非线性方程组

迭代法

- 基本思路:
  - 考虑迭代函数:

$$G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$
$$\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\to(g_1(\vec{x}),g_2(\vec{x}),\dots,g_n(\vec{x}))$$

  - 满足自身映射、连续函数，则可保证存在不动点;
  - 满足对每个自变量的偏导数小于 $k/n\ (k<1)$,即有不动点唯一且可以区间内任意一点为起始点进行迭代。
- 重要结论：n 次迭代后，有:

$$\|\vec{x}_n-p\|<\frac{k^n}{1-k}\|\vec{x}_1-\vec{x}_0\|$$

牛顿法

- 基本思路:
  - 试图找出矩阵 A 使得:

$$G(\vec{x})=\vec{x}-A(f_1(\vec{x}),\dots,f_n(\vec{x}))^T$$

    对 $\vec{x}$ 的一阶偏导数为0。
  - 直接暴力计算得知:

$$A=J^{-1}(x)$$

- 是否可以避免求解 A^{-1} 以减少计算量？（类似非线性方程的割线法）
  - Broyden 方法:

$$A_i=A_{i-1}+\frac{y_i-A_{i-1}s_i}{||s_i||_2^2}s_i^t$$

    其中:

$$y_i=F(\vec{x}^{(i)})-F(\vec{x}^{(i-1)}),\ \ s_i=\vec{x}^{(i)}-\vec{x}^{(i-1)},\ \ A_i=A(\vec{x}^{(i)})$$

  - Shermon-Morrison 公式:

$$(A+xy^t)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}xy^tA^{-1}}{1+y^tA^{-1}x}$$

    于是:

$$A_i^{-1}=A_{i-1}^{-1}+\frac{(s_i-A_{i-1}^{-1}y_i)s_i^tA_{i-1}^{-1}}{s_i^tA_{i-1}^{-1}y_i}$$

梯度下降法

- 基本思路：将求解的过程转换为求解多元函数极值的问题。
- 重要过程:
  令:

$$G(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}f_i^2(\vec{x})$$

  求该函数的极小值:

$$\vec{x}_{n+1}=\vec{x}_n-\alpha\nabla G(\vec{x}_n)$$

如何选择合适的步长 α ?

- 牛顿插值法: 选取 $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$, 其中 $\alpha_2=\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}$, $G(\vec{x}_n,\alpha_3)<G(\vec{x}_n,\alpha_1)$, 构造二阶插值多项式，并求导求出最佳的 α 。
- 泰勒展开：将函数在 $\vec{x}_n$处展开：

$$G(\vec{x}_n+\Delta\vec{x})-G(\vec{x}_n)=\nabla G(\vec{x}_n)^T\cdot\Delta\vec{x}+\frac{1}{2}\Delta\vec{x}^T\cdot H(\vec{x}_n)\cdot\Delta\vec{x}$$

对 $\Delta\vec{x}$ 求导求出最佳变化量：

$$\Delta\vec{x}=-H^{-1}(\vec{x}_n)\nabla G(\vec{x}_n)$$

Note：当 $H(\vec{x}_n)$ 近似为奇异矩阵时，会出现步长很大的情况，这时可以考虑加上抑制因子：

$$\Delta\vec{x}=-\gamma H^{-1}(\vec{x}_n)\nabla G(\vec{x}_n)$$

其中 γ 的选取方式和之前在最速下降法中求 α 的方式基本一致。

同伦延拓法

- 基本思想：

$$G:[0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$
$$G(\lambda,X)=\lambda F(X)+(1-\lambda)(F(X)-F(X(0)))$$

当 λ 为 0 时，零点为初值，当 λ 为 1 时，零点为所求向量。将解 X 的过程转换为求解函数 $X(\lambda)$ 的过程。

- 重要过程：
对 λ 求导：

$$\frac{dF}{dX}\cdot X^{'}(\lambda)+F(X(0))=0$$

即：

$$X^{'}(\lambda)=-J^{-1}(X)F(X(0))$$

剩下只需求解这个微分方程即可。（Runge-Kutta）