欧拉图与哈密顿图

欧拉图

- 基本概念：
  - 欧拉通路：经过所有边一次且仅一次走遍所有顶点的的通路；
  - 欧拉回路：起点和终点相同的欧拉通路；
  - 欧拉图：存在欧拉回路的图成为欧拉图；
  - 班欧拉图：存在欧拉通路但不存在欧拉回路的图称作半欧拉图；
- 判定定理：
  - 充要条件：
    - 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通图且 G 没有奇度顶点。
    - 无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 是连通图且 G 恰有两个奇度顶点。
    - 有向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是强连通图且 G 每个顶点的入度等于出度。
    - 有向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 是单向连通的且 G 恰有一个顶点的入度比出度大一，另一个顶点的出度比入度大一，其余定点的入度等于出度。
    - G 是非平凡的欧拉图当且仅当 G 是连通的且是若干个边不重的圈的并。

哈密顿图

- 基本概念：
  - 哈密顿通路：经过图中所有顶点一次且仅一次的通路称为哈密顿通路。
  - 哈密顿回路：经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称为哈密顿回路。
  - 具有哈密顿回路的图称为哈密顿图。
  - 具有哈密顿通路但不具有哈密顿回路的图称为半哈密顿图。
- 判定定理：
  设 $G=<V,E>$
  - 必要条件：
    - G 是哈密顿图且 $V_1 \subset V, V_1 \neq \emptyset$，则 $G-V_1$ 的连通分支数小于等于 $|V_1|$
    - G 是半哈密顿图则则 $G-V_1$ 的连通分支数小于等于 $|V_1|+1$
  - 充分条件：
    - G 是 n 阶无向简单图，如果对于 G 中任意不相邻的两顶点 u,v，均有 $d(u)+d(v) \geq n$，则 G 中存在哈密顿回路。
    - G 是 n 阶无向简单图，如果对于 G 中任意不相邻的两顶点 u,v，均有 $d(u)+d(v) \geq n-1$，则 G 中存在哈密顿通路。
- 证明思路
  - 证明图是哈密顿图
    - 直接找出一条路径
    - 利用任意两个顶点的度数之和大于等于顶点数。
  - 证明图不是哈密顿图
    - 挖点，证明去掉的点数小于形成的连通图的数目