高二物理竞赛 • 力学 (中)

学而思

目录

第三章　静力学

以运动学和动力学理论为基础, 时不时地, 我们发现一些典型的现象, 包括:

- 不管体系多么复杂, 能量函数对其行为似乎起决定性的作用.
- 似乎总是能够从不同的体系中抽象出它的一个特征数字: 自由度.
- 约束越多体系约复杂, 它的未知约束力越来越多, 但是多到一定程度体系只剩下一个自由度了反而用能量守恒就能够解答大多数问题.

这些现象无疑是紧密联系的, 值得研究的. 事实上我们要做的就是以之前的所有动力学定律为依据进一步展开讨论. 再从头开始建立新的理论: 先讨论运动的描述, 再单独研究力的特性. 最后合到一起, 看看这能让我们得到什么.

新理论, 新思想, 新图像. 在本章节的学习过程中, 如果感到疑惑, 大抵都是复杂的数学推导掩盖了背后的物理目的. 希望读者先记住两点: 一是, 我们要做的是把以前对质点, 刚体和对质点系列的选取自然坐标 (大抵是直角座标) 而列的部分定理修改为改用广义坐标来描述, 过程中的所有步骤都是为这个目的来服务的. 二是, 本着 "能量函数的形式" 就决定 "体系的一切结构与演化" 的观点, 我们就能找到一个明确的方向. 无论是从结果上还是从细节上, 我们将会多次参考这种想法.

3.1　约束

所谓约束(constraint) 就是对运动的限制. 有时, 物体发生直接的接触, 或是一个物体在另一个物体表面滑动或是滚动, 这种情况约束实际上就发生了; 有时, 约束通过往往是轻质[1]的绳, 直杆或曲杆, 套筒, 无摩擦的铰链等等去连接两个乃至多个物体, 这样那些物体之间实际上也存在约束, 偶尔我们也会把连接它们的机构直接叫做约束.

之所以把它们叫做约束, 是因为它们产生了两个共同的结果, 一是约束方程, 二是约束力. 根据前者的运动学效果[2], 我们把与约束分为以下类别:

3.1.1　约束分类

无论是挂在天花板下的小球, 还是 "鹰击长空, 鱼翔浅底", 都给我们以单边约束(unilateral constraint) 的图像.

[1] 后面就能理解, 这样才不会占用新的广义坐标, 因为它不带来任何能量

[2] 根据后者的动力学效果还可以分为理想和非理想约束, 见后面小节平衡问题: 虚功原理

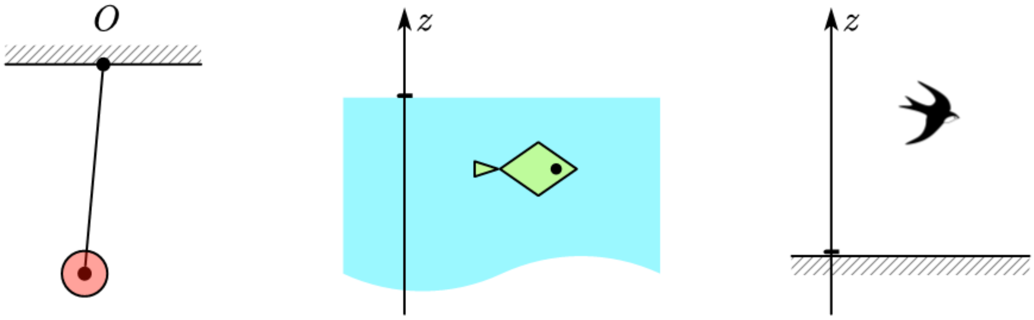

图 3.1: 可解约束

更简单的例子还包括两个物体表面发生接触 (滑动或滚动) 的情况. 此时,

3.1.2 广义坐标与自由度

3.1.3 约束力与广义力

3.1.4 完整约束

3.2 力系化简

3.2.1 公理化静力学体系

3.2.2 力系向一点简化

3.3 平衡问题:矢量力学

3.3.1 平衡问题的要素

3.3.2 平衡条件与判据

3.3.3 负静定,静定与超静定

3.3.4 静摩擦的临界

3.4 平衡问题:虚功原理

3.4.1 理想约束

3.4.2 负静定问题的虚功原理

3.4.3 静定,超静定问题的求解

3.5 分析力学初步 *

3.5.1 用广义坐标表示能量

3.5.2 拉格朗日方程

3.5.3 再论冲击问题

3.5.4 哈密顿力学简介

3.6 平衡态稳定性

3.6.1 一自由度体系

3.6.2 多自由度体系

第四章　振动与波

4.1　方程与谐振

4.1.1　简谐振动的定义

振动是最常见的物理现象. 而振动中的最简单 (simple) 而和谐 (harmonic) 者谓之简谐振动(simple harmonic oscillation). 对谐振子(harmonic oscillator) 的学习与研究是会贯彻整个物理理论不同层次内容的始终的. 现在是经典力学, 以后会上升到场论, 量子力学与量子场论的高度.

