递推方程与生成函数

常系数线性递推方程

- 解法：齐次通解 + 非齐次特解
- 齐次通解：
  - 先求特征方程的根，对于方程

    $$T_n + a_1T_{n-1} + \cdots + a_kT_{n-k} = f(n)$$

    特征方程即为

    $$x^k + a_1x^{k-1} + \cdots a_k = 0$$

  - 设根为

    $$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$$

    - 若无重根，则解为

      $$c_0\alpha_0^n + c_1\alpha_1^n + \cdots + c_k\alpha_k^n$$

    - 若有重根，设 α_i 为 r_i 重根，则将 r_i 个 α_i 替换为 $\alpha_i, n\alpha_i, \ldots, n^{r_i-1}\alpha_i$ ，重新利用上一个公式即可

非常系数线性递推方程

- 换元法：用于系数是常数，但迭代方程的变量不是常数差值的情形，如 $T(n) + cT(n/2) = f(n)$
- 迭代法，用于各种情形，有时要化简后迭代。
- 作差法，用于递推公式表现为与前面多项（所有项）相关的情形，如 $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} c_iT(i)$

（一般）生成函数

- 基本思想：设所求序列为 $\{a_n\}$，构造多项式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ ，记作原序列的生成函数。将该多项式化为简单的表达形式（通常为 $(x+y)^\alpha$ ），再将其展开（一般利用牛顿二项式系数）可以求出各项的系数。
- 具体操作步骤
  - 根据实际问题写出生成函数，使 $\{a_n\}$ 恰好对应到各项的系数，这一步需要自己构造，没有一般的方法。
  - 用某种公式将生成函数化成简单的形式。（如等比数列求和公式）
  - 利用牛顿二项式系数展开

    $$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

    Note: 有用的公式：

    $$\binom{-\alpha}{n} = \frac{-\alpha(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^n\binom{\alpha+n-1}{n}$$

    得到：

    $$(x+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^ny^{\alpha-n}$$

    注意求和号的上下限。
  - 对应项的系数就是要的结果。
- 可以解决哪些问题
  - **Catalan 数的通项**
    - 迭代方程

      $$\begin{cases} h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_kh_{n-k} \quad (n \geq 2) \\ h_1 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

        - 求解过程：设生成函数为 $T_n(x)$，则 $T_n^2(x) = T_n(x) - x$，求解该一元二次方程的根后再展开即可。
    - **求多重集 $\{k_1 * a_1, k_2 * a_2, \ldots, k_n * a_n\}$ 的 r 组合数（实际上就是将 r 个相同的球分到 n 个不同的盒子里面）**
        - 求解过程：生成函数为：

$$(1+y+y^2+\cdots+y^{k_1})(1+y+\cdots+y^{k_2})\cdots(1+y+\cdots+y^{k_n})$$

          可以化简为：

$$\frac{(1-y^{k_1+1})\cdots(1-y^{k_n+1})}{(1-y)^n}$$

          再求出其中各项的系数即可（事实上，实际操作中可以不用化简直接从最初的式子暴力看出要求的系数，在没有 k_i 的限制或限制条件很少时，可以得到简单的化简形式 $1/(1-y)^n$ 这个时候考虑化简后展开。）
    - **求不定方程的解的个数**
        - 求解过程：与求多重集的 r 组合数思路完全一致，考虑到变量取值范围的约束可以写出对应的方程。如设不定方程为 $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = r$，其中 $b_i \le x_i \le c_i$，则生成函数为：

$$(y^{a_0b_0} + y^{a_0(b_0+1)} + \cdots y^{a_0c_0})\cdots(y^{a_nb_n} + \cdots + y^{a_nc_n})$$

    - **正整数拆分**
      设待拆分的正整数为 m
        - 无序可重复拆分
            - 考虑拆分结果中 1 有多少个， 2 有多少个，⋯， m 有多少个，于是转换为求解不定方程 $1 * x_1 + 2 * x_2 + \cdots m * x_m = m$ 的解的个数。
            - 求解过程：直接利用求不定方程解的个数的方法
        - 无序不重复拆分
            - 对于不定方程的变量取值范围作出限制，只能为 0 或 1
            - 求解过程：利用求带限制的不定方程的解的个数的方法。
        - 有序可重复拆分
            - 求解思路：直接考虑组合方式求解，若只分成一份，则个数为 1 ，若分成两份，则个数为 C_{m-1}^1, 类似的，若分成 n 份，则个数为 C_{m-1}^{n-1} ,对各种情况求和可得总情况数为 2^{m-1} 。
        - 有序不重复拆分
            - 求解思路：先求无序不重复拆分的数目，对于拆分成 n 组的情况，考虑其全排列情形，将所有 n 值对应的情形总数相加。

指数生成函数

- 定义：对于序列 $\{a_n\}$，其指数生成函数是：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

  如 $P(m,n)$ 的指数生成函数是 $(1+x)^m$
- 可以解决哪些问题
    - **多重集的 r 排列问题**
      设多重集为 $\{k_1 * a_1, k_2 * a_2, \ldots, k_n * a_n\}$
        - 求解过程：生成函数为

$$(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{k_1}}{k_1!})\cdots(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_k}}{n_k!})$$

Stirling 数

- 第一类 Stirling 数
    - 来源：$x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 的第 r 项的系数记作 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ ，称为第一类 Stirling 数
    - 递推公式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} \quad (n > r \ge 1) \\ \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)! \end{cases}$$

    - 性质
        - $$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$$

        - $$\left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix}\right] = \frac{n(n-1)}{2}$$
        - $$\sum_{r=1}^{n}\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right] = n!$$

- 第二类 Stirling 数
    - 来源：将 n 个不同的球恰好放到 r 个相同的盒子里面的方法数。记作$\left\{\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right\}$
    - 递推公式

$$\begin{cases} \left\{\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix}\right\} + r\left\{\begin{matrix} n-1 \\ r \end{matrix}\right\} \\ \left\{\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right\} = 0 \quad \left\{\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right\} = 1 \end{cases}$$

放球问题总结

设有 n 个球，m 个盒子；

球是否有区别	盒子是否有区别	是否有空盒	模型	方案计数
有	有	有	选取	m^n
有	有	无	第二类 Stirling数	$m!\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}$
有	无	有	第二类 Stirling数	$\sum_{r=1}^{n}\left\{\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right\}$
有	无	无	第二类 Stirling数	$\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}$
无	有	有	直接组合计数	C_{n+m-1}^{m-1}
无	有	无	直接组合计数	C_{n-1}^{m-1}
无	无	有	不定方程	生成函数 $\frac{1}{(1-y)\cdots(1-y^m)}$
无	无	无	不定方程	生成函数 $\frac{y^m}{(1-y)\cdots(1-y^m)}$