

高二物理竞赛 • 电磁学与近代物理

学而思

目录

第一章 稳恒电流	5
1.1 稳恒电流描述与形成	5
1.1.1 德鲁特模型	5
1.1.2 费米气观点 *	6
1.1.3 能带论 *	8
1.1.4 惯性, 阻尼与回复力	10
1.1.5 稳恒电流与形成条件	11
1.2 电路与电路方程	13
1.3 电路分析基础	16
1.3.1 电路的整体结构与拓扑学结论	16
1.3.2 电路问题的求解套路	19
1.4 电路分析方法	21
1.4.1 二端电路等效	21
1.4.2 三端电路等效	22
1.4.3 二端口电路	22
第二章 静磁学	23
2.1 电流与磁场	23
2.1.1 磁场地位与电流分布	23
2.1.2 毕奥-萨伐尔定律	25
2.2 两个定律与矢势	27
2.2.1 磁场的环路定律	27
2.2.2 矢势与磁场的高斯定律	29
2.3 电流体系	31
2.3.1 磁偶极子	32
2.3.2 磁化强度	35
2.3.3 若干对称体系的磁场	35
2.4 磁介质与磁能	36
2.4.1 微观角度理解磁化	36
2.4.2 宏观角度理解磁化	37
2.4.3 磁场能量	38
第三章 磁生电	39
3.1 电磁感应	39
3.1.1 动生电动势	40
3.1.2 感生电动势	41

3.2 自感与互感	44
第四章 麦克斯韦方程组	45
4.1 麦克斯韦方程组	45
4.1.1 电生磁	45
4.1.2 麦克斯韦方程组	47
4.1.3 电荷在电磁场中的运动	51
4.2 平面电磁波	52
4.2.1 真空中的电磁波	52
4.2.2 介质中电磁波的传播	53
4.3 电磁场能量与动量	55
4.4 电磁波辐射	55
4.4.1 电磁辐射概论	55
4.4.2 偶极辐射	56
第五章 交流电路	59
5.1 相量表示	59
5.1.1 拟稳条件与交流元件	59
5.1.2 电阻, 电容, 电感特性	59
5.2 常见电路	61
5.2.1 谐振电路	61
第六章 光的干涉	63
6.1 标量波理论	63
6.2 分波面干涉	67
6.3 分振幅干涉	68
6.4 偏振干涉	69
6.5 相干性	71
第七章 光的衍射	73
7.1 光栅与波带片	73
7.2 衍射积分公式	74
第八章 相对论力学	75
8.1 相对论运动学	75
8.2 相对论动力学	76
8.3 相对论连续物质	78
第九章 物理光学	81
9.1 经典色散理论	81
9.1.1 复波矢与复折射率	81
9.1.2 经典电子论的解释	84
9.1.3 * 辐射阻尼与散射截面	87

第十章 量子论	91
10.1 黑体辐射	91
10.2 光粒子性	91
10.3 玻尔原子	91
10.4 物质波与波函数	92

第一章 稳恒电流

1.1 稳恒电流描述与形成

1.1.1 德鲁特模型

电荷的定向移动形成电流(current). 就好像一缸气体在慢慢挪动那样, 电荷的定向移动并不是纯粹的匀速运动, 而是与无规则的热运动相叠加. 1900 年前后德鲁特 (P. Drude) 和洛伦兹 (H. A. Lorentz) 等人提出德鲁特模型(Drude model) 来解释金属中的导电现象. 主要观点是金属内部自由运动的电子类似于理想气体那样做自由的运动, 称为自由电子气(free electron gas). 我们用电子电量 $-e$, 质量 m , 电子数密度 n , 和弛豫时间(relaxation time) τ , 平均速度 v 来表示其特征. 弛豫时间就是电子做匀速直线运动, 与原子实两次碰撞之间的平均间隔时间. 与之相关的另一个量还可以是平均自由程(mean free path) λ . 容易想像, 典型的情形是, 常温下电子的平均速度是和气体分子的平均热运动速度那样, 一个非常巨大的速度, 而金属原子之间的距离又是那么地短, 导致电子发生十分频繁的碰撞. 而如果在金属中加一个电场 E , 它在两次碰撞内是只可以让电子速度改变一个十分微小的量的:

$$\mathbf{a} = -\frac{e\mathbf{E}}{m}$$

$$\mathbf{v}(0) \rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}t \rightarrow \mathbf{v}(\tau) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}\tau$$

我们根据统计力学的思想, 计算在某一时刻电子速度对所有电子取热平衡分布的平均:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}t \rangle = \mathbf{a}\tau$$

上式 t 代表距离上次碰撞每个电子幸存的时间. $\mathbf{v}(0)$ 代表上次碰撞后其速度. 一方面, 认为碰撞使得电子速度完全随机分布, 平均的结果为零. 另一方面, 认为电子的碰撞是一个泊松过程, 其碰后幸存时间的概率分布是一个指数分布:

$$p(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

从而平均的 t 为

$$\langle t \rangle = - \int_0^\infty t dp = pt|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau$$

最后结合电流密度为:

$$\mathbf{j} = -nev$$

我们得到:

$$\mathbf{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\mathbf{E}$$

的结果. 称为微观欧姆定律(microscopic Ohm's law), 其中系数被称为电导率(electrical conductivity):

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} ; \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

十分值得指出的是,作为德鲁特模型的另一个重要结论,金属的热导率(thermal conductivity)在理论中也可以给出一个估计值.我们都应该知道金属比绝大多数其他固体都拥有好得多的导热性能.这可以用热导率与傅里叶热传导定律(Fourier's law of thermal conduction)来描述:

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$$

其中 \mathbf{q} 为热流密度, κ 即为材料的热导率.水常温下热导率只有 $0.591\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$,但纯的铜却能够达到 $401\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$.金属的高热导率全都得益于轻盈的电子气,它能够迅速地把局部的热运动加剧传导开来.类比理想气体的非平衡态统计方法,我们给出:

$$\kappa = \frac{1}{3} n v \lambda c$$

式中 c 为每个电子的动能与温度的比.利用 $\lambda = v\tau$, 我们把热导率和电导率做比,便可以把较难确定的散射弛豫时间消去,得到:

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{mv^2 c}{3e^2}$$

德鲁特模型认为,作为类似于理想气体的电子气,理应有:

$$c = \frac{3}{2} k \quad ; \quad \frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} kT$$

从而得到:

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{3}{2} \left(\frac{k}{e} \right)^2$$

历史上金属热导率和电导率的比值与温度相关的现象很早就被人们发现,一般温度升高时电导率会有十分明显的下降,也就是金属的电阻会上升.小灯泡在未发光时与正常发光时电阻就经常有 2 倍左右的差距.而 1853 年魏德曼 (G. Wiedemann) 和弗朗茨 (R. Franz) 观察到不同金属虽然导电导热性能差距悬殊,室温下两者之比却接近一个常数,称为魏德曼-弗朗茨定律(Wiedemann-Franz's law).而洛伦茨 (L. Lorenz)¹ 在 1872 则把这一经验规律确定到常数与绝对温度成正比的形式.最后德鲁特电子论将这个常数以微观常数的形式确定下来,等式右边现在约为 $1.11 \times 10^8 \text{W} \cdot \Omega/\text{K}^2$, 这与实验结果数量级是一致的,但却差了约 2 倍.真实的值被称为洛伦兹常数(Lorentz number):

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = L = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 2.44 \times 10^8 \text{W} \cdot \Omega/\text{K}^2$$

这个理论很成功,但最后的结果的不符合让人感到疑惑.还有一个令人感到疑惑的问题.就是对于电子气的电容.既然电子是完全独立于金属原子实的另一个热力学体系.按照经典统计物理.原子实的摩尔热容与离子晶体等类似,大概在 $3R$ 附近².而电子按只有平动自由度的理想气体考虑应贡献 $1.5R$ 热容.实验却否定了这一点,金属常温下热容仍然是在 $3R$ 附近.电子仿佛没有被热激发,然而电子又势必参与导热,因为金属的导热性能明显优于其他物质.那么以上推导过程中哪儿存在不合理之处?几年后到来的量子力学革命让人们认识到这一个经典模型从一开始就做了不止一个的与微观实际情况不符的假定,但又是十分巧合地,最终结果与真实值数量级自动一样了.

1.1.2 费米气观点 *

元素周期律引发了人们对原子核外电子排布规律的研究,人们惊奇地发现电子是费米子(fermion),符合泡利不相容原理(Pauli exclusion principle).这赋予电子独特的量子特性.具体来说,单位体积内如果电子数目越多,那么其最低平均能量就必须越大.因为能量最低的状态一旦被占据,其他电子就必须占据能量更

¹注意,丹麦物理学家路德维希·洛伦茨 (Ludvig Lorenz)(1829-1891) 与荷兰物理学家亨德里克·洛伦兹 (Hendrik Lorentz)(1853-1928) 是两个不同的人.有一个方程以它们两人的名字共同命名:Lorenz-Lorentz 关系.

