

# 高二物理竞赛 • 电磁学与近代物理

## Part 2

学而思



# 目录

第一章 光的干涉	3
1.1 标量波理论	3
1.2 分波面干涉	7
1.3 分振幅干涉	7
1.4 偏振干涉	7
1.5 相干性	7
1.6 多光束干涉	7
第二章 光的衍射	9
2.1 光栅与波带片	9
2.2 布拉格衍射	9
2.3 衍射积分公式	9
2.4 波前分析法	9
第三章 物理光学	11
3.1 经典色散理论	11
3.2 色散, 散射与吸收	16
3.3 群速与展宽	16
3.4 光量子	16



# 第一章 光的干涉

## 1.1 标量波理论

标量波是指以下标量偏微分波动方程(wave equation) 的解:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A(\mathbf{r}, t) = 0$$

分别在直角坐标, 柱坐标, 球极坐标下用所谓的分离变量法可以得到一些正确的基础解<sup>1</sup>:

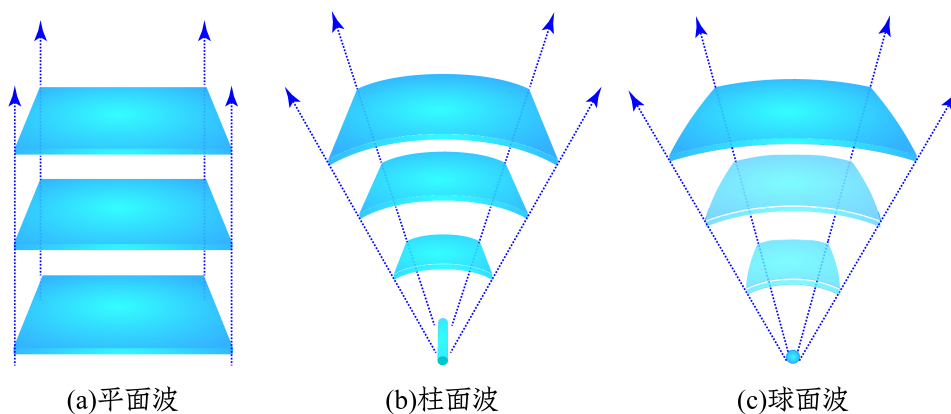


图 1.1: 三种典型的波

1.  $A(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi)$

要求  $\frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = c$ . 此为传播方向为  $\mathbf{k}$  的平面行波.

2.  $A(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{\sqrt{\rho}} \cos(\omega t - k\rho + \phi)$

要求  $\frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = c$ .  $k > 0$  时为向外传播的柱面行波,  $k$  小于零则向内传播.

3.  $A(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{r} \cos(\omega t - kr + \phi)$

要求  $\frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = c$ .  $k > 0$  时为向外传播的球面行波,  $k$  小于零则向内传播.

容易发现, 以上波全都具有这样的形式:

$$A(\mathbf{r}, t) = |A|(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \varphi(\mathbf{r}))$$

也就是说, 每个点的相位都在以共同的  $\omega$  做等速率的增加, 代表一种同步的振动. 而振动幅度  $|A| > 0$  是要由于波的传播特点和能量流动的连续性而缓慢变化的. 具体传播方向则看相位的梯度:

$$\mathbf{k} = +\nabla\varphi$$

<sup>1</sup>以下三式都要求  $\omega > 0$ , 数学上看  $\omega < 0$  也没错, 但是利用三角函数的性质可以将  $t$  系数变号而不带来新的解.

在近似的意义下,  $\frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = c$  是没有问题的. 而  $c$  便是波传播的速度. 在真空与介质 (写作  $v$ ) 中出现在光的波动方程中的  $\frac{1}{c^2}$  中的  $c$  其实是:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad , \quad v = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}$$

约等于符号是因为考虑到了透明光学介质一般磁性质不显著故  $\mu_r \approx 1$ .

我们不是很推荐用三角函数来计算波动光学. 要写成复指数的形式, 而实际三角函数理解为它的有效的实部, 虚部是为了方便计算而添加的没有物理效应的. 而且波动光学统一约定, 利用三角函数的形式, 为相位增添一个负号, 使得光在同一时刻沿传播方向相位是增加的, 改为:

$$A(\mathbf{r}, t) = |A|(\mathbf{r})e^{i(\varphi(\mathbf{r}) - \omega t)} = |A|(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}e^{-i\omega t} = A(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

在以后情形下我们都将把这种符号约定称为“光学符号约定”, 而以往的指数上的宗量随时间增加随传播方向减小的符号约定称为“电磁学符号约定”. 以上讨论就引出了复振幅  $A(\mathbf{r})$  的概念. 而之前找到的各点振幅  $|A|$  和  $\varphi$  现在就被整合在了一起, 作为了复振幅的模与幅角:

$$|A|(\mathbf{r}) = |A(\mathbf{r})| \quad , \quad \varphi(\mathbf{r}) = \arg A(\mathbf{r})$$

