

高二物理竞赛 • 力学 (下)

学而思

目录

第一章 运动学	3
第二章 动力学	5
第三章 静力学	7
第四章 简谐振动	9
4.1 方程与谐振	9
4.1.1 简谐振动的定义	9
4.1.2 简谐振动的性质	9
4.1.3 简谐振动的判定	10
4.1.4 小振动	11
4.2 阻尼振动与受迫振动	12
4.2.1 阻尼振动	12
4.2.2 受迫振动	14
4.3 多自由度小振动 *	18
4.3.1 基于线性代数与分析力学的简正坐标求解	20
4.3.2 基于对称性的简正模判定与简正频率求解	24
4.4 格波	30
第五章 万有引力	35
5.1 有心力下质点运动	35
5.1.1 运动的一般特征	35
5.1.2 有心力问题的求解	36
5.2 万有引力下天体运动	39
第六章 刚体	41
6.1 刚体的物理描述	41
6.2 平面平行运动	43
6.3 空间刚体运动 *	44
第七章 弹性体	47
7.1 弹性体的物理描述	47
7.2 弹性棒, 弹性绳, 弹性膜与弹性体	51
7.2.1 弹性棒	51
7.2.2 弹性绳	52
7.2.3 弹性膜	53

7.2.4 弹性体 *	54
7.3 弹性波	55
7.3.1 分离变量法	55
7.3.2 变量代换法	56
7.3.3 多维情况	56
第八章 流体	59
8.1 流体的物理描述	59
8.2 定常流动动力学	62
8.3 黏滞流体动力学	63

第四章 简谐振动

4.1 方程与谐振

4.1.1 简谐振动的定义

振动是最常见的物理现象. 而振动中的最简单 (simple) 而和谐 (harmonic) 者谓之简谐振动 (simple harmonic oscillation). 对谐振子 (harmonic oscillator) 的学习与研究是会贯彻整个物理理论不同层次内容的始终的. 现在是经典力学, 以后会上升到场论, 量子力学与量子场论的高度.

简谐振动是指一个物理量 Q 随时间围绕其平衡位置做上下的波动. 其形式符合:

$$Q = Q_0 + \Delta Q \cos(\omega t + \varphi)$$

我们经常会有用复数表示振动的习惯, 其做法是在三角函数 \cos 与其宗量 (argument) $\phi = \omega t + \varphi$ 构成的项后添加一个虚的 $i \sin \phi$ 项, 于是新的写法变成:

$$\tilde{Q}(t) = Q_0 + \Delta Q e^{i(\omega t + \varphi)}; \quad Q = \Re(\tilde{Q})$$

又或者:

$$\tilde{Q}(t) = Q_0 + \Delta \tilde{Q} e^{i\omega t}; \quad \Delta \tilde{Q} = \Delta Q e^{i\varphi}$$

以上各个常量中, Q_0 是平衡位置, ΔQ 叫振幅 (amplitude), 宗量 $\omega t + \varphi$ 叫做相位 (phase), ω 叫角频率 (angular frequency), φ 叫初相位. \tilde{Q} 为复化的复物理量, 而 $\Delta \tilde{Q}$ 叫做复振幅 (complex amplitude).

复数表示最大的一个好处就在于很方便计算物理量的线性组合与导数. 事实上, 如果合理选取 $Q_0 = 0$:

$$\dot{Q} = -\omega \Delta Q \sin \phi; \quad \dot{\tilde{Q}} = i\omega \tilde{Q} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = \Re(\dot{\tilde{Q}})$$

$$\ddot{Q} = -\omega^2 \Delta Q \cos \phi; \quad \ddot{\tilde{Q}} = -\omega^2 \tilde{Q} \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q} = \Re(\ddot{\tilde{Q}})$$

4.1.2 简谐振动的性质

以一个质点水平坐标 x 围绕 $x = 0$ 左右做谐振为例. 其运动方程写作¹:

$$x = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

那么其速度与加速度为:

$$v = i\omega A e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad a = -\omega^2 A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

我们发现在运动过程中的任意一个时刻, 加速度都是指向平衡位置的, 与偏离平衡位置的位移是成正比的:

$$a = -\omega^2 x$$

¹以后我们对物理量和物理量的复化只在必要的时候加以区分, 看到复数只需要认为省写了取实部这一例常操作罢了.

而任意一个时刻既然 x 是宗量的余弦函数, v 是正弦函数, 它们就满足其绝对值大小的“此消彼长”关系²:

$$v^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$$

相位是很重要的物理概念, 相(phase), 状态也, 相位则是一个可以用来表示状态的数. 反过来, 我们可以根据物体在一个时刻的状态反过来确定这个时刻的相位. 如果位移是 x 而振幅为 A , 则:

$$\phi = \text{Arcsin} \frac{x}{A}, \text{Arcsin} \frac{x}{A} \in \left\{ \arcsin \frac{x}{A} + 2n\pi | n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \arcsin \frac{x}{A} + 2n\pi | n \in \mathbb{Z} \right\}$$

同理如果已知速度 v 和速度振幅(velocity amplitude) ωA , 那么相位为:

$$\phi = \text{Arccos} \frac{v}{\omega A}, \text{Arccos} \frac{v}{\omega A} \in \left\{ \arccos \frac{v}{\omega A} + 2n\pi | n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\arccos \frac{v}{\omega A} + 2n\pi | n \in \mathbb{Z} \right\}$$

相位的取法上具有多值性. 但是相位随时间的变化我们约定必须是连续的, 事实上它随时间线性增加. 也就是说如果前一个状态下相位为 ϕ_1 , 后一个状态下相位为 ϕ_2 , 那么这两个状态间历时:

$$\Delta t = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\omega}$$

4.1.3 简谐振动的判定

事实上以上的两个关系都可以成为体系做简谐振动的判据, 它们为:

- 线性回复判据: 如果一个随时间演化的变量的二阶导数正比于变量本身, 且符号相反, 可以判断变量做简谐振动:

$$\ddot{q} = -\omega^2 q \Rightarrow q = A \cos(\omega t + \varphi)$$

- 此消彼长判据: 如果一个随时间演化的变量的一阶导数与自己的正系数平方和为动力学守恒量 (一般就是能量). 可以判断变量做简谐振动:

$$\dot{q}^2 + \omega^2 q^2 = \omega^2 A^2 \Rightarrow q = A \cos(\omega t + \varphi)$$

证明如下:

线性回复 \Rightarrow 此消彼长:

首先进行代换:

$$\ddot{q} = \frac{d}{dt}(\dot{q}) = \frac{dq}{dt} \frac{d}{dq}(\dot{q}) = \frac{\dot{q} d\dot{q}}{dq}$$

将上式代入 $\ddot{q} = -\omega^2 q$:

$$\dot{q} d\dot{q} + \omega^2 \cdot q dq = d\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2\right) = 0 \Rightarrow \dot{q}^2 + \omega^2 q^2 = C$$

命 $A = \sqrt{C/\omega^2}$ 即得到此消彼长判据.

此消彼长 \Rightarrow 简谐振动:

考虑 \dot{q} 的正根即可, 负根结果也是简谐振动:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{dq}{dt} = \omega \sqrt{A^2 - q^2} \\ \Rightarrow \frac{dq}{\sqrt{A^2 - q^2}} &= \omega dt \end{aligned}$$

两边同时积分, 积分常数写到右侧记作 φ , 得到:

$$-\arccos \frac{q}{A} = \omega t + \varphi \Rightarrow q = A \cos(\omega t + \varphi)$$

²注意到这里 (往下) 要避免使用复数, 因为一个复数的实部平方不会等于其平方的实部 $v^2 \neq \Re(\tilde{v}^2)$

4.1.4 小振动

值得注意的是,很多情况下体系的运动并不是严格的简谐振动.十分常见的一种情况是**小振动**(small oscillation).事实上,如果我们研究体系为完整而稳定的一自由度体系,广义坐标为 q ,而且势能函数 $V(q)$ 存在一个极小值:

$$V'(q_0) = 0, \quad V''(q_0) > 0$$

那么根据上一章的阐述,这个 q_0 就是体系的稳定平衡位置.那么,任何偏离这个平衡位置的系统运动只要偏离的值足够小,即做坐标变换 $\delta = q - q_0$ 为无穷小量,那么就一定为简谐振动.这是因为势能可以由泰勒展开为:

$$V = \frac{1}{2}V''(q_0)\delta^2 + \frac{1}{3!}V'''(q_0)\delta^3 + \dots$$

只要 δ 足够小,三阶项就必然远小于二阶项.从而可以只保留第一项.同理这也适用于动能,它必然正比于 $\dot{\delta}$ 的平方,系数则与平衡位置有关:

$$T = \frac{1}{2}M(q_0)\dot{\delta}^2$$

从而这个体系的能量函数(哈密顿量)就被近似为了:

$$H = T + V = \frac{1}{2}M(q_0)\dot{\delta}^2 + \frac{1}{2}V''(q_0)\delta^2$$

这就直接符合了“此消彼长”判据.从而小振动的角频率为:

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(q_0)}{M(q_0)}}$$

例如,在典型的单摆问题中,取摆线与竖直方向的夹角 θ 为广义坐标.摆球的重力势能以平衡位置为原点表示为:

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$$

而动能为:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow M(\theta) = ml^2$$

从而只需要带入以上公式,就得到:

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(0)}{M(0)}} = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

这是因为事先看出来了稳定平衡点为 $\theta = 0$.简单的小振动问题的思路都大抵如此.第一步是写出能量函数来,它决定体系的所有可能的动力学演化.第二步要找到稳定平衡位置,往往一样地是通过势能函数的增减凹凸性来判断,往往也要结合体系的对称性来观察.最后便是在平衡位置处把动能势能都近似为简单的平方项.唯一需要补充的是,除了利用二阶导数来计算这一个平方项,对常见函数写泰勒展开式也是十分常见的思路.

单摆问题的周期从而就是:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

但是一定要注意这个振动仅仅对小振动成立.例如在摆角为 $10^\circ = 0.087\text{rad}$ 时会有约 2‰ 的误差.如何计算这个误差?之后的非线性振动将讨论这个问题.

4.2 阻尼振动与受迫振动

4.2.1 阻尼振动

阻尼振动,狭义地是指普通的弹簧型谐振子,但是让振子运动的空间充满介质而产生湿摩擦(流体摩擦),从而产生一个正比于速度的阻尼的情形.其牛顿定律为:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

这里的 γ 即**阻尼系数**(damping coefficient). 习惯上把 m/γ 称作**弛豫时间**(relaxation time). 最后还定义**衰减参数**(attenuation parameter) 或**损耗参数**(loss parameter) 为:

$$\beta = \frac{\gamma}{2m}$$

而无阻尼情况下的**固有频率**(natural frequency), 这里是角频率, 为:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

这样原来的方程又被重新写为:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

我们定义广义的**阻尼振动**(damped oscillation), 只需要一个运动的任意自由度 q , 符合或者可以近似为以上式子形式的动力学方程, 那么这个自由度上的运动就是一个阻尼振动. 所有的阻尼振动只有两个常数特征, 一个是固有角频率, 一个是损耗的大小.

阻尼振动的求解需要分为三种情况. 我们统一猜解:

$$x = Ae^{i\omega t}$$

带入原方程以后发现 ω 需要满足:

$$\omega^2 - 2i\beta\omega - \omega_0^2 = 0$$

从而:

- **欠阻尼**(underdamped)

常见的小阻尼情况, 此时 $0 < \beta < \omega_0$. 通过对以上方程求解得到两个含有正虚部的关于虚轴对称的根:

$$\omega_{1,2} = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

这样就得到了原阻尼振动方程的通解:

$$x = e^{-\beta t} [A \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t) + B \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t)] = Ce^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi)$$

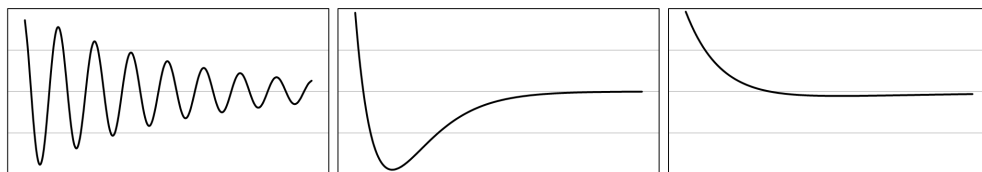


图 4.1: 欠阻尼, 临界阻尼与过阻尼

- **过阻尼**(overdamped)

此时 $\beta > \omega_0$. 从而振动和回复力被极大地抑制了. 主要是一个在大阻力和初速度下缓慢回到平衡位置的运动. 以上方程两根此时为两个正虚根:

$$\omega_{1,2} = i(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})$$

这样就得到了原阻尼振动方程的通解:

$$x = e^{-\beta t} [Ae^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t}] = Ce^{-\beta t} \cosh(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t + \varphi)^3$$

- **临界阻尼**(critical damped)

这对应 $\beta = \omega_0$ 的特殊情况. 可以通过微分方程的理论, 或者采用求 $\beta \rightarrow \omega_0$ 极限的方式得到此时的运动方程. 它为:

$$x = e^{-\beta t} (A + Bt)$$

临界阻尼在实际生活中的应用为: 它是较快能够让振子回到平衡位置的理想阻尼大小. 这一点不难理解, 不难看出, 欠阻尼情况的振幅随时间的衰减方式为 $e^{-\beta t}$, 也就是适当增大 β 有利于振幅尽快衰减. 但是, 过阻尼时, 长时间后位移与时间的关系为

$$x \sim e^{-\beta t} \cosh(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t) \sim e^{-\beta t} e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} \sim e^{-\frac{\omega_0^2 t}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}}$$

这就不难发现, 此时增加 β 只会使得 t 前的衰减系数变小而不利于尽快衰减其位移. 从而, 无论是欠阻尼还是过阻尼, 临界阻尼是它们能够尽快回到平衡位置的极限. 此时原来的固有频率对应的周期就是它回到平衡位置的特征时间.

对于欠阻尼情况, 尤其是衰减因子 $\beta \ll \omega_0$ 的小阻尼情况, 还有一些重要的性质值得挖掘. 下面都默认是这样的话:

从之前的运动方程解不难看出, 我们可以把小阻尼情况下的运动方程看作是一个振幅不断随着时间衰减的简谐振动. 其振幅衰减函数和阻尼化角频率为:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx \omega_0$$

要讨论其衰减的原因, 还有一种新的角度, 便是考虑其能量. 当振幅为 A 时, 其动能, 势能的和为:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

现在它不是守恒的, 仅仅是在少数几个周期里面 “近似” 守恒. 但是我们可以考虑求它在一个周期内的平均:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \omega_d^2 A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \frac{\omega_0^2 + \omega_d^2}{2} A^2 \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$$

现在我们计算单位时间减少的能量的平均值. 它其实就是阻尼造成的负功功率的平均值:

$$\bar{P} = \overline{\gamma v \cdot v} = \frac{1}{2} \gamma \omega_d^2 A^2 \approx \frac{1}{2} \gamma \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cdot 2\beta$$

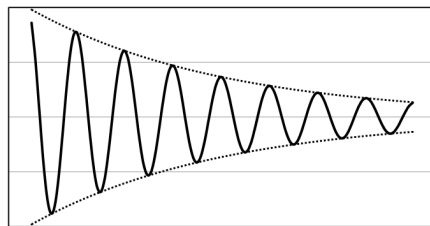


图 4.2: 小阻尼下的振幅衰减

³也有可能是 \sinh

通过损耗功率等于能量的负导数,也可以得到振幅随着时间衰减的具体结果.我们现在关心一个重要的量,它实际上是反应振子振动单位时间所减少的能量占由于以 ω_0 振动导致的总能量转化速率的比例,我们把上式换一种写法:

$$\bar{P} = \frac{\omega_0 \bar{E}}{Q}$$

以上引入的 Q 就是著名的**品质因数**(quality factor). 它越大,表示损耗越低,振子的阻尼就越小,就越接近“谐振”.实际上它算法为:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

品质因数经常与另一个因子一起提出,两者是简单的倒数关系,更精确地,我们定义:

$$\sin \delta = \frac{1}{2Q} = \frac{\beta}{\omega_0}$$

δ 被称作**损耗角**(loss angle). 一定要注意这两个概念是普遍的. 谐振子模型是很多实际问题的抽象,它们作为谐振子都有自己的品质因数或损耗角,用以描述过程的一些共性,而且,不光可以用能量的损失的共性来定义品质因数和损耗角,还有很多重要的方式. 详情见后.

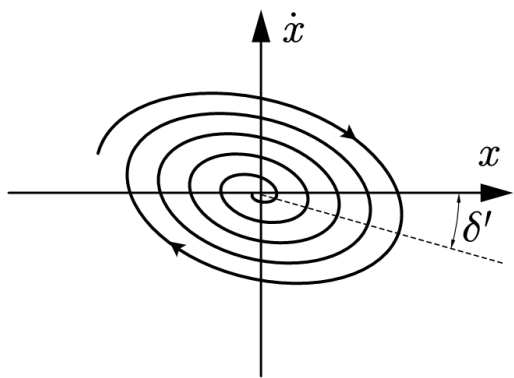


图 4.3: 阻尼振动的相图

现在我们来考虑简谐振动的**相图**(phase diagram). 在动力学中,这总是指把单个过程的运动,画成以其广义坐标和广义速度(或动量)为坐标轴的**相空间**(phase space)中的曲线形成的图像. 阻尼振动的代表性解为:

$$x = Ae^{-\beta t} e^{i\omega_d t}$$

在这个解下,其速度为:

$$\dot{x} = (i\omega_d - \beta)Ae^{-\beta t} e^{i\omega_d t}$$

两个量都在随时间衰减. 从而在相图上就体现为一随着时间不断向着原点靠近的螺旋线. 如果没有阻尼,那么标准简谐振动的相轨迹就是正椭圆:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 A^2} = 1$$

但是,有阻尼时除了是螺旋式的椭圆,它还不是“正”的. 事实上,如果去除衰减因子,即将 x 和 \dot{x} 乘以个 $e^{\beta t}$ 以抵消其衰减:

$$X = xe^{\beta t} = Ae^{i\omega_d t}, \quad V = \dot{x}e^{\beta t} = i(\omega_d + i\beta)Ae^{i\omega_d t}$$

两者之间也不是恰好相差相位 $\pi/2$, 而是有一个额外相位差:

$$\delta = \arctan \frac{\beta}{\omega_d} = \arcsin \frac{\beta}{\omega_0}$$

可以发现这个相位差就是损耗角. 也就是说,损耗角的另一种理解方式是位置与速度振动过程中的相位夹角. 作为结果,其相图中的椭圆也要倾斜一个角度 δ' . 可以证明,损耗角越大,这个倾斜角度也会越大.

4.2.2 受迫振动

如果在谐振子上施加一个周期性的策动外力. 我们总是研究基本的简谐式的外力⁴:

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad \text{i.e.} \quad F(t) = F_0 \cos \omega t$$

⁴傅里叶分析理论告诉我们,任何函数都可以分解为无穷多助三角函数的线性组合. 故对于线性系统原则上就可以用叠加原理处理任意任意强迫力的运动求解: 只要我们把简谐强迫力找到解法.

这个运动就称作**受迫振动**(driven oscillation). 这样子原来的方程就变为:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

很明显, 可以猜一个谐振解. 它是上述微分方程的特解 (稳态解). 通解还需要加上上一部分讨论的阻尼振动解 (齐次方程的解是暂态解). 注意其振动频率应当是策动力的频率 ω 而不是体系的固有频率 ω_0 :

$$x = A e^{i\omega t} \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega)A = \frac{F_0}{m}$$

故, 复振幅的解法也是相当地直接:

$$A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}$$

作为复振幅, 上 A 表达式其实同时包含了两个因素, 一个是振幅, 一个是相位. 现在我们分离它们:

$$A = |A| e^{i\varphi}$$

$$|A| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\varphi = -\arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{or} \quad \varphi = -\left(\pi - \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

这就构成了两个关于 ω 的函数. 这也是实验上我们特别关心的两个函数, 它们反映在稳态受迫振动的时候, 一定外力下振子产生的振幅与相位究竟是怎样取决于策动力的角频率的. 这就是著名的**幅频特性**(amplitude-frequency characteristic) 和**相频特性**(phase-frequency characteristic). 利用之前定义的品质因数 Q , 再令 $x = \omega/\omega_0$. 整理得:

$$|A| = \frac{QF_0/m\omega_0^2}{\sqrt{Q^2(1-x^2)^2 + x^2}}$$

$$\varphi = -\arccos \frac{Q(1-x^2)}{\sqrt{Q^2(1-x^2)^2 + x^2}}$$

我们依然只考虑小阻尼情况. 此时 Q 较大. 比如如图 4.4 所示, $Q = 5, 10, 20$ 等.

那么受迫振动又被分为三种情形:

- 低频区为弹性控制区.

在 $\omega \ll \omega_0$ 时, $m\ddot{x}$, $\gamma\dot{x}$, kx 三项中最后一项最大, 主要是弹簧的弹性力与策动力去平衡. 从而体现出以下计算结果:

$$|A| \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

$$\varphi \approx 0$$

也就是策动力与位移几乎同相, 振子有充分的时间去实现平衡.

- 高频区为惯性控制区.

在 $\omega \gg \omega_0$ 时, $m\ddot{x}$, $\gamma\dot{x}$, kx 三项中第一项最大, 主要是高速变化的策动力去直接产生振子加速度. 从而体现出以下计算结果:

$$|A| \approx \frac{F_0}{m\omega^2} = \frac{F_0}{m\omega^2}$$

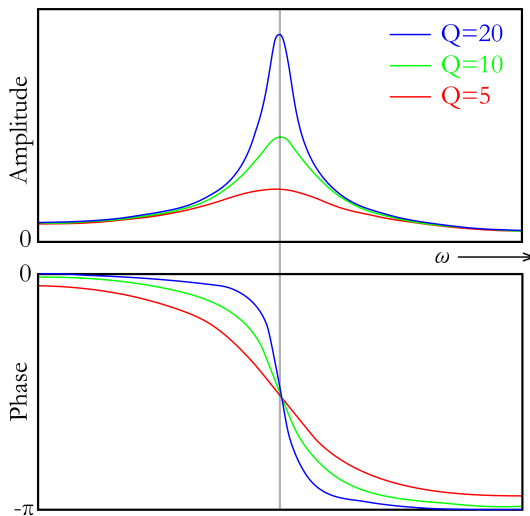


图 4.4: 幅频, 相频特性

$$\varphi \approx -\pi$$

也就是策动力与位移几乎反相 (亦反向). 振子 “随波逐流”, 弹性力和阻尼力没有时间跟上策动力的节奏.