²即督龙-裴替定律(Dulong-Petit Law).

高的状态,即使按照最低能量的方式去堆积(绝对零度时的行为),电子也将具有很高的平均能量.它符合类似位置-动量不确定性原理的反比率,电子浓度的减小了单电子占据的位置尺度,则它的动量就会增加,从而根据色散关系 $p^2 = 2mE$ 其能量也会升高.这一点使得我们去修改经典的德鲁特模型.相应的量子气体称为费米气(Fermi gas).

定量计算费米气的特性需要考虑电子的波动本性.我们暂时取金属为长宽高为 ABC 的长方体,那么如果将 N 个电子倒入这个容器,电子的数密度为:

$$n = \frac{N}{ABC}$$

让我们考虑一下电子对状态的填充,长方体相当于一个谐振腔,事实上给出了电子动量状态的量子化:

$$p_x A = ah, p_y B = bh, p_z C = ch$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

这是因为根据德布罗意关系 $p = \hbar k$ 而电子状态需要满足 $kL = 2m\pi$ 的缘故.从而我们发现电子的三个方向的动量都是量子化的.量子化的单位为:

$$\Delta p_x = \frac{h}{A}, \Delta p_y = \frac{h}{B}, \Delta p_z = \frac{h}{C}$$

现在把 N 个电子倒入动量空间中,那么电子在低温下将从最低能量态开始填充,由于电子数目巨大,最后电子将填充到能量为 ε_F 处.这样的一个填满电子的动量空间中的球体称为费米海(fermi sea),最终填充到的能量称为费米能级 ε_F ,对应的电子动量为费米动量 p_F .注意到一个动量空间中的一个标志状态的坐标内部实际上有两个独立的状态,它们表示即使这两个波的波矢 k 一样,它们代表电子的自旋也不一样³.从而我们写出:

$$2 \cdot \frac{4\pi p_F^3}{3} / (\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z) = N$$

从而得到:

$$p_F = \left(\frac{3Nh^3}{8\pi N} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3nh^3}{8\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

在以上过程中总电子数和总体积被消去了,最后电子堆积到的动量值仅仅取决于各处电子的数密度而成为了强度量.这样一个由于泡利不相容原理所造成的动量值对应到速度上,对一般金属估计约为 10^6 m/s .而如果按非费米气计算,热运动速度应为 $\sqrt{kT/m} \sim 7 \times 10^4 \text{ m/s}$,我们发现经典结果是严重估计少了的.但电子的热容又估计多了.量子统计给出:

$$c = \frac{\pi^2}{2} k \cdot \frac{kT}{\varepsilon_F}$$

代入热导率公式,得:

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{mv_F^2}{\varepsilon_F} \cdot \left(\frac{k}{e} \right)^2 \cdot T$$

恰好, $\varepsilon_F = \frac{1}{2}mv_F^2$,从而我们得到了正确形式的魏德曼-弗朗茨定律:

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2$$

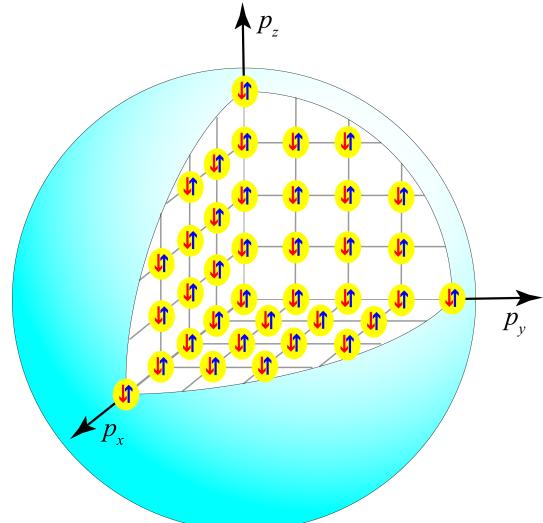


图 1.1: 电子态密度

³电子的微观描述是旋量波,也就是二分量波函数,具有两种可能的自旋.

我们最后做一个经典德鲁特模型与量子费米气模型的比较. 两个理论都承认以下基本公式的成立:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} , \quad \kappa = \frac{1}{3}nv^2\tau c$$

先看电导率, 经典理论与量子理论对各个参数的估计除了 τ 其他都是一致的. 而经典更倾向于对 τ 的估计更小. 因为经典理论一般认为 $\tau = \lambda/v$, 而 λ 一般就按照原子实之间的平均距离来估计. 这一点之后就知道是不妥当的, 因为电子实际上可以在严格周期性的势能场中毫无散射的传播下去. 而使得电子能够被散射的其实是晶格的缺陷, 热振动等因素, 从而一般温度升高, τ 减小, 金属的导电性能就大大减弱. 这给出了金属电阻随温度升高而升高的结论. 这里经典理论对 λ 的过低估计恰好被对 v 的过低估计所抵消掉一部分, 从而最后 τ 的值在常温下差距也不大. 而对于热导率, 经典理论对 v 的过低估计又恰好被对 c 的过高估计修正, 精确到了仅仅相差一个常数, 除了经典理论说不清楚的 τ , 经典与量子的在数量级上是基本符合的.

值得一提, 热导率描述导热, 电导率描述导电, 而导电现象的附效应便是热产生. 也就是焦耳热(Joule heating). 微观的功率密度

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} , \quad w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

也即:

$$w = \sigma \mathbf{E}^2 = \rho \mathbf{j}^2$$

其中电阻率(resistivity) ρ 为电导率的倒数. 上为微观焦耳-楞次定律(microscopic Joule-Lenz law).

1.1.3 能带论 *

费米气模型在量子力学迅猛发展的几十年后回头看又是过于 naïve 了. 人们发现电子终究是在晶格间传播的波动, 如果原子实与背景的电子给出了严格的周期性的势能, 那么如果电子的总机械能小于最大势能, 那么就成为了束缚态, 限制在一个原子附近运动而成为原子实的一部分. 而如果电子守恒机械能大于最大势能, 就成为不受任何阻碍的传导态. 动能虽在运动中有所波动, 但绝不会越来越小. 描述电子的波函数称为布洛赫波函数(Bloch wave function). 而电子如何去填充怎样的能级? 布洛赫(F. Bloch) 研究并发现了能带论(energy band theory) 来替代旧的费米气理论, 这个理论可以统一地描述导体与绝缘体.

能带论可以看成是电子在单原子外的束缚态特征与传导的自由电子气的特征的一种综合, 一方面电子在这样的一个周期性势场中的运动其守恒的机械能并不是可以取所有值, 而是分为可以连续取值的区间: 能带(band) 与根本取不到的能量区间: 带隙(gap) 所构成. 而电子作为波动用其所在的能带与波矢 k 来描述. 其波矢方向的物理意义不再重要, 因为每一个态一般都代表某种驻波与行波的混合, 而每一个态附近的群速度则可以代表这个态代表的真实电子运动速度. 另一方面这些能带的结构又恰好对应到了单原子的束缚态能级. 这使得我们经常是一望某元素的单原子核外电子排布, 便能从其是否具有最外层电子读出这种元素单质是否能导电的信息.

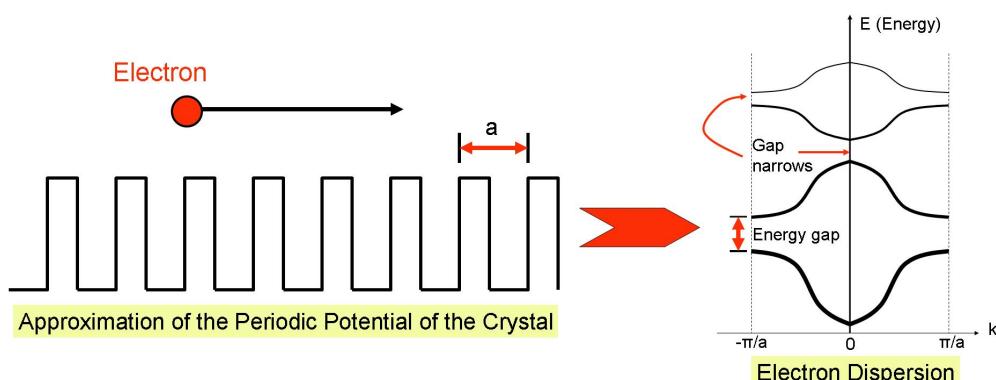


图 1.2: 电子在周期性势场中传播

某种原子形成晶体时,电子从最低的能带开始填充,内层电子填满了较低的那些能带,它们不参与导电,对应于原子实电子和在晶体共价键键合的价电子.最外层电子较少的原子,形成晶体时最后填充的那个能带没有填满,或者虽然填满但与下一个能带在能量区间上重合而能够导电.称为导体(conductor).对应的元素也就显示出明显的金属性⁴.而若原子外层电子数目多,则很有可能电子恰好填满一个能带后隔着一个能隙与空的上方能带相望,则所有态都稳定不变,材料所有电子都是束缚电子,最后填充的那个满带称为价带(valence band),代表原子间成共价键的价电子所在的能带.而上方的那个空带称为导带(conduction gap).意为一旦这个带中存在电子则会大大改善其导电性能.此时元素体现出非金属性,一般形成的都是绝缘体(insulator).而在金属性元素与非金属元素分界处则存在很多的类金属(metalloid),它们形成的晶体虽然与绝缘体一样,在最低能量时恰好把价带排满,而隔着一个带隙与空的导带相望.但带隙很小(小于4eV),导致常温的热激发和掺杂,抑或是光照激发都将在导带中激发大量载流子而具有可观的导电性能.这些材料称为半导体(semiconductor).

