概率统计 A 作业 Homework_06 (Lecture_PS04_2)　　2024.03.19

1、 设(X, Y, Z)的密度函数为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z), & 0\le x,y,z\le 2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试证明 X, Y, Z 两两独立，但不相互独立。

2、 在整数 0 至 9 中按下述两种方式依次任取两个数 X 和 Y：

1) 第一个数 X 放回后再抽第二个数 Y;
2) 第一个数 X 取出后不放回，接着抽第二个数 Y.

求在 $X=k$ (k =0, 1, …, 9)的条件下 Y 的条件概率分布.

3、 设(X, Y)的密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $f_{X|Y}(x|y)$和 $f_{Y|X}(y|x)$.

4、 设 $X\sim U(0, 1)$，当 $X = x\,(0<x<1)$ 时，$Y \sim U(x, 1)$，求当 $0<y<1$ 时，求 $f_{X|Y}(x|y)$.

5、 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，均服从参数为 p 的 0-1 分布。证明 $Z=X_1+X_2+\ldots+X_n$ 服从参数为 n 和 p 的二项分布。

6、 设随机变量 X, Y 相互独立，且 $X\sim B(n_1, p)$, $Y\sim B(n_2, p)$，证明 $X+Y\sim B(n_1+n_2, p)$。

7、 设随机变量 X, Y 相互独立，其密度函数分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

8、 设 X_1, Y_1 是一个概率空间上相互独立的随机变量，X_2, Y_2 是一个另一概率空间上相互独立的随机变量，已知 X_1, X_2 具有相同的概率密度函数，Y_1, Y_2 也具有相同的概率密度函数，证明 X_1+Y_1 和 X_2+Y_2（几乎处处）具有相同的概率密度函数。

9、 设随机变量 X, Y 相互独立，分别服从自由度为 k_1，k_2 的χ^2分布，即有：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{k_1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)}x^{\frac{k_1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{k_2}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)}y^{\frac{k_2}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

利用第 8 题结论，证明 $Z=X+Y$ 服从自由度为 k_1+k_2 的χ^2分布。

【可以不加证明地使用以下结论：

设 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ 是独立同分布的标准正态分布，则 $W=W_1+W_2+\ldots+W_k$ 服从自由度为 k 的χ^2分布。】

10、设随机变量 X, Y 相互独立，分别服从自由度为 k_1，k_2 的χ^2分布，概率密度如下:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{k_1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)}x^{\frac{k_1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{k_2}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)}y^{\frac{k_2}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

试证明：$F=\dfrac{X/k_1}{Y/k_2}$ 服从自由度为 k_1 和 k_2 的 F 分布，即 F 的密度函数为:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)}\left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}}z^{\frac{k_1}{2}-1}(1+\dfrac{k_1}{k_2}z)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

11、设随机变量 X, Y 相互独立，均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$. 试验证随机变量 $Z=(X^2+Y^2)^{1/2}$ 服从参数为的瑞利分布(Rayleigh)，即：

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\ge 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

12、设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，均服从威布尔分布：

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-(\frac{x}{\eta})^m}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

试证明随机变量 $Z=\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$仍服从威布尔分布。