回过头来再看, 我们在解波动方程时, 实际上从一开始就没有必要认为该标量  $A(\mathbf{r}, t)$  是一个实数, 在复数域内解, 也能够直接得到完全与上述等效一样的结果. 最后我们发现, 该复数标量场  $A(\mathbf{r}, t)$  如果能够符合波动方程, 其实部与虚部也是能够分别满足波动方程的:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Re A(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Im A(\mathbf{r}, t) = 0 \end{cases}$$

如果再要求这样的  $A(\mathbf{r}, t)$  具有形式  $A(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ , 数学上也就是对变量  $t$  分离变量, 物理就意味着研究单色光的传播, 那么代入便会发现实际上  $A(\mathbf{r})$  需要满足的对空间的方程为亥姆霍兹方程(helmholtz equation):

$$(\nabla^2 + k^2)A(\mathbf{r}) = 0 \quad , \quad k = \frac{\omega}{c}$$

这就是整个波动光学理论的核心方程. 在继续阐述之前我们先说说  $A$  指什么. 其实真空与线性介质 (不导电) 电磁场几乎每个量 (标势, 矢势, 电场, 磁场) 都是符合波动方程的:

$$A: \{\varphi, A_x, A_y, A_z, E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A(\mathbf{r}, t) = 0 \quad , \quad (\nabla^2 + k^2)A(\mathbf{r}) = 0$$

所以作为复数的标量波理论就构成了光干涉, 衍射等波动光学课题的数学基础. 而且我们率先注意到其中的两点:

一是, 波动方程, 亥姆霍兹方程是线性方程, 也就是说, 如果两个光场都符合方程, 那么两个场直接逐点做标量加法得到的场也会自动符合方程. 这也就是之后干涉, 衍射操作的重要前提. 如果由于两个原因同时产生了两束光波, 那么只要写出各自的场, 加在一起便是整个体系现在的光场. 这就是双光束干涉时我们将会采取的做法.

二是, 平面波与球面波的重要性. 只要是行波, 在任意一点就可以按照平面波来近似. 如果取其  $\mathbf{k}$  方向为  $z$  方向, 那么局部的光场为:

$$A(\mathbf{r}) = Ae^{ikz}$$

但是旁边的点  $(x_1, y_1)$  的最佳平面波的近似却不一定平行于  $z$  轴, 它应该为:

$$A(\mathbf{r}) = A e^{i[k_z z + k_x(x-x_1) + k_y(y-y_1)]}$$

这下便有第一个近似条件了, 我们叫做**傍轴条件**(paraxial condition). 它要求光线传播方向与  $z$  轴夹一个小角度. 此时我们习惯把  $x$  和  $y$  方向余弦  $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y$  使用的约 90 度的角度  $\alpha_x, \alpha_y$  的余角记做方向角, 也就是说:

$$\sin \theta_x \approx \theta_x = \frac{k_x}{k}, \quad \sin \theta_y \approx \theta_y = \frac{k_y}{k}, \quad k_z \approx \sqrt{1 - \theta_x^2 - \theta_y^2} k \approx k$$

在傍轴近似下, 以上以方向角  $(\theta_x, \theta_y)$  传播的平面波被方便地写为:

$$A(\mathbf{r}) = A e^{ikz} e^{i\phi} e^{ik(\theta_x x + \theta_y y)} = A' e^{ik(\theta_x x + \theta_y y)}$$

经常的, 我们只需要关心在像屏  $z = 0$  上的场, 参考上图. 所以上式我们可以把不变的系数都统一写作  $A'$ .

但是平面波却不总是好的近似, 我们已经发现了, 像上图那样, 如果在物屏  $z = -L$  上原点  $X = 0, Y = 0$  处有一点光源发出球面波, 那么光屏上  $(0, 0)$  处和  $(x_1, y_1)$  处的近似公式就采取了不同的形式. 所以我们会寻求更好的球面波近似. 但且慢, 是不是任意情况下光场中的任意一点附近的场都能近似为一个球面波呢? 答案显然是否定的. 比如柱面波很显然就不能被近似为球面波, 因为其**波前**(wavefront), 即等相位面沿垂直于传播方向的一个方向弯曲而另一个方向却是平直的. 事实上球面波的光源是点, 柱面波的光源是线. 而介于柱面波与球面波中间的某种不对称波前就连光源都没法找到. 但是球面波的地位仍然是重要的. 这体现在两点上. 一是在真实的光路系统中, 点光源是切实存在且常用的. 此时物方到像方的点到点的消除了像差的理想成像是我们努力追求的方向. 故在这样的系统中光波的确一直都适合被近似为球面波, 而平面波也被当做一种光源在无穷远的特殊状态而处理. 二是, 若把波前上各个点当成是新的次波源向前发射出球面波而在前方相干叠加形成新的光场, 后面在衍射这一章我们数学上可以证明这就是计算光的传播的正确方式. 其中用到的球面波作为一种本质上重要的物理对象, 即**传播子**(propagator), 有着重要的物理地位.