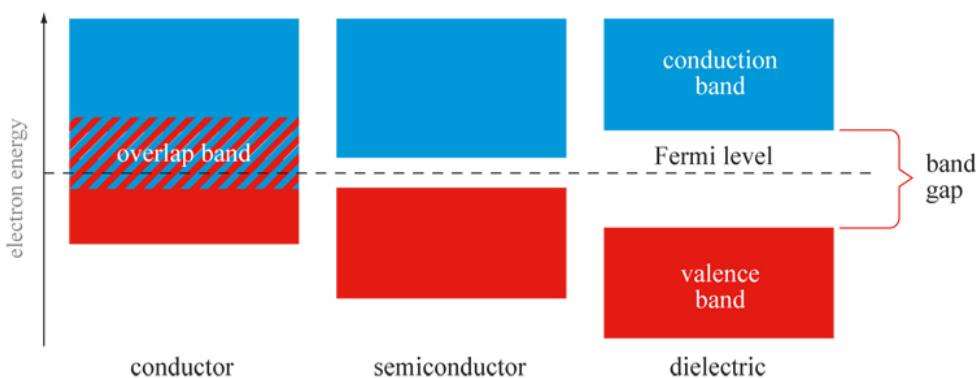


图 1.3: 能带与导电性

1 H														2 He			
3 Li	4 Be																
11 Na	12 Mg																
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
55 Cs	56 Be		72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra		104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Cn						
57 La	58 Ce	59 Nd	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu			
89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr			

图 1.4: 金属, 类金属与非金属元素

那么能带论如何给出电导率的计算公式?仍然是:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

与上一个费米气模型区别在于一点,就是这里的 m 不再是电子的裸质量(bare mass),而是由于与周期

⁴思考:氢是否具有金属性?参考https://en.wikipedia.org/wiki/Metallic_hydrogen.

性势场相互作用,电子的色散关系(能量与波矢关系)被修正后给出的**有效质量**(effective mass).即使对于金属,这个质量与真实电子质量相差好几倍的现象也是十分普遍的.

1.1.4 惯性,阻尼与回复力

在量子力学还未诞生的时期,为了解释导体的导电,绝缘体的介电现象,并适用于任意交变电磁场在介质中的传播,色散,吸收与散射.洛伦兹提出著名的**洛伦兹模型**(Lorentz model)作为德鲁特模型的补充.在这儿电子的惯性被重视,电子与晶格的碰撞被简化,可能的原子实对电荷的束缚被简化为线性回复力.也就是洛伦兹用唯象的谐振子类比来解释电子在外场下的行为:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = -e\mathbf{E}e^{i\omega t}$$

这个模型的解和它对应的各种特性我们将在光学教材里详细讲解.在这里我们仅仅讨论导体中的自由电子,故 $k = 0$.与导体导电相关的两个因素为:

一是阻尼系数 γ .在直流电场下平衡时稳定的电子速度为:

$$\dot{\mathbf{r}} = -\frac{e}{\gamma}\mathbf{E}$$

对比更加本质的德鲁特等导电模型的电导公式,容易发现这个唯象系数与电导率和基本参量关系为:

$$\gamma = \frac{ne^2}{\sigma} = \frac{m}{\tau}$$

于是我们可以写出在导体上突然加一个不随时间变化的匀强电场后电子的运动的微分方程:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{m}{\tau}\dot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E}$$

它的解为:

$$\dot{\mathbf{r}} = -\frac{e\mathbf{E}\tau}{m}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

我们十分自然地发现定义电子碰撞的弛豫时间恰好与导体对电场响应的弛豫时间相吻合.这一点稍微需要一些讨论和修正.见下.

第二点我们来讨论表示电子惯性的质量 m .正是它导致了衰减因子 $e^{-\gamma t/m}$,从而造成电路对电场响应的弛豫.但如果讨论电路的弛豫,或者说电流的惯性,有一点是被我们过低地估计了,便是自感现象.电荷的加速运动形成变化的电流,从而与之相伴的是变化的磁场.这个变化的磁场反过来给电流一个反向的作用力.由于该力正比于加速度,故等价于增加了载流子的质量.这里的弛豫时间对应直流暂态电路中的 $\tau' = L/R$.如果一定要理解为电子的惯性质量,那么一般比电子的裸质量要大好几个数量级 $m^* \gg m$.从而一般有电路弛豫时间 $\tau = m^*/\gamma$ 不等于微观碰撞弛豫时间.

纯粹的导体是否有回复力项?显然在以上电子运动方程中不含这一项.但注意到如果有回复力项,即使外场为零电子也会做振动.真实情况会发生这样的现象吗?答案是会,即**等离子体振荡**(plasma oscillation).原因是电子相对于原子实的位移实际上在金属的表面累积了电荷分布,从而在内部激发了电场.由于频率很高,一般要到紫外波段的频率,我们可以完全忽略阻尼的影响.当电子有位移 \mathbf{r} 时将形成极化强度⁵:

$$\mathbf{P} = -ner$$

我们考虑块状金属板⁶的集体等离子体振荡,那么由于金属表面的累积电荷在金属内部形成的电场为:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{in} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} = \frac{ner}{\epsilon_0}$$

⁵ 显然此时“极化强度”描述的非极化电荷,而是自由电荷.

⁶ 的确,取不同形状的物体这个频率会有所不同.

代入原方程:

$$m^* \ddot{\mathbf{r}} = -e \mathbf{E} = -\frac{ne^2 \mathbf{r}}{\varepsilon_0}$$

从而得到谐振子方程. 振荡频率为:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m^*}} ; \quad \sigma = \varepsilon_0 \omega_p^2 \tau$$

最后我们考虑低频电磁波 (内部实际场强) 下金属的电子行为, 利用光学中讨论过的洛伦兹模型, 我们计算金属的复电容率, 最后得到:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} ; \quad \sigma(\omega) = \frac{\sigma}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

一般 $\omega_p \tau \gg 1$, 故低频下金属的介电常数实际上是绝对值很大的负数. 电导率随着频率的增加而减小.

1.1.5 稳恒电流与形成条件

作为电荷的流动, 电流密度与电荷密度间满足电荷守恒定律:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

而所谓**稳恒电流**(steady current) 指的是一定区域内导电物质形成的电荷, 电场, 电流分布. 其中电流的分布不能随时间变化, 自然的结论是电荷密度分布也不能随时间变化. 否则将产生随时间变化的电场, 电场造成电流的变化. 即上式必有:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ; \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

即在稳恒电流中电流密度是一定没有散度的, 无头无尾的闭合曲线. 稳恒电流必须是**直流**(direct current) 而非**交流**(alternating current).

容易发现, 在稳恒电流中微观欧姆定律写成以下形式是不完整的:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

在很多情况下, 上式并没有问题. \mathbf{E} 被理解为由电荷分布 ρ 形成的静电场⁷, 它是一定可以引入电势的:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

那么如果承认以上形式的微观欧姆定律就会引起矛盾: 电流线是环状闭合的, 电场线必须与电流线同向平行, 但电场线又不能是闭合的, 否则与静电场环路定理, 电势的可定义性矛盾. 实际上, 微观形式的欧姆定律必须被写成:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{K})$$

上式 \mathbf{K} 代表**非静电力场**(non-electrostatic field) 对电子产生的作用. 定义方式与电场量纲一致, 都是单位正电荷的受力. 这么写的不同之处就在于, 把驱动电流的力分成了两部分: 静电场 \mathbf{E} 是保守的, 可以引入势的, 在一个回路中不做功的, 不吞吐能

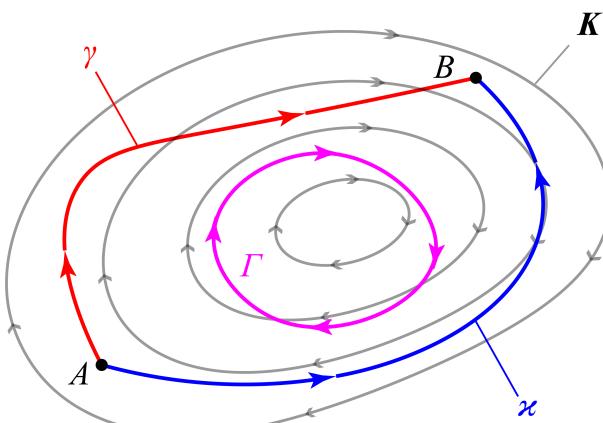


图 1.5: 非静电场

⁷实际上, 不包括涡旋电场, 因为它被归于之后引入的非静电力. 换句话说, 这里的 \mathbf{E} 不再由静止电荷的受力 \mathbf{F}/q 定义, 而是单纯根据静止电荷分布产生平方反比的电场叠加去定义.

