选择题

3. 有穷集 A,B,C 互不相交，|A|=2019，|B|=12，|C|=31。以下集合基数最大的是（ ）

(A) $(A\rightarrow B)\rightarrow C$ (B) $(A\times B)\rightarrow C$ (C) $(A\rightarrow B)\times(A\rightarrow C)$ (D) $A\rightarrow(B\rightarrow C)$ (E) $A\rightarrow(B\times C)$

10. 以下关系成立的是（ ）（A）$\aleph^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\times\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph$

（B）$2^{\aleph_0}=\aleph<\aleph_0^{\aleph}=2^{\aleph}$ （C）$2^{\aleph}\leq\aleph_0^{\aleph}\leq(2^{\aleph_0})^{\aleph}\leq 2^{\aleph_0\times\aleph}\leq 2^{\aleph\times\aleph}=2^{\aleph}$ （D） $2^{\aleph}>\aleph^{\aleph_0}=\aleph$

（A）$\aleph^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$ （B）$2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph}$ （C）$\aleph_0^{\aleph}=2^{\aleph}$ （D） $2^{\aleph}=\aleph^{\aleph_0}$ （E）都不对

3. 集合间的等势关系是（ ）

(A) 二元关系 (B) 自反关系 (C) 传递关系 (D) 对称关系 (E) 都不对

9. 以下正确的是 （ ）

（A）card $\varnothing^{\varnothing}=0$ （B）card $\varnothing^{\{\varnothing\}}=0$ （C）card $\{\varnothing\}^{\varnothing}=1$ （D）card $\{\varnothing\}^{\{\varnothing\}}=1$ （E）都不对

10. 在连续统假设下，以下哪些命题为真 （ ）

（A）$\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph_0$ （B）$\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph$ （C）$\aleph^{\aleph_0}=\aleph$ （D） $\aleph^{\aleph_0}=2^{\aleph}$ （E）都不对

填空题

13. 空集的幂集的基数是________________________。

19. 全体有理数的集合的基数是___________；全体无理数的集合的基数是_________。

17. 康托定理是______c_______________________________________。

18. Schroder-Bernstein 定理是____。

13. 自然数集的广义并的幂集的基数 card $P(\cup N)=$_______________________。

19. 康托定理的内容是说对于任意集合 A，___________ 。

(4) 直线上所有开区间的集合的基数是 $\aleph_1$ / $\aleph$ (考虑两个端点，R×R);平面上所有曲线的集合的基数是 $\aleph_1$ / $\aleph$ （实连续函数的值由有理点处的值决定，考虑 $Q \to R \approx R^N \approx 2^N \approx R$）。（曲线是闭区间在连续映射下的像。）

(5) 两个无穷集的并集的基数总是_______其中一个集合的基数；每个集合的幂集的基数总是________这个集合的基数。

判断题

23. 两个集合 A 和 B，如果 A-B ≈ B-A，则 A ≈ B。( )

27. $2^N=N^2$。 ( )

23. 任何无穷集的全体有穷子集的集合都与该无穷集等势。( )

28. 不存在集合 A 使得 card P(A) = $\aleph_0$。 ( )

29. 对任意非零有穷基数 n 和任意无穷基数κ，总有 $\kappa^n = \kappa$ ( )

证明题

四、(16 分) 求自然数的所有有穷序列的集合的基数并证明。该集合可以写为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} N^i = \{\langle a_0,a_1,\ldots,a_k\rangle \mid a_0,a_1,\ldots,a_k \in N,\ k=1,2,\ldots\}$，其中 $N^i=N\times N\times\ldots\times N$（$i$ 个 N 的卡氏积)。

$\aleph_0$（4 分）

（1）构造从该集合到 N 的单射：利用歌德尔编码：让 $\langle a_0,a_1,\ldots,a_k\rangle$ 对应于 $p_1^{a_0+1}\ p_2^{a_1+1}\ p_3^{a_2+1}\ldots p_{k+1}^{a_k+1}$， 其中 $p_1, p_2, p_3,\ldots, p_{k+1}$ 是前 k+1 个素数。(8 分）

（2）构造从 N 到该集合的单射　　　（4 分）

31. 设集合 A={a,b,c,d}，B={1,2,3}，S={ f | f: A→B 且 f 为满射函数}，求 S 的基数。

集合 A,B,C 两两互不相交，$|A| = \alpha, |B| = \beta, |C| = \gamma$

求(A→B)→C, (A×B)→C, (A→B) ×(A→C)

