多项式近似

离散最小二乘近似

- 基本思想:
  最小化

$$S=\sum_{i=0}^{n}(y_i-\sum_{k=0}^{m}(a_kx_i^k))^2$$

  只需让 $\partial S/\partial a_i=0,\quad i=0,1,\ldots,m$ 其中 $m<n-1$，于是:

$$\sum_{k=0}^{m}a_k\sum_{i=0}^{n}x_i^{k+j}=\sum_{i=0}^{n}y_ix_i^j$$

  其中 $j=0,1,\ldots,m$ 写成矩阵形式即为:

$$\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^n x_i^0 & \sum_{i=0}^n x_i^1 & \cdots & \sum_{i=0}^n x_i^m\\ \sum_{i=0}^n x_i^1 & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1}\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=0}^n x_i^{2m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^n y_ix_i^0\\ \sum_{i=0}^n y_ix_i^1\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^n y_ix_i^m\end{bmatrix}$$

连续最小二乘近似

- 基本思想:
  最小化

$$S=\int_a^b(f(x)-\sum_{k=0}^{m}(a_kx^k))^2dx$$

  只需让 $\partial S/\partial a_i=0,\quad i=0,1,\ldots,m$ 其中 $m<n-1$，于是:

$$\sum_{k=0}^{m}a_k\int_a^b x_i^{k+j}=\int_a^b f(x)x^j$$

  其中 $j=0,1,\ldots,n$ 写成矩阵形式即为:

$$\begin{bmatrix}\int_a^b x_i^0 & \int_a^b x_i^1 & \cdots & \int_a^b x_i^m\\ \int_a^b x_i^1 & \int_a^b x_i^2 & \cdots & \int_a^b x_i^{m+1}\\ \vdots\\ \int_a^b x_i^m & \int_a^b x_i^{m+1} & \cdots & \int_a^b x_i^{2m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\int_a^b y_ix_i^0\\ \int_a^b y_ix_i^1\\ \vdots\\ \int_a^b y_ix_i^m\end{bmatrix}$$

- 问题：方程条件差，难以求解

正交多项式基线性组合拟合函数

- 基本思想：考虑一组 n 阶多项式基 $\{\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ 其中 ϕ_i 为 i 阶多项式，则任何一个阶数小于等于 n 的多项式均可由这组多项式线性表出。 于是我们要求的多项式可以写成 $P_n(x)=\sum_0^n a_i\phi_i$ ，设权重函数为 $w(x)$，问题转换为求解

$$S=\int_a^b w(x)(f(x)-\sum a_i\phi_i)^2dx$$

  的最小值。同样对 a_i 求导可知:

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\int_a^b w(x)\phi_i\phi_jdx=\int_a^b w(x)f(x)\phi_jdx\quad\forall j\in\{0,1,\ldots,m\}$$

  如果 ϕ_i 满足:

$$\int_a^b w(x)\phi_i\phi_j = \begin{cases} \int_a^b w(x)\phi_i^2 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

则 a_i 可表达为:

$$\frac{\int_a^b w(x)f(x)\phi_i dx}{\int_a^b w(x)\phi_i^2 dx}$$

- Note:

$$w(x) \geq 0,\ \forall x \in D \text{ but } w(x) \not\equiv 0$$

如何获取一组正交基函数

- 基本思想：Gram-Schmidt 正交化：确定 ϕ_0 后，在所有阶数小于等于 n 的多项式组成的线性空间中，定义 ϕ_i, ϕ_j 的内积为：

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_a^b w(x)\phi_i\phi_j dx$$

  有递归方程：

$$\phi_n = x\phi_{n-1} - \frac{\langle x\phi_{n-1}, \phi_{n-1}\rangle}{\langle \phi_{n-1}, \phi_{n-1}\rangle}\phi_{n-1} - \frac{\langle x\phi_{n-1}, \phi_{n-2}\rangle}{\langle \phi_{n-2}, \phi_{n-2}\rangle}\phi_{n-2}$$

  则 $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ 为一组正交基函数。

几组特殊的基函数

- Legendre polynomials
  - 权函数:

$$w(x) = 1$$

  - $\phi_0 = 1$
  - 性质:
    - 所有高于 0 阶的多项式在 $[-1, 1]$ 上的积分恒等于 0 。
- Chebyshev Polynomials
  - 权函数:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

  - 表达式:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \quad \widetilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$$