量的场(注意电流本身就会发热,这不是场造成的而是电荷定向流动碰撞晶格造成的).但非静电力就是源不断做功驱动回路中电流流动的,非保守的,不能引入势来描述的场.虽然不能引入电势来描述非保守力,但可以用电动势(electromotive force)来描述非静电力:

$$\mathcal{E}_\gamma = \int_{A \xrightarrow{\gamma} B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} ; \quad \mathcal{E}_\Gamma = \oint_{\Gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}$$

不像对静电场的积分那样仅仅取决于端点,电动势与积分路径一一对应.回路电动势一般来说不为零,从而相同端点的两个路径电动势也不一定相等:

$$\mathcal{E}_\Gamma \neq 0 ; \quad \mathcal{E}_\gamma \neq \mathcal{E}_x$$

非静电力既然能够作用在电子上,其形式一般就是电磁力,万有引力,或是惯性力.磁场力对应动生电动势(motional emf),而由于变化的磁场激发的涡旋电场部分的电场力对应感生电动势(transformer emf).电子会受到引力,1967年Schiff指出电子会因为引力的原因聚集到金属的底部.而后Dessler提出了严格的考虑晶格在重力场下压缩与不均匀情况下的电子平衡情况.引力是很弱的保守力,对金属内部电荷体系的影响虽然很小但绝不是不可观测.而与引力类似的惯性力则可以人工制造出很大的数值,而且可以使它非保守.试想加速旋转一个线圈,那么在随晶体加速的参考系里电子受到的角向惯性力就和受到一个电场力造成的效果没有本质的区别.

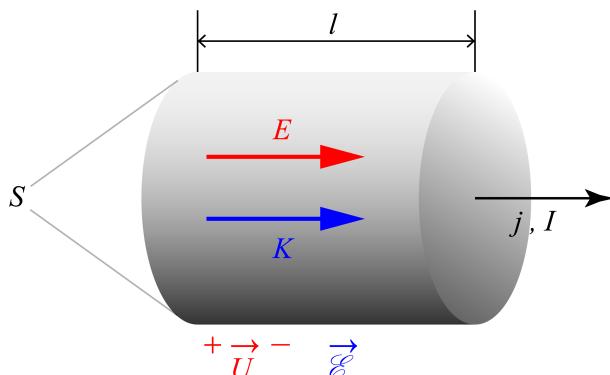


图 1.6: 宏观欧姆定律

还有一些电动势一般无法用非静电力描述.因为在回路中某些部分的确有能量的输入,但不是以作用在某些具体的电荷上的力的形式.而是更加广义的一些力作用在一些流上.例如温差电偶利用两种物质的电子的热扩散性质差异,从高温端吸取热量而驱动电流.化学反应更是源源不断地产生新的物质,利用反应的自发性而驱动物质做定向的移动形成电流.在这些抽象的场合,我们采用某段电路中移动单位电荷,外界向体系注入的能量来定义电动势:

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dQ}$$

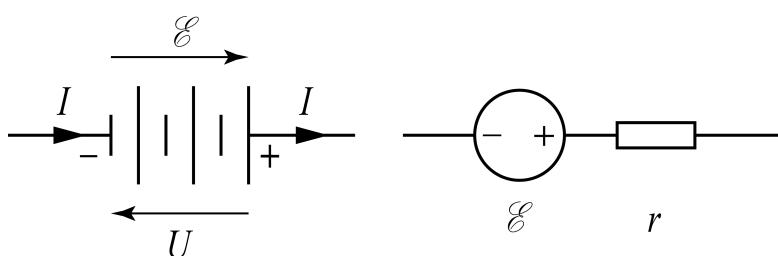


图 1.7: 电池的欧姆定律

最后,从微观到宏观,我们考虑一段长为 l ,面积为 S ,电阻率为 ρ 的导体上的欧姆定律:

$$E + K = \rho j$$

等式两边同时乘以 l ,把电流密度写成 I/S .得到:

$$U + \mathcal{E} = IR ; \quad R = \rho \frac{l}{S}$$

一般叫做部分电路的欧姆定律. 而如果考虑**电池**(battery) 的两端, 正常工作时一般正极电压更高, 故约定电动势与电压取相反的方向, 电流则与电动势方向一致, 却与电压方向反向:

$$U = \mathcal{E} - Ir$$

为一段含源电路的欧姆定律. 此时我们把电池等效为理想电压源和一个定值电阻 r 的串联. 电阻即为电池的**内阻**(internal resistance).

1.2 电路与电路方程

具体到直流电路中, 我们一般提供以下理想的电路元件:

名称	电阻	恒压源	恒流源	接地
符号	R	$\begin{array}{c} + \\ \mathcal{E} \\ - \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \mathcal{I} \\ - \end{array}$	$\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \end{array}$

图 1.8: 常见电路元件

实际电路总是由这些元件和导线构成, 导线和元件的内阻均被用实际电阻显式表示. 接地符号可以被视作特殊的导线. 一般与真实的“地面”没有任何联系, 电路中一般“地”指的是公共的零电势参考点. 电路中如果仅仅有一个接地符号, 就把接地的点的电势认为是零. 如果出现了多个接地符号, 就用导线把这些点连接到同一个点, 并把这个点电势视作零.

任何一个元件, 或者二端的部分电路, 为了研究的统一性与方便, 我们规定两端的电压的正方向与流过的电流的正方向都取“相关方向”, 沿着这个方向, 元件或部分电路表现的像一个电阻, 或者宽泛一点说, 像一个用电器. 即电流就是沿这个方向流动, 而且电压也沿这个方向降低. 比如在如图1.9所示的左侧大电池为右侧小电池充电的过程中, 右侧电路对上下两端口以向下为电压电流的相关参考方向, 则电压和电流分别为:

$$U = +2.8V, I = +0.2A$$

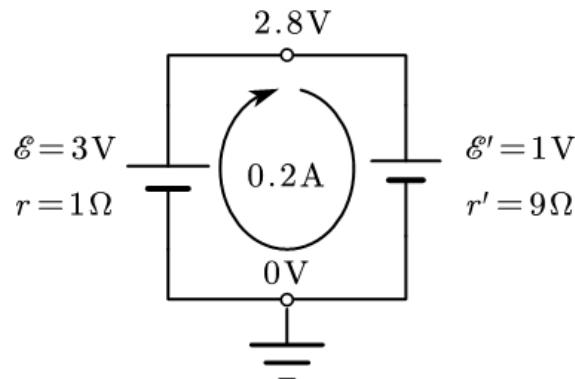


图 1.9: 相关方向

但如果对左侧电路依然取向下为电压电流的相关参考方向, 则电压和电流分别为:

$$U = +2.8V, I = -0.2A$$

可以发现, 如果一个元件或部分电路按照相关方向计算的电压电流同时是正或者负, 这个元件就是**类用电器**, 整体效果是消耗电能, 而如果一正一负, 就是**类电源**, 整体效果是产生电能.

在具体分析复杂电路时, 顺次串联的各个部分电路相关方向一般取为同向; 讨论单个回路时, 各个部分的相关方向也是按照某种环绕方向确定的; 多个二端电路并联在两点之间也通常取各个支路为统一约定的从一个点到另一个点的相关方向.

对于之前的三种元件, 电阻由于对称性没有天生的电压电流相关方向. 无论如何取相关方向, 其电压 U , 电流 I 和其参数电阻 R 都一定要满足下式, 称作**伏安特性**(V-A characteristic):

$$U = IR$$

恒压源, 顾名思义, 总是能保持其正极电压比负极电压高 \mathcal{E} . 在正常工作状态时, 电流应当从正极流出, 使得其成为类电源的元件. 取此时电流方向为其相关方向 (具体问题中相关方向也可以与之相反), 则其特性为:

$$U = -\mathcal{E}, \quad I > 0$$

理想的恒压源同样能够工作在 $I < 0$ 的类用电器区域, 此时同样有 $U = -\mathcal{E}$. 但是对理想电压源短路是没有意义的, 一般恒压源所在支路一定需要串联电阻.