故我们研究从物屏  $z = -L$  的  $(X, Y)$  处传播到像屏  $z = 0$  处  $(x, y)$  点的球面波的场:

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \frac{I}{\sqrt{L^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2}} e^{ik\sqrt{L^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2}} \\ &= \frac{I}{L} e^{ikL} \left[ 1 + \frac{(x-X)^2}{L^2} + \frac{(y-Y)^2}{L^2} \right]^{-\frac{1}{2}} e^{ikL \left[ \left[ 1 + \frac{(x-X)^2}{L^2} + \frac{(y-Y)^2}{L^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right]} \end{aligned}$$

由于傍轴条件, 我们发现方向角  $(u_x, u_y)$ ,  $u_x = \frac{x}{L}$ ,  $u_y = \frac{y}{L}$  和方向角  $(U_x, U_y)$ ,  $U_x = \frac{X}{L}$ ,  $U_y = \frac{Y}{L}$  都是小量, 而传播到光屏上该点的光的方向角 ( $\mathbf{k}$  方向) 为  $(u_x - U_x, u_y - U_y)$ . 仅考虑领头项, 把不随  $x, y$  变化的系数记为常数, 我们发现:

$$A(x, y) = A e^{\frac{i}{2} k L [(u_x - U_x)^2 + (u_y - U_y)^2]} = A' e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2L}} e^{-ik \frac{Xx + Yy}{L}}$$

也就是说光屏上的波由两个相因子决定. 第一个是平方相关于  $x, y$  的  $\varphi_1 = k \frac{x^2 + y^2}{2L} = \pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda L}$ , 第二个恰好是平面波的相因子  $\varphi_2 = -k \frac{Xx + Yy}{L} = -k(U_x x + U_y y) = k(\theta_x x + \theta_y y)$ . 就是说当点光源相对  $(x, y) = (0, 0)$  从  $X < 0, Y < 0$  的方向照过来能够在原点附近获得方向角为正的平面波场.

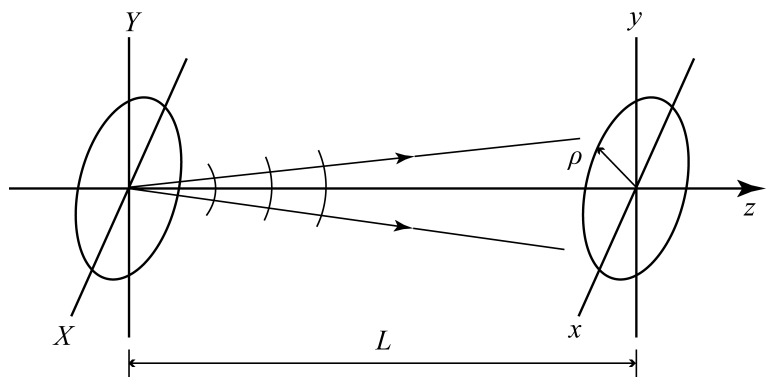


图 1.2: 球面波向平面波近似

那么球面波能够被近似为球面波的条件也就不言自明了,它要求第一个相因子的相位很小不干扰第二个相因子,也就是  $\varphi_1 \ll \pi$ , 也就是**远场条件**(farfield condition):

$$\rho^2 \ll \lambda L \quad \Leftrightarrow \quad L \gg \frac{\rho^2}{\lambda}$$

其实换一个角度理解这个条件,如果远场条件被满足,但是在这样的  $\rho$  内第二个相因子变化也非常小时,整个  $A$  几乎就是常数,这时候也形成不了有价值的光场,所以我们如果要求  $\varphi_2 \gg \varphi_1$ , 还能发现第三个条件  $X, Y \gg x, y$ . 对于这个条件我们做这样的理解,相位的绝对大小是没有观测效果的. 我们需要的其实是光束干涉时相位的差值. 故这其实是要求物屏的花样尺寸要远大于像屏上干涉花样的观测范围.

在远场条件不被满足的情况下,考虑第一个相因子对第二个相因子的影响,会造成干涉图样的扭曲与形变,几何光学上会造成最基础的像差:相散和散焦.

在介绍下两节具体的干涉之前,对干涉的原理做一个简要的介绍是有必要的. 根据之前的介绍,空间中如果同时存在两个光场:

$$A_1(\mathbf{r}) = |A_1|(\mathbf{r})e^{i\varphi_1(\mathbf{r})} \quad ; \quad A_2(\mathbf{r}) = |A_2|(\mathbf{r})e^{i\varphi_2(\mathbf{r})}$$

我们可以找到其单独存在时的光强,一般来说,光强为位置的缓变函数:

$$I_1(\mathbf{r}) = |A_1|^2 = A_1^* A_1 \quad ; \quad I_2(\mathbf{r}) = |A_2|^2 = A_2^* A_2$$

