数学基础、递推方程的求解

施朱鸣

2023 年 3 月 3 日

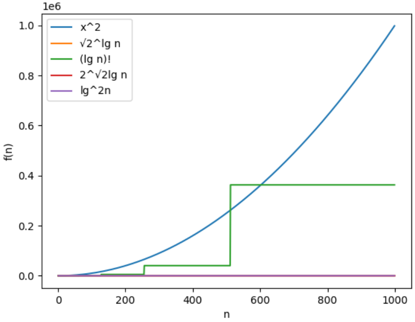
北京大学

Table of Contents

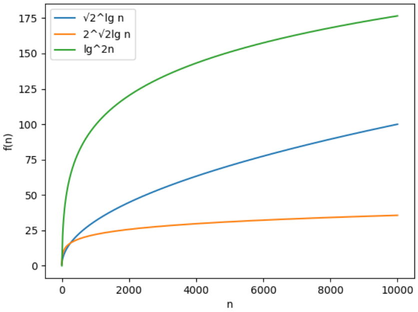
函数及其阶的估计

请将下列 5 个关于 n 的函数 $n^2, (\sqrt{2})^{\lg n}, (\lg n)!, 2^{\sqrt{2\lg n}}, \lg^2 n$ 按渐近的界由大到小排序, 使得 $g_1 = \Omega\left(g_2\right), g_2 = \Omega\left(g_3\right), \ldots, g_4 = \Omega\left(g_5\right)$ 。

直观感受函数增长



(a) 所有函数



(b) $(\sqrt{2})^{\lg n}, 2^{\sqrt{2\lg n}}, \lg^2 n$

函数及其阶的估计

$$n^2 = 2^{2\lg n}$$

$$\sqrt{2}^{\lg n} = 2^{(\lg n)/2}$$

$$(\lg n)! = \Omega\left(\left(\frac{\lg n}{e}\right)^{\lg n}\right)$$，根据 Stirling 公式

$$\lg^2 n = 2^{2\lg\lg n}$$

由 $\left(\frac{\lg n}{e}\right)^{\lg n} = \Omega\left(4^{\lg n}\right)$，　得$(\lg n)! = \Omega\left(n^2\right)$；

函数及其阶的估计

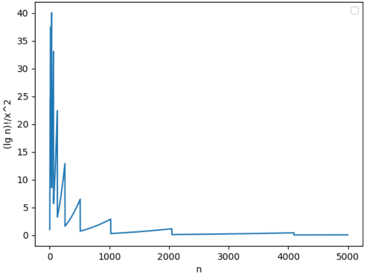


Figure: $(\lg n)!/n^2 \to 0$

从大到小排序 $(\lg n)!, n^2, \sqrt{2}^{\lg n}, 2^{\sqrt{2\lg n}}, \lg^2 n$

Table of Contents

主定理

设 a_____，b_____ 为常数，$f(n)$ 为函数，$T(n)$ 为__________，且

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

则有以下结果

- ____
- ____
- ____

生成函数

已知递归方程 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = -2,$ 使用生成函数求解 a_n 的递归方程。

生成函数

设 $f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 则 $f-5xf+6x^2f=(a_1-5a_0)\,x+a_0=-7x+1$

$$f=\frac{-7x+1}{6x^2-5x+1}=\frac{-7x+1}{(2x-1)(3x-1)}=\frac{5}{1-2x}-\frac{4}{1-3x}$$

$$=5\sum_{n\geq 0}(2x)^n-4\sum_{n\geq 0}(3x)^n=\sum_{n\geq 0}(5\times 2^n-4\times 3^n)\,x^n$$

故

$$a_n=5\times 2^n-4\times 3^n$$

数学基础、递推方程的求解

Thank you for listening!

Any questions?