组合数学

重要概念

- 设多元集 $S=\{n_1*a_1,n_2*a_2,...,n_k*a_k\}$
    - 从 S 中有序取出的 r 个元素称为多重集 S 的一个 r 排列。 r=n 的排列称为 S 的全排列。其中全排列数为:

    $$\frac{n!}{n_1n_2!\cdots n_k!}$$

    - 从 S 中无序取出的 r 个元素称为多重集 S 的一个 r 组合。

重要公式

- 组合数
    - $C(n,r)=\frac{n}{r}C(n-1,r-1)$
    - $C(n,r)=C(n,n-r)$
    - $C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$
- 二项式与组合恒等式
    - $$\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}=\binom{n+1}{k+1},\ n,k\in\mathbb{N}$$
    - $$\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$
    - $$\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$$
    - $$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$$
    - $$\sum k=0^nk^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$$

重要结论

- 集合 {1,2,...,n} 上的单调递增函数的个数：$\binom{2n-1}{n}$ （考虑非降路径）

重要思想

- 组合恒等式的证明思路
  - 已知恒等式带入并化简
  - 使用二项式定理比较相同项的系数，或者进行 **级数的求导或积分**
  - 数学归纳法
  - 组合分析法
- 一一对应法