

命题逻辑推理理论

定义

- 推理，前提，结论：推理是从前提推导出结论的思维过程，而前提是已知的命题公式的集合，结论是从前提出发应用推理规则推导出的命题公式。
 - 设 A_1, A_2, \dots, A_k 和 B 都是命题公式，若对于 A_1, A_2, \dots, A_k 和 B 中出现的命题变项的任意一组赋值，或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为假，或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为真时 B 也为真，则称由前提 A_1, A_2, \dots, A_k 推导出结论 B 的推理是正确的或者说有效的，并称 B 为有效的结论。
 - 前提是一个有限的命题公式集合，由前提推导出结论的推理是否正确与诸前提的排列顺序无关。设前提为 T 则由 T 推导出 B 的推理记作 $T \vdash B$ 。若推理是正确的，则记为 $T \models B$ ，否则记为 $T \not\models B$ 。称 $T \vdash B$ 为推理的形式结构。
- 证明：证明是一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个公式或者是前提已知，或者是由前面的公式应用推理规则得到的结论。
- 一个形式系统 I 由下面四个部分组成：
 - 非空的字母表 $A(I)$
 - $A(I)$ 中的符号构造的合取公式集 $E(I)$
 - $E(I)$ 中的一些特殊的公式组成的公理集 $A_x(I)$
 - 推理规则集 $R(I)$其中 $\langle A(I), E(I) \rangle$ 是 I 的形式语言系统，而 $\langle A_x(I), R(I) \rangle$ 是 I 的形式演算系统。
- 自然推理系统和公理推理系统：
 - 自然推理系统是从任意给定的前提出发，按照系统中的推理规则进行推理演算，最后得到的命题公式是推理的结论（它是有效的，不一定是重言式。）
 - 公理推理系统是从若干条给定的公理出发，应用系统中的推理规则进行推理演算，得到的结论是系统中的重言式，称作系统中的定理。
- 自然推理系统定义为：
 - 字母表：
 - 命题变项符号： $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i$
 - 联结词符号： $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
 - 括号与逗号
 - 合式公式：命题变项符号和连接词，括号有限次组合形成的公式。
 - 推理规则：
 - 前提引入规则：在证明的任何步骤都可以引入前提。
 - 结论引入规则：在证明的任何步骤所得到的结论都可以作为后继证明的前提。
 - 置换规则：在证明的任何步骤，命题公式中的子公式都可以用等值的公式置换，得到公式序列中的又一个公式。
 - 由推理定律和结论引入规则可以导出的推理规则：如由假言推理定律可以知道 B 是 $(A \rightarrow B) \wedge A$ 的有效结论等。

常用的推理定律

- 化简律：

$$(A \wedge B) \Rightarrow A$$

- 假言推理：

$$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

- 拒取式：

$$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$

4. 析取三段论：

$$(A \vee B) \wedge (\neg B) \Rightarrow A$$

5. 假言三段论：

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

6. 等价三段论：

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

7. 构造性二难：

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$$

定理

1. 命题公式 A_1, A_2, \dots, A_k 推导出 B 的推理正确当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$ 为重言式。将蕴含式为重言式的关系记作 \Rightarrow 。

方法

1. 如何判断一个推理是否正确：

- 该命题等价于判断一个蕴含式是否为重言式；
- 利用真值表法。
- 利用等值演算法，若蕴含式等价于 1，则为重言式。
- 利用主析取范式法：若主析取范式中包含所有的极小项，则该蕴含式为重言式，也即推理正确。

2. 常见的自然推理方法：

- 附加前提法：当结论是一个蕴含式时，可以将蕴含式的前件作为条件，将后件作为结论。得出的新的推理的正确性和原推理的正确性是相同的。事实上这两个推理对应的蕴含式是等值的。
- 归谬法：将结论的否定作为条件引入前提，如果新前提是矛盾式，那么说明原推理正确。