然而光场的叠加是有两种典型的方式的. 最常见的其实是**非相干叠加**(incoherent superposition). 此时出于下面要介绍的原因,光强是可以逐点直接相加的:

$$I(\mathbf{r}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r})$$

将自然界或人造的两束来源不同的光照在一次是无法观察到干涉花样的. 光的干涉条件比机械波干涉条件来的苛刻的多. 在某些细心制备的实验室条件下才能观察到干涉花样,此时光场是**相干叠加**(coherent superposition). 在光学之中相干度是十分值得关注的. 我们将在之后的一节中集中讨论. 读者可能自然地认为相干叠加时为复振幅相加:

$$A(\mathbf{r}) = A_1(\mathbf{r}) + A_2(\mathbf{r})$$

但是其实无论非相干叠加还是相干叠加上式都适用,那么是什么造成了两者的区别呢? 我们把上式模方求光强:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) &= A^* A \\ &= (A_1^* + A_2^*)(A_1 + A_2) \\ &= A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + A_1^* A_2 + A_2^* A_1 \\ &= I_1 + I_2 + |A_1||A_2|e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + |A_1||A_2|e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

上式中出现的交叉项  $2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  就叫**干涉项**(interference term). 它是关于位置的快变函数. 乍一看这也未免太快了,因为只要当空间位置改变一个波长,相位  $\varphi$  就会有  $\pi$  的量级的改变,这样干涉项在这个过程中就会有正负号的改变. 从而产生干涉花样. 在实际的干涉实验中,合理的仪器设置可以使得这个空间特征长度被放大到人眼或助视仪器可以直接观测的程度. 从而这就是干涉实验的基础.

那么为什么对于非相干叠加情形我们直接去掉了干涉项. 那是因为在之前我们做把光场向标量复振幅简化的过程中去掉了公共的单色光时间演化项  $e^{i\omega t}$ . 这并不是永远合理的做法. 真实光场由于后面要介绍的各种原因,可以认为相位随时间的演化并不是完全线性增加的而是有随时间偏离期望值的方差越来越大的涨落. 从而两束并没有关联的自然光之间不同时刻同一点  $\mathbf{r}$  的相位差  $\delta = \varphi_2(\mathbf{r}) - \varphi_1(\mathbf{r})$  是一个在随机涨落的数,只要涨落够大,  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  项的随时间平均就会总是趋近于零. 从而干涉现象也就消失了.

在以下的两小节中,我们先不用关心相干性的问题,认为不同光场的叠加总是有“完美的相干性”:完全稳定的相位差. 我们会在不同干涉装置的介绍中去强调为什么总是能保证“完美的相干性”的成立.



## 1.2 分波面干涉

以下几种干涉装置一般统一归为分波面干涉(interference by dividing wave-front). 因为它们实现的核心思想都是让本来沿各个方向独立传播的波前的部分改变传播方式而在空间中产生交叠.

历史上第一个挑战牛顿光的粒子说权威, 构想出更合理的光的波动说的假设并通过实验证明自己的想法的是谁? 那必然要归功于托马斯·杨(Thomas Young)<sup>2</sup>.

## 1.3 分振幅干涉

## 1.4 偏振干涉

## 1.5 相干性

## 1.6 多光束干涉

---

<sup>2</sup>杨氏为英国博物学家, 也经常作为物理学家而介绍. 除了双缝实验, 也因为杨氏模量, 杨-亥姆霍兹三色视觉论, 杨-拉普拉斯和杨-杜普雷附加压强与接触角公式而闻名. 他还是杰出的语言学家, 比较了 400 种语言的词汇与语法. 并解密了一部分古埃及象形文字. 在音乐, 医学和神学等上也有贡献.



## 第二章 光的衍射

### 2.1 光栅与波带片

### 2.2 布拉格衍射

### 2.3 衍射积分公式

### 2.4 波前分析法



## 第三章 物理光学

### 3.1 经典色散理论

蓝天,白云,红太阳.在简单的自然现象中蕴含着光在传播过程中的另外一种典型的现象: **散射**(scattering).而散射却又是一个多么复杂的现象!要完全理解散射,我们得研究光的吸收与发射,因为光与物质中分子的相互作用其实本质上可以看成吸收与发射,这是 **分子光学**(molecular optics) 的研究范畴.其次,光在介质中的衰减(吸收),不同颜色的光折射率的不同(色散)其实都导致了一类散射现象(瑞利散射).但是还有不同的散射现象则表现出不用的特性,需要从更宏观或更微观的角度去建立新的理论来解释他们.

不同于以往在透明介质中的平面波传播,新的现象需要新的平面波模型.

