

## 选择题

2. 自然数集是 ( )

(A) 有穷集 (B) 无穷集 (C) 传递集 (D) 归纳集 (E) 都不对

7.  $\cup 4 - \cup 2$  的集合运算结果是 ( )

(A) 3 (B) 2 (C) {2} (D) {1, 2} (E) 都不对

8. 下面不是传递集的是 ( )

(A) {0, 1, {1}} (B) {0, 1, 2, 3} (C) {3} (D)  $\langle 0, 1 \rangle$  (E) 都是

3. 在 1~1000 的自然数中, 既不是 3 也不是 7 的倍数的自然数的个数是()

(A) 572 (B) 624 (C) 632 (D) 618 (E) 594

6. 自然数满足的性质是 ( )

(A) 包含空集 (B) 三歧性 (C) 归纳集 (D) 传递集 (E) 都不

对

8. 下面是传递集的是 ( )

(A) {0, 1, {0, 1}} (B) {2, 3} (C)  $\mathbb{N}$  (D)  $\emptyset$  (E) 都不是

## 填空题

1. 在 1 到 100 的自然数中, 能被 5 但不能被 6 整除的数有\_\_\_\_\_个。

16. Peano 系统  $\langle M, F, e \rangle$  的五条公设是: (1) \_\_\_\_\_; (2) \_\_\_\_\_;

(3) \_\_\_\_\_; (4) \_\_\_\_\_;

(5) \_\_\_\_\_。

16. 用数学归纳法原理证明所有自然数具有性质 P 的两个步骤如下: (1) \_\_; (2) \_

18. 自然数集  $\mathbb{N}$  上的加法运算函数, 是利用  $\mathbb{N}$  上的递归 定理进行构造定义, 以保证该定义是有意义的。请列出加法规则为  $A_m(0)=m$ 、 $A_m(n^+)=A_m(n)+1$ 。

1.  $\cup \cup \cup \cup \cup \cup 8 =$  \_\_\_\_\_。

(1) 归纳集是包含 \_\_\_\_\_ 并且对于 \_\_\_\_\_ 运算封闭的集合。

(2) 自然数是 \_\_\_\_\_ 每一个归纳集的集合; 自然数集是 \_\_\_\_\_ 每一个归纳集的集合。

(3) 集合  $A$  的后继是 \_\_\_\_\_; 集合  $A$  是传递集当且仅当 \_\_\_\_\_ (写出任何一个充要条件即可)。

### 判断题

21. 任何两个归纳集的交集和并集也还是归纳集。( )

22. 任何一个传递集的广义并也还是传递集。( )

28. 空集属于所有自然数。( )

29. 自然数集既是归纳集, 也是传递集; 任意自然数是归纳集, 但不是传递集。( )

24.  $A$  是传递集当且仅当  $P(A)$  为传递集。( )

27. 自然数和自然数集均为归纳集。( )

### 证明题

4 证明  $(M, e, f)$  是 Peano 系统, 其中  $e$  是空集,  $f$  是求幂集运算,  $M$  是从空集开始不断求幂集形成的集合  $(M = \{e, P(e), P(P(e)), \dots\})$ 。

五、(16 分) 证明  $(M, \emptyset, P)$  是 Peano 系统, 其中  $\emptyset$  是空集,  $P$  是求幂集运算,  $M$  是从空集开始不断求幂集形成的集合  $(M = \{\emptyset, P(\emptyset), P(P(\emptyset)), \dots\})$ 。

皮亚诺系统的定义:

(1)  $\emptyset \in M$  显然 (3分)

(2)  $M$  在  $P$  下封闭 显然 (3分)

(3)  $\emptyset \notin \text{ran } P$ , 显然 (3分)

(4)  $P$  是单射: 因为  $A = \cup P(A)$ ,  $B = \cup P(B)$ , 所以  $A=B \Leftrightarrow P(A)=P(B)$  (3分)

(5) 极小性公理:  $A \subseteq M \wedge \emptyset \in A \wedge A$  在  $P$  下封闭  $\Rightarrow A=M$  ( $M \subseteq A$ ) 显然 (4分)

一、证明: 自然数集是归纳集。(20分)

四、是否存在自然数集的无穷真子集是传递集? 试给出证明。(20分)

一、(20分) 设  $n$  是某个自然数,  $N$  是自然数集, 回答下列

问题并给出证明:

(1)  $P(n)$  是否传递集?

证明:  $n$  为传递集,  $A$  为传递集 当且仅当  $P(A)$  为传递集

所以  $P(n)$  为传递集

(2)  $P(N)$  是否归纳集?

$P(N)$  不是归纳集,  $N^+ = N \cup \{N\} \notin P(N)$ , 因为  $P(N)$  的任意元素  $A$  都是  $N$  的子集, 所以  $A$  的元素都是自然数。因此是有限集, 所以  $P(N)$  对后继运算不封闭, 故  $P(N)$  不是归纳集