• 中频区为共振区.

在 ω 在 ω_0 附近, 即量级接近时. 三个项 $m\ddot{x}$, $\gamma\dot{x}$, kx 也量级相当. 如果把结果画成图4.4. 可以发现十分典型的现象是, 振幅在某频率处取到了极值. 而相位差 (绝对值) 在某频率处从小于 $\pi/2$ 增加到大于 $\pi/2$.

共振(resonance) 是谐振子系统中十分典型的现象. 一个共振发生的时候有两个量是值得关注的:

第一个值得关注的共振参数, 是共振的峰的位置. 即**共振频率**(resonance frequency). 但是这个因素又被分为位移共振和速度共振, 即位移振幅 $|A|$ 最大或者速度振幅最大的角频率值. 或者可以证明, 等价的是, **振幅共振**(amplitude resonance) 和**相位共振**(phase resonance). 前者指的是响应 x 最大的点:

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \omega \approx \omega_0$$

后者则指响应和策动力完全相位差为 $\pi/2$ 的情况:

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0$$

可见两个共振在小阻尼情况下几乎是重合的. 在振幅共振的情况下, 振幅最终为:

$$|A| = Q \cdot \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot \sqrt{\frac{4Q^2}{4Q^2 - 1}} \approx Q \cdot \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

如果以这个角频率的外力 F_0 直接作用在自由的质点上, 或者是考虑让一个没有阻尼的振子进行固有振动并使弹簧给振子的力就是 F_0 . 我们发现振子振幅应当是 $F_0/m\omega_0^2$. 这就是说共振时振幅成为了这个振幅的 Q 倍. 说明了如果让体系从静止开始, 自某一时刻开始受到周期性的外力而产生振动, 如果频率接近固有频率, 体系会十分反常的振幅越来越大, 直到振幅是自由振幅的 Q 倍. 这也是品质因数的第二种理解方式: 共振的放大倍数.

在看相位共振时的策动力-相位差为 $\pi/2$ 的现象. 这说明了什么? 这说明策动力与速度完全就是同相的. 带入 $x = 1$ 容易计算此时位移振幅为 $|A| = QF_0/m\omega_0^2$, 等效地可以写成 $F_0 = m\omega_0^2|A|/Q$. 那么速度振幅就是 $\omega_0|A|$. 从而策动力对速度单位时间做的功就是:

$$W = \overline{F(t)\dot{x}(t)} = \frac{1}{2}F_0\omega_0|A| = \frac{1}{2}m\omega_0^3|A|^2 / Q$$

这与上一部分得到了相似的结果. 因为振动的能量其实就是:

$$\bar{E} = \frac{1}{2}m\omega_0^2|A|^2$$

也就是说品质因数反映了耗散的能量与总能量 (动能势能互相转换) 的比例:

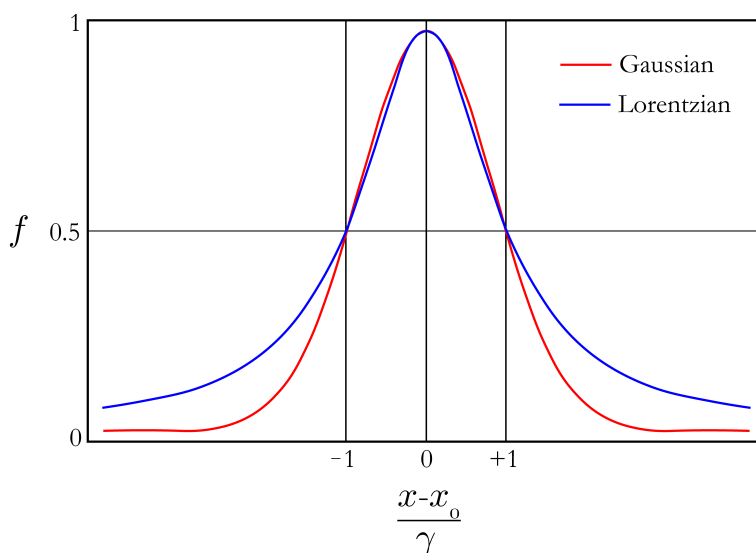
$$Q = \frac{\omega_0 \bar{E}}{W}$$

第二个值得关注的共振参数, 是共振的峰的宽度. 谐振子模型给出的幅频曲线, 与著名的**柯西分布**(Cauchy distribution) 对应的函数曲线有密切联系, 柯西分布又常常因为在理论物理学中的广泛使用而称作**洛伦兹型**(lorentzian shape)⁵. 所谓柯西分布最初来自概率分布模型, 它是指以下分布函数:

$$\text{pdf.}^6 = \frac{1}{\pi[\gamma^2 + (x - x_0)^2]}$$

⁵比如谱线的形状, 即线型, 就常被视作洛伦兹线型.

⁶probability distribution function, 即概率分布函数的缩写.

图 4.5: 高斯型和洛伦兹型⁷

这样一个分布函数是需要有归一化的要求的:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{pdf.} dx = 1$$

但是现在的幅频特性,明显与洛伦兹型是有出入的.第一是,我们需要把因变量修改为 $I = |A|^2$ 而不是 $|A|$.这代表振动的强度而不是振幅.第二是,不同于柯西分布的分母为二次函数,这里的分母却作为 x 的四次函数,是 ω 的四次函数.虽然 $I(\omega)$ 与柯西分布有别,而且也不归一化.但是却体现出类似的性质.它们都是有一个峰,并在峰两侧按照较慢的多项式的方式衰减(而不是像高斯型那样指数衰减).而且我们都用**半高峰宽**(FWHM, full width at half maximum)来描述峰的宽度.它被定义为函数值,或者代表的强度减少为峰值的一半对应的两点之间的区间宽度.对于标准的洛伦兹型,容易发现半高峰宽就是:

$$\text{FWHM} = 2\gamma$$

谐振子的幅频曲线的半高峰宽就更加难算.我们此时会采取一个近似技巧,不难验证其正确性.注意到在洛伦兹型中取到半高的点处分母中的两项是相等的,于是有理由相信在 $I(x)$ 函数情况下,直接让分母两项相等也就近似是在半高点处:

$$I(x) = I_0 / \left[(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right] \Rightarrow I_{\max} \approx I_0$$

$$I = \frac{I_{\max}}{2} \Rightarrow 1 - x^2 \approx \pm \frac{x}{Q}$$

这就可以确定,取到半高的点 x_+ , x_- 为:

$$x_+ = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q} \quad ; \quad x_- = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q} \Rightarrow x_+ - x_- = \frac{1}{Q}$$

而 $\omega_+ = x_+\omega_0$, $\omega_- = x_-\omega_0$. 从而半高峰宽就是:

$$\text{FWHM} = \Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{\omega_0}{Q}$$

我们又发现了品质因数的一种常见定义方式,它被定义为谱线的**锐度**(sharpness),即峰处角频率与半高峰宽的比值:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

⁷高斯型是指高斯分布:

$$\text{pdf.} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

4.3 多自由度小振动 *

多自由度小振动,首先得是一个多自由度平衡问题.在上一章带约束的完整系统的静力学平衡的基础上.如果体系还存在 f 个自由度,与之对应的有 f 个广义坐标 q_i .那么我们指出过,体系的平衡条件为:

$$Q_i = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = 0$$

但是在绝大多数情况下,我们处理的是保守体系的问题.所以这种场合下又有势能函数 $V(q_i)$.广义力也能从势能中得到:

$$Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

这完全就能得到保守体系的平衡条件:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

又是在绝大多数情况下,势能函数是性质非常好的函数⁸.从而可以在平衡位置附近泰勒展开.把平衡位置记作 q_{i0} ,而偏离平衡位置的位移为 δ_i ,平衡位置处势能记作 $V_0 = V(q_{i0})$,由于平衡位置一阶导数为零,故:

$$V(q_{i0} + \delta_i) = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_{i0}} \delta_i \delta_j + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} \left. \frac{\partial^3 V}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \right|_{q_{i0}} \delta_i \delta_j \delta_k + \cdots$$

在忽略三阶小量(不会成为领头项,条件下面再讨论)的前提下,再通过去掉常数 V_0 ,不影响势能的效果.我们发现势能实际上就成为了一个二次型:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_{i0}} \delta_i \delta_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \delta_i \delta_j$$

而动能,由于在平衡位置附近小范围内做小的运动,当然也是一个关于广义速度的二次型,系数为常数 T_{ij} :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\delta}_i \dot{\delta}_j$$

关于系数 T_{ij} , V_{ij} .一个要求是它们必须对称:

$$T_{ij} = T_{ji} \quad ; \quad V_{ij} = V_{ji}$$

其中的道理非常简单,例如只有两个广义坐标的变化 δ_1, δ_2 .那么 $V_{12} = a \neq V_{21} = b$ 所决定的势能二次型与 $V_{12} = V_{21} = (a+b)/2$ 决定的二次型根本就是同一个:

$$V_{12} = a \neq V_{21} = b : V = \frac{1}{2} V_{11} \delta_1^2 + \frac{1}{2} V_{22} \delta_2^2 + \frac{1}{2} a \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{2} b \delta_2 \delta_1 = \frac{1}{2} V_{11} \delta_1^2 + \frac{1}{2} V_{22} \delta_2^2 + \frac{1}{2} (a+b) \delta_1 \delta_2$$

$$V_{12} = V_{21} = \frac{a+b}{2} : V = \frac{1}{2} V_{11} \delta_1^2 + \frac{1}{2} V_{22} \delta_2^2 + \frac{1}{2} \frac{a+b}{2} \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{2} \frac{a+b}{2} \delta_2 \delta_1 = \frac{1}{2} V_{11} \delta_1^2 + \frac{1}{2} V_{22} \delta_2^2 + \frac{1}{2} (a+b) \delta_1 \delta_2$$

反过来,如果给一个二次型,我们也中总可以把系数写成对称的形式,比如在动能中,毕竟偏导数本身也是可交换次序的:

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\delta}_i \partial \dot{\delta}_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\delta}_j \partial \dot{\delta}_i} = T_{ji}$$

⁸数学上叫做光滑函数.

举两个例子. 在**耦合摆**(coupled pendulum) 问题4.6中, 分开看是相同的两个单摆, 但却因为弹簧而发生弱的耦合, 设想弹簧原长为 x 为摆间距, 这样就使得两单摆按原来的位置平衡时, 弹簧也没有作用力. 但只要一发生运动就彼此影响, 设两摆球距离 $x' = \sqrt{(x + l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2 + (l \cos \theta_2 - l \cos \theta_1)^2}$. 这样作为整体体系动能和势能为:

$$T_{cp} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2$$

$$V_{cp} = mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}k(x' - x)^2$$

再引入描述耦合强度的参量 $\varepsilon = kl/mg$, 小量近似以后, 动能, 势能被近似为二次型:

$$T_{cp} = \frac{1}{2} \cdot ml^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot ml^2 \cdot \dot{\theta}_2^2$$

$$V_{cp} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \varepsilon)mgl \cdot \theta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot (1 + \varepsilon)mgl \cdot \theta_2^2 - \varepsilon mgl \cdot \theta_1 \theta_2$$

而在**双摆**(double pendulum) 问题4.7中, 两个摆直接悬挂在一起. 也会彼此影响. 体系动能和势能为:

$$T_{dp} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$V_{dp} = mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2)$$

小量近似以后, 动能, 势能被近似为二次型:

$$T_{dp} = \frac{1}{2} \cdot 2ml^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot ml^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + ml^2 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$V_{dp} = \frac{1}{2} \cdot 2mgl \cdot \theta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot mgl \cdot \theta_2^2$$

如果把 T_{ij} 和 V_{ij} 写成矩阵, 那么对应的矩阵叫做**惯性矩阵**(inertial matrix) 和**弹性矩阵**(elastic matrix):

$$[T_{ij}]_{cp} = ml^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [V_{ij}]_{cp} = mgl \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 + \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$[T_{ij}]_{dp} = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [V_{ij}]_{dp} = mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而我们可以发现这两个问题的重大区别在于, 前一个问题动能规整, 势能却具有交叉项. 后一个问题势能规整, 动能却具有交叉项.

当我们遇到一个这样普遍的小振动问题时, 该如何得到其运动的特征. 有两种常见的做法: 一是通过换元来实现动能势能的简化, 这种方法需要较深厚的数学基础, 又最好通过拉格朗日方程来理解一些过程. 我们下面也写出具体的过程, 有兴趣的读者可以做进一步研究; 但也有第二种简易的方法来求解一些直接的量. 我们也在详细讨论的方法之后加上去:

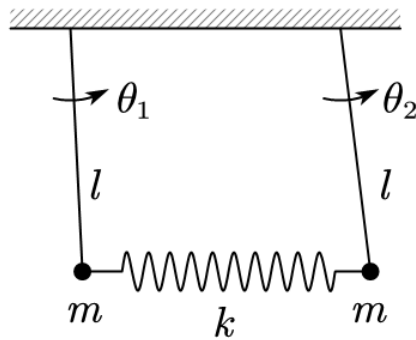


图 4.6: 耦合摆

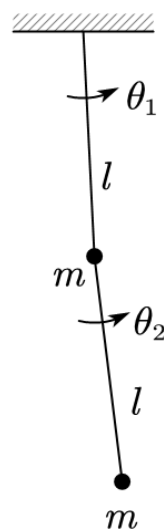


图 4.7: 双摆

4.3.1 基于线性代数与分析力学的简正坐标求解

对一个任意的二次型进行配方并不是难事. 例如 $F(x_1, x_2 \cdots)$ 是一个二次型, 那么它必然可以写作:

$$F(x_1, x_2 \cdots) = \frac{1}{2}f_{11}x_1^2 + x_1(f_{12}x_2 + f_{13}x_3 + \cdots) + (\frac{1}{2}f_{22}x_2^2 + \cdots)$$

即 x_1 自己的项, 和别的变量“耦合”的项以及与 x_1 无关的项. 那么做变量代换:

$$x'_1 = x_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}}x_2 + \frac{f_{13}}{f_{11}}x_3 + \cdots$$

便可以把“耦合”项配方到 x_1 自己的项内, 上式变成:

$$F(x_1, x_2 \cdots) = \frac{1}{2}f_{11}x_1'^2 + F'(x_2, x_3 \cdots)$$

之后只要继续对 F' 配方, 每次可以得到一个完全平方的项, 余项则是剩下的变量的二次型, 变量数至少减一. 这样就可以实现任意二次型的完全配方. 用这个方法可以选择动能或者势能进行化简. 最终形式, 由上讨论, 只包含平方项, 没有交叉项. 由于这样对应的矩阵是对角矩阵. 我们把这样的配方过程称作**对角化**(diagonalization):

$$T = \sum_i \frac{1}{2}T_i\dot{\delta}_i^2 \quad ; \quad V = \sum_i \frac{1}{2}V_i\delta_i^2$$

注意这里动能和势能的对角化是分开来进行的. 对应的系数 T_i 叫做**惯性系数**(inertial coefficient), 而 V_i 叫做**弹性系数**(elastic coefficient). 同时我们对这些系数必然有以下期待:

- 动能的对角化结果:

- 非退化正定二次型: 所有 $T_i > 0$.
- 退化正定二次型: 个别 $T_i = 0$.
- 不可能出现某个 $T_i < 0$.

- 势能的对角化结果:

- 非退化正定二次型: 所有 $V_i > 0$.
- 可以负的二次型: 存在 $V_i < 0$.
- 退化的二次型: 所有 $V_i \geq 0$ 且也存在 $V_i = 0$.

说明:

动能不可以出现负的惯性系数, 是因为在所有情况下动能都必须大于零. 但是在有的情况下惯性系数可以为零, 即, 即使广义速度不为零, 造成的动能为零, 称作**退化**(degenerate) 的情况. 这要么说明体系存在没有动力学效果的冗余自由度. 例如无限细的杆的自转角就是这样的例子. 去掉这个广义坐标也不影响能量的表达式. 要么说明这个自由度上的动能是一个高阶小量. 只是在目前平衡位置, 系数“偶然”地等于了零, 只要偏离这个位置去振动就会产生一定的动能, 抑或我们在实际问题中需要考虑更高阶泰勒展开产生的广义速度的高次项. 后面这种情况一般就与简谐振动无关了. 再次不予考虑. 故我们此后做假设: **所有小振动问题, 动能必须是非退化正定的**.

势能就更加复杂. 势能相对平衡位置本来就可正可负. 那么上面我们分为三种情况其实就包括了所有情况. 有一点是非常突出的, 如果沿某方向偏离平衡位置时, 势能降低了, 那么原平衡位置就一定是**非稳定平衡**(unstable equilibrium). 在仅仅考虑二次型的情况下, 一旦出现一个负的弹性系数这就成为了必然. 但是即使一个负的弹性系数都没有, 也不能因此就下断言原位置是稳定的. 因为还有二次型**退化**的情况. 它发生在某些弹性系数为零时, 此时高阶泰勒展开项如果是负的, 它依然可以不稳定, 普遍情况得考察多个领头

项.但是,有一点很好判断:就是如果所有弹性系数为正,那么原来的位置就一定是**稳定平衡**(stable equilibrium).因为此时任意的偏离平衡位置都使得势能升高.也只有稳定平衡才能作为小振动问题求解的先决条件.故我们此后做假设:**所有小振动问题,势能必须是非退化正定的.**

但是虽然单独对动能或势能对角化简单,但是两者却不会同时对角化.例如在双摆问题中,对于动能:

$$T_{dp} = \frac{1}{2} \cdot 2ml^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot ml^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + ml^2 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = \frac{1}{2} \cdot 2ml^2 \cdot \left(\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{ml^2}{2} \cdot \dot{\theta}_2^2$$

但是如果做换元 $\vartheta_1 = \theta_1 + \theta_2/2$, $\vartheta_2 = \theta_2$, 动能倒是没有交叉项了,但原来好好的势能又产生交叉项了:

$$V_{dp} = \frac{1}{2} \cdot 2mgl \cdot \vartheta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} mgl \cdot \vartheta_2^2 - mgl \cdot \vartheta_1 \vartheta_2$$

所以,我们这里要追求的其实是**同时对角化**(simultaneous diagonalization)的技巧.为了进一步研究,我们先来抽象对角化的过程.根据矩阵理论,任何一个坐标变换,其实是一个线性变换:

$$[q'_i] = [A_{ij}][q_j]$$

这个式子是以下两种写法的缩略形式:

$$q'_i = \sum_j A_{ij} q_j \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ \vdots \\ q'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

它的逆变换: 求出 $[A_{ij}]$ 的逆矩阵 $[B]_{ij}$, 就可以用新坐标表示旧坐标:

$$[q_i] = [B_{ij}][q'_j]$$

而动能,势能都可以用矩阵来表示⁹:

$$T = \frac{1}{2} {}^t[\dot{q}_i][T_{ij}][\dot{q}_j] \quad ; \quad V = \frac{1}{2} {}^t[q_i][V_{ij}][q_j]$$

这样只要把之前的变换代入这两个二次型,就得到了变换之后的二次型:

$$T = \frac{1}{2} {}^t[\dot{q}'_i] {}^t[B_{ij}][T_{jk}][B_{kl}][\dot{q}'_l] = \frac{1}{2} {}^t[\dot{q}'_i][T'_{il}][\dot{q}'_l]$$

$$V = \frac{1}{2} {}^t[q'_i] {}^t[B_{ij}][V_{jk}][B_{kl}][q'_l] = \frac{1}{2} {}^t[q'_i][V'_{il}][q'_l]$$

这说明其实在坐标变换以后,惯性和弹性矩阵是按照右乘一个矩阵,再左乘它的转置来进行的.这种对矩阵的变换数学上叫做**合同变换**(congruent transformation):

$$[T'_{il}] = {}^t[B_{ij}][T_{jk}][B_{kl}] \quad ; \quad [V'_{il}] = {}^t[B_{ij}][V_{jk}][B_{kl}]$$

要把 $[T]$ 和 $[V]$ 同时对角化,其实问题的诀窍是求解**本征值问题**(eigenvalue problem):

$$([V_{ij}] + \lambda[T_{ij}])[x_j] = [0]$$

即,确定是否存在常数 λ ¹⁰ 和非零向量 $[x_j]$ 使得两个矩阵组合以后恰好作为系数使得这个向量作为以上方程的解.乍一看这似乎很抽象.其实这背后的物理意义可以做这样的理解:既然是小振动,就有可能找到一些简单的运动模式,此时所有坐标上都是做不同振幅的简谐振动,即:

$$[q_i] = [x_i] \cos \omega t$$

⁹用 ${}^t[q_i]$ 表示转置,即把列向量写作行向量.

¹⁰后面会知道一定非零.

如何写出这种情况下的动力学方程? 一种完全严谨的做法就是利用上一章讨论的拉格朗日方程:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \dot{q}_i [T_{ij}] \dot{q}_j - \frac{1}{2} q_i [V_{ij}] q_j$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow [T_{ij}] \ddot{q}_j = -[V_{ij}] q_j$$

将简谐振动解带入, 就得到了:

$$([V_{ij}] - \omega^2 [T_{ij}]) [x_j] = [0]$$

从而原来的本征值问题中的 λ 代表的含义就是振动角频率平方 ω^2 . 那么这个本征值问题又如何求解? 首先, 上式中方程组存在解且非零的条件为系数行列式为零:

$$\det([V_{ij}] - \lambda [T_{ij}]) = 0$$

这就构成了关于 λ 的 n 次方程, 他就一定有 n 个根, 不过可以有重根. 把这 n 个根带入, 我们就可以把对应的 n 个本征向量¹¹ $[x_j]$ 找到, 这仅仅是个体力活: 求解至多 n 次 n 元线性方程组. 一旦求解完毕, 我们就找到了 n 个 λ 和 n 个 $[x_j]$, 可以记作:

$$([V_{ij}] - \lambda_k [T_{ij}]) [B_{j,k}] = [0]$$

最后还需证明一点, 就是这 $k = 1, 2 \cdots n$ 个本征值对应的本征向量不仅是独立的, 而且还是正交(orthogonal)的. 注意这里的正交是指:

$$k \neq k' \Rightarrow {}^t[B_{i,k}][T_{ij}][B_{j,k'}] = 0$$

这个正交性足以说明独立性, 毕竟如果 $[B_{i,k}]$ 与 $[B_{i,k'}] = 0$ 不独立, 那么前者 (非零) 就是后者 (非零) 的常数 (非零) 倍, 以上 ${}^t[B_{i,k}][T_{ij}][B_{j,k'}]$ 就会变成常数乘以后者产生的动能, 显然是非零的. 所以一旦上式为零, 两个矢量正交就足以说明它们不会同向.

