# 图论

## 概念归纳

- 图：是有序二元组 $\langle V, E\rangle$ , 其中 $V$ 是顶点集， $E$ 是 $V$ 上有序积或无序积的有穷多重子集。
  - 无序积的元素中 $(b, a)$ 与 $(a, b)$ 完全相同。所以若 $E=\{(a, b)\}$ , 自然有 $(b, a) \in E$ 成立。
- 顶点数称作图的阶数，没有边的图称作零图，没有顶点的图称作空图。
- 相邻：
  - 顶点相邻指两点间有至少一条边相连；
  - 边相连在有向图和无向图中有不同的意思：在有向图中指两条边至少有一个公共顶点；在无向图中指其中一条边的终点是另一条边的起点
- 邻域：
  - 无向图：

    $$N_G(v)=\{u \mid (u, v) \in E, u \neq v\}$$

    其中注意邻域不包括自己，还要注意无向积元素的无向性
  - 有向图：指前驱元素和后继元素的并。
    - 前驱元素：

      $$\mathit{\Gamma}_D^{-}(v)=\{u \mid \langle u, v\rangle \in E, u \neq v\}$$

    - 后继元素：

      $$\mathit{\Gamma}_D^{+}(v)=\{u \mid \langle v, u\rangle \in E, u \neq v\}$$

- 闭邻域：

  $$\overline{N}_G(v)=N_G(v) \cup\{v\}$$

  包括自身。
- 图的二元运算都是先对边集 $E$ 进行运算后再确定与新的边集相关联的顶点。
- 度数：$(d_G(v), \delta, \Delta)$ 分别指顶点所连边的总关联数 （注意环的贡献为2） ，所有顶点的最小的度数，所有顶点的最大的度数。
- 握手定理：所有顶点的度数之和等于边数的两倍；所有顶点的入度之和与出度之和相等，都等于边数。
- 可图化的充分必要条件是所有顶点的度数之和为偶数。
- 可简单图化的必要条件是 $\Delta(G) \leq n-1$ , n 为图的阶数。
- 图同构：assume $G_1=\langle V_1, E_1\rangle, G_2=\langle V_2, E_2\rangle, \exists f,\ st. \forall(u_1, v_1) \in E_1,\ (f(u_1), f(v_1)) \in E_2$ AND they have the same frequency in both sets.
- 通路，简单通路，初级通路：
  - 首尾顶点相同的通路成为回路；
  - 简单通路是没有重复边的通路；
  - 初级通路是没有重复顶点的简单通路，也叫路径；初级回路也叫圈；
  - 长度相同的圈即为同构的；但定义意义下只要两个圈的标记序列不一样都为不同的环，哪怕是同一个环选取不同起点所得。
- 连通：两个顶点之间存在通路即为连通，最短的通路的长度成为两点之间的距离。
- 点割集：去除集合中的所有点后，图的连通类的数目增加，（打破连通类，但不消除连通类），但只删去其任何子集都不能改变图的连通类的数目。只有一个元素的点割集成为割点。
- 线割集：去除集合中的所有边后，图的连通类的数目增加，（打破连通类，但不消除连通类），但只删去其任何子集都不能改变图的连通类的数目。只有一个元素的线割集成为割线。
- 点连通度指最小的点割集的元素数目，线连通度指最小的线割集的元素的数目。
- 连通图的分类
  - 无向图：连通图、不连通图
  - 有向图：
    - 不连通图

        - 弱连通图：基图连通
        - 单向连通图：任何两点之间至少有一方能到达另一方
          有向图 D 是单向连接图当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的通路。
        - 强连通图：任何两点都能通向另一方
          有向图 D 是强连通图当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的回路。
- 二分图：指能将顶点集分为两个不相交的集合，使得任何一条边所关联的顶点都分处于两个集合内。
- 图的矩阵表示
    - 关联矩阵
    - 邻接矩阵
    - 可达矩阵

# 考点归纳

- 求图中 **通路** 的个数， **回路** 的个数。
    - 求邻接矩阵。求个元素的和即为通路的个数。
    - 求对角线上的元素的个数和，即为回路的个数。
- 求是否可以简单图化。
    - 若度数列的和不为偶数，必然不可图化。
    - 确定可图化时，通过尝试画出来判断是否为简单图。