恒流源, 顾名思义, 总是能保持从负极向正极输出电流 \mathcal{I} . 在正常工作状态时, 正极电压应当比负极电压高, 使得其成为类电源的元件. 取此时电流方向为其相关方向 (具体问题中相关方向也可以与之相反), 则其特性为:

$$I = \mathcal{I}, \quad U < 0$$

理想的恒流源同样能够工作在 $U > 0$ 的类用电器区域, 此时同样有 $I = \mathcal{I}$. 但是对理想电压源开路是没有意义的, 一般恒流源所在支路一定需要并联电阻.

所以我们考虑的电路中, 如果出现恒压源或恒流源, 一般以以下带分压内阻或分流内阻的形式存在, 如果考虑整个元件的特性, 就给出了著名的输出特性(output characteristic):

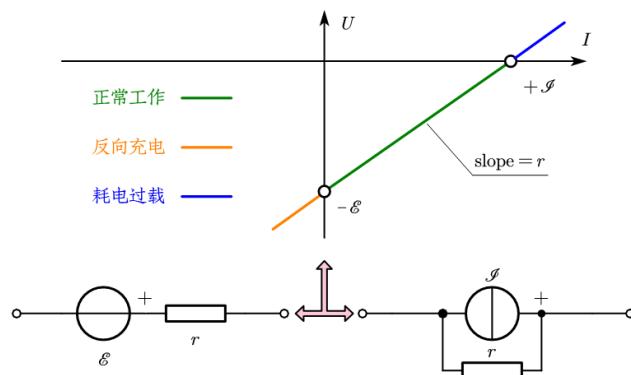


图 1.10: 源的统一输出特性

$$U = -\mathcal{E} + Ir = (I - \mathcal{I})r$$

我们也从中发现了, 如果恒压源与恒流源满足内阻相等都是 r 且 $\mathcal{E} = \mathcal{I}r$, 那么它们的输出特性是完全一致的. 也就从功能上等价且可以相互替代, 这是我们之后小节要介绍的戴维南-诺尔顿定理的一个预兆. 但这主要只有理论价值, 实际情况分压内电阻总是要求很小, 分流内电阻总是要求很大, 这样在较大输出范围内才能凸显其恒压恒流的特性.

我们只有三种元件 (电阻, 带内阻的恒压源, 带内阻的恒流源), 而且已经成功给出了三种元件的特性, 它们实际上就是元件上取相关方向以后电压与电流之间的函数关系, 从而只要知道电流或电压中的一者就可以表示出另一者来. 但是如果涉及到电路的求解, 就需要把不同的元件联系起来. 此时还会涉及到两类方程. 分别称作基尔霍夫电流定律(KCL, Kirchhoff's current law) 与基尔霍夫电压定律(KVL, Kirchhoff's voltage law).

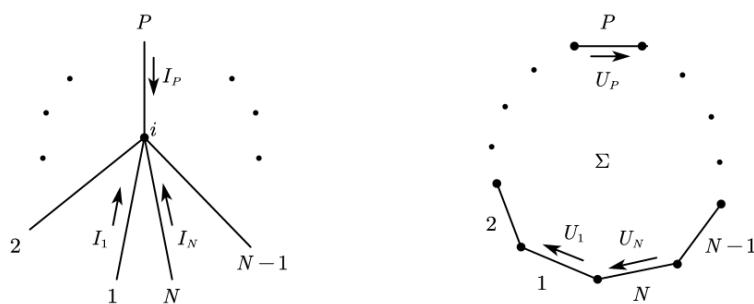


图 1.11: KCL 与 KVL

KCL 的含义是,如果多个元件的一端连在一点.那么取指向或背离公共节点的方向为所有元件的相关方向,必有:

$$\sum_{P \in i} I_P = 0$$

我们约定小写拉丁字母 $i, j, k \dots$ 用来表示点,大写拉丁字母 $P, Q, R \dots$ 用来表示元件所在的支路(边),而从属符号 \in 用来表示结合关系, $P \in i$ 念做“边 P 以 i 为端点”.KCL 因此也称作**节点电流定律**.

KVL 的含义是,如果多个元件的首尾相连构成回路.那么取顺时针或逆时针方向为所有元件的相关方向,必有:

$$\sum_{P \in \Sigma} U_P = 0$$

我们约定大写希腊字母 $\Sigma, \Pi, \Phi \dots$ 用来表示回路,同样用从属符号 \in 用来表示结合关系, $P \in \Sigma$ 念做“边 P 在回路 Σ 上”.KVL 因此也称作**回路电压定律**.

而需要注意的是,KCL 与 KVL 都可以以元件电流或电压作为自变量.比如用电流做为 KVL 方程的自变量就构成了所谓的数电压法.下图所示的电路回路使用数电压法列顺时针方向的 KVL 方程就如右式:

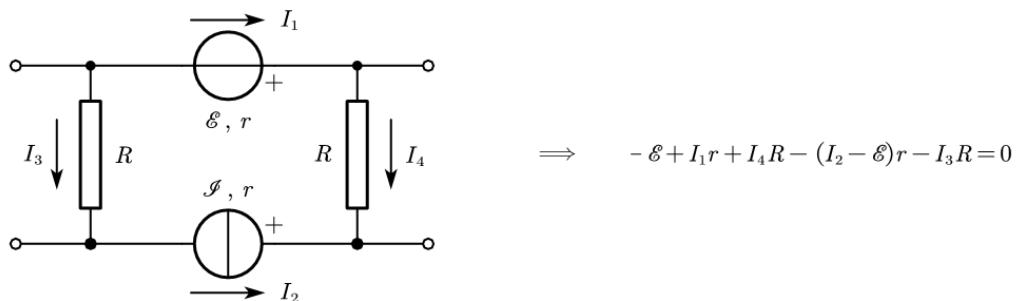


图 1.12: 回路: 数电压法

而节点电流也可以使用电压作为变量.另外还需要注意,利用数电压法我们可以得到 KVL 方程的一种非完整形式.由于我们对于节点总是喜欢定义其电势,那么如果节点 i, j 之间存在一条长的支路链,如下图所示,那么取 $i \rightarrow j$ 方向为参考方向,电势降低就满足:

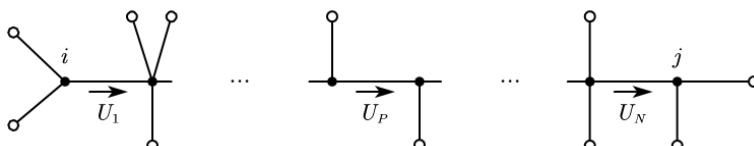


图 1.13: 路径: 数电压法

$$\varphi_i - \varphi_j = \sum_P U_p$$

尤其是对于以后用得上的星型电阻网络问题,以三端为例,KCL 或节点电流定律就可以在此时列为:

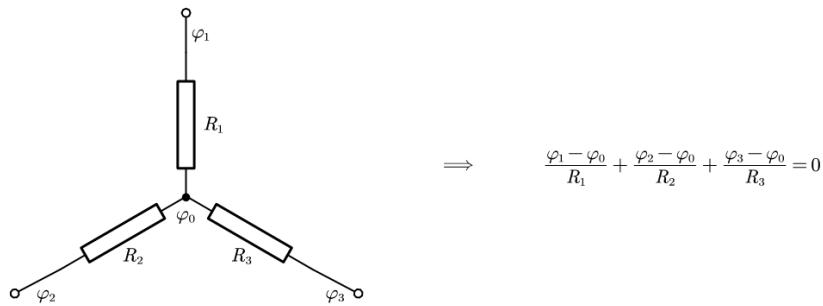


图 1.14: 节点电压法使用 KCL

一个典型的电路问题提法是如何?它又具有哪些元素与性质?解决方案又有哪些?我们下面从基础开始细细分析.

1.3 电路分析基础

1.3.1 电路的整体结构与拓扑学结论

电路分析中的以下三个重要概念的术语与立体几何学中的术语是可等值替换的:

- 支路 (branch)-边 (edge)
- 节点 (node)-顶点 (vertex)
- 回路⁸(circuit)-面 (face)

它们分别是什么含义?

最基础的概念莫过于支路. 我们暂时采取最保守的做法, 认为每一个元件都占据一个独立的支路, 不同的支路之间可以是串联, 并联, 或者组合在一起的混联, 或者什么也不是 (典型的情况比如五条支路构成的桥式连接).