证明正交性的依据还是它们的定义. 首先我们发现, 如果任意两个矢量恰好成为不同本征值下的本征向量:

$$([V_{ij}] - \lambda_1 [T_{ij}]) [x_{j,1}] = [0], ([V_{ij}] - \lambda_2 [T_{ij}]) [x_{j,2}] = [0], \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

构造式子 ${}^t[x_{i,1}][V_{ij}][x_{j,2}]$. 一方面先计算前面的向量乘弹性矩阵, 一方面也可以先算后面的向量乘弹性矩阵:

$$\begin{aligned} {}^t[x_{i,1}][V_{ij}] &= \lambda_1 {}^t[x_{i,1}][T_{ij}], \quad [V_{ij}][x_{j,2}] = \lambda_2 [T_{ij}][x_{j,2}] \\ \Rightarrow {}^t[x_{i,1}][V_{ij}][x_{j,2}] &= \lambda_1 {}^t[x_{i,1}][T_{ij}][x_{j,2}] = \lambda_2 {}^t[x_{i,1}][T_{ij}][x_{j,2}] \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow [x_{i,1}][T_{ij}][x_{j,2}] &= 0 \end{aligned}$$

这实际上是证明了, 由 n 个本征向量 $[B_{i,k}]$ 形成的空间根据不同的本征值彼此正交, 即使在某个本征值下有多个本征向量, 总可以在它们线性组合形成的空间中选取相互正交的向量作为本征向量. 这样我们就得到了一组特殊的本征向量, 它们符合:

$${}^t[B_{i,k}][T_{ij}][B_{j,k'}] = 0 \quad \text{if } k \neq k'$$

而当 $k = k'$ 时上述值一定大于零, 这些结果, 后面就可以看到, 其实就是惯性系数:

$${}^t[B_{i,k}][T_{ij}][B_{j,k}] = T_k$$

现在我们直接把这 n 个 n 行的列向量横向按顺序并置构成矩阵:

$$[B_{ij}] = [[B_{i,1}], [B_{i,2}] \cdots [B_{i,n}]]$$

¹¹ 注意本征向量的存在性, 非重根是显然的, 但是如果有个 s 重根, 是否也有 s 组独立的解向量? 这不是显然的, 需要证明, 在次略去. 一般线性代数的教材上都会有证明方法, 不过一般会默认是 $[T_{ij}]$ 为单位矩阵的简单情况, 其实这不影响证明过程.

这样以上关系其实就表示为了:

$${}^t[B_{ij}][T_{jk}][B_{kl}] = \mathfrak{D}\text{diag}(T_i)$$

其中 $\mathfrak{D}\text{diag}(T_i)$ 表示由 T_i 作为元素的对角矩阵. 同理我们如果考察弹性矩阵, 也有:

$${}^t[B_{i,k}][V_{ij}][B_{j,k'}] = 0 \quad \text{if } k \neq k'$$

$${}^t[B_{i,k}][V_{ij}][B_{j,k}] = \lambda_k T_k = \omega_k^2 T_k = V_k$$

同理用矩阵表示:

$${}^t[B_{ij}][V_{jk}][B_{kl}] = \mathfrak{D}\text{diag}(V_i)$$

这样我们之前的愿望就实现了, 即动能矩阵与势能矩阵的同时对角化.

让我们来对双摆体系利用上述套路来求解: 首先是对应的本征值问题的系数行列式为零:

$$[V]_{ij} = mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [T]_{ij} = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det([V]_{ij} - \lambda[T]_{ij}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \begin{bmatrix} 2g/l - 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & g/l - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2(g/l - \lambda)^2 = \lambda^2$$

从而得到特征值:

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l} \quad ; \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}$$

带入本征值问题, 分两个本征值来求解本征向量:

$$([V_{ij}] - \lambda_k [T_{ij}])[B_{j,k}] = 0, \quad k = 1, 2$$

$$\begin{bmatrix} 2(\sqrt{2} - 1) & -(2 - \sqrt{2}) \\ -(2 - \sqrt{2}) & \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2(\sqrt{2} + 1) & -(2 + \sqrt{2}) \\ -(2 + \sqrt{2}) & -(\sqrt{2} + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

这就给出了一个坐标变换矩阵:

$$[B_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

其逆矩阵:

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

这就是给出了如下的坐标变换:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2}\theta_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\theta_2 \\ \varphi_2 = \frac{1}{2}\theta_1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\theta_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \\ \theta_2 = \sqrt{2}\varphi_1 - \sqrt{2}\varphi_2 \end{cases}$$

代入便知, 初始的动能和势能分别变为:

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2ml^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot ml^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + ml^2 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2, \quad V = \frac{1}{2} \cdot 2mgl \cdot \theta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot mgl \cdot \theta_2^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \cdot 2(2 + \sqrt{2})ml^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2(2 - \sqrt{2})ml^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2, \quad V = \frac{1}{2} \cdot 4mgl \cdot \varphi_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 4mgl \cdot \varphi_2^2$$

这就可以看作两个独立的振子, 完成了**解耦**(decouple). 各自的角频率为:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4mgl}{2(2 + \sqrt{2})ml^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{4mgl}{2(2 - \sqrt{2})ml^2}}$$

与之前本征值确定的角频率是一样的.

现在我们来对这个结果产生的物理意义进行解释. 通过坐标变换, 我们发现动能势能形式变得简单了, 所以新的坐标 q'_i 称作**简正坐标**(normal coordinates). 对应的频率 ω_i 称作**简正频率**(normal frequencies):

$$\omega_i = \sqrt{\frac{V_i}{T_i}} \quad \text{or} \quad V_i = T_i \omega_i^2$$

于是我们产生了一个疑问, 为什么只要动能势能的形式变得简单, 就可以判定体系可以等效为独立的谐振子的组合? 其实它简单地来自于拉格朗日方程:

$$L = T - V = \sum_i \frac{1}{2} T_i (\dot{q}_i'^2 - \omega_i^2 q_i'^2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i'} = \frac{\partial L}{\partial q_i'} \Rightarrow \ddot{q}_i' = -\omega_i^2 q_i'$$

这就足以给出其解为简谐振动:

$$q_i' = C_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

再回到体系的初始广义坐标, 它就会等于这些各自做不同频率振动的简正坐标的组合, 从而体现出非常复杂的非简谐运动特性¹². 具体各个广义坐标的振幅和初相位如何, 由体系的初始条件决定. 但是可以想象, 存在一些简单的振动模式, 它的初始条件决定了, 最后只有一个简正坐标 q'_k 在做振动, 其他的坐标振幅为零. 那么最后原来的坐标也会具有单一的频率 ω_k , 从而每一处运动都是简谐振动, 其实它们为:

$$[q_i] = [B_{ij}][q'_j] = [B_{i,k}] \cdot C_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

所以我们将体系以统一的频率, 所有地方都做简谐振动的这种振动模式称作**简正模**(normal mode). “简正” 这个词语三次出现在相关术语中, 它可以浅显地被理解为 “简单” + “正确”. 也可以更精确地被理解为 “简谐” + “正交”. 毕竟在中文语境下, 简谐本意就是 “简单” + “和谐”, 而 “正确” 的 “正” 本身也含有方向的意味. 英文语境下的 “normal” 也恰好有着异曲同工之妙.

4.3.2 基于对称性的简正模判定与简正频率求解

如何规避掉较难的数学和分析力学知识? 用简单而优雅的方式快速确定一个多自由度简谐振动的绝大多数特征? 我们可以采用与对称性结合的方式来求解其运动的微分方程.

就比如对于具有更好的对称性的耦合摆问题, 我们不去追求用能量函数来解决问题, 这样势必涉及到分析力学方法. 而是独立地去推导两个质点的牛顿定律. 很容易给出它们为:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -\omega_0^2(1 + \varepsilon)\theta_1 + \omega_0^2\varepsilon\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 = +\omega_0^2\varepsilon\theta_1 - \omega_0^2(1 + \varepsilon)\theta_2 \end{cases}$$

¹²要知道傅里叶理论可以证明, 用不同频率的简谐振动组合可以无限接近任意光滑函数.

其中 $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. 至于这个方程的求解, 猜一个本征模解是常规操作:

$$\begin{cases} \theta_1 = A_1 e^{i\omega t} \\ \theta_2 = A_2 e^{i\omega t} \end{cases}$$

但是在猜解之后, 我们不一定要通过带入原方程, 令系数行列式为零, 再次带入本征频率来求解方程的曲折方程来求解振幅 A_1 和 A_2 的比. 在本题中有一点是显然的. 就是体系具有鲜明的左右对称性. 这使得我们猜想: 是不是在一种本征模式下, 左右两个物体的位移完全相等. 而另一个模式下, 两个物体的位移完全相反?

这的确发生了. 在经典物理情况下, 这其实就对应了质心的左右振动和相对质心的二体在弹性内力下的振动. 一般把两个物体位移相等的模式称作**对称模式**(symmetric mode), 而位移相反的模式称作**反对称模式**(antisymmetric mode). 即:

$$\begin{cases} \theta_{1S} = Ae^{i\omega_S t} \\ \theta_{2S} = Ae^{i\omega_S t} \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta_{1A} = Ae^{i\omega_A t} \\ \theta_{2A} = -Ae^{i\omega_A t} \end{cases}$$

代入原来的方程就可以看出来: 对称模式给出了:

$$-\omega_S^2 A = -\omega_0^2(1 + \varepsilon)A + \omega_0^2 \varepsilon A \Rightarrow \omega_S = \omega_0$$

$$-\omega_A^2 A = -\omega_0^2(1 + \varepsilon)A - \omega_0^2 \varepsilon A \Rightarrow \omega_A = \omega_0 \sqrt{1 + 2\varepsilon}$$

可以发现, 问题的关键在于如何看出振动模式下各个振幅之间的比例关系. 这个问题似乎取决于问题具体的对称性. 那么, 何谓对称性? 它又是怎样决定体系的振动解的. 我们对一个更复杂的问题来做进一步研究:

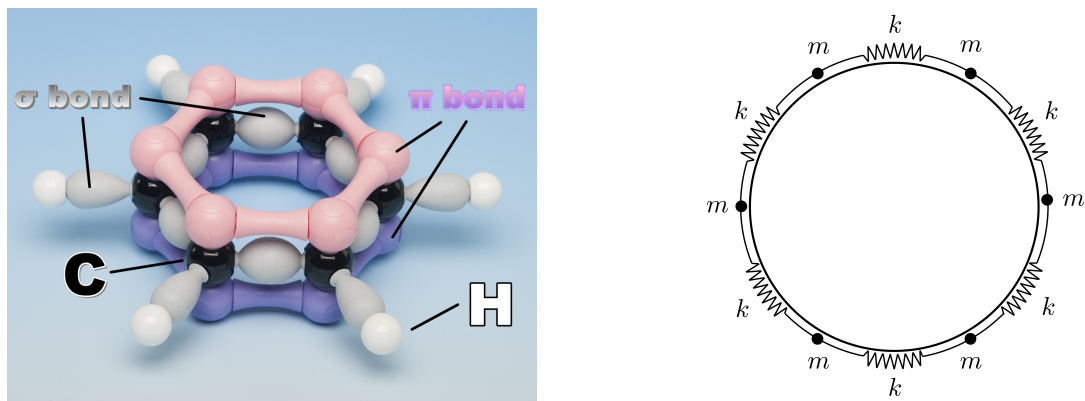


图 4.8: 苯: 6 原子环问题

对于苯分子的振动光谱问题主要的部分就可以做如下简化: 碳原子和氢原子作为一个整体来研究. 设他们是在一个刚性圆环上的质量为 m 的质点. 而彼此之间的相互作用简化为只有相邻的原子才有, 为劲度系数为 k 的线性弹簧. 体系还要求在一个平面上, 甚至一个圆环上作一维运动. 那么这个体系的能量和动力学方程为:

$$T = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2, \quad V = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} k (x_{i+1} - x_i)^2$$

$$m\ddot{x}_i = -2kx_i + kx_{i+1} + kx_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

在上式中我们约定 $x_0 = x_6, x_1 = x_7$. 那么这个微分方程必然存在某种解.

我们讨论第一个问题: 什么叫做对称性? 表面上看上去, 苯分子似乎具有三种对称性: 一是绕竖直轴旋转 60° 的六重轴对称性:

$$C_6: x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_3, x_3 \rightarrow x_4, x_4 \rightarrow x_5, x_5 \rightarrow x_6, x_6 \rightarrow x_1$$

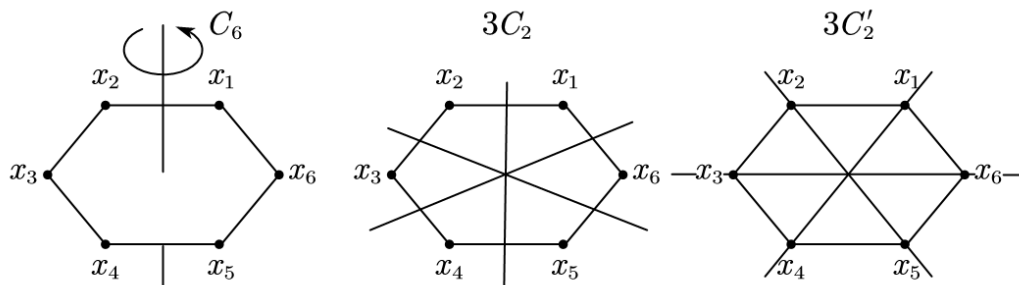


图 4.9: 6 原子环对称性

第二种是以六边形对边连线中点构成的二重轴. 绕它们转 180° 后体系才会复原, 典型的代表性元素:

$$C_2: x_1 \leftrightarrow -x_2, x_3 \leftrightarrow -x_6, x_4 \leftrightarrow -x_5$$

第三种是六边形的对角线作为二重轴. 典型的代表元素:

$$C_2': x_1 \leftrightarrow -x_5, x_2 \leftrightarrow -x_4, x_3 \leftrightarrow -x_6$$

对称性永远都是指在某一变换下, 体系的某一些量具有不变的特性. 那么我们发现, 体系的能量函数就具有这样的特性. 以上无论哪一个变换, 在交换了各个 x 的角标以后, 能量函数的表达式却恰好回到原来的表达式. 但是对于一些不属于这个体系的对称性操作, 比如单个 $x_1 \leftrightarrow x_2$, 能量的表达式就变了. 所以说体系的能量函数具有对称性.

但是体系的形状是不会具有对称性的. 之前的示意图完全是静止状态下的苯分子¹³. 但是我们现在就是要考虑它的振动. 作为能量函数的结果, 其振动解是否一定具有对称的形式? 答案显然是否定的, 因为体系的运动由动力学方程和初始条件来决定. 即使动力学方程是对称的, 只要其初始条件具有不对称性, 其解就至少有一些时刻不再对称. 这就是说, **对称性的原因不一定产生对称的结果**. 这种现象就是一种广义上的**对称性破缺**(symmetry breaking) 现象.

但是, 我们指出: 如果把对称性操作理解为**算符**(operator), 它作用在一组现成的解上可以得到一种不同的运动. 例如典型的 C_6 对称性操作, 它把每一个原子的运动状态转移到了它的下一个原子上. 那么我们就可以找到体系**演化规律和某个对称性算符的共同本征模式**. 这就是说, 存在一些振动模式, 它即是某个本征频率 ω 下的模式, 又恰好在某个对称性操作下 (例如 C_6) 产生的运动和原来仅仅相差一个常数, 这个常数称作**本征值**(eigenvalue):

$$C[x_i] = \lambda[x_i]$$

原因是简单的: 首先如果找到了体系的一个 ω 下的本征模式, 那么直接用这个对称性作用在这个模式下任意次, 显然得到的新的运动全都是原来的动力学方程的解, 就连频率也不会改变, 它们就全都是对应到同一个本征频率下的本征模式, 称作**简并**(degenerate) 在一个频率上的模式. 那么可以考虑得到的所有模式的组合, 由于对称性操作连续作用有限次以后必然回到初始状态. 故模式数必然有限. 这样就一定可以找到合适的状态.

¹³ 基态体系的对称性会完全等于能量函数的对称性, 这一点也是可以证明的.

例如, 对于 C_6 , 初始状态如果是 $[x_i]_1$, 那么至多连续作用 C_6 五次, 第六次就回到初始状态了:

$$[x_i]_2 = C_6[x_i]_1, [x_i]_3 = C_6^2[x_i]_1, [x_i]_4 = C_6^3[x_i]_1, [x_i]_5 = C_6^4[x_i]_1, [x_i]_6 = C_6^5[x_i]_1$$

$$[x_i]_1 = C_6^6[x_i]_1$$

这样我们就可以构造出以下的共同本征函数:

$$[x_i]_{(0)} = [x_i]_1 + [x_i]_2 + \cdots + [x_i]_6 \Rightarrow C_6[x_i]_{(0)} = 1 \cdot [x_i]_{(0)}$$

$$[x_i]_{(1)} = [x_i]_1 \cdot (w^1)^1 + [x_i]_2 \cdot (w^1)^2 + \cdots + [x_i]_6 \cdot (w^1)^6 \Rightarrow C_6[x_i]_{(1)} = w^{-1} \cdot [x_i]_{(1)}$$

$$[x_i]_{(2)} = [x_i]_1 \cdot (w^2)^1 + [x_i]_2 \cdot (w^2)^2 + \cdots + [x_i]_6 \cdot (w^2)^6 \Rightarrow C_6[x_i]_{(2)} = w^{-2} \cdot [x_i]_{(2)}$$

$$\dots$$

$$[x_i]_{(5)} = [x_i]_1 \cdot (w^5)^1 + [x_i]_2 \cdot (w^5)^2 + \cdots + [x_i]_6 \cdot (w^5)^6 \Rightarrow C_6[x_i]_{(5)} = w^{-5} \cdot [x_i]_{(5)}$$

而 $w^6 = 1$, $w = e^{i\pi/3}$ 是六次单位根. 把某个本征频率下的所有本征模式拿出来, 对应的 C_6 算符的本征值也只有可能在以上六种值: 六次单位根的若干幂次中选取.

同理, 如果考虑 C_2 或者 C'_2 对称性, 它们的本征值则更少, 作为二次单位根仅仅只有 1 或 -1 两种可能性.

接下来我们可以先分析单态(singlet). 假设某一个角频率下仅仅只有一重简并, 即只有一个本征模式. 那么这个模式自己就必须同时成为 C_6 , C_2 , C'_2 三者的本征态. 对于后两者有四种可能性:

$$C_2[x_i] = \pm[x_i], \quad C'_2[x_i] = \pm[x_i]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ -x_6 \\ -x_5 \\ -x_4 \\ -x_3 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -x_5 \\ -x_4 \\ -x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \\ -x_6 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

如果两个本征值分别是 +1 和 -1. 那么对应的模式为:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = x_1[+, -, +, -, +, -]$$

这样的模式恰好也是 C_6 本征值为 +1 的模式. 对应的运动为三个相间的原子编组, 另外三个也编组, 两组原子反向运动的振动模式. 用 C_2 和 C'_2 的本征值正负来标示这种模式, 代入原来的动力学方程, 得到:

$$-m\omega_{+-}^2 A = -2kA - kA - kA \Rightarrow \omega_{+-} = \sqrt{\frac{4k}{m}}$$

再来考虑两个本征值都是 -1 的情况, 这样恰好有:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = x_1[+, +, +, +, +, +]$$

也就是所有原子都沿相同方向作相同运动. 对应 C_6 本征值为 +1. 显然这样的运动就是整体作匀速旋转的运动:

$$\omega_{--} = 0$$

但是另外两种情况略有不同. 首先是两个本征值都是 $+1$ 的情况. 此时得到:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = x_1[+, -, 0, +, -, 0]$$

抑或是两个本征值分别为 -1 和 $+1$ 的状态. 得到:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = x_1[+, +, 0, -, -, 0]$$

我们发现, 这些运动直接并不是 C_6 的本征态. 但是这些运动有它存在的合理性. 事实上画图就会发现这些运动都是可以符合动力学规律的:

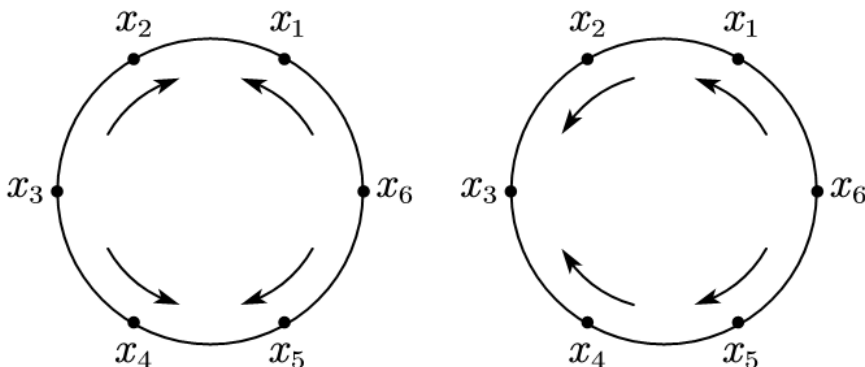


图 4.10: 二重简并的振动模式

每种模式的 x_1 的振动就能代表 x_1, x_2, x_4, x_5 四个质点的振动. 而 x_3, x_6 在这两种模式下都是静止的. 对于第一种模式, 对 x_1 列牛顿定律:

$$-m\omega_{++}^2 A = -2kA - kA \Rightarrow \omega_{++} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$-m\omega_{-+}^2 A = -2kA + kA \Rightarrow \omega_{-+} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

正因为这些运动合理, 但又不是 C_6 的本征态, 所以其实它们根本就不像最初假设的那样, 是两个本征频率 ω_{++}, ω_{-+} 下的单态, 而是各存在二重简并. 显然我们把 C_6 作用在这两个态上各一次就是与它简并在同一个频率上的另一个独立振动模式, 如果设 $x_1 = Ae^{i\omega t}$:

$$[x_i]_{++} = [+, -, 0, +, -, 0]Ae^{i\omega_{++}t} \Rightarrow C_6[x_i]_{++} = [0, +, -, 0, +, -]Ae^{i\omega_{++}t}$$

$$[x_i]_{-+} = [+, +, 0, -, -, 0]Ae^{i\omega_{-+}t} \Rightarrow C_6[x_i]_{-+} = [0, +, +, 0, -, -]Ae^{i\omega_{-+}t}$$

恰好, 作用两次是徒劳的. 两次旋转以后的运动可以用前两次的运动组合形成:

$$C_6^2[x_i]_{++} = -[x_i]_{++} - C_6[x_i]_{++} : [-, 0, +, -, 0, +] = -[+, -, 0, +, -, 0] - [0, +, -, 0, +, -]$$

$$C_6^2[x_i]_{-+} = -[x_i]_{-+} - C_6[x_i]_{-+} : [-, 0, +, +, 0, -] = -[+, +, 0, -, -, 0] - [0, +, +, 0, -, -]$$

从而我们就完整地找到了体系的六个本征模式:

$$\omega_{--} = 0 : [x_i]_{--} = [+, +, +, +, +, +]vt$$

$$\omega_{-+} = \sqrt{\frac{k}{m}} : [x_i]_{-+} = [+, +, 0, -, -, 0]Ae^{i\omega_{-+}t}, \quad C_6[x_i]_{-+} = [0, +, +, 0, -, -]Ae^{i\omega_{-+}t}$$

$$\omega_{++} = \sqrt{\frac{3k}{m}} : [x_i]_{++} = [+, -, 0, +, -, 0]Ae^{i\omega_{++}t}, \quad C_6[x_i]_{++} = [0, +, -, 0, +, -]Ae^{i\omega_{++}t}$$

$$\omega_{+-} = \sqrt{\frac{4k}{m}} : [x_i]_{+-} = [+,-,+,-,+,-]Ae^{i\omega_{+-}t}$$

事实上我们只看到了问题的一个局部. 关于复杂体系小振动背后的对称性分析是一个内容非常丰富的专题. 它涉及到关于对称性的群论(group theory) 和对于振动在对称性操作下演化的群表示论(group representation theory). 它在原子分子物理, 固体物理, 乃至粒子物理中都有着非常广泛的应用.

