Linear-Algebra Review

概念

- 酉性质：保二范数，即

$$||A\vec{x}||_2 = ||\vec{x}||_2$$

- 矩阵的零度：使得 $A\vec{x}=0$ 成立的向量 x 构成的空间的维数。

矩阵的秩

- 矩阵的行秩等于列秩。
  - 高斯消去法

- 矩阵 A^tA 的秩等于矩阵 A 的秩
  - 证明思路：转化为证明矩阵 A^tA 的零度和矩阵 A 的零度相等。事实上，若 $A\vec{x}=0$，则 $A^tA\vec{x}=A^t(A\vec{x})=0$，因此矩阵 A 的零度小于等于矩阵 A^tA 的零度；同时若 $A^tA\vec{x}=0$ 则 $\vec{x}^tA^tA\vec{x}=(A\vec{x})^t(A\vec{x})=0$ 则 $A\vec{x}=0$ 故矩阵 A 和矩阵 A^tA 的零度相等。

- 矩阵 A^2 的秩小于等于矩阵 A 的秩
  - 证明思路：和上一条性质的证明思路一样，不难证明矩阵 A^2 的零度大于等于矩阵 A 的零度。

特征值和特征向量

- 对应于 n 个不同特征值的 n 个特征向量必然是线性无关的。
- 一个对称矩阵的属于不同特征值的特征向量必然正交，因而属于某一个特征值的特征向量会张出一个子空间。
  - 证明思路：

$$\langle\alpha_1, A\alpha_2\rangle = \lambda_2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle = \alpha_1^tA\alpha_2 = (A\alpha_1)^t\alpha 2 = \langle A\alpha_1,\alpha_2\rangle = \lambda_1\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$$

$$\implies (\lambda_1-\lambda_2)\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle = 0$$

- 对称矩阵的特征值一定为实数。（实对称和复对称都成立）
  - 证明思路：

$$\bar{\alpha}^t\bar{A}^t\alpha = \bar{\alpha}^t\bar{\lambda}\alpha = \bar{\alpha}^tA\alpha = \bar{\alpha}^t\lambda\alpha$$

- 矩阵 A^tA 和矩阵 AA^t 有相同的特征值
  - 证明思路：设 $\vec{v}$ 是矩阵 A^tA 的属于特征值 λ 的特征向量，则:

$$A(A^tA\vec{v}) = A(\lambda\vec{v}) = \lambda(A\vec{v}) = (AA^t)(A\vec{v})$$

  所以 λ 也是矩阵 AA^t 的特征值。反之同理，事实上 $A^tA=A^t(A^t)^t$ 于是可以用同样的过程证明。

- 矩阵 A^tA 的特征值一定为非负实数。
  - 证明思路：特征值为实数已经在前面的性质中证明，设 $\vec{v}$ 是矩阵 A^tA 的属于特征值 λ 的特征向量，则:

$$(A\vec{v})^t(A\vec{v}) = \vec{v}^tA^tA\vec{v} = \lambda\vec{v}^t\vec{v}$$

  因为 $(A\vec{v})^t(A\vec{v})\geq 0$ 且 $\vec{v}^t\vec{v}\geq 0$ 故结论成立。

矩阵相似

- 性质
  - 相似矩阵有相同的特征值；

- $n\times n$ 矩阵可对角化当且仅当矩阵有 n 个线性无关的特征向量。

    - 证明思路：矩阵可对角化时，满足 $A = P^{-1}DP$ 的 P 的列向量就是特征向量，因为 P 是非奇异阵，所以特征向量线性无关。反之，以线性无关的特征向量作为列向量的矩阵 P 必然满足 $A = P^{-1}DP$, 其中 D 是由与特征向量对应的特征值作为对角线元素形成的矩阵。

- 具有 n 个不同的特征值的矩阵相似于对角线矩阵。

- 复数域上，任何矩阵都正交相似于上三角矩阵。
    - 证明思路：数学归纳法

- $n \times n$ 矩阵是对称的当且仅当存在正交矩阵 Q 和对角矩阵 D 满足 $A = QDQ^t$

- 复数域上，所有矩阵都相似于一个约当标准型。

正定矩阵

- 对称矩阵是正定矩阵当且仅当该矩阵所有的特征值都是正数。
    - 证明思路：对称矩阵一定正交相似于对角线矩阵，且对角线上的元素都是实数。