  - 满足递推关系：

$$T(n+1) = 2xT(n) - T(n-1)$$

  - 具有性质:

$$max(\widetilde{T}_n(x)) \leq max(P_n(x)),\ \ \forall P_n(x) \text{ whose factor of } x^n \text{ is } 1$$

  - 应用:
    - 求出让 lagrange 插值多项式余项的最坏估计最小的插值点。（就是 $T_n(x)$ 的根）
    - 在引入的误差限最小的情况下，降低多项式的阶数。（不断减去与最高阶项相符的 $T_n(x)$ ）

最小二乘法三角多项式逼近

- 连续情形:
  - 用

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_n\cos(nx) + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

    逼近所求的函数

- 和前面讨论的基函数的情形一致，直接对各项系数求偏导数：

$$a_i = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(ix)dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ix)\cos(ix)dx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(ix)dx$$

$$b_i = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(ix)dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(ix)\sin(ix)dx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(ix)dx$$

- 离散情形：
  - 此时需要规定等间距取点:

$$x_j = -\pi + \frac{j}{m}\pi,\ j = 0, 1, \ldots, 2m-1$$

  此时需要利用一些性质：

$$\sum_{i=0}^{2m-1}\cos(nx_i) = \begin{cases} 0,\ \text{n is not multiply of 2m} \\ 2m,\ \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2m-1}\sin(nx_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{2m-1}\cos^2(nx_i) = \begin{cases} m,\ \text{n is not multiply of m} \\ 2m,\ \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2m-1}\sin^2(nx_i) = \begin{cases} m,\ \text{n is not multiply of m} \\ 0,\ \text{otherwise} \end{cases}$$

  - 与前面求离散情形的最小二乘法一致：

$$a_i = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} f(x_j)\cos(ix_j)$$

$$b_i = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} f(x_j)\sin(ix_j)$$

- 快速傅里叶变化
  - 应用情形：考虑用三角多项式构造插值函数，实则为阶数 $n = m$ 的最小二乘三角近似多项式。（考虑 sin 和 cos 的系数个数可知 n = m 时共有 2m 个未知数，对应 2m 个插值点。）
  - 表达式：依然采用前面离散形式时求出的系数表达式，对公式进行调整：

$$S_n(x) = \frac{a_0 + a_n\cos(nx)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

  - 采用递归的思想，在 m 等于 2^n时，每次跨越 m 对系数进行相加减。实际上，要求出 a_i 和 b_i, 直接用公式

$$a_i = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} f(x_j)\cos(ix_j)$$

$$b_i = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} f(x_j)\sin(ix_j)$$

  即可，但计算量较大，考虑新的变量

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} f(x_j)e^{ik(-\pi+\frac{j}{m}\pi)} = \frac{1}{m}e^{-ik\pi}\sum_{0}^{2m-1} f(x_j)e^{ik\frac{j}{m}\pi}$$

去掉前面的累加常数，得到

$$c_k = \sum_{j=0}^{2m-1} f(x_j)e^{ik\frac{j}{m}\pi}$$

这个数是直接可算的，只要算出了这个数，添上累加常数后得到的实部和虚部就是我们要的 a_n 和 b_n 了。这里只是用欧拉公式获得更简单的表达形式，并没有减少计算量。但是进一步观察可知：

$$c_k + c_{k+m} = \sum_{j=0}^{2m-1} f(x_j)e^{ik\frac{j}{m}\pi}(1+e^{ij\pi})$$

$$c_k - c_{k+m} = \sum_{j=0}^{2m-1} f(x_j)e^{ik\frac{j}{m}\pi}(1-e^{ij\pi})$$

因此前一个公式中其实只有偶数项有贡献，而后一个公式中只有奇数项有贡献，两个式子足以解出 c_k 和 c_{k+m} 。于是计算这两个系数所用的计算量件减半了。而式子的形式并不会发生变化：

$$c_k + c_{k+m} = \sum_{j=0}^{m-1} f(x_j)e^{ik\frac{j}{m/2}\pi} = \sum_{j=0}^{2\widetilde{m}-1} f(x_j)e^{ik(j/\widetilde{m})\pi}$$

, 其中 $\widetilde{m} = \frac{m}{2}$ ，只要 $\widetilde{m}$ 仍然为 2^p ，上述过程可不断进行，由此来达到减少计算量的目的。