线性规划

标准形

- 定义：称线性规划

$$
\begin{aligned}
min \ \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.t. \ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ \ i = 1, 2, \cdots, m \\
x_j \ge 0 \ \ j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

为标准形。
- 将一般形式转化为标准形：
  1. 将 $max \ \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 替换为 $min \ \ z = \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j$
  2. 将不等式 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ 替换为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i$ 并添加非负约束 $y_i \ge 0$，称新变量 y_i 为松弛变量。
  3. 将不等式 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$ 替换为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i = b_i$ 并添加非负约束 $y_i \ge 0$，称新变量 y_i 为剩余变量。
  4. 把每一个自由变量 x_j 替换为 $x_j^{'} - x_j^{''}$ 且添加两个非负约束 $x_j^{'} \ge 0, \ \ x_j^{''} \ge 0$

单纯形法

基本思想

通过引入松弛变量和剩余变量，我们可以很容易的找到基本可行解。但是想要最小化目标函数，我们需要想办法让目标函数值减小，也就是通过调整解向量，让目标函数的值和当前的值之差为负，即

$$
\begin{aligned}
&c^T x - c_B^T x_B \le 0 \\
\Rightarrow &c^T x - c_B^T B^{-1} b \le 0 \\
\Rightarrow &c^T x - c_B^T B^{-1} A x \le 0 \\
\Rightarrow &(c^T - c_B^T B^{-1} A) x \le 0
\end{aligned}
$$

其中 B 为当前选定的可行基构成的矩阵，c_B 为与当前可行基对应的 c 中的系数，x_B 为与当前可行基对应的 x 中的系数。

容易看出如果 $c^T - c_B^T B^{-1} A \ge 0$，这个差值（$c^T x - c_B^T x_B$）不可能小于 0，也就意味着我们已经找到了最优解。设 $c^T - c_B^T B^{-1} A = \{\lambda_j\}$ 如果存在 $\lambda_j < 0$ 则有可能通过调整基向量使得目标函数值减小。

最简单的想法就是通过贪心的使 x_j 也就是与这个小于 0 的 λ_j 对应的 x 最大，从而使目标函数值减少最多。但 x_j 可以取到的最大值受到所有非负约束的限制，因此我们通过观察 $Ax = b$ 调整 x_j 使得所有元素仍保持非负的情况下 x_j 最大。

这个过程是通过在 $B^{-1}Ax = B^{-1}b$ 中尝试增大 x_j 的值而保持其他原来的非基变量的值仍然为 0 实现的。

令 $B^{-1}A$ 为 $\{\alpha_{ij}\}$，$B^{-1}b$ 为 $\{\beta_{ij}\}$ 则显然原来的基变量对应的 $\{\alpha_{ij}\}$ 中的列构成单位矩阵。

- 如果所有 $\alpha_{kj}, \ \ k = 1, 2, ...$ 都小于 0，则增大 x_j 时只需要对应增大单位矩阵第 k 行对应的 x，不会出现有元素小于 0 的情况，因此无论 x_j 多大，总可以找到可行解，此时没有不存在最优解。
- 如果存在 $\alpha_{kj} > 0$ 则增大 x_j 的同时，单位矩阵第 k 行对应的 x 需要减小，极端情况下，当 $x_j = \beta_k / \alpha_{kj}$ 时，这个 x 下降为 0；此时 x_j 不能继续增大。

综上，我们找到 $min\{\beta_k/\alpha_{kj}\}$ 就是 x_j 所能取到的最大值。此时

$$c^Tx - c_B^Tx_B = \lambda_j \cdot \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}}$$

即实现了目标函数值的下降。

不断重复这个过程，就是单纯形法的核心。

基本步骤

1. 确定初始基本可行解（一般是通过在每个公式中引入松弛变量和剩余变量，并以引入的这个单位矩阵的列向量作为最初的基向量）

2. 检查当前的基本可行解，若是最优解或者无最优解，计算结束；否则进行基变换，用一个非基向量替换一个基向量，得到一个新的可行基和新的基本可行解，且使目标函数值下降。

3. 重复步骤 2 直到找到最优解。

对偶形

- 定义：设线性规划

$$\begin{aligned} max \;\; & c^Tx \\ s.t. \;\; & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned} \tag{1}$$

  和线性规划

$$\begin{aligned} min \;\; & b^Ty \\ s.t. \;\; & A^Ty \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned} \tag{2}$$

  称公式 2 是公式 1 的对偶线性规划，称公式 1 为原始线性规划。

对偶规划与原始规划的联系

1. 设 x 是原始规划的可行解，y 是对偶规划的可行解，则恒有：

$$c^Tx \le b^Ty$$

   - 证明：

$$c^Tx \le (A^Ty)^Tx = y^T(Ax) \le y^Tc = c^Ty$$

2. 如果 x 和 y 分别是原始规划和对偶规划的可行解，且 $c^Tx = b^Ty$，则 x 和 y 分别是原始规划和对偶规划的最优解。
   - 证明：这是性质 1 的直接推论。

3. 如果原始规划有最优解，则对偶规划也有最优解，且他们的最优值相等。

整数线性规划的分支限界算法

- 基本思想：如果线性规划的最优解就是整数，那自然这个解也是整数线性规划的最优解；但是如果不是整数，比如 $x = x_0$ 不是整数，则可以添加约束条件 $x \le \lfloor x_0 \rfloor$ 或者 $x \ge \lceil x_0 \rceil$ 转化为两个子线性规划问题，分别求解这两个子线性规划直到找到整数解。
  同时这里可以应用剪枝的想法，因为子线性规划问题的解所对应的目标函数值不可能超过原线性规划的解（即可能为分数的解）的值，因此当原线性规划的解的目标函数值小于已知可行解的目标函数值时就不应继续分支为子线性规划问题了。