我们在波动方程的解中引入复数是为了更好地描述振动形式的解.但这却忽视了另一种解的存在性.就是如果波矢  $\mathbf{k}$  本身亦为复数,由于同时又是一个矢量,可以表示为  $\mathbf{k} = \alpha + i\beta$ .代入场的空间部分:

$$A(\mathbf{r}) = A_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = A_0 e^{-\beta \cdot \mathbf{r}} e^{i\alpha \cdot \mathbf{r}}$$

这就代表了一个沿  $\alpha$  方向传播,沿  $\beta$  方向衰减的平面波.而  $\alpha$  为波矢的实部, $\beta$  为波矢的虚部:

$$\alpha = \Re(\mathbf{k}) \quad ; \quad \beta = \Im(\mathbf{k})$$

这种波可不可以真空中传播?出人意料的是这居然是可能的.因为如果代入真空中的亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 A + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

便会发现这只需要要求:

$$\mathbf{k}^2 = (\alpha + i\beta) \cdot (\alpha + i\beta) = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \alpha \cdot \beta = 0$$

这样的波我们并不陌生,早在几何光学我们介绍光的全反射时便研究过另一侧界面中的隐失波场便是以上形式.更典型地,在  $a \times b$  的矩形波导中传播的波满足:

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_y}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_z}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\lambda_x = \frac{2b}{m}, \lambda_y = \frac{2a}{n}, m, n = 1, 2, \dots$$

此时在  $x, y$  方向的振动是驻波, $z$  方向传播的波则是行波. $x, y$  方向要形成驻波是因为在边界的导体上要符合相同的边界条件,所以或都是波腹,或都是波节.亦可以用同一个平面波在侧面上的多次反射的叠加来理解这种兼具驻波和行波特质的场.我们发现模式为  $(m, n)$  的波,会有一个截止角频率  $\omega_c$ ,如果角频率低于此值使得波无法向前传播:

$$\omega_c = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

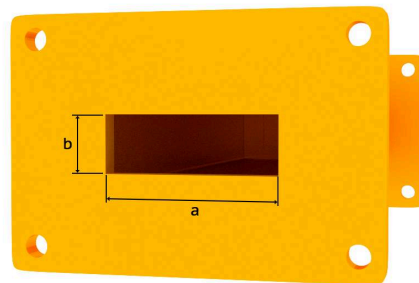


图 3.1: 矩形波导

那如果在波导的起点的天线给出信号角频率  $\omega < \omega_c$  会发生什么情况? 此时就是  $z$  方向波矢  $k_z$  变为虚数, 意味着波沿  $z$  方向不是传播而是衰减:

$$\mathbf{k} = \alpha + i\beta$$

$$\alpha = \left( \frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{b}, 0 \right), \quad \beta = \left( 0, 0, \sqrt{\left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right)$$

在真空中尚可以产生衰减的波<sup>1</sup>, 更何况在各种介质中. 事实上, 描述光在介质中随着传播的距离而衰减的现象早有一经验公式, 即**比尔-朗博-布葛律**(Beer-Lambert-Bouguer law):

$$\frac{I(l)}{I(0)} = e^{-(\sum_i n_i \sigma_i)l}$$

其中  $I(0)$  为在传播  $l$  前的光强,  $I(l)$  为在传播  $l$  后的光强.  $n_i$  是构成介质的第  $i$  种分子的数密度,  $\sigma_i$  为描述其吸收本领的**衰减截面**(attenuation cross section). 例如对大气来说主要的衰减因素就来自气溶胶, 干净的海水则能提供 200m 左右的透光带, 如果有的话, 浮游植物含有的光合色素是造成衰减的主要原因. 而对于强衰减性质的介质, 我们可以唯象地认为波在介质中的传播为:

$$|A(l)| = |A(0)|e^{-\beta l} \Rightarrow I(l) = I(0)e^{-2\beta l}$$

这样的选择是有道理的. 下以导电导致的损耗为例: 在不漏电介质中, 麦克斯韦关系本应为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0} \end{cases}$$

这样便有:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

但是, 如果介质漏电, 且符合  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ , 那么以上方程就改写为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\sigma\mathbf{E} \end{cases}$$

对最后一个式子所引发的不同在光学情况下是很好处理的. 因为单色光总是具有固定的频率  $\omega$ , 那么其实以上式子无非是把  $\frac{\partial}{\partial t}$  变成  $-i\omega$ . 在磁导率被认为几乎等于真空磁导率的情形下, 这相当于说:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mu\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}} \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mu\mathbf{E} - i\sigma\mu\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases}$$

<sup>1</sup>事实上, 只需要亚波长的结构便可造成衰减.

所以对于漏电介质<sup>2</sup>,通常会有复电容率(complex permittivity)的说法<sup>3</sup>,它就是以上把电容率和电导率合并以后的新的复常数,用它第四个方程就与真空中的方程没有任何区别了,除了系数是一个复数:

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} : \quad \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon'\mu\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

这样一个方程的解是可以完全照搬之前的解的,因为数学上可以证明复数解具有可解析延拓(analytic continuation)的特性.从而容易发现,复波矢就变为:

$$\mathbf{k}^2 = \omega^2\varepsilon'\mu$$

这样就得到:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2\varepsilon\mu, \quad 2\alpha \cdot \beta = 2\alpha\beta \cos\theta = \omega\sigma\mu > 0$$