对于苯分子的振动模式我们也做了过多的简化, 下面的表是较完整地考虑碳原子和氢原子间共 12 个原子, 在三维空间中各做三自由度运动而形成的共 $36 - 6 = 30$ 个振动模式. 减 6 是因为有 6 个自由度是整体的平动和转动而不是振动. 根据对称性, 一共有 20 种振动模式. 其中有 10 种为二重简并. 分子的振动光谱一般在红外线波段:

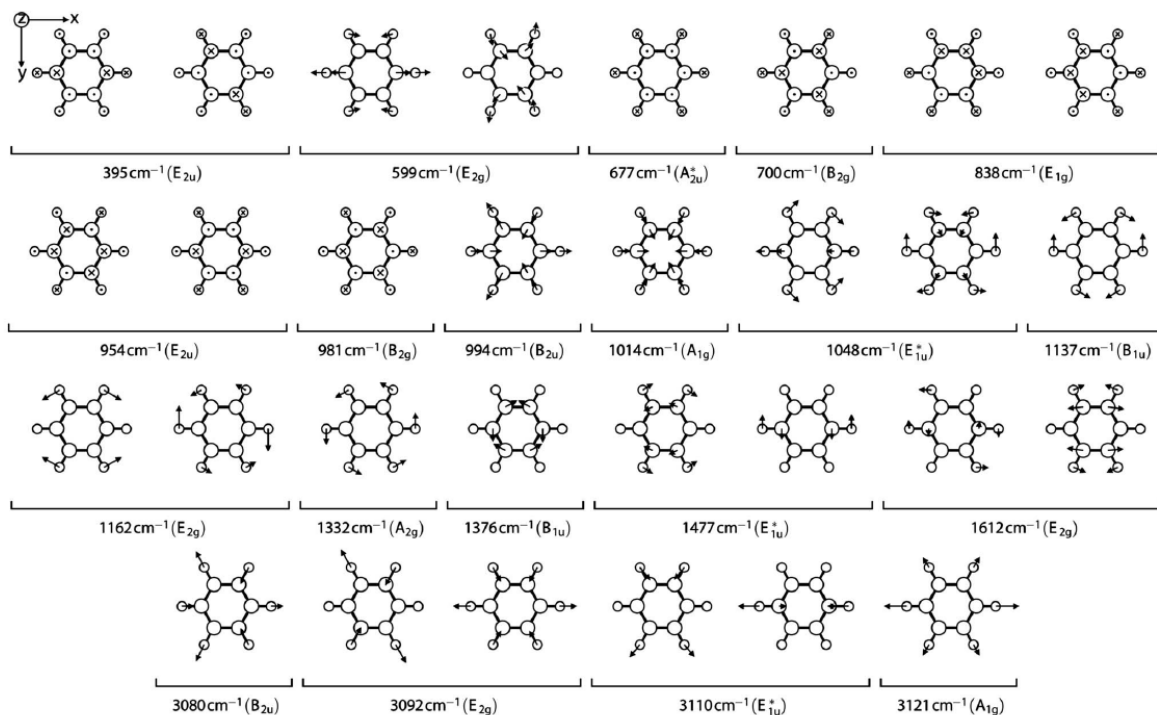


图 4.11: 苯分子的完整振动模式

利用原子间作用力的经验函数就可以得到各个本征角频率 ω . 而由量子力学中的原理, 振动的能量实际上是量子化的:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

苯分子的吸收光谱和发射光谱中对于相邻两个能级能量差的光子就会有共振吸收的现象:

$$\Delta E = h\nu = \hbar \omega$$

可见其实就是当电磁波的频率恰好与振动频率吻合时发生共振吸收:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

4.4 格波

让我们考虑两个十分经典的**固体物理**(solid state physics) 问题: 声音的本质是什么? 固体热运动的本质是什么? 我们可能会得到一个惊人的答案: 两者的本质, 都是晶格的振动.

固体, 一般是晶体, 它的描述方法, 也需要照顾到电子的行为, 也需要照顾余下的原子实---它占据着主要的质量与动能---的运动形式. 如果把目光仅仅放在原子实上, 认为原子实是在格点的平衡位置附近做小振动. 而这个运动的动力学成因, 必然是来自于初始条件和原子之间可以类比为弹簧的线性作用力. 这样去思考问题的话, 也许具体的计算还是困难的, 但至少我们会有以下三个结论:

一: 这个运动一定是牵一发而动全身的. 一个原子的振动会带动其它原子的振动, 一个地方的振动会带动另一个地方的振动, 这其实就是固体可以传热和传声的原理. 而且不出意外的, 一般传热性能越好的固体, 声速也就越快. 天然材料中金刚石就是在两个方面都具有卓越性能的典型: 它的声速高达 12000m/s , 在元素单质方面仅仅次于在自然界不以单质形式存在的金属铍 (13000m/s), 是铁的两倍多. 而热导率则是达到了惊人的 $2000\text{W/m}\cdot\text{K}$, 为金属中导热性能优异的银的约五倍.

二: 有规则的这种运动形成了声波. 也就是宏观问题中看似连续的声波, 在微观看来其实就是一个一个分立的原子在因为弹性力而做多自由度的小振动, 而不再具有连续性. 这种运动就叫做**格波**(lattice wave).

三: 无限不规则的声波进行叠加就形成了热运动. 基于这一点, 我们其实不应该把热运动分解为每一个原子各做一个独立简谐振动, 这样的统计方法是不能给出正确的关于固体的热学结果的, 因为这些简谐振动根本就不“独立”. 从爱因斯坦时代开始, 把热运动分解为真正声波的叠加, 并且对声波的能量进行量子化, 称作**声子**(phonon), 这才真正能开始解释关于固体的热容等等初步的实验结果.

这一节我们暂时无法得出这些深刻结果的计算过程. 但至少, 我们可以尝试在完全经典的情况下对两个简化问题给出完整的动力学求解方法.

第一个问题就是一**维原子链**(1D atomic chain) 问题. 把质量为 m 的物块和劲度系数为 k 的弹簧无限串接形成下图所示的体系.

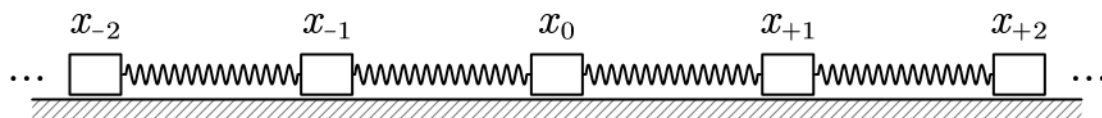


图 4.12: 一维原子链

这样的体系的动力学方程写作:

$$m\ddot{x}_i = -2kx_i + kx_{i+1} + kx_{i-1}$$

这样一个方程的求解其实非常类似于之前的对称性分析法. 这里体系的对称性为平移一个单元. 那我们就设想体系的状态为平移算符的本征态, 即每一个物块的振动都恰好是其前一个 (左边的那个, 指标比它小一的那个) 的 λ 倍. 只不过这里的 λ 其实是一个相位因子 $e^{i\varphi}$ 罢了. 那么我们猜一个本征频率为 ω , 在平移算符下本征值为 λ 的解, 显然 ω 就会是 λ 的函数:

$$x_i = \lambda^i A e^{i\omega t}$$

代入原方程, 命 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 就可以得到:

$$\frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2} = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}$$

若 λ 为实数, 不管是 $|\lambda| > 1$ 还是 $|\lambda| < 1$ 都不是我们希望得到的结果, 这样在 $i \rightarrow +\infty$ 和 $i \rightarrow -\infty$ 两个方向一个振幅指数衰减, 一个指数爆炸. 那么根据因果律和能量守恒可以判断, 指数爆炸那一侧是受

到外力开始起振的那一侧,这个波根本就不能在原子链上传播,而是传着传着振幅就衰减掉了.此时等号左侧是一个绝对值大于 1 的实数.故我们发现当 $\omega \geq 2\omega_0$ 时对应的波无法在一维原子链上传播.这个频率 $\omega_c = 2\omega_0$ 就叫做**截止频率**(cut-off frequency).恰好为截止频率时, $\lambda = -1$,也就是这样的波虽然可以形成,但任何相邻两个原子振动方向彻底反向,它其实是一种“驻波”,原则上也没有在传播.

那么就只剩下 $\omega \leq \omega_c$ 的波可以在一维原子链上传播.把 λ 写成 $e^{i\varphi}$.我们得到:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \Rightarrow \omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|$$

相邻两个原子的相位差应当是一个 $\varphi \in (-\pi, \pi)$ 内的数.这是因为如果 A 比 B 相位大一个 $\pi + \delta$,那么也可以解释为 A 比 B 相位小一个 $\pi - \delta$.所以如果是截止频率的临界情况,我们也只能说相邻的原子反相,至于谁比谁大也是无从判断的,这是格波的特性.

对于上式我们更喜欢写为**色散关系**(dispersion relation) 的形式.就是说把自变量改为**波矢**(wave vector).设相邻原子距离为 l ,那么产生的相位差 φ 可以由波矢来产生:

$$Kl = \varphi, \quad K \in \left(-\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{l}\right)$$

上面这个 K 应当处于的空间称作**布里渊区**(Brillouin zone).它告诉我们,在一维原子链上传播的格波在频率和波矢上都是受限的.其函数图像和表达式如图 4.13.

色散曲线上每一个点都代表一种能够在一维原子链上传播的振动模式:

$$x_i = Ae^{i(\omega t + iKl)}$$

此时两个极限是值得关注的:

一是,在短波极限:波长最短就是当 $Kl = \pi$ 时,此时波长 $\Lambda = 2\pi/K = 2l$ 时,向左和向右延伸的色散曲线到达最高点 Γ .但尤其要注意两个 Γ 点实质上就是同一个点,对应完全相同的状态.可以想想把第一布里渊区卷做一个圆柱,让两个 Γ 点重合.对应的相邻原子彼此反相的“驻波”形式.也就是说如果让 $K > 0$ 的右行波的 K 持续增加以跨越 Γ 点,波就演化为左行波了.个中缘由在于 K 的正负指称的速度其实是**相速度**(phase velocity),但在判断波的传播方向时,其实**群速度**(group velocity) 才是更加合理的选择.它被定义为:

$$v_g = \frac{d\omega}{dK}$$

其中的原理我们将在流体的相关波动章节中简介.

二是,在长波极限: $\Lambda \gg l$.此时 Kl 是一个小量,可以对 \sin 使用近似,物理上代表相邻两个原子几乎是以相同的方式运动,微观波变成了宏观的波:

$$\omega = \omega_0 Kl$$

这就给出了波的传播速度:

$$v = \frac{\omega}{K} = \omega_0 l = \sqrt{\frac{k}{m}} l$$

这个结果与宏观波速公式 $v = \sqrt{E/\rho}$ 是完全一致的.且看之后弹性体章节的分析.

最后我们还看看**双原子链**(diatomic chain) 与以上**单原子链**(monoatomic chain) 产生的并不平凡的区别.双原子链就意味着虽然其平移周期还是 l ,但每一个单元内部出现了两个待求解的坐标.我们让两个原子质量分别为 M, m ,弹簧劲度系数依然为 k :

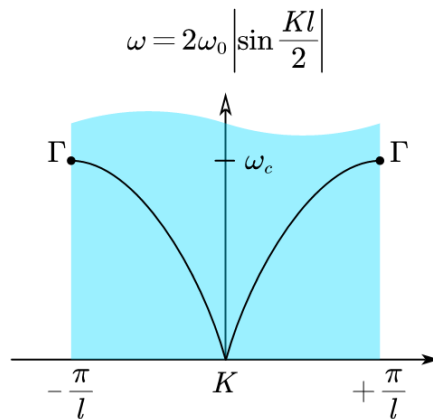


图 4.13: 色散关系

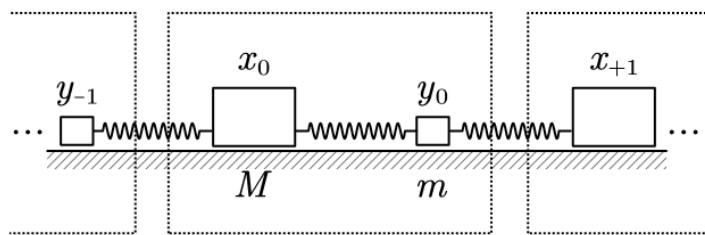


图 4.14: 双原子链

那么对应的动力学方程写作:

$$M\ddot{x}_i = -2kx_i + ky_i + ky_{i-1}$$

$$m\ddot{y}_i = -2ky_i + kx_i + kx_{i+1}$$

由于有单原子链的经验, 我们让 $\omega_0 = \sqrt{k/2M}$ ¹⁴, 而 $m = \beta M$. 并直接设解为:

$$x_i = Ae^{i(\omega t + iKl)} \quad , \quad y_i = Be^{i(\omega t + iKl)}$$

其中 A 和 B 是复振幅可以差一个相位. 那么这就给出:

$$\begin{aligned} (4\omega_0^2 - \omega^2)A + -2\omega_0^2(1 + e^{-iKl})B &= 0 \\ -2\omega_0^2(1 + e^{iKl})A + (4\omega_0^2 - \beta\omega^2)B &= 0 \end{aligned}$$

这个方程组 A, B 的解不为零的条件就是:

$$(4\omega_0^2 - \omega^2)(4\omega_0^2 - \beta\omega^2) = 4\omega_0^4(1 + e^{iKl})(1 + e^{-iKl}) = 16\omega_0^4 \cos^2 \frac{Kl}{2}$$

在 β 是个小量的情况下, 我们可以近似地求解这个方程. 在任意 K 下这个方程与单原子链不同, 它 ω^2 总是有两个解. 第一个解发生在 ω 与 ω_0 量级相当的情况下, 此时 $4\omega_0^2 - \beta\omega^2 \approx 4\omega_0^2$. 近似可以得到:

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{Kl}{2} \right|$$

可以发现这个解与只含 M 的单原子链的结果并没有什么区别. 所以其实是这种模式下, 主要的动力学效果由 M 承担, m 则几乎平衡在两侧的 M 中间. 两个相邻的 M 之间的两段弹簧几乎就是直接串联在一起, 同时伸长同时缩短, 感受不到很轻的 m 的影响.

而另外一个解则发生在 $\omega \gg \omega_0$ 的极端情况下, 此时 $4\omega_0^2 - \omega^2$ 本是一个绝对值很大的负数, 它 $\approx -\omega^2$. 但是与另一个因子 $4\omega_0^2 - \beta\omega^2$ 相乘时又回到正的 ω_0^4 量级的等式右侧了. 从而乘的因子其实很接近零:

$$4\omega_0^2 - \beta\omega^2 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \approx \frac{2\omega_0}{\sqrt{\beta}}$$

为了更精确地找到这个频率与 K 的函数关系, 我们把原方程的 $4\omega_0^2 - \omega^2$ 项除到等号右边, 并近似:

$$\omega \approx \frac{2\omega_0}{\sqrt{\beta}} \cdot \sqrt{1 + \beta \cos^2 \frac{Kl}{2}}$$

¹⁴即先忽视 m 的存在让弹簧直接串联.

这样的两组解看似近似,但是其实在特征点处的性质和坐标又是完全准确的.特征点就是指波矢为零 $K = 0$ 和波矢为 $\pm\pi/l$ 的布里渊区中心和边界上的点.我们把两组 $\omega(K)$ 关系画成色散曲线如图4.15.对应的特殊点 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta$ 对应的特殊频率为:

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{2M}}, \quad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$\omega_c = 2\sqrt{\frac{k}{2\mu}} \quad (\mu = \frac{Mm}{M+m})$$

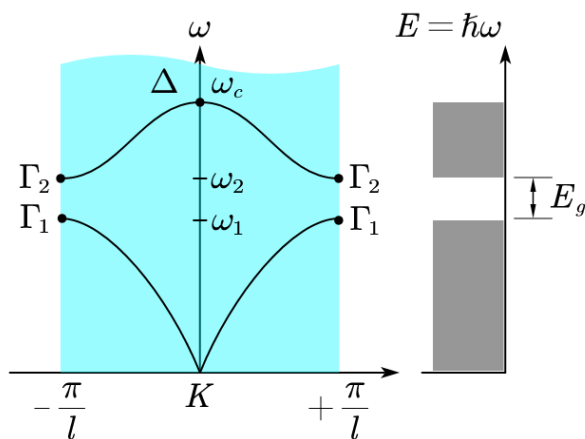


图 4.15: 声学支与光学支

现在终于可以发现,多出来的第二组解,对应了在原来的色散曲线上方又多出来一支.这一支在 Δ 的行为具有代表性:即使 $K = 0$,即相邻两个单元之间完全没有相位差.但是依然有很大的角频率.也就是这个振动并没有传播,而从角频率的表达式来看,其实就是每一个单元内部两个物体在弹性力作用下做二体小振动.而从 Γ_2 到 Δ 点这样一段色散曲线对应的各个波动模式下,十分显著的一点就是轻的原子一定要主动振动起来而且与相邻的重原子根接近反相而不是同相.最边缘的 Γ_2 点则只有轻的原子在振动.这样的模式的频率,其实与上一节讨论过的分子振动频率相当,就在光的红外线频段,故把这样的一支振动模式称作色散曲线的**光学支**(optical branch).

所以原来单原子链的保留支,特点是从 $\omega = 0, K = 0$ 延续到布里渊区边缘的 Γ_1 ,就相应的被称作**声学支**(acoustic branch).因为在长波极限 $K \rightarrow 0$ 下,这个模式的轻重原子之间是没有相位差的,而不是像光学支那样反相,这样就相当于宏观地看整个原子链在较大范围内做宏观平移.形成的波就是常规意义下的声波.在声学支模式下,轻的原子跟随重的原子而运动,相邻轻重原子更加接近同相而不是反相.而极限点 Γ_1 对应的情况是只有重原子在振动,轻原子全部静止了.

最后我们指出,简单的计算产生的结果中还蕴含着意义非凡的一个物理图像.那就是**能带**(energy band)结构的产生.在这里我们着眼的是晶格上的波动,色散曲线上每一个点都代表一种可能的波动模式,其振幅,在经典物理中,由初始条件决定,且是可以连续变化的.但是量子理论预言,这个能量实则在低能量时量子化:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

从而色散曲线的这一副图,实际上也代表量子化的振动的**元激发**(elementary excitation)的能量单位与 K 的关系图.更有甚者,如果我们不是去考虑晶格振动的动能加势能的元激发,而是去考虑在晶格间运动的电子,它的能量也会产生非常类似的但更复杂的能带结构¹⁵,毕竟电子在其中的描述也应当使用物质波,它具有波矢 K 和相应的能量 $E(K)$.而为什么这个 $E(K)$ 的函数也会产生类似的行为,这一点可以纯粹从电子满足的**薛定谔方程**(Schrödinger equation)和对称性分析出发得到.在介质中的电子的波矢 K 其实也是受限的.而同一个 K 对应的能量也可以有多个,分别在不同分支的色散曲线上.故我们把每一条色散曲线对应的可取能量区间叫做**允带**(allowed band).而允带之间没有对应状态的能量区间叫做**禁带**(forbidden band).两个相邻的允带之间的禁带宽度就是**带隙**(band gap).

这样一种全新的看待振动的能量,电子的能量的理论就是能带论.尤其是把电子视作物质波,利用量子力学完整地计算固体中的电子的运动,从而非常好地解释了历史上残留的金属电导率,热导率相关的疑问并很好地带动半导体物理学的成熟的理论,以它的主要缔造者:瑞士-美国物理学家布洛赫命名为**布洛赫理论**(Bloch theory).

能带结构是一种介于**自由电子**(free electron)和**紧束缚电子**(tight-binding electron)之间的存在形式.在真空中的自由电子满足:

$$E = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$$

¹⁵会往上产生更多能带.