接下来定义节点的概念: 节点把支路连接在一起. 在定义这个概念时我们首次遇到了拓扑等价 (topological equivalence) 的概念. 众所周知, 如果是用真实导线把真实的元件连接, 那么连接方式不一定与电路图是完全对应的. 事实上就电路图本身也具有一定的变化范围, 比如对连接点的位移与导线的弯折具有等价性, 如下图左. 再比如说如果只允许电路图中出现三导线相交的情况时, 把四个元件的一端相连就有如下图右的三种方式, 当然, 如果在中间红色导线上接上其他元件或是用理想电流表去测量其电流, 那么这三个电路并不等价, 但是如果只考虑下面要阐述的电路问题的标准提法的求解那么三个电路并无区别.

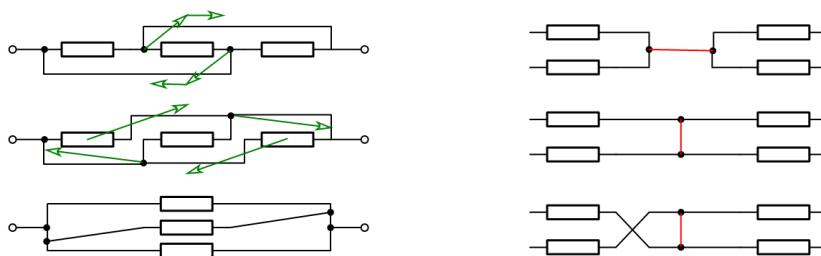


图 1.15: 拓扑等价变形

⁸注意, 真正与面形成对应关系的应该是之后要引入的网孔的概念

既然电路可以被拓扑变形,那么节点的概念也就要被重新被考量了.事实上,节点相当于彼此等势的导线延伸体.导线无论如何连接与延伸,只要是彼此连通的点就被视作属于同一个节点.从这个视角上来看,上面的左图从一开始实际上就只有左右两个节点,右边的三个图中间全部都归为一个节点.

但是,出于几何上的直观,如果一个节点只被两个元件一端共用,那么这两个元件就称作串联(series connection)的关系,两个元件的串联或多个元件的顺次串联的情况下,我们有理由把这一串元件全都视作在一条“强支路”上,原来的支路被合并,原来的中间的节点也就随着取消,剩下的节点至少应该是三条或三条以上的支路汇合的“强节点”.按照这种方式理解的强支路与强节点赋予电路以类似于多面体的拓扑结构.

要使得电路的结构完全类似于多面体,还缺少至关重要的一环: 电路的回路就类似于多面体的面. 电路的回路是由多段支路首尾相连构成的不相交的环. 为了说明清楚回路分析中的一个重要因素: 回路基. 我们还需要引入可平面化图(planar graph)的概念. 我们知道, 图是用来表示事物的连接关系的重要数学工具, 在这个意义上就无所谓图所在空间的维数的说法. 比如以右图表示的著名的三对三图(three for three graph)中, 有三户家庭分别都需要从水厂, 气厂, 电厂输送过来的资源, 那么三户家庭与三个工厂看作节点, 输送管道看作支路, 这就构成了 $K_{3,3}$ 图. 当然任何维度空间中的网络, 多面体的边与顶点自然也构成了一些图. 但是原则上抽象为一个图以后就失去了任何抽象前的维度信息. 这样就可以定义平面图(plane graph): 它是被画在一个平面上的, 同时支路与支路没有相交的图. 右边画的 $K_{3,3}$ 图就不是一个平面图. 事实上, 它也不是一个可平面化图: 可平面化图指的是虽然这个图可能以某种方式画在平面上支路会相交, 但是总能找到使边不相交的办法. 而著名的库拉托夫斯基定理⁹(Kuratowski's theorem) 指出:

任何不可平面化的图, 将串联支路合并后, 必然包含一个五阶完全图¹⁰或三对三图为子图.

我们下面只研究平面图, 但除了网孔概念以外, 其余性质都是所有电路中的图共有的.

在平面图中网孔(mesh)就是一个比较自然的概念了: 平面图的每一个格子就是一个网孔. 比如下图所示的三维立方体就产生了一个八节点十二支路的图. 它是可以平面化的, 按照右边的方式平面化以后, 就会导致变成 5 个网孔的平面图.

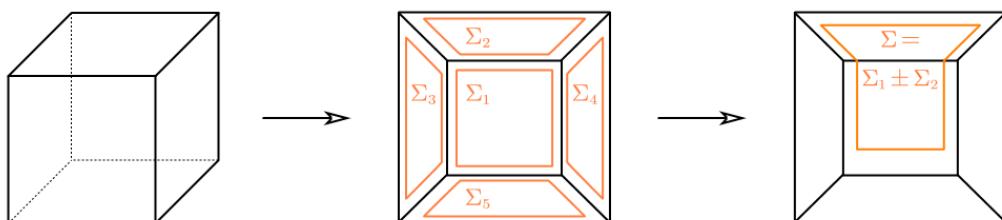


图 1.17: 立方体的平面化与网孔合并为复杂回路

可以发现, 网孔不过是特殊的一组回路. 这些回路内部的平面区域已经不再有其他支路. 如果网孔的个数为 F , 那么整个二维平面就被这些网孔回路分为 $F + 1$ 个区域, 每个网孔内部是一个区域, 而所有网孔外还有一个大的区域.

网孔作为一组特殊回路的特殊之处就在于, 网孔是一组自然的回路基(circuit basis). 所谓回路独立就是指它们对应的回路电压方程独立, 所谓回路基就是指所有可能回路的回路电压方程中选取的一组可以用来

⁹直到 1930 年才被严格表述与证明.

¹⁰即五个点彼此连接

表示¹¹所有其他方程的独立方程对应的独立回路. 可以想见, 回路的取法是远多于网孔的个数的, 比如可以把上图两个相邻的网孔 Σ_1, Σ_2 合并为较大的回路 Σ^{12} . 所以回路基的取法并不是唯一的, 原则上存在很多种独立回路的取法.

图论给出, 对于任何一个电路图, 都存在一个特征的数字: 回路秩¹³(circuit rank), 对于平面图它就是网孔的个数, 对于非平面图可以用之后给出的办法计算. 我们取一组最大数目的互相独立的回路做回路基时, 其个数总是会等于这个回路秩. 利用这个特性, 即使是复杂的非平面电阻网络, 只要我们总是避免选取的回路不独立, 选够回路秩那么多回路时, 就得到了一组回路基.

联系支路, 节点, 网孔(可换为回路基, 下同)三者的最核心的定理, 莫过于欧拉早在 1758 年就发现并证明的定理: 如果一个三维空间中的没有洞的多面体(比如像甜甜圈那样, 但是表面被磨为多个平面的多面体就是有洞的多面体)的顶点数为 V , 边数为 E , 而面数为 F , 那么必然有:

$$E = V + F - 2$$

但是如果变成电路问题, 由于多面体的面数与它所对应的被平面化的图的网孔数(或者图的回路秩, 下同)总是差一. 故对于电路问题, 节点数 V , 支路数 E 和网孔数 F 三者满足的关系式应当为:

$$E = V + F - 1$$

默认以上结果, 就意味着我们终于具备了开始研究电路问题的数学基础. 接下的第一步, 就是严格的表述一个电路问题.

- 已知量:

- 首先, 必须给定的是电路的拓扑, 即已知电路由 V 个节点, E 条支路构成, 还应当能判断每一个节点 i 与每一条支路 P 之间是否有从属关系 $i \in, \notin P$.
- 其次, 每一条支路上的元件种类: 电阻, 恒压源或恒流源. 与对应的参数 $R, \mathcal{E}, \mathcal{I}, r$ 也应当事先给定.

- 待求量:

- 为每一条支路指定好方向以后, 支路上的电流和电压都是待求的. 由于电压电流通过支路元件特性相关联, 一共 E 个未知数.
- 节点上的电势通常也是我们关心的, 此时一般要约定好某节点接地视作零电势, 其他节点的电势均是相对它的电势, 都是待求量, 一共 $V - 1$ 个未知数.
- 平面图形成了 F 个网孔. 图论可以证明, 因为满足 KCL 方程, 合理的某种支路电流分布总存在唯一的某种网孔电流(mesh current)的叠加与之等价. 故也会产生对应的网孔电流待求量, 一共 F 个未知数.

¹¹通过方程的线性组合

¹²从集合论的角度来讲, 这种合并的本质是对称差(symmetric difference), 它被定义为:

$$A \Delta B = A \cup B - A \cap B$$

对于回路的合并这是很自然的: 上式代表保留各自的边, 去除公共边. 但是对于回路合并对称差符号写为 \pm 符号是非常贴切的, 因为容易理解对称差两次必然相互抵消:

$$(A \Delta B) \Delta B = A$$

从而从合并后的网孔去再次对称差合并前的网孔, 又会回到合并的另一个网孔, 像极了加减法:

$$\Sigma_1 \pm \Sigma_2 = \Sigma \Leftrightarrow \Sigma \pm \Sigma_2 = \Sigma_1$$

¹³最早被基尔霍夫(G. Kirchhoff)在 1847 年引入, 当时称作圈数(cyclomatic number).

