例10%, 紧实例分析10%)

10.1 解 设顶点数为 n , 显然, $A(I) \leq n-1, OPT(I) \geq 1, r \leq n-1$.

给定紧实例: $G = \langle V, E \rangle, V = \{1, 2, \dots, n\}, E = \{(i, n) | 1 \leq i \leq n-1\}$,

如图 10.1 所示.

算法依次选择 $1, 2, \dots, n-1$. $A(I) = n-1$. 显然, $OPT(I) = 1$, 得

$$\frac{A(I)}{OPT(I)} = n-1$$

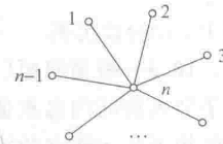


图 10.1 一个紧实例

10.3

30% (1的情况, 偶数的情况, 奇数的情况各10%)

10.3 证 当 $FF(I) = 1$ 时, 显然 $FF(I) = OPT(I)$. 下面设 $FF(I) > 1$. 记 $W = \sum_{i=1}^n w_i$. 因为任何两只箱子的重量之和大于 B , 因此, 当 $FF(I)$ 为偶数时, $W > \frac{B}{2} FF(I)$; 当 $FF(I)$ 为奇数时, 设最重的箱子的重量为 B_1 , 则有 $W > \frac{B}{2} (FF(I) - 1) + B_1 > \frac{B}{2} FF(I)$. 故总有 $W > \frac{B}{2} FF(I)$, 即 $FF(I) < \frac{2W}{B}$. 又显然 $OPT(I) \geq \frac{W}{B}$, 得证 $FF(I) < 2OPT(I)$.

10.4

40% (反证法10%, 构造双机调度到装箱问题的实例, 15%, 证明双机调度属于P推出P=NP, 15%)

10.4 证 假设 A 是装箱问题的多项式时间近似算法, 其近似比 $r < \frac{3}{2}$, 要证双机调度 $\in P$, 从而推出 $P = NP$.

任给双机调度的实例 I : n 个作业的加工时间 t_1, t_2, \dots, t_n , 截止时间 D . 构造对应的装箱问题的实例 I' : n 件物品的重量 t_1, t_2, \dots, t_n , 箱子的最大重量 D . 显然, I 是实例 $\Leftrightarrow OPT(I') \leq 2$. 又当 $OPT(I') \leq 2$ 时, $A(I') < \frac{3}{2} \times 2 = 3$. 由于 $A(I')$ 是整数, 必有 $A(I') \leq 2$. 当 $OPT(I') > 2$ 时, $A(I') \geq OPT(I') > 2$. 因此, I 是实例 $\Leftrightarrow A(I') \leq 2$.

根据上述性质, 如下构造双机调度的算法 B : 对任给的双机调度实例 I , n 个作业的加工时间 t_1, t_2, \dots, t_n 和截止时间为 D , 首先构造对应的装箱问题的实例 I' : n 件物品的重量 t_1, t_2, \dots, t_n 和箱子的最大重量 D , 然后对 I' 应用算法 A . 若 $A(I') \leq 2$, 则 B 输出“yes”; 否则 B 输出“no”. 由于 A 是多项式时间的, 所以 B 也是多项式时间的.