其能量完全可以连续的改变.但是在束缚态上,如氢原子外的电子,简单地由玻尔模型,电子的能量被量子化为能级结构:

$$E = -\frac{me^4}{8n^2\varepsilon_0^2h^2} = -\frac{13.6\text{eV}}{n^2}$$

那么在金属中的电子,微观上自由:可以脱离金属原子的束缚而传导,但宏观上,本质又是被束缚的:被所有原子核共同产生的吸引力束缚在金属内部.所以就体现出一种折衷:紧束缚的能级展开为能带,具有一定的能量连续变化的范围.但是能带与能带之间依然是分立的,没有像真空那样连成一片.

第五章 万有引力

5.1 有心力下质点运动

天体运动中起到核心作用的相互作用力都是有心力(central force),事实上不光是天体运动,任意两个可以近似为质点的物体之间的相互作用力,根据牛顿第三定律的要求,其受力方向都必须沿着两个物体的连线方向.那么我们只要做两个要求,这就构成了一个有心力问题:

一是,这个力必须是保守力,即,它必须由势能生成:

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2): \quad \mathbf{F}_1 = -\nabla_1 V, \quad \mathbf{F}_2 = -\nabla_2 V$$

根据我们之前的说法,根据对称性或牛顿第三定律,这个势能其实就是两个质点连线距离 R 的函数 $V(R)$.而以 1 为中心向 2 引 \mathbf{R} 矢量,则:

$$\mathbf{F}_2 = -V'(R)\mathbf{e}_R = F(R)\mathbf{e}_R$$

二是,中心物体 1 必须不动或者是近似不动. 1 不动是指有外力作用在 1 上以维持其静止.但 2 上不应该有这样的外力,而仅仅是在 1 对 2 产生的 \mathbf{F}_2 作用下做运动.1 近似不动是比如考虑太阳系这种典型情况,太阳虽然受到多个行星对它的万有引力,但是由于自己质量过重从而近似是不动的.即使是地球月亮构成的二体问题,地球和月亮并不一定能认为都不动,我们也有相应的转化为有心力问题的方法,见后.最后当然,也有一些更简单的情况,2 受到一些更复杂的体系对它的力构成了有心力 $F(R)$,比如弹性绳对绳端质点的拉力.

在有心力场中运动的物体,其基本的牛顿定律可以写作:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F(r)\mathbf{e}_r$$

可以把这个方程作为一切讨论的起点.或者进一步,我们先发现:

5.1.1 运动的一般特征

首先,有心力场中运动的质点必然在一个平面上运动.这一点既可以通过初始条件判断 \mathbf{r}_0 和 \mathbf{v}_0 的平面就是运动平面.也可以通过下面的角动量守恒来发现这一点.正是这样,在运动平面上建议极坐标是方便的,用极坐标写出的牛顿定律分量式为:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) = F(r) \\ m(\ddot{\theta}r - 2\dot{\theta}\dot{r}) = 0 \end{cases}$$

除了牛顿定律以外,还有两个可以变通使用的结论:角动量和能量都是守恒的:

角动量守恒的原因是有心力对力心没有力矩.角动量的方向垂直于运动平面.极坐标下大小写为:

$$L = m\dot{\theta}r^2 = \text{Const.}$$

而习惯上通常把质量 m 省略后的量单独提出来, 它实际上是面积速度的两倍:

$$\dot{\theta}r^2 = h = 2 \frac{dA}{dt}$$

也就说, 面积速度不变是有心力问题的普遍特征, 这也是开普勒第二定律的一种推广形式.

第二个守恒量是哈密顿量:

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2r^2) + V(r) = \text{Const.}$$

守恒到的值直接叫做能量 E . 通常我们喜欢把这个式子移项写作:

$$\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2r^2 = \frac{2[E - V(r)]}{m}$$

5.1.2 有心力问题的求解

有心力问题的求解可以指一定初始条件下, 轨迹方程 $r(\theta)$ 的求解. 也可能需要进一步求出运动方程 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 的具体形式来. 通常还有两种常见的提法:

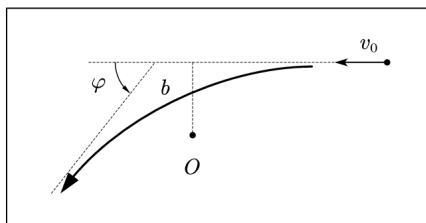
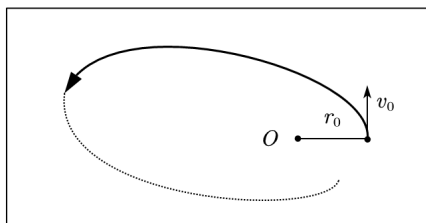


图 5.1: 定态问题与散射问题

一是**定态问题**(stationary state problem) 的求解: 例如直接从距离力心 r_0 给一个垂直半径方向的速度 v_0 . 求解之后的运动. 不难理解, 只有**引力**(attraction) 才能形成束缚的态, **斥力**(repulsion) 就不行. 而要想这个态在动力学上是“稳定”的, 后面就知道还需要这个力符合一定的条件. 这一个问题在微观上也存在对应的量子力学版本.

二是**散射问题**(scattering problem) 的求解: 粒子从无穷远出发以一定的初速度 v_0 和**瞄准距离**(impact parameter) b 入射, 经过一个有心力影响后轨迹发生偏移. 求解过程中, 尤其是散射末态的粒子状态. 由于轨迹必然存在对称性, 出射过程基本上就是入射过程在另一个角度处的时间反演. 所以经典物理中关注的量主要是散射角 φ 的大小, 它被定义为散射前后运动方向的夹角. 不难看出, 不管是引力还是斥力都会造成散射. 但是散射问题对有心力也存在一个要求, 它在无穷远处必然对粒子没有影响,

即, 不管是势能还是力都要衰减到零. 这个要求实际上叫做**短程力**(short-ranged force). 但它的严格定义和个别性质也需要上升到量子力学的散射问题才能解释清楚. 比如万有引力其实就不属于短程力而是**长程力**(long-ranged force), 而超过平方的幂次反比力都是短程的. 尽管前者的散射问题也经常被拿来讨论. 散射问题不仅存在量子力学版本, 引力场下的光线偏转问题也是一个非常经典的广义相对论问题.

而目前求解经典的有心力问题通常有两种思路:

1. 有效势能法

利用两个守恒量, 实际上就等于把原来的二阶微分方程求解的问题转化为了一阶微分方程的问题. 然后再利用角动量守恒式子把 $\dot{\theta}$ 用 r 来表示并代入能量守恒. 我们得到:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{mh^2}{2r^2} = E - V_{\text{eff}}(r)$$

第一点是, 问题立马变成了一个一维动力学问题. 第二点是, 这个问题等价于一个粒子 m 在一维势能场 $V_{\text{eff}}(r)$ 中做运动的问题. 正是因为这个原因, 我们把 $V_{\text{eff}}(r)$ 称作有心力问题的**有效势能**(effective potential):

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$$

利用这种方法,物理意义上最显著的一点就是可以方便我们考察定态的存在性和动力学稳定性.显然,在一维运动中,仅有当在 $r \in (0, +\infty)$ 下存在“山谷”,即一阶导数等于零,二阶导数大于零的点才有可能造成稳定的振动,它就是我们要寻找的束缚态.而这一点强烈依赖于势能的具体形式.考察引入的“离心势能”项的导数,我们发现:

$$V_{\text{cf}} = +\frac{mh^2}{2r^2} \Rightarrow V'_{\text{cf}} = -\frac{mh^2}{r^3}, V''_{\text{cf}} = +\frac{3mh^2}{r^4}$$

故这是一个倾向于往外推质点的力,而本身具有让质点稳定的因素.那么为了使得存在 $V'_{\text{eff}} = 0$ 和 $V''_{\text{eff}} > 0$ 的点,就要求 $V' > 0$ 必然成立,即必须是引力.且 V'' 虽然可以小于零但不能太小.

我们考察幂次的引力 $F = -kr^n$,那么它对应的势能为¹:

$$V = \frac{kr^{n+1}}{n+1} (n \neq -1), \quad V' = kr^n, \quad V'' = nkr^{n-1}$$

结合平衡条件可以发现存在平衡点:

$$V' + V'_{\text{cf}} = 0 \Rightarrow R = \left(\frac{mh^2}{k} \right)^{\frac{1}{n+3}}$$

那么在这个点处的稳定性就取决于二阶导数:

$$V''|_{r=R} = \frac{mh^2}{R^4} (3+n)$$

由于除非 $h = 0$,即纯径向运动,系数必然是大于零的.故分为两类情况:

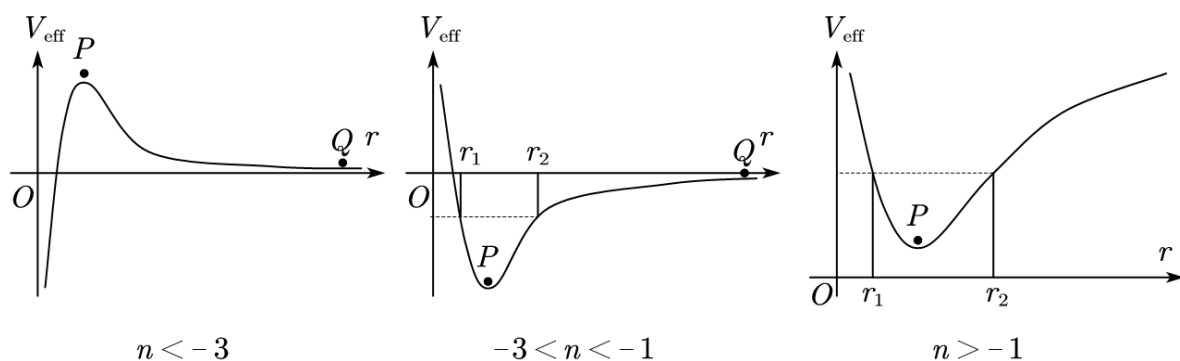


图 5.2: 三类幂律力

一是, $n \leq -3$, 即超过三次以上反比的力场, 这样的力场不可能造成稳定的动力学运动. 其势能函数图像如图 5.2 左. 平衡是可以造成的, 此时径向上始终保持 $r = R$, 即停留在图中的 P 点. 角向上 $\dot{\theta} = h/R^2$, 其实就是在做匀速圆周运动. 但是这个圆周运动动力学不稳定, 一旦存在径向上微扰, 要么轨道无限向心力坍塌, 要么向无穷远转移而失去力心的束缚. $n = -3$ 的特殊情况值得引起关注. 此时, 如果 $h = \sqrt{k/m}$, 那么势能恒等于零, 对应大量不稳定的匀速圆周运动. 而如果 $h > \sqrt{k/m}$ 或 $h < \sqrt{k/m}$, 两者势能都是单调的不存在束缚态的可能性, 前者会无限远离力心后者将无限接近力心. 总之, $n < -3$ 都是不稳定的情况.

二是, $n > -3$ 下的所有力场都是稳定的. 也就包括常见的平方反比力场. 图 5.2 的中, 右图都是这种情况. P 点具有稳定性. 从而束缚态其实就是指在 P 点左右的振动和对应的角向运动的合成.

对束缚态和散射态的求解能给出哪些共同的结论? 首先让我们计算束缚态下 r_1 到 r_2 间振动的周期, 也就是径向运动的动力学周期. 这个问题和 $r(t)$ 的求解方法是共同的. 只需要对之前的能量守恒式移项后积分:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2[E - V(r)]}{m} - \frac{h^2}{r^2}}$$

¹ $n = -1$ 时, $V = k \ln r$

$$T = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

其中 r_1 为过程中最靠近力心的点, 通称**近心点**(pericenter), 而 r_2 则为**远心点**(apocenter). 它们都是以上积分分母恰好为零的点, 使得该积分成为一个标准的瑕积分. 在 r_2 不是无穷大的情况下, 该积分总是有限的.

我们还可以计算在近心点和远心点运动过程中质点转过的角度. 这一点只需要找到角度的导数:

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

并与之前的半径导数来做比:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{h}{r^2 \sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

这就能得到角度:

$$\Delta\theta = \int_{r_1}^{r_2} \frac{h dr}{r^2 \sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

最后考虑散射问题的普遍结论. 首先, 幂律形式的力显然如果 $n \geq -1$, 这样的力对应的势能在无穷远处并不是 0. 将造成无穷远处具有一定初动能的物体来到近处时具有无穷大动能的发散问题. 故我们讨论的范围局限在 $n < -1$ 的幂律力, 引力斥力皆可. 十分类似地, 如果计算从无穷远来到无穷远去发生的位矢的转角, 为:

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{h dr}{r^2 \sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

再进一步注意到由初始条件确定的守恒量各为:

$$h = v_0 b \quad ; \quad E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

代入化简, 我们要计算的偏转角 $\varphi = \pi - \Delta\theta$ 就成为了:

$$\varphi = \pi - 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{v_0 b dr}{r \sqrt{v_0^2(r^2 - b^2) - 2r^2 V/m}}$$

当 $n \geq -1$ 时偏转角的积分不会存在发散的问题. 永远是一个有限值.

2. 比耐方程法

另一种思路执着于求解二阶形式的方程, 但是通过变形转化为轨迹方程. 具体来说, 半径的一阶导数被我们化为:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}$$

而二阶导数就能继续化为:

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\theta}(\dot{r}) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\frac{h}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{h^2}{r^4} \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2h^2}{r^5} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2$$

这样还不足以使得问题简化. 因为如果代入径向的牛顿定律, 得到的结果:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} - r - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{r^4 F(r)}{m h^2}$$

还不见得是一个如何简单的方程. **比耐方程**(Binet equation) 的不平凡之处在于它对半径进行了反演. 就是考虑一个倒数变换:

$$u = \frac{1}{r}$$

它可以把之前的运动轨迹的内侧翻到外侧去. 那么如果依然保持 θ 自变量不变, 轨迹的新导数为:

$$r = \frac{1}{u}, \quad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = -\frac{1}{u^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{2}{u^3} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2$$

代入之前的轨迹微分方程, 发现方程简单地变成了:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F(\frac{1}{u})}{mh^2u^2}$$

这个简单的方程就可以帮我们快速解决一部分有心力问题的基础轨迹.

5.2 万有引力下天体运动

万有引力即以下平方反比力 (inverse-square force):

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$$

任何平方反比力下的运动性质都是类似的. 我们以引力为正. 事实上经典物理喜欢用 $k^2 = GM$ 来指称中心力产生力场的强度, 称作高斯常数 (Gauss constant). 我们这里用 $k = GM$ 来表示引力的强度. 这样 $k < 0$ 就表示斥力. 而其它平方反比力, 比如库仑力也就归为同一种:

$$F(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{km}{r^2} \Rightarrow k = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 m}$$

于是, 在平方反比有心力下质点的运动问题, 就构成了经典力学历史上第一个用来解决的里程碑式的大问题, 它和它后来的各种变式, 统称为开普勒问题 (Kepler problem).

为了以最快速度得到它的解, 我们直接使用比耐方程, 将力的函数用 u 表示并代入:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{h^2}$$

这就已经得到它的解了, 在合适的极坐标初始角度下写作:

$$u = \frac{k}{h^2} (1 + e \cos \theta)$$

其中 e 是根据初始条件确定的常数. 再倒过来便是:

$$r = \frac{h^2/k}{1 + e \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

不管 e, p 的正负和取值情况, 这都表示一条圆锥曲线方程. 可能是椭圆, 抛物线, 双曲线三者之一. 我们还因此得到了一个恒等式 $p = h^2/k$.

比耐方程固然简单. 但是它对我们解决一个天体运动的含初始条件的具体问题帮助不大. 为了得到一种行之有效的方法, 我们重新回到有效势能的方法. 现在我们代入势能函数:

$$V = -\frac{km}{r}$$

得到用 \dot{r} 和 $\dot{\theta}$ 做除法得到的微分方程:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{h}{r^2 \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2k}{r} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

配方, 这便是:

$$\frac{d\left(\frac{k}{h^2} - \frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2} + \frac{k^2}{h^4} - \left(\frac{k}{h^2} - \frac{1}{r}\right)^2}} = d\theta$$

同理通过积分和合适的极坐标初始角:

$$r = \frac{\frac{h^2}{k}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2h^2 E}{k^2 m}} \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

这个公式就完整透漏了其轨迹参量 p, e 与运动学积分不变量 h 和 E 的关系. 它们是:

$$p = \frac{h^2}{k}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2h^2 E}{k^2 m}}$$

通常这两个式子不喜欢这么些. 我们通过圆锥曲线长轴 A 的定义:

$$p = |1 - e^2|A$$

改写以上两个式子, 化简得到:

$$h = \sqrt{kp}, \quad E = \pm \frac{km}{2A}$$

这两个公式充分地重要, 它们直接联系了运动积分 h, E 和轨道参量 p, A . 通常, 通过初始条件就可以直接计算运动积分, 代入公式就可以完全确定轨道大体性质, 再根据几何关系就可以找到初始时刻在轨道上的具体位置. 最后就只需要对我们感兴趣的过程量或者状态量进行计算即可. 比如, 对于闭合的椭圆轨道, 其能量必然小于零. 那么上式中取负号以后我们可以计算一个周期需要的时间与轨道参量之间的关系:

$$T = \frac{\pi AB}{h/2} = \frac{2\pi AB}{\sqrt{kp}} = \frac{2\pi AB}{\sqrt{kB^2/A}} = 2\pi \sqrt{\frac{A^3}{k}}$$

第六章 刚体

6.1 刚体的物理描述

近代以前人们意识到了物质世界的连续性(continuum),同时针锋相对地也提出了原子论(atomism). 原子最简单的模型就是质点,而调和物质连续性与原子学说的中间模型就是刚体(rigid body) 模型. 刚体是不允许形变发生的系统. 由牛顿力学对质点的讨论推广到质点系的讨论,使我们很容易将相关结论进一步推广到刚体.

由于刚体上一点受力,则整体同时运动起来,这个模型与相对论力学体系是不兼容的. 具体来说,相互作用必须以有限的速度传播,否则就违背了因果律. 刚体不符合因果律这一时空的固有结构. 在很多相对论情境下将招致矛盾的结果.

刚体的物理学量是哪一些呢? 必要的内禀的属性是其质量的分布. 某一默认时刻 t_0 刚体占据了空间区域 Ω_0 , 由大量体积微元 dV (记做 $d^3\mathbf{R}_0$) 组成, 则刚体的总质量为:

$$m = \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{R}_0) d^3\mathbf{R}_0 = \int dm$$

随着刚体的运动, 原来在 \mathbf{R}_0 处的体积元现在在 t 时刻位于 \mathbf{r} 处, 整个刚体的运动由一个多元映射来定义:

$$f: \mathbf{R}_0, t \longrightarrow \mathbf{r}(\mathbf{R}_0, t)$$

刚体的刚性的要求, 使得这个映射必须保持体积元的不变性:

$$f: d^3\mathbf{R}_0 \in \Omega_0 \longrightarrow d^3\mathbf{r} \in \Omega; \quad d^3\mathbf{R}_0 = d^3\mathbf{r} = dV$$

而且所有这个体积元内的所有内禀属性, 这里包括密度都不能变. 所以质量元 dm 也是不变的. 从而刚体具有不变的总质量. 马上就会发现, 质量几何(mass geometry) 对刚体的动力学来说也十分重要. 质量几何研究质量对特定原点 O 的各级矩(moment). 其中零级矩即为质量:

$${}^0M = m = \int_{\Omega} dm$$

一级矩是个矢量, 它定义了刚体的质心(center of mass) 的位置:

$${}^1M_i = mr_{Ci} = \int_{\Omega} r_i dm$$

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int_{\Omega} \mathbf{r} dm}{\int_{\Omega} dm}$$

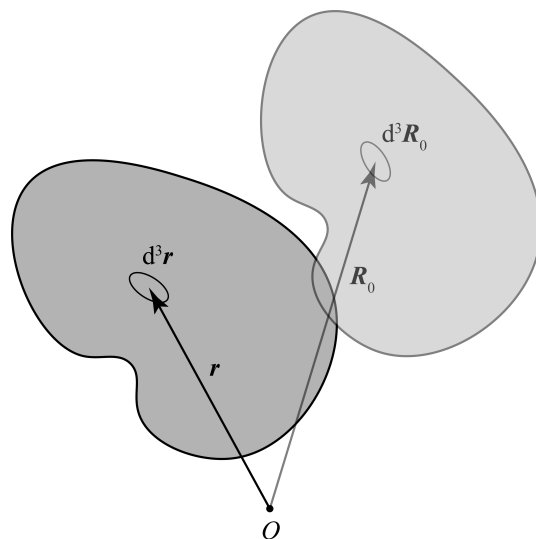


图 6.1: 刚体的描述

二级矩则是一个张量,它的九个分量代表**惯量积**(product of inertia):

$$^2M_{ij} = \int_{\Omega} r_i r_j dm$$

这些矩和原点的选取有关,随着刚体的运动也会不断变化,这三阶矩的信息对刚体动力学来说就是充分的了,通过后面的动力学可以发现,刚体的运动完全依赖于外力和这三阶矩.如果要研究广义相对论里的引力波辐射问题,更高阶的矩才变得重要起来.

