随机变量的条件分布

二维离散随机变量的条件概率分布

- 定义：设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布

  $$P(X=x_i,Y=y_i)=p_{ij},\ \ i,j=1,2,\cdots$$

  若 $p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}>0$ 则称

  $$\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}=P(Y=y_j|X=x_i),\ \ j=1,2,\cdots$$

  为在 $X=x_i$ 的条件下，Y 的概率分布。类似的，

  $$\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=P(X=x_i|Y=y_j),\ \ i=1,2\cdots$$

  称为在$Y=y_j$ 的条件下，$X=x_i$ 的概率分布。

- 性质
  NOTE: 考虑最初的乘法公式

  $$P(AB)=P(A|B)P(B)$$

  这个公式可能是基于两个不相关的事件 A 和 B，但是二维随机变量 (X,Y) 是来自于同一个事件的不同映射。
  1. 类似于乘法公式：

  $$\begin{aligned}&P((X,Y)=(x_i,y_j))\\=&P(X=x_i|Y=y_j)\cdot P(Y=y_j)\\=&P(Y=y_j|X=x_i)\cdot P(X=x_i)\end{aligned}$$

  2. 类似于全概率公式：

  $$\begin{aligned}P(X=x_i)&=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=\sum_{j=1}^{+\infty}P(X=x_i,Y=y_j)\\&=\sum_{j=1}^{+\infty}P(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_j)\\P(Y=y_i)&=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}=\sum_{i=1}^{+\infty}P(X=x_i,Y=y_j)\\&=\sum_{i=1}^{+\infty}P(Y=y_j|X=x_i)P(X=x_j)\end{aligned}$$

一般二维随机变量的条件分布函数

- 定义：二维随机变量 (X,Y)，对固定的 y，设对任意的 $\epsilon>0$，$P(y-\epsilon<Y\leq y+\epsilon)>0$，若

  $$\lim_{\epsilon\to0^+}P\{X\leq\epsilon|y-\epsilon<Y\leq y+\epsilon\},\ \ -\infty<x\leq+\infty$$

  存在，则称其为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件分布函数，记作 $F_{X|Y}(x|y)$。

二维连续随机变量的条件分布密度

- 定义：设 (X,Y) 为连续型，其概率分布密度为 $f(x,y)$，对固定的 y，边缘密度 $f_Y(v)>0$ 且在 $v=y$ c处连续，则在 $Y=y$ 条件下 X 的条件分布密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\quad -\infty<x<+\infty$$

类似的，设 $f_X(x)>0$，在 $X=x$ 条件下 Y 的条件分布密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad -\infty<y<+\infty$$

- 性质：
  1. 乘法公式

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f_X(x)f_{Y|X}(y|x),\quad f_X(x)>0\\&=f_Y(y)f_{X|Y}(x|y),\quad f_Y(y)>0\end{aligned}$$

  2. 全概率公式

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy\end{aligned}$$

  3. Bayes 公式

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}+\infty f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx}$$

二维随机变量函数的分布

求法

1. 当 (X,Y) 为离散随机变量是，Z 也离散，这时采用分布律法

$$Z=z_k=g(x_{i_k},y_{j_k})$$
$$P(Z=z_k)=\sum_{g(x_{i_k},y_{j_k})}P(X=x_{i_k},Y=y_{j_k}),\quad k=1,2,\cdots$$

2. 当 (X,Y) 为连续随机变量时，用分布函数法

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)\\&=\iint_{D_z}f(x,y)dxdy\end{aligned}$$

其中 $D_z:\{(x,y)|g(x,y)\le z\}$

常见二维随机变量函数的分布

1. 和的分布：$Z=X+Y$
   设 (X,Y) 的联合分布密度是 $f(x,y)$，则：

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx \quad -\infty < z < +\infty \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy \quad -\infty < z < +\infty
\end{aligned}
$$

若 X, Y 相互独立，则：

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad -\infty < z < +\infty \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \quad -\infty < z < +\infty
\end{aligned}
$$

2. 线性组合：$Z = aX + bY + c$：

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \frac{z-ax-c}{b})dx \quad -\infty < z < +\infty \\
&= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{z-by-c}{b}, y)dx \quad -\infty < z < +\infty
\end{aligned}
$$

3. 利用坐标变换
   我们首先构造一个新的二维随机变量

$$
\begin{cases} z = g(x,y) \\ u = r(x,y) \end{cases}
$$

   其中 $g(x,y)$， $r(x,y)$ 具有唯一的反函数

$$
\begin{cases} x = h(z,u) \\ y = s(z,u) \end{cases}
$$

   记

$$
J(z,u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial u} \end{vmatrix}
$$

   则

$$
f_{ZU}(z,u) = f_{XY}(h(z,u), s(z,u))|J|
$$

4. 极值函数的分布：（极大值，极小值函数）
   - 设极大值为 M ，则

$$
\begin{aligned}
F_M(u) &= P(max(X,Y) \le u) \\
&= P(X \le u,\ \ Y \le u)
\end{aligned}
$$

   - 设极小值为 m ，则

$$
\begin{aligned}
F_M(u) &= P(min(X,Y) \le v) \\
&= 1 - P(min(X,Y) > v) \\
&= 1 - P(X > v,\ Y > v)
\end{aligned}
$$