此时传播波矢  $\alpha$  与衰减波矢  $\beta$  就不一定要垂直了,它们必须夹锐角,也就是说,如果电磁波在漏电介质或者导体中传播,沿传播方向必须要衰减.我们最后引入光学中使用最多的复折射率(complex refraction index),按照原来的看法它意味着  $k^2 = n^2k_0^2 = n^2\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v^2}$ .现在要更小心些,因为  $\mathbf{k} = \alpha + i\beta$  已经包含两个不贡献的波矢部分.故我们先对以下表达式开方:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \cos\theta &= \omega^2\varepsilon'\mu \\ \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \cos\theta} &= n\frac{\omega}{c} = (n_1 + in_2)\frac{\omega}{c} \end{aligned}$$

通过以上两式对比,我们能得到两个方面.第一是复折射率实部  $n_1$  与虚部  $n_2$  分别是这样依赖于相对介电常数  $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$  和电导率  $\sigma$  的:

$$\begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2} + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} \right)} \\ n_2 &= \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon_r}\omega\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2} + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} \right)^{-1}} \end{aligned}$$

第二组关系式如果已知了介质的两个折射率,那么在介质中传播的波的两个波矢  $\alpha$  和  $\beta$  需要满足的关系为:

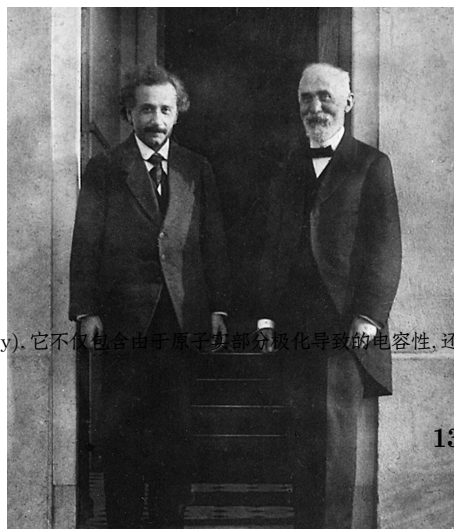
$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= (n_1^2 - n_2^2)\frac{\omega^2}{c^2} \\ \alpha\beta \cos\theta &= n_1n_2\frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned}$$

只有当  $\theta = 0$  才恰有:

$$\alpha = n_1\frac{\omega}{c}, \quad \beta = n_2\frac{\omega}{c}$$

下面我们来介绍历史上发挥了重要作用的经典电子论.它虽然不够精确但物理图像十分重要.

历史上虽然电子作为粒子的发现是 1897 年汤姆孙(J. J. Thomson)的工作.但是早在半个世纪前人们就开始逐渐相信物质由两种带电粒子构成并在导电时可以移动模型了.人们用这样的模型去想象输运现象,电磁感应,热电耦合等现象并取得了丰硕的成果,经典电磁学早在 1860 年代便在麦克斯韦(J. C. Maxwell)的工作下达到顶点进入尾声.剩下几十年的时间历史让位给了洛伦兹(H. A. Lorentz),洛伦兹对电磁学的贡献是深远的.他承前人之大



<sup>2</sup>即使不漏电,也会由于有损耗而等效于有复电容率.

<sup>3</sup>对于普通的导体,也一样可以讨论复电容率,或者更常见地,复电导率(complex conductivity).它不仅包含由于原子束缚部分极化导致的电容性,还要包含由于电子运动惯性导致的电感性.

成,讨论电磁场与电磁介质的相互作用,讨论电磁学原理与古老的伽利略式相对性原理的结合;又开近代物理之先河,电子论自然地导向了量子理论,而电磁学又自然地促成了狭义相对论的诞生.事实上,早年间狭义相对论在学界被介绍时便是以洛伦兹和爱因斯坦这一对忘年交命名的洛伦兹-爱因斯坦理论.

电子,这样一个基本粒子可以说是妇孺皆知的概念,它带一个单位的负电荷,其基本参数为:

$$e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{C} \quad m_e = 9.10938356 \times 10^{-31} \text{kg}$$

然而出于各种原因,在经典电子论中的电子却又是一个陌生的概念.根据洛伦兹的经典电子论精神,重的原子实被认为静止,轻的束缚电子被认为在外场中可以运动,且主要受电场的影响<sup>4</sup>.电子在外电场中相对原子实的位移造成了电偶极矩.出于好的近似,将电子视作被绑在连接中心的弹簧的另一端的质点.质量为  $m$  不再被认为与基本粒子的质量一致,事实上这个质量的本质实际上是虚无的,因为当考虑到原子与电磁场相互作用的严格理论时图像将完全是量子的而超出了此处可以讨论的范围,这样的—个为了解释现象去构造的模型就叫**唯象模型**(phenomenological model).但是其电荷量还是  $-e$ ,弹簧劲度系数为  $k$ .这样子我们就可以写出电子在外电场中的动力学方程:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = -e\mathbf{E}$$

但是我们还忽略了一点,加速运动的电荷会产生辐射,也会因为辐射而带走能量和动量,这就被视作介质对电磁波吸收,散射的根本原因.也同样为了唯象地描述它,我们认为电子是受到了一个阻尼力  $\mathbf{f} = -\gamma\mathbf{v}$ .这样以上方程就被修改为:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = -e\mathbf{E}$$