33.（10 分）设$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$,那么存在 i 使得$A_i$的基数不大于$B_i$的基数。

31. 比较如下基数的大小：$\aleph^{\aleph_0}, 2^{\aleph_0}, {\aleph_0}^{\aleph}, 2^{\aleph}$，并说明理由

33.（20 分）在 P(N)上定义二元关系≈：A≈B ⇔ A 和 B 的对称差 A⊕B 是有穷集。

请：（1）证明：≈是 P(N)上的等价关系（10 分）

（2）对于任意的 A∈P(N)，求出等价类[A]的基数 card [A]，为什么？（5 分）

（3）求出商集 P(N)/≈ 的基数 card P(N)/≈ ，为什么？（5 分）

(1) 自反性：A⊕A=∅；（3 分）

对称性：A⊕B=X ⇒ B⊕A =A⊕B=X，X 是有穷集 （3 分）

传递性：A⊕B=X，B⊕C=Y⇒ A⊕C=A⊕(B⊕B)⊕C =(A⊕B)⊕(B⊕C)= X⊕Y，（2 分）

X,Y 是有穷集⇒ X⊕Y 是有穷集 （2 分）

(或者 说出等价关系定义给 3 分，然后上述步骤分别给 2、2、3 分)

(2) 令 $\mathscr{T}$= { X | X 是 N 的有穷集 }，则 $\mathscr{T}$是可数集：（2 分）

$\mathscr{T}$= {∅,{0},{1},{0,1},{2},{0,2},{1,2},{0,1,2},…}

（从∅开始，依次把下一个自然数 n 分别加入到前面的所有子集，。。。）

由 A⊕B=X ⇔ B=A⊕X，得 ∀A，[A] ={ A⊕X | X∈$\mathscr{T}$}（2 分）

（或者说有双射 f:[A]→$\mathscr{T}$, f(B)=A⊕B。）

所以 card [A] = card $\mathscr{T}$= $\aleph_0$ （1 分）

(3) 因为 ∪(P(N)/≈) = ∪{[A] | A⊆N)} = P(N) 且 ∀A，card [A] = card $\mathscr{T}$= $\aleph_0$，

所以ℵ=card P(N) = card (P(N)/≈) × card [A]= card (P(N)/≈) × $\aleph_0$，但$\aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0$（4 分）

所以 card (P(N)/≈) = ℵ（1 分）

（也许还有别的证法，比如直接构造ℵ个集合，两两对称差为无穷集。）

（这个题目还可以换一种说法，把 P(N)换成实数集 R，把有穷集 X 换成有理数 r，把集合对称差 A⊕B 换成实数相减 x-y，类似结论成立）

五、设A, B, C都是无穷集，试比较以下三个集合的基数大小，并给出证明.（20分）

(1)A->(B->C) (2) (A x B)->C (3) (A->B)->C

四、(20 分）用数学归纳法证明：

任意一个自然数的真子集都和某一个自然数等势。

S={n | n∈N ∧ ∀x(x ⊂ n →∃m(m∈N ∧ m≈n))} (6 分)

1）ϕ∈S （4 分）

2）n∈S ⇒ n^+∈S (2 分)

$n^+ = n\cup\{n\}$, $x\subset n^+$ 分三种 情况讨论 ：(2 分)

a) $x \subset n$, $m\approx x$ (2 分)

b) $x=n$, $x\approx n$ (2 分)

3) $n\in x$, $x-\{n\}\subset n$, $x -\{n\} \approx m$，则 $x\approx m^+$ (2 分)

五、（20 分）设 N 是自然数集，试比较以下四个集合的基数大小，并给出证明. （1）$N\times N$ （2）$P(N)$ （3）$N\to 2$ （4）$2\to N$

card $N\times N$ =card $2\to N$ < card $P(N)$ = card $N\to 2$ （5 分，四者两两之间 6 种关系每错 1 个扣 1 分）

证明：(1) card $N\times N$ =card $2\to N$ （5 分）

证一：定义双射 $H: (N\times N) \to (2\to N)$，$H(<a,b>)=f$，$f: 2\to N$，$f(0)=a$, $f(1)=b$。

证二：card $N\times N=\aleph_0$，card $2\to N=\aleph_0$。

(2) card $P(N)$ = card $N\to 2$ （5 分）

证一：同书上证明，子集合的特征函数。

证二：card $P(N)= 2^{\aleph_0}=\aleph_1$，card $N\to 2=2^{\aleph_0}=\aleph_1$。

(3) 证明 < （5 分）

利用$\aleph_0 < \aleph_1$。