刚体的运动可以被我们更精确地描述,在 t_0 时刻建立固定在刚体上,沿 x, y, z 三方向的单位矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, 那么刚体的运动同时也把三个矢量旋转到新的三个方向:

$$f: \mathbf{e}_i \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

这三个矢量仍然要互相垂直,且长度为一.这在数学上导致了可以通过这三个矢量的导数定义**角速度**(angular velocity) 矢量的结果:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

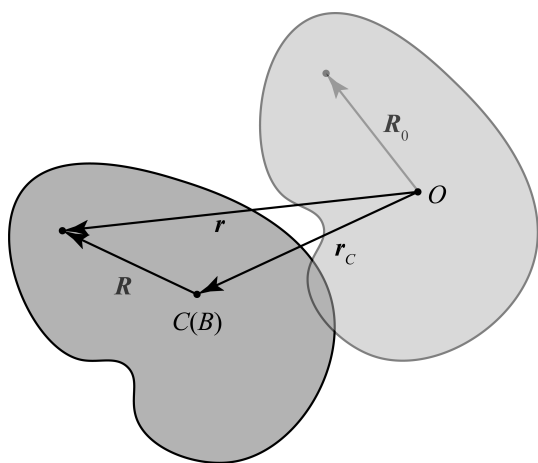


图 6.2: 基点法

十分类似于旋转参考系的变换的运动学,刚体的运动实际上就是有一个唯一的旋转参考系固连在刚体上,以后称作**刚体系**(reference system of rigid body),要研究的刚体上各个点速度实际上就是刚体系中定点的运动.于是习惯上我们采用**基点法**(method of base point) 来计算刚体上任一点的运动学量.定义**基点**(base point) 为 t_0 时刻 $\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$ 的点 B ,之后的位矢为 \mathbf{r}_B ,对应的基点速度加速度为 $\mathbf{v}_B, \mathbf{a}_B$,而刚体上待研究的点相对基点的位矢为 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_B = \mathbf{R}$,那么该点的速度加速度即为:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}$$

出于动力学的考虑,基点 B 一般就取做质心 C .作用在刚体上 \mathbf{r} 处的力 \mathbf{F} 固然对原点会有力矩 \mathbf{M} ,但是为了研究使刚体自身转动的效应,考虑到这个力同时也会使得质心运动起来,故我们重视这个力相对质心的力矩 \mathbf{M}_C :

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

刚体受到一个力系 \mathbf{F}_i 的作用,那么以下六个定理则来自于之前的动力学理论:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad ; \quad \sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_C \\ \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_C^2 + E_{kr} \right) \quad ; \quad \sum_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{F}_i = \frac{dE_{kr}}{dt} \\ \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_C \times m\mathbf{v}_C + \mathbf{L}_r) \quad ; \quad \sum_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{L}_r}{dt} \end{aligned}$$

前两个式子实际上几乎没有区别,因为刚体的总动量其实就是质心动量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$.后面几个式子则涉及到相对(平动)质心系的能量与角动量.它们与质量二级矩有着密切的联系,我们在第三讲6.3阐明.现在我们写出相对质心系能量角动量的定义:

$$\begin{aligned} E_{kr} &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})^2 dm \\ \mathbf{L}_r &= \int_{\Omega} \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) dm \end{aligned}$$

6.2 平面平行运动

一个底面磨平的物体贴在平坦的地面上运动给人以平面平行运动(plane-parallel motion)的概念. 其他的一些物体运动特征也相似于它: 黑板刷在黑板上的运动, 车轮在直行时的滚动... 它们的特征是: 刚体任何一个体积元都在一个特定的平面上运动, 而这些平面又彼此平行. 对于这样的运动基点法只需要给出质心 C 的位矢 \mathbf{r}_C 和对 t_0 时刻刚体转过的角度 θ 即可. 自由度就只有 3 个. 角速度与角加速度即可用角度的导数来给出 $\omega = \dot{\theta}$, $\beta = \ddot{\theta}$. 一般来说, 在垂直于这些平面方向要么由于动力学对称性不需要也不存在任何作用力. 要么这些力作为约束平面对物体的约束力而不在我们考虑范围内. 所以我们对一些物理对象做如下修改:

- 所有参考点改成垂直平面过该点的参考轴. 并约定其正方向为垂直纸面向外. 这样的轴方向为 z 方向, 而运动平面的方向为 $x-y$ 平面.
- 与之对应地, 刚体绕轴的转动, 产生的角速度方向以逆时针为正. 这样角速度方向与约定的正方向一致. 以后在处理的时候, 往往被作为标量而处理.
- 关于转动惯量(rotational inertia): 现在就可以把质元到转动轴---不妨把它设为 $x = y = 0$ 的轴---的距离用来计算其二级矩, 对应的概念就叫做对这根轴的转动惯量:

$$I = \int \rho^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = M_{xx} + M_{yy}$$

正如上式所示, 它是 9 个惯量积中的特定 2 个的和.

- 轴的三种可能性: 一是空间中的定轴, 一是刚体上的固连轴, 还有可能是在空间中或是相对刚体都不静止的动轴. 后面就会发现, 定轴用角动量定律; 固连轴几乎都取过质心的轴, 有转动定律; 而动轴也有瞬时转动轴的特例, 可以证明有瞬时转动轴定律存在. 无论哪种情况, 转动惯量如上一点定义. 这样在定轴和瞬时转动轴情况下, 它有可能变成一个随时间变化的值 $I(t)$
- 动能的计算: 动能的定义不需要做任何修正. 而且概念本身也并不依赖与轴的选取. 只是, 其计算方法变得简单, 而且有两种算法:

– 如果是瞬时转动轴, 那么动能直接是:

$$T(t) = \frac{1}{2} I(t) \omega^2(t)$$

- 如果是定轴或过质心的轴, 事实上任何对定轴 O 计算刚体动能最终都必须由柯尼希定律转化为两项: 一项是质心 C 的轨道运动(orbital motion) 动能, 和相对质心的自旋运动(spin motion) 带来的动能. 这也是唯一正确的分解方式: 质心 C 换成其它相对刚体固定的点都是错的. 而刚体相对质心的转动惯量就不会是变化的了, 记作 I_C . 从而两个动能可以表示为:

$$T_C = \frac{1}{2} m v_C^2(t) \quad , \quad T_S = \frac{1}{2} I_C \omega^2(t) \quad , \quad T = T_C + T_S$$

- 角动量的计算: 角动量的定义就需要做修正了. 我们仅仅选取角动量的 z 分量, 这是因为要么刚体是薄的, 对平面上的点角动量本来就只有 z 分量, 要么刚体虽然有 $x-y$ 平面上的角动量但其动力学效果是产生一些约束它在 $x-y$ 平面上运动的我们不感兴趣的约束力. 所以角动量也和角速度一样可以被视作标量, 对任何点 P 的角动量 J 可以被定义为¹:

$$J_P = \mathbf{e}_z \cdot \int \boldsymbol{\rho}_P \times \mathbf{v} dm$$

式中, $\boldsymbol{\rho}_P$ 是从 P 轴垂直地指向每一个质元 dm 的矢径. 根据 P 点不同的选取方法, 有以下几种计算方法:

¹注意即使 P 在动, \mathbf{v} 也没有必要改为 $\mathbf{v} - \mathbf{v}_P$.

- 如果是瞬时转动轴, 这种情况我们只在较少情况下使用. 那么对它的角动量直接是:

$$J(t) = I(t)\omega(t)$$

- 如果是定轴, 刚体角动量也必须由柯尼希定律转化为两项: 一项是质心 C 的轨道角动量 (orbital angular momentum) L , 和相对质心的自旋角动量 (spin angular momentum) S . 这也是唯一正确的分解方式: 质心 C 换成其它相对刚体固定的点都是错的. 刚体对质心的转动惯量 I_C 是常数. 从而两者可以表示为:

$$L = \mathbf{e}_z \cdot [m\mathbf{r}_C(t) \times \mathbf{v}_C(t)] \quad , \quad S = I_C\omega(t) \quad , \quad J = L + S$$

- 其它动轴. 除非变换参考系, 否则一般极少被考虑.

平面平行运动的刚体的自由度为 3, 所以只需要 3 个方程就足以求解其运动, 这三个方程通常取做质心运动定律和绕质心的转动定律 (rotation law):

$$\sum_i F_{xi} = ma_{Cx}$$

$$\sum_i F_{yi} = ma_{Cy}$$

$$\sum_i M_i = I_C\beta$$

6.3 空间刚体运动 *

我们来定义空间刚体的转动惯量, 首当其冲的一点是, 沿不同方向的轴的转动惯量是不一样的. 那么我们改变一下定义. 把转动惯量视作从角速度到角动量的一个映射, 为了简洁, 把映射直接写成一个点乘, 后面就知道其合理性:

$$\mathbf{I}: \quad \boldsymbol{\omega} \rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

那么这个映射一定是线性的. 这是因为如果角速度为 $\boldsymbol{\omega} = \lambda_1\boldsymbol{\omega}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\omega}_2$. 那么根据第一节给出的角动量计算方法:

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm$$

得到 $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda_1\mathbf{L}_1 + \lambda_2\mathbf{L}_2$

那么它就一定可以写作一个矩阵:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

背后具有这样的原理: 如果我们让角速度为 $(1, 0, 0)$, 把此时角动量计算出来写作 (I_x, I_{xy}, I_{xz}) . 同理如果角速度为 $(0, 1, 0)$ 时的角动量为 I_{yx}, I_y, I_{yz} , 角速度为 $(0, 0, 1)$ 时的角动量为 I_{zx}, I_{zy}, I_z . 那么任意角速度情况都可以视作以上三种情况的线性叠加:

$$(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \omega_x(1, 0, 0) + \omega_y(0, 1, 0) + \omega_z(0, 0, 1)$$

所以相应的角动量也是直接叠加的:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad : \quad \begin{cases} L_x = I_x \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ L_y = I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ L_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_z \omega_z \end{cases}$$

那么把上式写成一个矩阵的形式是再合适不过的了:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

所以是不是说在这个意义下刚体的转动惯量 \mathbf{I} 就是一个矩阵? 这依然有不妥的地方. 因为如果换一个坐标系, 这个矩阵就会变化, 但是从角速度到角动量的映射是不会发生变化的. 我们有一种更严谨的定义方法, 是把转动惯量形式上写成如下的张量(tensor) 形式:

$$\mathbf{I} = I_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + I_y \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + I_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z + I_{xy} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y + I_{xz} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z + I_{yx} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x + I_{yz} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z + I_{zx} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x = I_{zy} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y$$

其中 $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ 是一种新定义的并矢(dyadic) 运算的结果, 这种运算把两个矢量自由地并在一起, 满足按照分量的分配律, 但是不满足交换律, 即形成的并矢, 即一个张量的九个基, 对称的两个基是不被认为相等的:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \neq \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i$$

张量因为代表了物理量之间的映射而具有了物理意义. 但是如果觉得这一层意义不够明显, 我们可以把张量代表的映射表示出来, 这一步是通过张量与矢量的点乘操作体现出来的. 事实上我们定义这个点乘一样地符合分配律, 而基之间的点乘符合:

$$(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)$$

即如果 $j = k$ 则就是 \mathbf{e}_i , 如果不等于, 那就是零. 这就不难验证, 的确能把之前的矩阵式, 按照张量的方式理解为:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

最后, 如果把之前的角动量定义式按照三重矢积公式, 按分量展开可以得到:

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \int \left(\sum_i r_i^2 \sum_j \omega_j \mathbf{e}_j - \sum_i r_i \mathbf{e}_i \sum_j r_j \omega_j \right) dm$$

利用之前定义的二级矩:

$$\mathbf{L} = (M_{xx} + M_{yy} + M_{zz}) \sum_i \omega_i \mathbf{e}_i - \sum_{ij} M_{ij} \omega_j \mathbf{e}_i$$

写成分量形式为:

$$\begin{cases} L_x = (M_{yy} + M_{zz}) \omega_x + M_{xy} \omega_y + M_{xz} \omega_z \\ L_y = M_{yx} \omega_x + (M_{xx} + M_{zz}) \omega_y + M_{yz} \omega_z \\ L_z = M_{zx} \omega_x + M_{zy} \omega_y + (M_{xx} + M_{yy}) \omega_z \end{cases}$$

对比之前的惯量张量, 我们发现了实际上惯量张量的非对角线分量其实就是对应的惯量积, 从而还具有对称性:

$$I_{ij} = I_{ji} = M_{ij}$$

而对角线分量却不是惯量积. 它是真正对这些轴的转动惯量, 如 x 轴:

$$I_x = M_{yy} + M_{zz}$$

数学上可以证明, 对任何点, 存在特殊的三条正交轴 $x - y - z$, 称为**主轴**(principal axes), 可以使得惯量积都为零, 只剩下三个主转动惯量:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

即:

$$\mathbf{L} = (I_x \omega_x, I_y \omega_y, I_z \omega_z)$$

第七章 弹性体

7.1 弹性体的物理描述

所谓弹性体就是完全弹性(elasticity) 的物体. 弹性描述的是使物体发生形变的力撤除以后物体可以回到静息状态的属性. 弹性力学研究的对象与范围就是弹性体的力学性质. 一般来说, 固体主要具有弹性而液体主要具有黏性, 若是研究中间的状态, 非牛顿流体(non-newtonian fluid) 和塑性固体(plastic solid), 那就是黏弹性力学(rheology) 要研究的对象了. 典型的黏弹性过程受力不是简单地正比于位移而是与速度, 与历史相关. 因此而可以发生永久的不可恢复的变形.

正因为如此, 完整描述弹性体的运动学时, 不得不额外留心所有点的实际位移. 在流体时也许速度更需要注意. 所以我们写出一个初始 $t = 0$ 位置矢量为 \mathbf{R} 的点, 经过 t 时间到达位置为 \mathbf{r} 处, 也就是我们要定义一个 $3D \times 1D$ 到 $3D$ 的映射:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$$

不失普遍性地, 我们考虑如何刻画在 $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ 的形变. 我们需要研究在 $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ 的附近 $d\mathbf{R} = dX\mathbf{e}_x + dY\mathbf{e}_y + dZ\mathbf{e}_z$ 处的位移 $\delta = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ 与中心的位移去比较. 数学上有以下泰勒展式:

$$\delta(d\mathbf{R}, t) = \delta(\mathbf{0}, t) + d\mathbf{R} \cdot \nabla \delta$$

上式中 $\nabla \delta$ 是一个有九个分量的张量, 张量这一概念上一章介绍过, 它是九个分量的三行三列式的组合, 现在它的作用是可以与之前的矢量 $d\mathbf{R}$ 点乘把它线性地映射为另一个矢量:

$$\begin{aligned} \nabla \delta &= \sum_{i,j} \frac{\partial \delta_j}{\partial X_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ \nabla \delta : \sum_i dX_i \mathbf{e}_i &\rightarrow \sum_j d\delta_j \mathbf{e}_j = \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial \delta_j}{\partial X_i} dX_i \right) \mathbf{e}_j \\ \nabla \delta : &\begin{bmatrix} \frac{\partial \delta_x}{\partial X} & \frac{\partial \delta_y}{\partial X} & \frac{\partial \delta_z}{\partial X} \\ \frac{\partial \delta_x}{\partial Y} & \frac{\partial \delta_y}{\partial Y} & \frac{\partial \delta_z}{\partial Y} \\ \frac{\partial \delta_x}{\partial Z} & \frac{\partial \delta_y}{\partial Z} & \frac{\partial \delta_z}{\partial Z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

不难发现第二个式子是不证自明的. 所以实际上刻画形变的包含于 $\nabla \delta$ 这个张量. 但是并不是完全取决于它, 考虑像刚体这样的不能变形的物体, 上一章介绍过, 旋转依然是可能的. 不妨设刚体不仅随 $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ 的点发生了 $\delta(\mathbf{0}, t)$ 式的平动, 也要发生一个 $d\phi$ 的小角度转动. 在这里我们让转动的角度足够小以至于可以做小角近似. 这样就可以把刚体式的位移的以上张量写成:

$$\begin{aligned} \delta(d\mathbf{R}, t) &= \delta(\mathbf{0}, t) + d\phi \times d\mathbf{R} \\ \nabla \delta : &\begin{bmatrix} 0 & d\phi_z & -d\phi_y \\ -d\phi_z & 0 & d\phi_x \\ d\phi_y & -d\phi_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这个矩阵是一个反对称矩阵,从而我们得出一个结论:一个固体在某点位移对应的 $\nabla\delta$ 如果是反对称的,则不产生任何形变,仅仅是局部整体发生了平移和旋转.

但是有一个简单的定理.任何一个方矩阵 $[M_{ij}]$ 都能被唯一地分解为对称矩阵和反对称矩阵.分别称作原来矩阵的**对称部分**(symmetric component)和**反对称部分**(anti-symmetric component).用矩阵的转置可以很简单的得到这个结果:

$$[M_{ij}] = [S_{ij}] + [A_{ij}]$$

$$[S_{ij}] = \frac{[M_{ij}] + {}^t[M_{ij}]}{2}, \quad [A_{ij}] = \frac{[M_{ij}] - {}^t[M_{ij}]}{2}$$

那么问题就很简单了,之前那个矩阵的对称部分就是描述形变的部分.这个部分被叫做**应变张量**(strain tensor),以后用 ϵ 来表示¹:

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla\delta + {}^t\nabla\delta)$$

$$\epsilon : \begin{bmatrix} \frac{\partial\delta_x}{\partial X} & \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_y}{\partial X} + \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_x}{\partial Y} & \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_z}{\partial Y} + \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_y}{\partial Z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_y}{\partial X} + \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_x}{\partial Y} & \frac{\partial\delta_y}{\partial Y} & \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_x}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_z}{\partial X} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_z}{\partial Y} + \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_y}{\partial Z} & \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_x}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_z}{\partial X} & \frac{\partial\delta_z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \theta_{xy}/2 & \theta_{zx}/2 \\ \theta_{xy}/2 & \epsilon_y & \theta_{yz}/2 \\ \theta_{zx}/2 & \theta_{yz}/2 & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

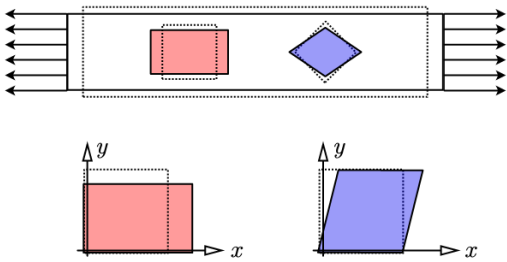


图 7.1: 正应变与剪应变

其中三个对角元素 ϵ 称作**正应变**(normal strain).而非对角的元素 θ 称作**剪应变**(shear strain).如图7.1所示,在一种非常简单的模型中,大气中的棒被在沿棒方向施加一个拉力而伸长,但宽方向很自然地会产生些许的收缩.那么根据在棒里取出不同的微元形式,其变形方向也会有所改变.红色部分沿 x 方向就发生了明显的正应变.这是因为合适地平移,旋转其变形后的微元对齐形变前的微元(虚线)后,明显发现在 x 方向长度变大了.如果初始长度为 X ,之后在微元范围内端点的 $x = X + \delta$.于是根据上面的定义,正应变其实就是:

$$\epsilon = \frac{\delta}{X} = \frac{x - X}{X}$$

而蓝色部分是个平行四边形,将底边与变形前的底边对齐以后,我们发现 $x - y$ 平面上顶角不再是 90° ,这其实就标志着剪应变.如果这个角度减小了 α ,那么之后的 $x = X + Y \tan \alpha$, $y = Y$.这就说明 $\delta_x = Y \tan \alpha$, $\delta_y = 0$.从而:

$$\theta_{xy} = \frac{\partial\delta_y}{\partial X} + \frac{\partial\delta_x}{\partial Y} = \tan \alpha \approx \alpha$$

可见这个角度变化其实就是剪应变,它与边的对齐方式无关,如果 x, y 轴夹角变小便是正的.正应变,剪应变都是无量纲的物理量.

接下来需要考虑弹性体的内部受力情况.令人惊讶的是,它也必然由一个对称张量描述.首先我们意识到弹性力内部的受力具有以下特征: A. 是空间点的函数,不同点处可以不同,但每一点应当有一个受力情况,它就是内部的**应力**(stress). B. 不是一个矢量.显然指出弹性体中的一点,并不能马上对应出来这个点处的某个受力的情况,因为我们考虑的是内力而不是外力,但是点处的受力不可能有明确的施力物体与受力物体.那么其实还需要在这一点处找到一个面矢量 dS ,才能说是谁对谁的力.我们这样就发现了,其实指定一个应力,本质上就是在每一点指定一个面矢量 dS 到相互作用力 dF 的映射. C. 显然,这样的映射应当为线性映射².

¹本书印刷体张量都是与矢量一致的粗体.手写时,为了区分,可以把张量写作带异型箭头的形式 \overleftrightarrow{T} 或者直接用自由指标的分量代指构成的整体 T_{ij} .

²证明留给读者做思考,需要用到极限微元受力分析.

这样就几乎已经说明,应力其实就是一个张量.因为从一个矢量 $d\mathbf{S}$ 到另一个矢量 $d\mathbf{F}$ 的线性映射的数学模型其实就是张量,它存在 $3 \times 3 = 9$ 个分量.我们进一步指定, $d\mathbf{F}$ 的含义 $d\mathbf{S}$ 指向的那一侧的体元对这一侧的体元通过 $d\mathbf{S}$ 施加的相互作用力.这个张量就是:

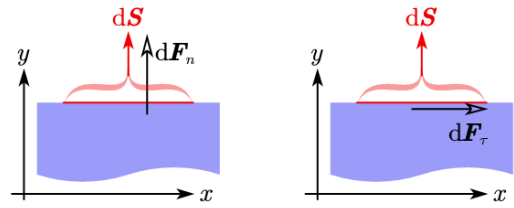


图 7.2: 正应力与剪应力

$$\begin{cases} dF_x = \sigma_{xx}dS_x + \sigma_{xy}dS_y + \sigma_{xz}dS_z \\ dF_y = \sigma_{yx}dS_x + \sigma_{yy}dS_y + \sigma_{yz}dS_z \\ dF_z = \sigma_{zx}dS_x + \sigma_{zy}dS_y + \sigma_{zz}dS_z \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\sigma} : d\mathbf{S} \rightarrow d\mathbf{F}$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

这个张量就叫做**应力张量**(stress tensor).通过极限微元的受力分析,可以证明这个张量还必须是对称的³.也就是说,我们可以写成以下形式:

$$\boldsymbol{\sigma} : \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

同样的,参考图7.2,我们可以发现,对角线元素 σ 代表**正应力**(normal stress)而非对角线元素 τ 代表**剪应力**(shear stress).如果把面元取为 $d\mathbf{S} = dS_y \mathbf{e}_y$,考虑在平面上的受力就会产生两个分量:

$$d\mathbf{F}_n = \sigma_y dS_y \mathbf{e}_y, \quad d\mathbf{F}_\tau = \tau_{xy} dS_y \mathbf{e}_x$$

前者就是垂直于面的以拉力为正的正应力,后者就是平行于面方向的剪应力.而应力本身都是和以往学过的压强量纲一致,国际单位是帕斯卡 Pa:

$$\sigma = \frac{dF_n}{dS}, \quad \tau = \frac{dF_\tau}{dS}$$

引入两个张量以后,剩下的就是构造两者之间的因果关系:应力是如何造成应变的.在纯粹的弹性理论中,我们可以假设应力张量到应变张量的映射再一次是一个逐点线性的映射.这样的结果是数学上造成了每一点需要引入一个四阶的张量来描述这样的映射.三维情况下四阶的张量一共会造成 $3^4 = 81$ 个独立分量.由于应力应变张量本身具有对称性,故其实只需要 6^2 个独立分量.再由于体系的非耗散性的要求⁴,其独立分量数最终减少到 21 个.这也是高度非对称的介质的弹性系数中独立的量的个数.然而,如果介质是完全各向同性的,也就是说沿所有三维空间中任意方向的长度与角度的拉伸与压缩都是相同困难的情况下,张量的对称性理论可以告诉我们,独立的弹性系数只会剩下两个.具体来说, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 之间的关系必然会变成以下不依赖于坐标系选取的形式:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{I}$$

³也留给读者自己完成.

