平面图

定义

能画在平面上，且任何两条边都不相交的无向图称为平面图。

重要定理

- 平面图的每个面的度数之和为边数的2倍；
- 极大平面图是连通图且没有桥或者割点；
- 平面图是极大平面图的充分必要条件是每个面的度数均为3；
- 有 k 个连通分支的平面图的顶点数 n, 边数 m, 面数 r, 之间满足关系：

$$n - m + r = k + 1$$

- 对于一般的简单平面图 $(n \geq 3)$ ：

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2) \leq 3n-6$$

- 对于极大平面图 $(n \geq 3)$ ：

$$m = 3n - 6$$

判定

- 判断是否为平面图：
  直接尝试画出平面嵌入
- 判断是否为非平面图
  - 利用定理：对于每个面的度数都大于 l(l>3) 的平面图，有：

    $$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

    由此可判断 K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是平面图。
  - G 是平面图当且仅当 G 中不存在与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图
  - G 是平面图当且仅当 G 中不存在可以收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。
- 判断是否为极大平面图
  - 看每个面的度数是否为 3 ;
  - 看是否满足：

    $$m = 3n - 6$$

对偶图

- 性质
  - 对偶图是连通的，且是平面嵌入
  - 对偶图 G* 中的环对应原图 G 中的桥，G 中的桥对应 G* 中的环
  - 同一个平面图的不同平面嵌入对应的对偶图可能不同构
- G 与 G* 的关系
  设 G 的连通分支数为 k
  - $n^* = r$
  - $m^* = m$
  - $r^* = n - k + 1$