简谐振动是指一个物理量 Q 随时间围绕其平衡位置做上下的波动. 其形式符合:

$$Q = Q_0 + \Delta Q \cos(\omega t + \varphi)$$

我们经常会有用复数表示振动的习惯, 其做法是在三角函数 cos 与其宗量(argument) $\phi = \omega t + \varphi$ 构成的项后添加一个虚的 $\mathrm{i} \sin \phi$ 项, 于是新的写法变成:

$$\widetilde{Q}(t) = Q_0 + \Delta Q \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} \ ; \ Q = \mathfrak{Re}(\widetilde{Q})$$

又或者:

$$\widetilde{Q}(t) = Q_0 + \Delta\widetilde{Q} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \ ; \ \Delta\widetilde{Q} = \Delta Q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

以上各个常量中, Q_0 是平衡位置, ΔQ 叫振幅(amplitude), 宗量 $\omega t + \varphi$ 叫做相位(phase), ω 叫角频率(angular frequency), φ 叫初相位. $\widetilde{Q}$ 为复化的复物理量, 而 $\Delta\widetilde{Q}$ 叫做复振幅(complex amplitude).

复数表示最大的一个好处就在于很方便计算物理量的线性组合与导数. 事实上, 如果合理选取 $Q_0 = 0$:

$$\dot{Q} = -\omega \Delta Q \sin\phi \ ; \ \dot{\widetilde{Q}} = \mathrm{i}\omega\widetilde{Q} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = \mathfrak{Re}(\dot{\widetilde{Q}})$$

$$\ddot{Q} = -\omega^2 \Delta Q \cos\phi \ ; \ \ddot{\widetilde{Q}} = -\omega^2\widetilde{Q} \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q} = \mathfrak{Re}(\ddot{\widetilde{Q}})$$

4.1.2　简谐振动的性质

以一个质点水平坐标 x 围绕 $x = 0$ 左右做谐振为例. 其运动方程写作[1]:

$$x = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}$$

那么其速度与加速度为:

$$v = \mathrm{i}\omega A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}, \ a = -\omega^2 A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}$$

我们发现在运动过程中的任意一个时刻, 加速度都是指向平衡位置的, 与偏离平衡位置的位移是成正比的:

$$a = -\omega^2 x$$

[1] 以后我们对物理量和物理量的复化只在必要的时候加以区分, 看到复数只需要认为省写了取实部这一例常操作罢了.

而任意一个时刻既然 x 是宗量的余弦函数, v 是正弦函数, 它们就满足其绝对值大小的 "此消彼长" 关系[2]:

$$v^2+\omega^2x^2=\omega^2A^2$$

相位是很重要的物理概念, 相(phase), 状态也, 相位则是一个可以用来表示状态的数. 反过来, 我们可以根据物体在一个时刻的状态反过来确定这个时刻的相位. 如果位移是 x 而振幅为 A, 则:

$$\phi=\mathrm{Arcsin}\frac{x}{A}\ ,\ \mathrm{Arcsin}\frac{x}{A}\in\left\{\arcsin\frac{x}{A}+2n\pi|n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\pi-\arcsin\frac{x}{A}+2n\pi|n\in\mathbb{Z}\right\}$$

同理如果已知速度 v 和速度振幅(velocity amplitude) ωA, 那么相位为:

$$\phi=\mathrm{Arccos}\frac{v}{\omega A}\ ,\ \mathrm{Arccos}\frac{v}{\omega A}\in\left\{\arccos\frac{v}{\omega A}+2n\pi|n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\arccos\frac{v}{\omega A}+2n\pi|n\in\mathbb{Z}\right\}$$

相位的取法上具有多值性. 但是相位随时间的变化我们约定必须是连续的, 事实上它随时间线性增加. 也就是说如果前一个状态下相位为 ϕ_1, 后一个状态下相位为 ϕ_2, 那么这两个状态间历时:

$$\Delta t=\frac{\phi_2-\phi_1}{\omega}$$

4.1.3 简谐振动的判定

事实上以上的两个关系都可以成为体系做简谐振动的判据, 它们为:

- 线性回复判据: 如果一个随时间演化的变量的二阶导数正比于变量本身, 且符号相反, 可以判断变量做简谐振动:

$$\ddot{q}=-\omega^2q\quad\Rightarrow\quad q=A\cos(\omega t+\varphi)$$

- 此消彼长判据: 如果一个随时间演化的变量的一阶导数与自己的正系数平方和为动力学守恒量 (一般就是能量). 可以判断变量做简谐振动:

$$\dot{q}^2+\omega^2q^2=\omega^2A^2\quad\Rightarrow\quad q=A\cos(\omega t+\varphi)$$

证明如下:

线性回复 $\Rightarrow$ 此消彼长:

首先进行代换:

$$\ddot{q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q})=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}(\dot{q})=\frac{\dot{q}\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}q}$$

将上式代入 $\ddot{q}=-\omega^2q$:

$$\dot{q}\mathrm{d}\dot{q}+\omega^2\cdot q\mathrm{d}q=\mathrm{d}(\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{1}{2}\omega^2q^2)=0\quad\Rightarrow\quad\dot{q}^2+\omega^2q^2=C$$

命 $A=\sqrt{C/\omega^2}$ 即得到此消彼长判据.

此消彼长 $\Rightarrow$ 简谐振动:

考虑 $\dot{q}$ 的正根即可, 负根结果也是简谐振动:

$$\dot{q}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\omega\sqrt{A^2-q^2}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{A^2-q^2}}=\omega\mathrm{d}t$$

两边同时积分, 积分常数写到右侧记作 φ, 得到:

$$-\arccos\frac{q}{A}=\omega t+\varphi\quad\Rightarrow\quad q=A\cos(\omega t+\varphi)$$

[2]注意到这里 (往下) 要避免使用复数, 因为一个复数的实部平方不会等于其平方的实部 $v^2\neq\mathfrak{Re}(\widetilde{v}^2)$

4.1.4　小振动

值得注意的是,很多情况下体系的运动并不是严格的简谐振动. 十分常见的一种情况是小振动(small oscillation). 事实上, 如果我们研究体系为完整而稳定的一自由度体系, 广义坐标为 q, 而且势能函数 $V(q)$ 存在一个极小值:

$$V'(q_0)=0\quad,\quad V''(q_0)>0$$

那么根据上一章的阐述, 这个 q_0 就是体系的稳定平衡位置. 那么, 任何偏离这个平衡位置的系统运动只要偏离的值足够小, 即做坐标变换 $\delta=q-q_0$ 为无穷小量, 那么就一定为简谐振动. 这是因为势能可以由泰勒展开为:

$$V=\frac{1}{2}V''(q_0)\delta^2+\frac{1}{3!}V'''(q_0)\delta^3+\cdots$$

只要 δ 足够小, 三阶项就必然远小于二阶项. 从而可以只保留第一项. 同理这也适用于动能, 它必然正比于 $\dot{\delta}$ 的平方, 系数则与平衡位置有关:

$$T=\frac{1}{2}M(q_0)\dot{\delta}^2$$

从而这个体系的能量函数 (哈密顿量) 就被近似为了:

$$H=T+V=\frac{1}{2}M(q_0)\dot{\delta}^2+\frac{1}{2}V''(q_0)\delta^2$$

这就直接符合了 “此消彼长” 判据. 从而小振动的角频率为:

$$\omega=\sqrt{\frac{V''(q_0)}{M(q_0)}}$$

例如, 在典型的单摆问题中, 取摆线与竖直方向的夹角 θ 为广义坐标. 摆球的重力势能以平衡位置为原点表示为:

$$V(\theta)=mgl(1-\cos\theta)$$

而动能为:

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\quad\Rightarrow\quad M(\theta)=ml^2$$

从而只需要带入以上公式, 就得到:

$$\omega=\sqrt{\frac{V''(0)}{M(0)}}=\sqrt{\frac{mgl}{ml^2}}=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

这是因为事先看出来了稳定平衡点为 $\theta=0$. 简单的小振动问题的思路都大抵如此. 第一步是写出能量函数来, 它决定体系的所有可能的动力学演化. 第二步要找到稳定平衡位置, 往往一样地是通过势能函数的增减凹凸性来判断, 往往也要结合体系的对称性来观察. 最后便是在平衡位置处把动能势能都近似为简单的平方项. 唯一需要补充的是, 除了利用二阶导数来计算这一个平方项, 对常见函数写泰勒展开式也是十分常见的思路.

单摆问题的周期从而就是:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

但是一定要注意这个振动仅仅对小振动成立. 例如在摆角为 $10^\circ=0.087\text{rad}$ 时会有约 $2‰$ 的误差. 如何计算这个误差? 之后的非线性振动将讨论这个问题.

4.2 阻尼振动与受迫振动

4.3 多自由度小振动 *

4.4 非线性摄动 *

4.5 格波

第五章　万有引力

5.1　有心力下运动

5.2　万有引力下运动

5.3　二体与潮汐