⁴导致了某种形式互易定理.

而按照这样的方式选取的弹性系数 λ 和 μ 被叫做**拉梅参数**(Lamé parameters). 式中 Tr 代表取迹操作, 而 \mathbf{I} 是单位张量. 带入之前的两个张量的写法上式实际上意味着:

$$\sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_y = 2\mu\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_z = 2\mu\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\tau_{ij} = \mu\theta_{ij}$$

至少我们能从上式发现, 剪应力和正应力是分别独立地导致剪应变和正应变的, 尤其是剪应力, 它在三个方向甚至都是互相独立地, 而这个比例系数就还被叫做**剪变模量**(shear modulus), 用 G 来表示. 即拉梅系数 $\mu \equiv G$. 这个在切向成立的结论称作**横向胡克定律**(transverse Hooke's law):

$$\frac{F_\tau}{S} = G \frac{\delta}{y}$$

而前三个式子对应的正应力正应变之间的关系比较复杂. 首先我们把三式相加可以得到:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (2\mu + 3\lambda)(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

我们意识到, 任何物体在大气环境下实际上就受到周围分子不断撞击产生的大气压力而体积收缩, 实际上就是三个方向应力相等等于压强 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$, 而且三个应变 ε_i 就等价于线压缩率, 应当是体压缩率的三分之一的情况, 这样我们得到:

$$p = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\Delta V}{V}$$

这个系数就叫做**体弹性模量**(bulk modulus):

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

一般来说, 弹性体预先在大气体系中被压缩, 在这个基础上, 线性地叠加上由于其他形式的应力 σ 导致的新应变 ε .

还有一种至关重要的变形. 如果我们在一根弹性棒的 x 方向施加应力 σ , 但是 $y-z$ 方向不施加任何的力 $\sigma_y = \sigma_z = 0$, 扣除原来大气造成的应变, 通过解方程得到 $\varepsilon = \varepsilon_x$ 和 $\varepsilon' = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ 的值:

$$\begin{cases} \sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda(\varepsilon + 2\varepsilon') \\ 0 = 2\mu\varepsilon' + \lambda(\varepsilon + 2\varepsilon') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma \\ \varepsilon' = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\varepsilon \end{cases}$$

第一个式子翻过来写就是描述拉力与棒伸长之间的**纵向胡克定律**(longitudinal Hooke's law). 相关的弹性系数称作**杨氏模量**(Young's modulus), 即 $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$. 而第二个式子反映了如果棒在拉力方向伸长, 在垂直方向必然缩短的现实. 缩短率与伸长率的比值称为**泊松比**(Poisson's ratio), 即 $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$:

$$\frac{F_n}{S} = E \frac{\delta}{x}, \quad \frac{\delta'}{y} = \nu \frac{\delta}{x}$$

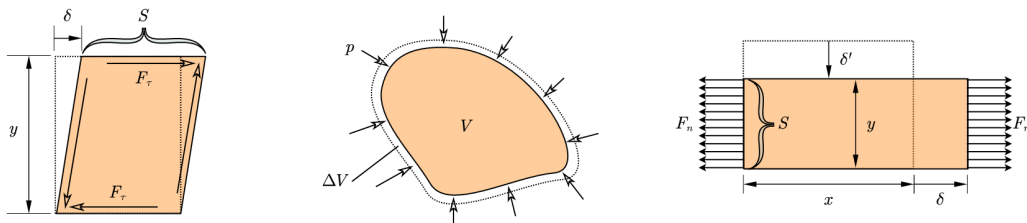


图 7.3: 剪变模量, 体弹性模量与杨氏模量

三个弹性模量的单位也是应力的单位, 即帕斯卡, 而典型材料的弹性模量在 10^{10}Pa 的数量级.

7.2 弹性棒, 弹性绳, 弹性膜与弹性体

在弹性的语境下,除了体状的大块弹性介质的研究,一些边缘化的状态:比如弹性体的表面,或者本来就在空间上受到限制的情况,包括本节介绍的弹性棒,绳,膜等,都是值得研究,且具有相似行为的体系.这种相似性体现在具有同一类的动力学方程和能量结构上.并最终导致了下一节介绍的弹性波的结果.

7.2.1 弹性棒

考虑一根弹性棒7.6,忽略其在垂直棒方向的运动带来的动力学效应.那么棒就被简化为一维的模型.在变量上,我们选取棒未形变时的坐标 x 和时间 t 为自变量,而沿正方向向前的位移 ξ 为因变量,即 $\xi(x, t)$. 此时如 (a) 图,在棒上 x 处找一个固连在棒上的面元,随 x 改变的不仅仅是 ξ ,其实还有通过这一个面元相互拉扯的应力 σ .于是我们就来到了 (b) 中关于应力的计算.同时参考 (c) 图,一个体积元 dx 的左右侧原坐标 x 与 $x + dx$,但是它们的位移是不一样的,前者是 $\xi(x)$,后者则是 $\xi(x + dx) = \xi + d\xi$,即:

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

那么这一段微元长度就变为 $dx + d\xi$.根据胡克定律,由于伸长产生的应力就是:

$$\sigma(x, t) = E \frac{d\xi}{dx} = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

最后 (c) 图再取出 dx 的微元,其质量密度为 ρ ,截面积为 S ,那么其质量和两段受力的合力为:

$$dm = \rho S dx$$

$$dF = d\sigma S = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

根据牛顿第二定律 $dF = dm \cdot a$, a 则是位移 u 对时间的二阶导数.这就给出了以下方程:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

这样的方程有一个名字,这也是我们第一次遇到这样的方程,称为**波动方程**(wave equation).一维波动方程的一般形式为:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

其中 v 必须是一个常数数学上才叫波动方程, v 称为**波速**(wave velocity).而弹性棒对应的波速就是:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

波动方程和波速,正如其名,在下一节我们去解它之后就会发现就是产生的弹性波的特征.

下一个问题是考虑棒振动的能量.动能是比较简单的,我们把微元的动能做积分就是总动能:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

但我们尤其关心能量的**定域化**(localization) 问题.就是说能量是否可以表示为逐点的能量密度的体积分.就动能来看这也是成立的:

$$T = \int_0^L \mathcal{T} \cdot S dx \Rightarrow \mathcal{T} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

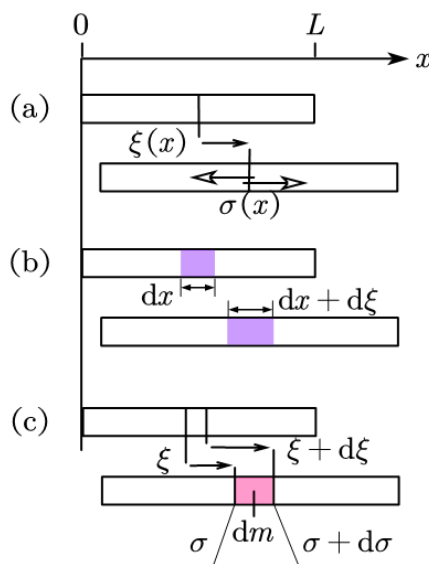


图 7.4: 弹性棒的建模

现在我们来思考势能的定义. 显然棒不均匀伸长的情况相对于以往棒均匀伸长是两种完全不同的情况, 棒所储存的势能不仅要重新推导, 甚至需要在推导中确立其存在性. 事实上如果某一段 dx 内应力为拉力 $\sigma > 0$, 那么如果在这个力下这一段伸长 $d\xi(t+dt) - d\xi(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right) dt$, 内部应力就会做负功, 我们只需要证明这个功对应的功率 (除以 dt) 等于对应体积内的势能的增加, 即:

$$ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx = \frac{d}{dt} (\mathcal{V} S dx)$$

这样就得到了:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2, \quad V = \int_0^L \mathcal{V} \cdot S dx$$

总能量总是要守恒的, 对于棒的能量的计算, 现在就可以普遍地写为棒上能量密度 (energy density) 的积分, 这个总能量密度就是动能密度 \mathcal{T} 和势能密度 \mathcal{V} 的和:

$$w = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

7.2.2 弹性绳

考虑一条质量线密度为 λ , 预先被拉紧且拉力为 T 的细绳. 由于形变小所以沿绳方向的拉力几乎是个常数. 那么考虑这个绳在垂直 x 方向发生位移 $\xi(x, t)$, $\eta(x, t)$. 我们立马就发现了这个问题不同于上一个问题之处在于因变量变多了. 上一个弹性棒中的运动模式是纵波 (longitudinal wave). 而这里要建立的是垂直传播方向的横波 (transverse wave) 模型. 横波不同于纵波的一大本质区别在于它有偏振 (polarization). 我们把 ξ 和 η 两个方向叫做其偏振方向.

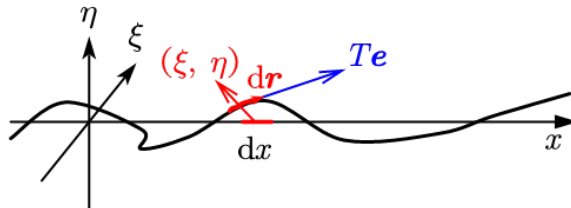


图 7.5: 弹性绳的建模

在建模上, 两者具有相似性. 同样是找到 dx 微元两端作用的力. 现在它大小几乎就是 T , 只是方向变成了 e , 它是绳端的单位切向量:

$$d\mathbf{r} = (dx, d\xi, d\eta) \Rightarrow \mathbf{e} = \frac{(dx, d\xi, d\eta)}{\sqrt{dx^2 + d\xi^2 + d\eta^2}}$$

由于在 ξ, η 方向的位移产生的斜率是小量, 上式近似为:

$$\mathbf{e} = \left(1, \frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dx} \right) = \left(1, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

那么拉力 $T\mathbf{e}$ 的主要效果也就是在 $T_\xi = T \frac{\partial \xi}{\partial x}$ 和 $T_\eta = T \frac{\partial \eta}{\partial x}$ 两个方向上, 在微元段 dx 两侧的力的差产生了在 ξ, η 方向的加速度. 那么就得到了波动方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

可以发现, 波动方程的形式相对弹性棒没有本质的变化, 只不过从一个方程变成了两个独立量要满足的波动方程. 以及波速公式变成了:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

能量的表现与推导方法也是类似的. 唯一的区别是现在的密度指的是线密度. 可以给出:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}\lambda \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}T \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}T \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2$$

还有一点值得指出. 就是在这样的情况下势能还有一种极其简单的等效计算方法, 就是**表面能**(surface energy) 的计算方法, 体系的势能实际上就是简单地正比于变形之后的总绳长的:

$$V = T \int |\mathrm{d}\mathbf{r}| = T \int \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2} = T \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2} \mathrm{d}x$$

事实上, 对上式进行小量近似就可以发现:

$$V = T \int \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \mathrm{d}x = V_0 + \int \mathcal{V} \mathrm{d}x$$

从而不变拉力绳的势能实际上单纯地正比于绳子被拉长到了多长. 形成单位长度的绳子需要的能量是完全一致的.

7.2.3 弹性膜

弹性膜的情况则与弹性绳的情况互补: 这一次是自变量变成了二维的 x, y , 当然还有时间 t 一共三个. 倒是因变量只剩下垂直于面方向的位移 ξ . 即 $\xi(x, y, t)$. 面的惯性由质量面密度 μ 来描述. 而面的弹性, 类似于弹性绳, 我们也给面拉紧造成各向同性的内部张力. 这种拉紧是均匀的, 所以才造成均匀的面密度. 而同时也会对面上线元 $\mathrm{d}s$ 造成彼此之间垂直于线元的, 平行于面方向的拉力 $\mathrm{d}F = \sigma \mathrm{d}s$. 其中 σ 称作**张力系数**(tension coefficient). 那么如果在 $x-y$ 平面上选取右旋的闭合曲线圈, 中间围着一块膜. 在边界上一个典型的线段元和当点处的法向量就是:

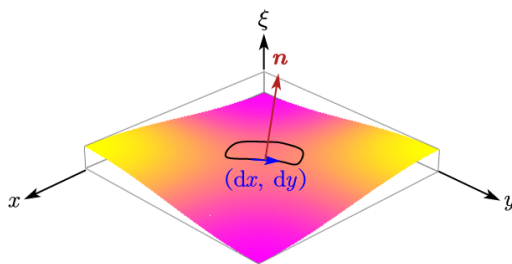


图 7.6: 弹性膜的建模

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}\xi) = \left(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \frac{\partial \xi}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \mathrm{d}y \right), \quad \mathbf{n} = \left(-\frac{\partial \xi}{\partial x}, -\frac{\partial \xi}{\partial y}, 1 \right)$$

那么通过这一段弧元, 周围膜对这一段膜施加的力, 忽略二阶小量就是:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = -\sigma \mathbf{n} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \sigma \left(\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x, \frac{\partial \xi}{\partial x} \mathrm{d}y - \frac{\partial \xi}{\partial y} \mathrm{d}x \right)$$

足以发现, 如果考虑曲线中的膜受到的合力, 显然 $x-y$ 方向是平衡的. 合力在 ξ 方向, 大小可以根据数学上的格林公式⁵得到:

$$F_\xi = \sigma \oint \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \mathrm{d}y - \frac{\partial \xi}{\partial y} \mathrm{d}x \right) = \iint \sigma \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

从中我们可以发现, 单位面积上给出的内力就是:

$$f = \frac{\mathrm{d}F_\xi}{\mathrm{d}x \mathrm{d}y} = \sigma \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

⁵ 格林公式(Green formula) 为, 对任何平面区域 D 与其边界右旋闭合曲线 ∂D :

$$\oint_{\partial D} P(x, y) \mathrm{d}x + Q(x, y) \mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

那么根据牛顿第二定律, 这就是让膜产生 ξ 方向加速度的力. 化简就得到了膜对应的二维波动方程:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

对应波速就是:

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$$

同理, 对应动能和势能的面密度为:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \\ \mathcal{V} &= \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

同样的, 势能可以重新表述为表面能:

$$V = \sigma \int |\mathrm{d}\mathbf{S}| V_0 + \int \mathcal{V} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

7.2.4 弹性体 *

终于我们可以讨论自变量有 $x - y - z$ 三维空间和 t 一维时间, 因变量, 即弹性体的位移矢量 δ 也有三个维度的最复杂的情况. 本章第一节的讨论总结下来就是两个式子:

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\nabla \delta + {}^t \nabla \delta)$$

$$\sigma = 2\mu \cdot \epsilon + \lambda \mathrm{Tr}(\epsilon) \cdot \mathbf{I}$$

它给出了位移的一阶倒数是如何产生力的. 另外一部分物理公式, 就是计算单位体积受到的合力, 最后联立牛顿第二定律, 我们就有希望给出波动方程.

计算合力需要对一个体积区域 D 的边界闭合外向曲面 ∂D 上受到的外力进行积分:

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial D} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \sigma$$

这其实可以使用数学上广义上的高斯定理化为体积分:

$$\mathbf{F} = \iiint_D \nabla \cdot \sigma \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z} = \nabla \cdot \sigma$$

最后再联立牛顿第二定律, 我们就化简出来第三个方程:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma$$

可以得到, 如果把 δ 记做 (ξ, η, ζ) , 那么对应的方程就称作**纳维-柯西方程**(Navier-Cauchy equation). 完全展开的形式为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial y} \right) \end{aligned}$$

这样写是不利于我们分析其求解的. 通过数学化简, 我们暂时先把波动方程写成如下形式:

$$\rho \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \delta) - \mu \nabla \times (\nabla \times \delta)$$

其中需要用到矢量微分恒等式:

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\delta}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\delta}) = \nabla^2 \boldsymbol{\delta}$$

最后,棒中的能量守恒,动能密度是简单的.而势能密度在只有正应变或剪应变情况下容易证明,它就是应力和产生的应变乘积的一半.普遍情况下只需要做叠加即可:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \theta_{xy} + \tau_{yz} \theta_{yz} + \tau_{zx} \theta_{zx}) = \frac{1}{2} \lambda (\nabla \cdot \boldsymbol{\delta})^2 + \frac{1}{2} \mu (\nabla \boldsymbol{\delta} : \nabla \boldsymbol{\delta} + \nabla \boldsymbol{\delta} : \nabla \boldsymbol{\delta})$$

式中“:”符号表示张量之间的双点乘运算.具体来说:

$$\left(\sum_{ij} T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) : \left(\sum_{ij} S_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) = \text{Tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) = \sum_{ij} T_{ij} S_{ji}$$

7.3 弹性波

波动方程的求解问题其实是非常简单的.它其实是普遍的偏微分方程(partial differential equation, PDE)求解问题中最简单的一类.不同于常微分方程,一个多元函数,如 $\xi(x, t)$, 在自变量取某值时不仅仅可以求函数值和对 x 的各阶导数,还可以求对 t 的各阶导数,甚至还可以求 x 和 t 的各阶混合导数.对这些值提出限制,就构成了偏微分方程:

$$F\left(x, t, \frac{\partial^{m+n} \xi}{\partial x^m \partial t^n}\right) = F\left(x, t, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t}, \dots\right) = 0$$

与常微分方程类似的一点是,它一般也存在着大量的解.尤其是线性偏微分方程的特殊情况,其解也是满足常微分方程的叠加原理,通解原理的:

$$\sum_{i,j} c_{ij}(x, t) \frac{\partial^{m+n} \xi}{\partial x^m \partial t^n} = f(x, t)$$

其中最简单的波动方程其实就是二阶的齐次的常系数的线性偏微分方程:

$$f(x, t) = 0, c_{00} = c_{01} = c_{10} = 0, c_{20} = -v^2, c_{11} = 0, c_{02} = 1, c_{ij} = 0 \ (i > 2 \text{ or } j > 2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

如何找到以上方程的所有解(通解)?我们介绍两种常见的思路:

7.3.1 分离变量法

猜测原方程具有如下形式的特解:

$$\xi(x, t) = A(x)u(t)$$

代入原方程,两边同时除以 $A(x)u(t)$,化为纯粹的分离变量的常微分方程形式:

$$\frac{\frac{d^2 u}{dt^2}}{u} = v^2 \frac{\frac{d^2 A}{dx^2}}{A}$$

左侧必然是不含 x 的那一类函数.而右侧又必须是不含 t 的那一类函数.两者还是同一个函数.所以这个函数 x, t 都不含有,那便是常数.最后再注意到随时间变化的部分在简谐函数下恰好能符合常数的要求:

$$u(t) = e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{\frac{d^2 u}{dt^2}}{u} = -\omega^2$$

最后求解对 A 的限制, 得到:

$$A(x) = Ae^{\mp ikx}, \quad \frac{\omega}{k} = v$$

从而我们就得到了通解的一组基:

$$\left\{ \xi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}, \xi(x, t) = Ae^{i(\omega t + kx)} \middle| \frac{\omega}{k} = v \right\}$$

根据傅里叶理论, 上述解的叠加其实就是所有可能在一维下符合波动方程的解. 这样一组基本的解就是右行波和左行波解. 注意到这样的波有一点不符合实际情况: 它完全没有色散, 所有的频率的波传播速度都完全一样, 说明我们的建模过于简单.

7.3.2 变量代换法

如果我们尝试变量代换:

$$x_+ = x + vt, \quad x_- = x - vt$$

那么容易发现, 原来的方程居然变成了:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_+ \partial x_-} = 0$$

这样, 只需要 ξ 仅仅是其中一个变量的函数, 对另一个函数的偏导数就是零, 就能符合以上的方程. 即任意的 $f(x_+)$ 和 $g(x_-)$ 都是以上方程的解. 由于叠加原理, 我们就能肯定地找到以下特解:

$$\xi(x, t) = g(x - vt) + f(x + vt)$$

这其实也构成了通解, 它甚至直接就是任意通解的形式, 不仅仅是可以叠加形成通解的一组基:

$$\{\xi(x, t) = g(x - vt) + f(x + vt) | \forall f \forall g\}$$

其中任意的 $g(x - vt)$ 就代表初始时刻波形 $g(x)$ 任意的一列右行波. 而 f 就是左行波. 即任何一维的波动总可以分解为任意波形的左行波和右行波的叠加. 上一节的任意频率的各种简谐波又可以叠加形成任意波形, 实际上就是傅里叶理论的重要内容.

7.3.3 多维情况

如果是类似于弹性绳那样的波动方程:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

那么这个一维传播的二维振动的基础行波解就可以表达为:

$$(\xi, \eta) = (A, B)e^{i(\omega t \pm kx)}, \quad \frac{\omega}{k} = v$$

其中偏振矢量 (A, B) 可以是任何可能性, 如果是 $(0, 1)$ 就是 ξ 方向的线偏振, 如果是 $(1, 0)$ 就是 η 方向的线偏振. 故这个振动还可以按偏振模式分解为两个. 注意到 A, B 都是复数还可以带有相位. 如果两个方向复振幅的模相等而相位差 90° , 那么这个偏振模式就叫做圆偏振. 即, 相对简单一维振动, 它还多了偏振这一个自由度.

如果是类似于弹性膜那样的波动方程:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

那么这个二维传播的一维振动的基础行波解就被表达为:

$$\xi = Ae^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} = v$$

那么这个波就同时具有了以下自由度: 频率 (决定 ω 和 k 以及引申的周期, 波长等等), 传播方向 (决定 k_x 和 k_y 的比例和正负), 强度 (决定 A 的模), 以及相位 (决定 A 的幅角).