命  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  代表**共振频率**(resonance frequency) 或待会就会说明的**吸收频率**(absorption frequency).再命入射电磁波为频率  $\omega$  的光,按光学符号约定  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ ,那么很容易解出受迫振动解  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$ ,振幅为:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{-e\mathbf{E}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega/m}$$

我们现在就能算出动态的分子极化率来,它被定义为分子中  $Z$  个价电子产生的偶极矩  $\mathbf{p} = -Ze\mathbf{r}_0$  与外电场  $\mathbf{E}_0$  的比值,可以发现它也是个复数,依赖于外光场的频率:

$$\alpha(\omega) = \frac{Ze^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega/m}$$

我们知道,对于具体介质的极化总是与各个单元的极化有关.我们在此讨论稀薄的无固有偶极矩的气体在外电磁波中的极化<sup>5</sup>,此时不难想到介质的介电常数应该直接依赖于分子极化率,事实上,极化强度为:

$$\mathbf{P} = \chi\epsilon_0\mathbf{E} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\mathbf{E} = n\mathbf{p}$$

从而得到复电容率的值:

$$\epsilon' = \epsilon_0 + \frac{nZe^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega/m}$$

<sup>4</sup>根据洛伦兹力公式  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ,而电磁场中  $E = cB$ ,故  $v \ll c$  时磁场力可以忽略.

<sup>5</sup>如果是液体或固体,一方面由于不同的偶极子间的相互影响不可忽略导致公式需要修正,也因为极化方式还有取向极化等所以需要修正,但全都只影响定量结果,定性的图像仍然是适用的.



通常,把  $nZe^2/\epsilon_0 m$  称作**等离子体频率**(plasma frequency) 的平方  $\omega_p^2$ . 那么上式也作:

$$\epsilon' = \epsilon_0 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega/m} \epsilon_0$$

出现虚部其实就意味着损耗,在振动的过程中电场在持续不断地对振子输入能量而导致了电磁波的衰减. 只不过这里的损耗并不是导电行为导致的. 写出复电容率的实部和虚部  $\epsilon' = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ :

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega/m)^2} \right]$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 \cdot \frac{\gamma\omega_p^2\omega/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega/m)^2}$$

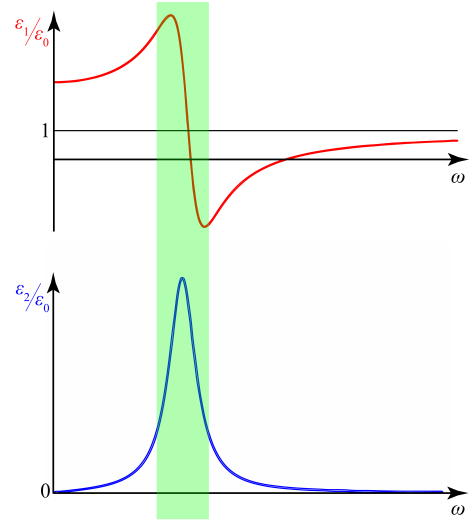


图 3.3: 复电容率与频率的关系

两个函数看上去复杂,其实都属于近似的**洛伦兹型函数**(lorentzian function). 图像如右图所示. 在绿色带状区域这个函数有着较大的转折. 这发生在  $\omega \approx \omega_0$  处. 若做近似,认为反应损耗的  $\gamma$  较小. 则令  $\omega^2 - \omega_0^2 = x$ ,  $\gamma\omega_0/m = a$ , 那么上式在带状区域附近近似为标准的洛伦兹型:

$$\epsilon_1/\epsilon_0 = 1 - \omega_p^2 \cdot \frac{x}{x^2 + a^2}$$

$$\epsilon_2/\epsilon_0 = \omega_p^2 \cdot \frac{a}{x^2 + a^2}$$

电容率的实部在带状区域由区域外的缓慢增加转为剧烈减少,而恰好这样一个区域,电容率的虚部突然变得很大. 我们习惯上用虚部这种洛伦兹函数增加到最大值的一半的两个点之间的间距作为特征的**半高峰宽**(full width at half maximum, FWHM). 对于洛伦兹型,其值恰为  $x = \pm a$  之间的间距  $2a$ ,但是注意到要转化为  $\omega$  对应的间距,它恰好为:

$$\Gamma = \frac{\gamma}{m}$$

我们可以从这个模型中清楚地看到两个物理现象:**色散**(dispersion) 与**吸收**(absorption). 前者就是说折射率依赖于波长,这和复电容率的实部依赖于频率只是说法不同本质一样. 而复电容率的虚部,根据之前的讨论,也就代表吸收. 我们发现在入射光的频率近似为谐振子的固有频率  $\omega_0$  时,对应经典力学中发生共振的区域附近,色散和吸收都变得很显著. 我们知道,经典电子论给出的解释仅仅是一个唯象模型,所以相关的参数都要根据实验结果来确定.  $\omega_0$  可以根据发生强烈吸收与色散的波长来确定,而  $\gamma/m$  则根据吸收峰的半高峰宽  $\Gamma$  来确定,最后等离子体频率  $\omega_p$  则比较有趣,我们恰好可以根据零频率处的折射率  $n_0$  来确定它:

$$n_0^2 = \epsilon_1(0)/\epsilon_0 = 1 + \omega_p^2/\Gamma^2$$

那么实际情况是否这么简单呢? 至少通过对右图的常温下水的色散的测量中我们发现,除了在可见光波段水几乎是透明的而具有大约 1.33 的折射率,在近红外 (0.8-2.5 $\mu\text{m}$ ) 与中红外 (2.5-15 $\mu\text{m}$ ) 波段的短波区定性上符合以上模型推导出来的结果. 但是中红外到远红外 (15-1000 $\mu\text{m}$ ) 则明显偏离以上结果.

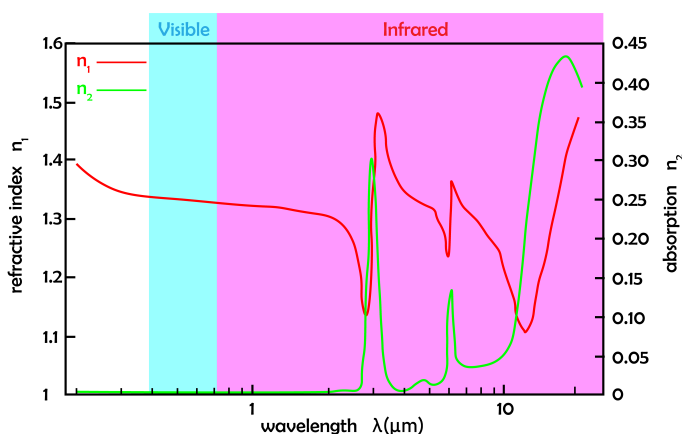


图 3.4: 水的可见-红外色散曲线

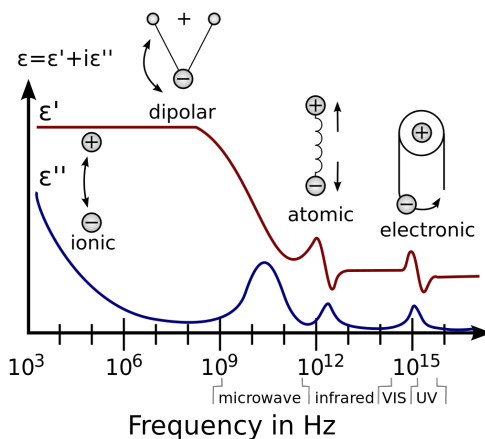


图 3.5: 光与原子作用类型

事实上,在不同的波段,适用于不同的光与物质相互作用的基本模型.微波波段光波长足够长使得晶体的正负离子做大范围的整体相对运动<sup>6</sup>,就是晶格振动.红外则开始使得分子振动,包括转动和振动等不同形式.再往下的可见波段才是电子共振,也包括原子间的能带共振和原子内的能级共振.最后在紫外波段,电子甚至能直接被电离,这就造成了光与物质相互作用问题的复杂性.

但无论哪种相互作用的机制,我们上述推导得到的描述有着特定共振频率的色散与吸收的最终公式是十分普适的.它只有三个待定的参数:共振频率  $\omega_0$ , 半高峰宽  $\Gamma$  和反应共振强度的等离子体频率  $\omega_p$ .我们接下来要做的,是把不同振子,不同吸收效应带来的结果进行求和:

$$\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 1 + \omega_p^2 \cdot \sum_i \frac{c_i(\omega_i^2 - \omega^2)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \Gamma_i^2 \omega^2}$$

$$\varepsilon_2/\varepsilon_0 = \omega_p^2 \cdot \sum_i \frac{c_i \Gamma_i \omega}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \Gamma_i^2 \omega^2}$$

其中  $\omega_p$  仍然统计各个吸收峰的总强度,而  $c_i$  系数的和必须为 1 则统计各个吸收峰的相对强度.我们最后计算远离吸收带处的折射率值.忽略各个  $\Gamma_i$  后得到:

$$n^2 = 1 + \omega_p^2 \cdot \sum_i \frac{c_i}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

于是便得到著名的色散关系:

$$n^2 = 1 + \sum_i a_i \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2}, \quad a_i = \frac{c_i \omega_p^2 \lambda_i^2}{4\pi^2}$$

上式依然可以做近似,把共振的各个波长  $\lambda_i$  从小到大按  $i$  来排列.不妨设  $\lambda_i \ll \lambda_{i+1}$ , 而  $\lambda$  恰好夹在两者之间,那么:

$$n^2 =$$

## 3.2 色散, 散射与吸收

## 3.3 群速与展宽

## 3.4 光子

<sup>6</sup>十分类似于热运动的那种形式,区别在于这是外场诱导的有规律的振动,而且正负电荷位移一定反相,对应热振动的特定光学支。