多项式插值

多项式近似表示函数的存在性

- Weierstrass定理：设 $f(x)$ 为连续函数，则 $\forall\epsilon$ 存在多项式 $P(n)$ 使得

$$|P(n)-f|<\epsilon,\ x\in[a,b]$$

拉格朗日插值

- 基本思想：将函数写成一系列基函数的线性组合。已知 n+1 个节点，可以构造出至多 n 阶的多项式。
- n阶 Lagrange 插值多项式：

$$P(n)=\sum_{k=0}^{n}(\prod_{i=0;i\neq k}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)})f(x_k)$$

- 阶数越高，在插值点附近的误差越小，但在边界点出会出现大幅度震荡，在阶数趋于无穷大时，边界的误差也趋于无穷。
  - 解决方式：改变取点方式。
- 问题：为保证计算结果在精度允许范围内，可能需要增加点，但在增加点后，系数无法复用。
  - 解决方式：取部分点，递归求出高阶多项式。

$$P_n(x)=\frac{(x-x_i)P_{1,2,...,i-1,i+1,...,n}(x)-(x-x_j)P_{1,2,...,j-1,j+1,...,n}(x)}{x_j-x_i}$$

- 截断误差：

$$R(n)=\frac{f^{n+1}(\eta)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

- nyquist-shannon

牛顿差分多项式

- 基本公式：

$$P(n)=f[x_0]+\sum_{k=1}^{n}f[x_1,x_2,\ldots,x_k]\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)$$

- 当 x_i 等距取点时牛顿差分多项式可写成更简单的形式：
  设 $x_i=x_0+i*h$
  - 前向差分多项式：
    设 $x=x_0+s*h$

$$P_n(x)=f[x_0]+\sum_{k=1}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f[x_0]$$

  - 后向差分多项式：
    设 $x=x_n+s*h$

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f[x_n]$$

- 中项差分多项式：只需要将各点按 $x_0, x_{-1}, x_1, \ldots$ 和 $x_0, x_1, x_{-1}, \ldots$ 分别写出一般的牛顿插值多项式然后取平均即得：

$$\begin{aligned} P_{2m+1}(x) = f[x_0] + \frac{sh}{2}(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]) + s^2h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] + \cdots \\ + s^2(s^2-1)(s^2-4)\cdots(s^2-(m-1)^2)h^{2m} f[x_{-m}, \ldots, x_m]) \\ + \frac{s^2(s^2-1)\cdots(s^2-m^2)h^{2m+1}}{2}(f[x_{-m-1}, \ldots, x_m] + f[x_{-m}, \ldots, x_{m+1}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2m}(x) = f[x_0] + \frac{sh}{2}(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]) + s^2h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] + \cdots \\ + s^2(s^2-1)(s^2-4)\cdots(s^2-(m-1)^2)h^{2m} f[x_{-m}, \ldots, x_m]) \end{aligned}$$

Hermite 插值多项式

- 基本思路：结合 Langrange 和 Taylor 多项式的特点，构造在给定点处不仅函数值相等，一阶导数也相等的多项式。
- 两种表述形式：
  - 利用 Langrange 插值多项式的系数：
    设 $L_{n,j}(x)$ 为 n 阶 Langrange 多项式第 j 项的系数，满足约束 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 处函数值和导数均相等 则：

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)(1 - 2(x - x_j)L_{n,j}^{'}(x_j))L_{n,j}^2(x) + \sum_{j=0}^{n} f^{'}(x_j)(x - x_j)L_{n,j}^2(x)$$

  - 利用差商：
    设 $z_0 = z_1 = x_0, z_2 = z_3 = x_1, \cdots$ 且 $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f^{'}(x_i)$, 则：

$$P_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, z_1, \ldots, z_k](x - z_0)(x - z_1)\cdots(x - z_{k-1})$$

cubic spline interpolation

- 基本思想：Langrange 插值多项式在端点处震荡严重，为了解决这个问题，试图将曲线分成几个部分，每一部分分别用一条曲线近似。但是新问题是我们希望不同的曲线在连接处能表现为光滑可导。于是想到了在插值点上导数也相等的插值函数 -- Hermite 插值函数。是否可以在每一段上都用 Hermite 来近似呢？麻烦在于我们需要知道函数在每个点的导数信息，这并不容易。然后我们来到了 cubic spline -- 不需要知道导数信息也能让连接处光滑的插值函数。
- 基本公式：
  设已知点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 处的函数值，在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上，定义函数 $S_i = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ ，于是只需求解 $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, 2\cdots, n$ 即可。并有约束条件：
  - $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \quad i = 0, 1, \cdots, n-2$
    $S_0(x_0) = f(x_0) \quad S_{n-1}(x_n) = f(x_n)$
  - $S_i^{'}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{'}(x_{i+1}) \quad i = 0, 1, \ldots, n-2$
  - $S_i^{''}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{''}(x_{i+1}) \quad i = 0, 1, \ldots, n-2$
  - $natural\ spline: \ S_0^{''}(x_0) = 0 \quad S_{n-1}^{''}(x_n) = 0$
    $clamped\ spline: \ S_0{'}(x_0) = f^{'}(x_0) \quad S_{n-1}^{'}(x_n) = f^{'}(x_n)$