网孔(回路)电流法是一种用来表示电路中的电流分布的快捷方法,其优点是自动会满足 KCL 方程.且未知数个数相对较少.其做法是:对于每个网孔 Σ 约定一个顺时针或逆时针的参考方向,并给定一个网孔电流 I_Σ .那么对于每一条支路 P ,再为支路约定参考方向,则其上的电流等于:

$$I_P = \sum_{\Sigma \in P} \pm I_\Sigma$$

再一次地 \in 表示结合关系, $\Sigma \in P$ 念做“ Σ 以 P 为边”.需要注意,如果 Σ 就是取网孔,那么与任何一条支路发生结合关系的网孔最多只能有两个,即上式最多只有两项,而在图的边缘的支路则仅仅属于一个网孔.但是,如果取更广义地取回路基,则与同一条支路发生结合的回路个数可以是任意个.电流的符号需要根据回路电流的参考方向与后面对支路求和时的方向是否相同来决定,同向取正,反向取负.下图对同一个平面电路图,用网孔电流法和回路电流法分别表示两条代表性支路上的电流:

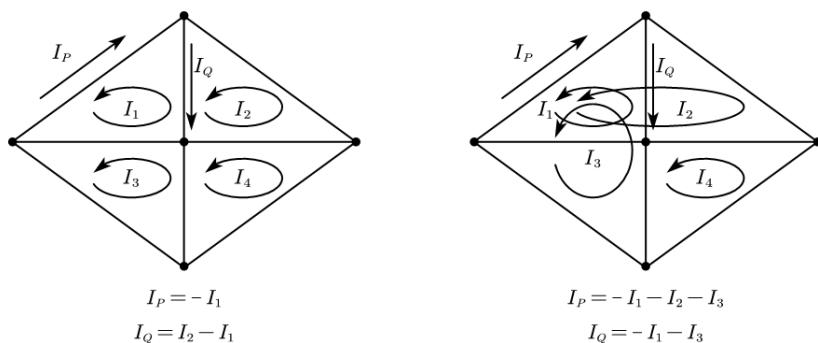


图 1.18: 网孔(回路)电流法

最后,通过已知量求未知量的方法,应当是各类 KCL 和 KVL 方程.它们应当如何列,列多少个?这就形成了电路问题的求解套路:

1.3.2 电路问题的求解套路

电路问题的求解有三种套路:支路电流法,节点电势法和网孔(回路)电流法.无论采用哪一种方法,无非是对之前梳理的三类待求量中,选取一类集中加以解决:解决的方案无非是设它们为未知数,并找到与未知数的个数恰好相等的,包含且仅包含这些未知数的 KCL 或 KVL 方程,这必然得到线性方程组.解出它们并根据它们得到另外两类待求量.下面逐一论述之.

1. 支路电流法

如果为每一条支路约定好参考方向,并设其上电流为 I_P ,则一共有 E 个未知数.

我们需要列出几乎全套的 KCL,对每一个节点 i ,这个方程写作:

$$\sum_{P \in i} \pm I_P = 0$$

正负号约定是:如果支路电流参考方向为指向该节点,则取正,若背离该节点,则取负.但是所有的 KCL 放在一起并不独立,这是因为所有的 KCL 方程求和后,每一条支路的 I_P 恰好在两端点处的 KCL 中出现两次,一正一负,故最后得到零等于零.从而需要去掉一个任意节点 j ,即可以列出 $V - 1$ 个方程:

$$\forall i \neq j, \quad \sum_{P \in i} \pm I_P = 0$$

对于每一个网孔还要列一个 KVL 方程,为了方便与统一见,我们把所有带内阻的恒流源都变成等效的带内阻恒压源,而电阻元件也视作 $\mathcal{E} = 0$ 的特殊情况,下同.这样 KVL 方程中的电压就可以用电流表

示,一共是 F 个方程:

$$\forall \Sigma, \sum_{P \in \Sigma} \pm U_P = 0$$

$$U_P = -\mathcal{E}_P + I_P R_P$$

正负号约定是,如果约定回路的环绕方向与支路参考方向一致则取正,相反则取负.

整理,对以上 KVL 方程把未知数置于左侧,常数(非齐次项)置于右侧,得到:

$$\forall i \neq j, \sum_{P \in i} \pm I_P = 0$$

$$\forall \Sigma, \sum_{P \in \Sigma} \pm R_P I_P = \sum_{P \in \Sigma} \pm \mathcal{E}_P$$

一共是 $V - 1 + F$ 个方程,恰好等于未知数的个数 E ,因为:

$$E = V + F - 1$$

2. 节点电势法

如果为某个节点 j 接地,即约定其电势为 $\varphi_j = 0$,对其他节点 $i \neq j$ 设电势 φ_i ,则一共有 $V - 1$ 个未知数.此时 KVL 方程已经给不出有意义的方程,只能列 KCL 方程.任何一条支路 P ,如果两端点为 i, k ,那么如果约定 i 到 k 方向为其参考方向,有:

$$U_P = \varphi_i - \varphi_k = -\mathcal{E}_P + I_P R_P \Rightarrow I_P = \frac{\varphi_i}{R_P} - \frac{\varphi_k}{R_P} + \frac{\mathcal{E}_P}{R_P}$$

那么根据 KCL 方程,所有流入 k 节点的电流应当和为零:

$$\left(\sum_{P \in k} \frac{1}{R_P} \right) \varphi_k - \sum_{i \in P \in k} \left(\frac{1}{R_P} \varphi_i \right) = \sum_{P \in k} \frac{\mathcal{E}_P}{R_P}$$

其中 $i \in P \in k$ 念做 i, j 通过 P 相连.同样的,这 V 个方程并不独立,应当再去掉一个 k 的方程,由于 $\varphi_j = 0$ 不必解,不妨就去掉这一个,并使左侧不出现 φ_j :

$$\forall k \neq j, \left(\sum_{P \in k} \frac{1}{R_P} \right) \varphi_k - \sum_{\substack{i \in P \in k \\ i \neq j}} \left(\frac{1}{R_P} \varphi_i \right) = \sum_{P \in k} \frac{\mathcal{E}_P}{R_P}$$

这样方程数也是 $V - 1$ 个,等于未知数个数 V_1 .

3. 网孔电流法

如果对每个网孔,约定参考方向后设每个网孔电流为 I_Σ ,则一共有 F 个未知数.此时 KCL 方程已经给不出有意义的方程,只能列 KVL 方程.任何一条支路 $P \in \Sigma$,如果按照所在网孔 Σ 的参考方向,有:

$$U_P = -\mathcal{E}_P + I_P R_P = -\mathcal{E}_P + R_P \sum_{\Pi \in P} \pm I_\Pi$$

求和中恰好有一项就是原来的 I_Σ ,它取正号,而其他的回路 Π 应当根据与回路 Σ 在公共边 P 上的方向是否一致来决定正负号,同向为正,反向为负.将上式求和得到 KVL:

$$\forall \Sigma, \left(\sum_{P \in \Sigma} R_P \right) I_\Sigma + \sum_{P \in \Sigma} \left(R_P \sum_{\Pi \in P \in \Sigma} \pm I_\Pi \right) = \sum_{P \in \Sigma} \mathcal{E}_P$$

其中 $\Pi \in P \in \Sigma$ 念做“ Π 和 Σ 共用边 P ”.这样方程数也是 F 个,等于未知数个数 F .

一方面,三种方法的未知数与方程个数分别是 $E, V - 1, F$,而 $E = V - 1 + F$,所以显然后两种方法的未知数和方程数都是比第一种少的,在实际应用过程中更加省事,原则上我们应当尽可能地使用后两种方法来解决实际问题.但是另一方面,第一种方法得到的方程形式上更简洁而易于分析,所以理论推导的时候也青睐基础的支路电流法.

1.4 电路分析方法

往往, 我们不希望把整个电路的解全都找到, 而只关心个别元件上的电压, 电流. 这样之前的完整求解的套路就瞬间失去了意义. 反倒是各种等效的方法大放异彩. 这一节我们主要的线索就是来探讨各式各样等效原理的来龙去脉, 它们起到了化简电路的实际作用.