最后考虑弹性体中的波动方程, 即纳维-柯西方程:

$$\rho \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \delta) - \mu \nabla \times (\nabla \times \delta)$$

这个方程看上去很难直接求解. 但是实际上数学上有一重要定理为我们提供了重要的线索. 就是 **斯托克斯-亥姆霍兹定理** (Stokes-Helmholtz's theorem) 发现, 任何三维空间中的矢量 $\delta(\mathbf{r})$ 都可以分解为一个有旋无散场 δ_S 与有散无旋场 δ_P 的叠加:

$$\delta = \delta_S + \delta_P \quad : \quad \nabla \cdot \delta_S = 0, \quad \nabla \times \delta_P = 0$$

基于这一点, 我们可以考虑纳维-柯西方程在仅仅有有旋无散的振动和有散无旋的振动情况下的各自的解, 只要存在, 叠加在一起就是通解了. 再次结合式子:

$$\nabla(\nabla \cdot \delta) - \nabla \times (\nabla \times \delta) = \nabla^2 \delta$$

首先考虑有旋无散的振动. 那么纳维-柯西方程简化为:

$$\rho \frac{\partial^2 \delta_S}{\partial t^2} = -\mu \nabla \times (\nabla \times \delta_S)$$

但是旋即借助前式发现:

$$-\nabla \times (\nabla \times \delta_S) = \nabla^2 \delta_S$$

这就相当于给出了:

$$\frac{\partial^2 \delta_S}{\partial t^2} = v_S^2 \nabla^2 \delta_S = v_S^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta_S, \quad v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

这样就可以求解了, 其通解的基为:

$$\delta_S = A_S e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = v_S$$

最后验证它是否符合散度为零的条件, 发现必须要满足:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{A}_S$$

即这样的波其实是一种横波. 它构成的要素有频率, 传播方向, 强度, 偏振, 以及相位. 这样的弹性体波称作 **剪波** (shear wave). 它发生的形变就是剪应变, 其波速恰好用的就是剪边模量 $\mu = G$:

$$v_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

再考虑有散无旋的振动. 那么纳维-柯西方程简化为:

$$\rho \frac{\partial^2 \delta_P}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \delta_P)$$

但是旋即借助前式发现:

$$\nabla(\nabla \cdot \delta_P) = \nabla^2 \delta_P$$

这就相当于给出了:

$$\frac{\partial^2 \delta_P}{\partial t^2} = v_P^2 \nabla^2 \delta_P = v_P^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta_P, \quad v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

这样就可以求解了,其通解的基为:

$$\delta_P = \mathbf{A}_P e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = v_P$$

最后验证它是否符合旋度为零的条件,发现必须要满足:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{A}_S = 0 \Rightarrow \mathbf{k} // \mathbf{A}_S$$

即这样的波其实是一种纵波.它构成的要素有频率,传播方向,强度,以及相位.这样的弹性体波称作**压波**(pressure wave).它发生的形变就是正应变,注意其波速用的既不是弹性棒情况的杨氏模量 E ,也不是体弹性模量 K ,与后者关系更近,实际上由第一节的知识:

$$v_P = \sqrt{\frac{K + 4G/3}{\rho}}$$

最终我们发现,作为纵波的压波波速 v_P 总是要比作为横波的剪波 v_S 快一些.故在地震波场合下,总是把前者叫做**首波**(primary wave),后者叫做**次波**(secondary wave).两种命名方法都是导致纵波简记为 P 波,横波简记为 S 波的原因.也经常地,我们会把特定方向传播,有特定频率(横纵波速不同会导致 k 不同)的横波两种偏振,加上纵波称作三种不同的偏振,波从振源传播到特定点,三种偏振需要的时间是不同的.纵波总是先到,横波后到.

地球内部结构虽然目前只能从现象去反过来建立模型,但比较令人相信的一点是内部存在分层的现象,在地表以下约 2891km 处存在从固态的地幔到高压“液态”的地核的**古登堡不连续性**(Gutenberg discontinuity).作为类似于固态的高压液态,在建立模型上十分重要的一点是,其剪变模量 G 几乎降低到了 0.这给出了两个结果:一是通过剪变的弹性得以传播和存在的剪波无法存在,故地震波在地幔-地核分界面上会发生 S 波的全反射⁶.二是压波就彻底变成了由体弹性模量决定的波速公式,这一个公式也是正常气体,液体中的体波的波速公式:

$$v_P = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

尤其是在理想气体中,比如空气中传播的声波,其波速就可以把气体视作理想气体,而气团的压缩与膨胀都被视作绝热的(因为振动频率高气体完全无法达到热学平衡),于是:

$$\begin{aligned} pV^\gamma = C &\Rightarrow \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \\ \Rightarrow K = -\frac{dp}{dV/V} &= \gamma p \end{aligned}$$

带入声速,结合密度公式 $\rho = \mu p / RT$,得到气体中的声速公式:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

这个计算早在 1687 年就由牛顿完成,但是受限于当时几乎等于空白的热学,力学理论的限制与同样几乎是空白的实验测量数据,牛顿给出的公式中没有出现绝热指数 γ ,导致它计算出的室温下空气中声速只有 300m/s.比正确值 340m/s 小了不少.这个误差后来由拉普拉斯解释与修正.

⁶少量 S 波有可能转化为 P 波继续向地核传播

第八章 流体

8.1 流体的物理描述

我们暂时只研究流体的动力学特征. 规避掉任何有关热学的问题.

首先考察流体的运动学. 流体已经不再具有恢复任何形变的能力, 故引入流体相对初始时刻的位移已经不是最合适的方法了. 如果依然这么处理, 把流体质元的位置写为初始位置 and 时间的函数, 这个描述方法称作**拉格朗日法**(Lagrange's method). 即:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{R}, t)$$

这样我们自然地可以得到一条曲线和它的方程, 便是选定某个 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$, 于是位置 \mathbf{r} 单独成为某个时间的函数. 这代表某个质元的实际运动过程和轨迹. 这个轨迹称作**迹线**(path line).

但是, 跟常见的做法是, 我们不再关心每一个时刻各个空间位置的质元的初始位置在哪儿, 这没有太大的意义. 值得关心的当下流体在做何种流动. 即每一个点处的流速 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ 是如何的. 其实就是上面函数的对时间偏导数:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}: \mathbf{f}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{r}}$$

用流速场 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ 来描述流体的方法称作**欧拉法**(Euler's method). 而欧拉法的抽象函数也可以可视化: 我们找到这样的空间曲线, 数学上称作流速场的积分曲线: 它在每一点的切线方向与某一时刻 t_0 下该点流速相同, 或者说它是以下微分方程的解:

$$\frac{dx}{v_x|_{t=t_0}} = \frac{dy}{v_y|_{t=t_0}} = \frac{dz}{v_z|_{t=t_0}}$$

这样的曲线就叫**流线**(streamline), 一组流线还可以形成**流管**(streamtube) 的概念. 流线与迹线显然不一定重合, 因为流线只需要给出某一时刻的流速场就可以画出来, 但迹线显然是要追踪不同时刻一个质元的运动, 如果下一时刻的流速场变了, 流体质元就会沿另一套流线去运动了. 但即使迹线不再直观, 使用欧拉法的优越性与完备性后面就会逐渐发现.

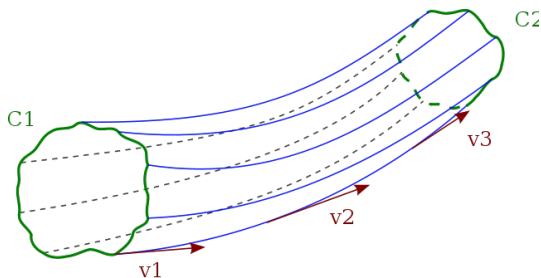


图 8.1: 流线与流管

讨论流体的运动时有两个常见的特殊情况与条件可以使问题变得更简单:

一是, 常见的液体, 常常被建模为**不可压缩流体**(incompressible fluid). 它有两种等价的表述方式. 一方面由于体积不可被压缩, 质量又守恒. 其密度便是个常数:

$$\rho = \text{Const.}$$

又或者关注流速场的性质就会发现, 这个场只能是无散的, 否则就会因为流体流向局域体积元造成内部质量增加:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

正因为这一点, 液体作为流体的计算更简单, 其结果也更简单: 动力学的流动与热学往往是解耦合的, 流体的温度分布在这个模型性不会影响到流体的运动, 反过来流体的流动却必然对传热有影响. 比如搅动冷

热不均匀的水,水的运动几乎由搅动的方式决定而与温度分布有关,但水的温度变化显然受到搅动的强烈影响.但是在非常常见的**对流传热**(heat transfer by convection)问题中,温度变化导致的密度变化产生的动力学效果是不可或缺的一环,那种场合就绝对不能把流体视作不可压缩流体.典型的情况,液体比如水锅烧水时的强对流情况,探究洋流的产生等等,气体则几乎都需要视作可压缩的流体.

可压缩的流体也存在质量的**连续性方程**(continuity equation).我们可以把可变的密度 ρ 和流速 \mathbf{v} 相乘作为流密度矢量 \mathbf{j} , 那么:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

再注意到, $\mathbf{v} \cdot \nabla$ 这个算符其实就是跟随运动的流体一起运动,但是时间不变化,求物理量导数的算符,称为**随体导数**(material derivative).它与在局部求时间的偏导算符 $\partial/\partial t$,称作**局部导数**(local derivative)之和就是跟随流体质元一起运动,还考虑时间的流逝情况下的完整导数,即**全导数**(total derivative):

$$\frac{D}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t}$$

通过这一点我们就把反映物质转移与质量守恒的连续性方程写成了以下更具有解释性的形式:

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

这意味着,流体速度场存在散度就会导致流体质元随运动发生密度变化.从而也把不可压缩流体满足的两个条件联系在了一起.

第二个特殊情况与条件是,如果流体的流速场不随着时间变化而仅仅是位置的函数:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

这样的流动就称为**定常流动**(steady flow).否则称作**非定常流动**(unsteady flow).定常流动的意义需要在本章过程中慢慢体会.目前已经能够发现一点:只有在定常流动情况下,流线与迹线才是彻底重合的.

下面类似于弹性体,我们把流体在某个代表点,不妨就设在原点 $\mathbf{0}$,附近的 \mathbf{r} 处的流速场进行泰勒展开,保留到一阶:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{0}) + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

同理,把张量 $\nabla \mathbf{v}$ 分解为对称部分和反对称部分:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}}{2}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\nabla \mathbf{v} - {}^t \nabla \mathbf{v}}{2} \end{aligned}$$

这样流体的运动就被分解为三个部分:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{0}) + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

最后一项尤其值得注意,前两项表示流体跟随中心整体的平动和绕中心的转动,质元与质元之间本质是没有相对运动与变形的.第三项就表示会不可避免地产生质元与质元相对摩擦的情况.它由对称张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 描述.与弹性体的应变张量相似却又不同,这里不是位移而是速度作为变量去求导.称作**应变率张量**(rate-of-strain tensor):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

最后还需要描述流体中的力.用应力张量来描述流体中的受力情况是合适地.但是我们发现问题可以进一步简化.首先我们考虑一种更简单的情况:**流体静力学**(hydrostatics).

我们知道,在流体中没有静摩擦的可能性.流体中的摩擦,即**湿摩擦**(wet friction),只有可能是静摩擦.这是因为流体没有保持初始形态的能力,它只有一定的保持体积的能力,故对于不改变体积的剪应变,顶多只能阻碍,但不能恢复.故一个流体在剪应力下应当马上运动起来,不可能处于静止状态.故流体静力学必然只能处于正应力下,而且沿不同方向的正应力还必须相等,否则在不同坐标系下就有可能产生剪应力.这实际上就证明了我们熟悉的流体静力学内应力由标量**压强**(pressure)来描述的观点,注意正应力以拉力为正,压强对应负的正应力:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$$

那么计算一个体积区域 V 边界 ∂V 上的压力合力,可以由高斯定理得到:

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} = - \oint_{\partial V} p d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = - \int_V \nabla p dV$$

这样就计算出来了内应力造成的体积力:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dV} = -\nabla p$$

例如在重力场中的水 $\nabla p = \rho\mathbf{g}$ 为常矢量,那么对没入水中的体积造成的浮力就是:

$$\mathbf{F} = - \int_V \nabla p dV = - \int_V \rho\mathbf{g} dV = -\rho\mathbf{g}V$$

这就是古希腊时期就被发现的著名的**阿基米德原理**(Archimedes' principle),今天看来它等价于高斯定律和尚未证明但正确的 $\nabla p = \rho\mathbf{g}$. 这个式子其实就是平衡方程.设想处于平衡状态的静力学流体还受到外力场,体积力为 $\mathbf{f}(\mathbf{r})$. 那么为了平衡就需要满足:

$$\nabla p = \mathbf{f}$$

马上就可以发现,这个式子一方面作为了压强分布的计算公式,同时,也由于左侧是一个标量场的梯度,在闭合路径上的积分必然给出零的结果,它又等于右侧,我们等于证明了:只有在外保守力场下的流体系统才有可能处于平衡状态.

那么,当流体开始运动起来,此时继续用压强描述流体内部应力就不再合适了,此时与上一章弹性体相同的是,我们可以引入对称的应力张量来修正原来的压强对应的单位张量:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_0\mathbf{I} + \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

但仍然有一点值得注意,如果 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 同时增加一个量,这和改变了 p_0 没有本质区别,所以我们希望压强 p_0 反映了正应力的平均效应,故调整前后的配比使得后面的张量称为无迹的张量 $\boldsymbol{\tau}$,称为**黏滞应力张量**(viscous stress tensor) 或**偏应力张量**(deviatoric stress tensor):

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \tau_z \end{bmatrix} \quad (\tau_x + \tau_y + \tau_z = 0)$$

针对黏滞应力张量是否会产生,即流体有没有**黏性**(viscosity). 我们又可以找到一种特殊的情况:**无黏性流体**(inviscid fluid),实际上经常被定义为**理想流体**(ideal fluid). 此时流体即使在动,其应力也只有压强.反过来就是需要考虑黏滞的**黏性流体**(viscous fluid).

8.2 定常流动动力学

本节讨论范围仅限于无黏性流体. 前半部分结论对于普遍的可压缩, 非定常流体都是完全正确的.

若想为流体找到一个动力学方程, 其实我们几乎已经在上一节完成了一大半. 由于没有黏滞, 上一节计算的內力的合力结果为:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dV} = -\nabla p$$

再加上外体积力 \mathbf{f} , 现在要做的只不过是把上一节的平衡方程改成质元的牛顿定律, 注意其中的加速度, 应该用跟随质元一起运动而计算的全导数:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{f}$$

这已经是能充分地解决问题的, 流体需要符合的动力学方程. 它被称作**欧拉方程**(Euler equation).

另一个高频使用的方程是, 如果我们再加上定常流动和不可压缩流体的限制条件, 这就会导致著名的**贝努力方程**(Bernoulli equation). 暂时我们只加上定常流动这一个条件

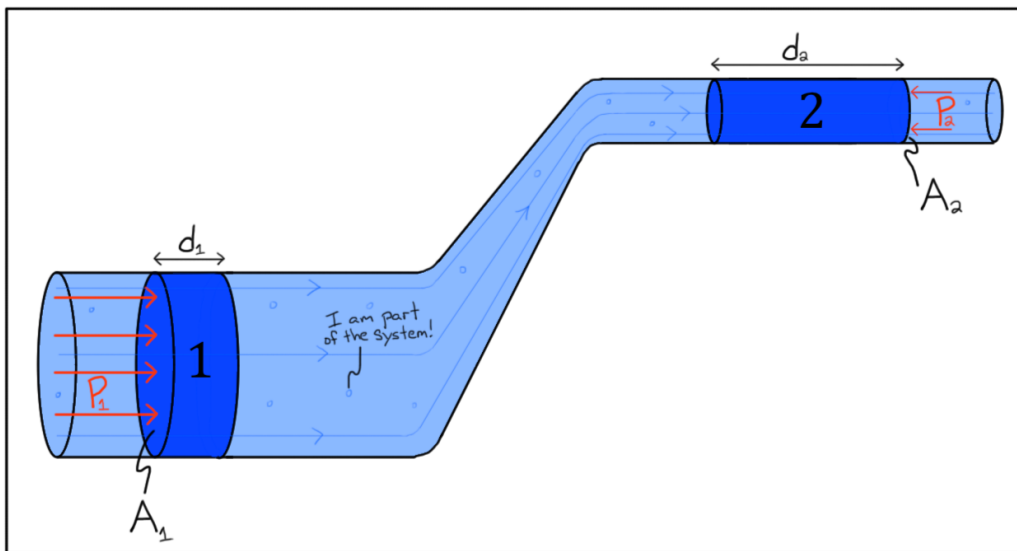


图 8.2: 贝努力方程

我们找到一根流线, 并找到流线上的两个点 1, 2, 在流线上垂直于流速方向把流线扩充为流管. 那么在两处的面积 A , 和密度 ρ 就要满足连续性方程, 这对应着**流量**(flux) 的不变性:

$$Q = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

将外体积力写作质量势 φ 的梯度 $\mathbf{f} = -\rho \nabla \varphi$. 写出定常流动下的欧拉方程:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \varphi$$

如果计算以下量的梯度:

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi \right) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho + \nabla \varphi$$

借助欧拉方程, 上式三项互相抵消, 仍然剩下两项. 但是现在我们在考察左侧标量在同一条流线上的表现, 两侧点乘 \mathbf{e}_v , 右侧叉乘项由于垂直也消失:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi \right) = -\frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds}$$

这说明我们得不到一个沿着流管守恒的量. 事实上, $-\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds}$ 项其实就是 $\frac{d}{ds} \frac{1}{\rho}$, 即单位质量的物体具有体积沿着流线的变化率, 那么它再乘以压强, 就表示由于体积增加导致的对外界做功而减小的内部能量¹:

$$-\frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} = -\frac{du}{ds}$$

这样就得到了可压缩流体的贝努力方程:

$$u + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi = \text{Const.}$$

通过这一点可以发现, 可压缩流体的内能往往是与动力学耦合在一起的, 而内能又往往影响温度. 所以内能的改变又会导致热学与动力学的耦合, 问题就变得很复杂.

但是如果流体不可压缩, 那么上式等号右侧 ρ 就是个常数, 从而直接左侧就具有零的导数. 那么我们就得到了不可压缩流体的贝努力方程, 往往写作:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho\varphi = \text{Const.}$$

8.3 黏滞流体动力学

描述黏滞流体的最标准的模型是**牛顿流体**(Newtonian fluid) 模型. 核心的定律称作**牛顿黏滞定律**(Newtonian law of viscosity). 如图8.3. 如果流体速度场是完全单向的, 且其大小的改变 dv 也只在垂流速方向移动 dl 时发生, 那么就定义流速梯度为:

$$2\varepsilon = \frac{dv}{dl}$$

而由此产生的切应力就是:

$$\tau = \frac{dF}{dS}$$

牛顿定律指出, 两者应当成正比, 比例系数就是**黏滞系数**(viscosity), 常简称黏度 η . 其单位是 $\text{Pa} \cdot \text{s}$:

$$\tau = \eta \cdot 2\varepsilon$$

其实这里的黏度是**动力学黏度**(dynamic viscosity) 的简称. 实用中常常遇到需要把它除以介质密度的情况, 所以还有**运动学黏度**(kinematic viscosity) 的定义, 其单位是 m^2/s , 与扩散系数单位是一样的:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

显然, 当我们考虑把牛顿黏滞定律进行推广时, 第一个值得注意的现象就是, 首先如果把流速方向记做 x 方向而变化方向记做 y 方向, 那么一是应力 τ 其实就是作为 $x-y$ 平面上的剪应力, 为了满足流体的力矩平衡, 不仅对 x 方向的分界面会产生 x 方向的黏滞摩擦力, 对 y 方向的分界面也会同时会造成 y 方向的力以抵消这个效应, 在上图中, 总是左侧的液体对右侧的液体给向下的力, 右侧则给左侧向上的力.

第二点是, 显然下式不具有对称性:

$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

如果是 v_y 在随 x 产生改变, 上式就正确了, 此时同样会产生剪应力. 所以我们猜想如下式子是正确的:

$$\tau_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

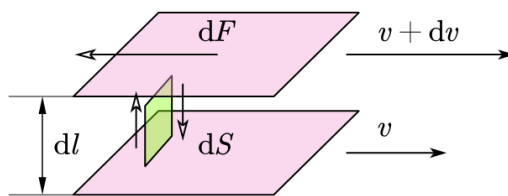


图 8.3: 牛顿黏滞定律

¹还需要绝热条件, 这样内能改变就只和做功有关.

事实上这也是牛顿黏滞定律唯一可能正确的推广形式. 单凭借这个结论我们就能得到很多有意义的结果. 这里直接不加证明地介绍其中的两个. 一是圆柱管道内的液体流动的**哈根-泊萧叶方程**(Hagen-Poiseuille equation). 如果管道半径 R , 体积流量 Q , 那么在长为 l 的一段上形成流动需要的压强差为:

$$\Delta p = \frac{8\eta Q l}{\pi R^4}$$

第二个式子是球形物体在黏滞流体中的阻力公式. 著名的**斯托克斯定律**(Stokes law). 如果球体半径为 R , 速率为 v , 那么阻力大小为:

$$F = 6\pi\eta R v$$

普遍的情形下, 之前介绍过的黏滞应力张量与应变率张量之间的关系, 根据对称性的原理, 与上一章类似地, 就写作:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{I}$$

只不过在这里, 由于 $\boldsymbol{\tau}$ 的无迹性, λ 没有别的选则, 只能取 $-2\eta/3$. 这样就得到了黏滞流体的内力的决定性的方程. 最后, 类似于欧拉方程的方式进行推导, 我们最终得到了一个方程:

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + \frac{1}{3} \eta \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{f}$$

这个方程就是著名的**纳维-斯托克斯方程**(Navier-Stokes equation). $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$ 项使得这个方程成为非线性的偏微分方程. 它的求解是如此之难, 以至于在 2000 年它成了 7 个**千禧年难题**(Millennium Prize problems)之一, 而且仅仅是为了解决最最初步的问题: 解的存在性与光滑性. 第一个解决它的科学家将获得一百万美元的奖金, 但目前这个问题的解决依然是遥遥无期的.