

一、(7分)通过不动点迭代求  $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$  在区间 (1, 2) 上的实根，并讨论该迭代在区间 (1,2) 上的收敛性。

二、(8分)利用 3 阶 Lagrange 公式根据下表计算  $y(1.50)$ 。

$x_k$	1.20	1.40	1.60	1.80
$y_k$	0.1942	0.1497	0.1109	0.0790

三、(每小题 6 分)

1. 估计  $y_k$  的误差对于复合 Simpson 公式计算结果的影响。

2. Frobenius 范数是否是诱导范数 (Induced Norm)，说明理由。

四、(13 分) 如果积分公式  $\int_0^h y(x)dx = h(a_0 y_0 + a_1 y_1) + h^2(b_0 y'_0 + b_1 y'_1)$  具有三阶代数精度，确定其对应系数。

五、(10 分)  $A$  为对称正定矩阵， $\|x\|_A = \langle Ax, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ ，证明  $\|x\|_A$  是  $R^n$  上向量的一种范数。

六、(10 分)证明 如果  $A$  是严格对角占优矩阵，则解线性方程组  $Ax = b$  的 Gauss-Seidel 迭代收敛。

七、(12 分)利用最小二乘考虑权重用直线拟和下面的函数。

$x_i$	1	2	3	4
$y_i$	4	4.5	6	8
$w_i$	2	1	3	1

八、(13 分)写出四阶 Runge-Kutta 方法公式。

将二阶常微分方程初值问题  $y'' - 2y' + 2y = e^{2t} \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = -0.4$ ,  $y'(0) = -0.6$  化为一阶常微分方程组，并利用 Euler 方法做一步，取步长  $h = 0.1$ 。

九、(15 分)使用最速下降法解

$$\begin{cases} x = \sin(x + y) \\ y = \cos(x - y) \end{cases}$$

取初值 (0, 0)，做一步迭代。