证明任何等效原理的起点是读者可能不再陌生的叠加原理(superposition principle). 电路方程的求解是一个线性系统, 不管使用上一节提出的何种方法来设未知数, 列方程求解电路时, 我们都会遇到如下方程:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

为了方便起见, 将上式简记为:

$$[a][x] = [y]$$

其中 $[x]$ 为待求解的电路支路电流构成的向量, 节点电压或网孔电流. $[a]$ 则为与电路拓扑和电阻元件参数有关的已知系数构成的矩阵, 它不含恒压源电动势. 而非齐次项向量 $[y]$ 首先就一定可以拆为各个恒压源电动势对应的非齐次项的叠加:

$$[y] = \sum_i \mathcal{E}_i [y]_i$$

最终 $[y]_i$ 表示在恒压源 \mathcal{E}_i 处放置一个单位电动势, 其他恒压源置零¹⁴以后对非齐次项的贡献. 那么根据线性方程组的叠加原理, 我们可以先求解每个恒压源带来的电路的解:

$$[a][x]_i = \mathcal{E}_i [y]_i$$

那么原电路的解就是:

$$[x] = \sum_i [x]_i$$

一种更常用的等价表述是:

若两个电路的拓扑, 电阻分布完全相同. 那么可以对两个电路做叠加, 叠加后拓扑, 电阻分布不变, 但是两个原电路的恒压源将同时出现在叠加后电路. 所有支路电流, 节点电势, 网孔电流做简单加法.

除了特勒根原理, 其他的原理均直接或间接来自叠加原理. 下面一一展开:

1.4.1 二端电路等效

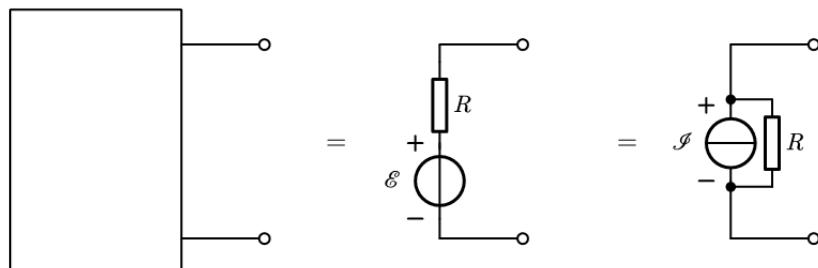


图 1.19: 等效原理

¹⁴短路! 不是断路!

- 任何二端不含源电阻网络都可以等效为一个线性电阻.
- 戴维南-诺尔顿原理: 任何二端含源网络如果把各电压源电流源置零之后形成的不含源电阻网络的等效电阻网络电阻为 r , 其开路电压 U , 其短路电流 I . 那么这个电路等效于一个电压源或电流源, 内阻即 r , 电压或电流即 U, I .

1.4.2 三端电路等效

- 任何三端含源电阻网络, 三端汇入电流 I_i 和三端电势 φ_i 之间存在关系:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}} & -\frac{1}{R_{12}} & -\frac{1}{R_{13}} \\ -\frac{1}{R_{12}} & \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} & -\frac{1}{R_{23}} \\ -\frac{1}{R_{13}} & -\frac{1}{R_{23}} & \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{23}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 - \varphi_{10} \\ \varphi_2 - \varphi_{20} \\ \varphi_3 - \varphi_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

其中 φ_{i0} 为开路时的电势, 各个 R_{ij} 为等效参数.

- 特别地, 当电路不含源时, 上式可等效为三个电阻 R_{12}, R_{23}, R_{13} 构成的三角形电路.
- Y- Δ 变换:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_3}$$

1.4.3 二端口电路

特勒根原理: 单一电路中若各个支路选取相关方向, 则:

$$\sum_P U_P I_P = 0$$

如果两个电路的图一样, 即具有相同的节点, 支路, 网孔结构, 但是元件可以不一样. 那么选取各个支路为相关方向, 也有:

$$\sum_P U_{1P} I_{2P} = 0 = \sum_P U_{2P} I_{1P}$$

第二章 静磁学

2.1 电流与磁场

2.1.1 磁场地位与电流分布

人们对磁的认识一共经历了几个阶段:

1. 起: 远古-**奥斯特**(H. C. Ørsted). 磁现象被认为与**磁体**(magnet) 相关. 它被设想为由**磁荷**(magnetic charge) 造成.
2. 承: 奥斯特-**麦克斯韦**(J. C. Maxwell). 奥斯特发现了电流的磁效应, **法拉第**(M. Faraday) 建立了“场”的观念, 可以定量描述电流产生的磁场, 法拉第与**亨利**(J. Henry) 等人发现了电磁感应, **安培**(A.-M. Ampère) 的**分子电流假说**解释了物质磁性的本质也是电流产生磁场.
3. 转: **麦克斯韦-狄拉克**(P. Dirac). 麦克斯韦和**洛伦兹**(H. A. Lorentz) 给出了电磁场的普遍理论, 即**电动力学**(electrodynamics)¹, 洛伦兹和**爱因斯坦**(A. Einstein) 等人将电动力学纳入相对论框架. **赫兹**(H. R. Hertz) 的实验有效地支持了电磁场论. 洛伦兹等人的经典电子论是微观粒子与电磁场之间相互作用的第一个完备理论, 微观粒子被陆续发现, 电子的**自旋**(spin) 与**磁矩**(magnetic moment) 被发现与研究.
4. 合: 狄拉克-现今. 狄拉克主张把电子量子化为场, 提出了**量子电动力学**(quantum electrodynamics), 预言了反物质的存在, **安德森**(C. D. Anderson) 实验室发现正电子. 狄拉克提出了量子化的**磁单极子**(magnetic monopole) 模型, 但至今未找到磁单极子.

现在, 我们对**磁场**(magnetic field) 概念的理解就可以用下图来概括:

如何证明磁场是电场的相对论效应? 设想原参考系中只有电场, 那么无论原参考系中的速度 v_x, v_y, v_z 如何, 受力都不取决于速度大小, 它是:

$$F_x = qE_x$$

$$F_y = qE_y$$

$$F_z = qE_z$$

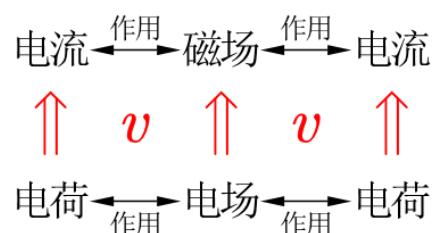


图 2.1: 磁场与电荷的关系

根据相对论的力变换公式:

$$F'_x = F_x - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{v_y F_y + v_z F_z}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} , \quad F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1 - \frac{u v_x}{c^2})} , \quad F'_z = \frac{F_z}{\gamma(1 - \frac{u v_x}{c^2})}$$

代入原式, 并假设原参考系速度和变换速度相对 c 都是小量, 故新参考系速度可以使用经典的速度叠加:

$$v_x = v'_x + u , \quad v_y = v'_y , \quad v_z = v'_z$$

¹这个词语却是安培发明的.

近似到与 v'_x, v'_y, v'_z 一阶相关的领头项:

$$F'_x = qE_x - qv'_y \cdot \frac{uE_y}{c^2} - qv'_z \cdot \frac{uE_z}{c^2}$$

$$F'_y = qE_y + qv'_x \cdot \frac{uE_y}{c^2}$$

$$F'_z = qE_z + qv'_x \cdot \frac{uE_z}{c^2}$$

我们如果假设以下**洛伦兹力**(Lorentz force) 公式的成立性:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

它是磁场力分量 $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 与电场力分量 $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ 的和. 则受力公式简化为:

$$F'_x = qE'_x + qv'_y B'_z - qv'_z B'_y$$

$$F'_y = qE'_y + qv'_z B'_x - qv'_x B'_z$$

$$F'_z = qE'_z + qv'_x B'_y - qv'_y B'_x$$

对比即知道:

$$B'_x = 0 \quad , \quad B'_y = \frac{uE_z}{c^2} \quad , \quad B'_z = -\frac{uE_x}{c^2}$$

这实际上 是:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}}{c^2}$$

如果原参考系是静止点电荷产生的电场, 现在换参考系以后, 点电荷做速度为 $-\mathbf{u}$ 的匀速直线运动而产生以上磁场, 那么就能推理出, 如果点电荷以速度 \mathbf{v} 做匀速直线运动, 那么它产生的磁场必然为:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

我们从中总结出:

- 只有运动的电荷才会受到磁场力.
- 只有运动的电荷才产生磁场.
- 但是运动与静止具有相对性, 所以电场和磁场的区别就像静止与运动的区别那样是相对的, 合称**电磁场**(electromagneto field).

我们还注意到来自理论推导过程中产生的重要公式:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

由于推导的近似性这两个式子似乎没有太多说服力. 但是历史上这两个式子是作为实验规律先被总结, 再有麦克斯韦的普遍电磁理论, 最后才是洛伦兹和爱因斯坦对其背后的相对论基础的研究.

2.1.2 毕奥-萨伐尔定律

强调一下本章研究的范围是重要的。我们暂时只研究静磁场(static magnetic field)，其场源为电流，且其分布不随时间，从而改变的磁场也不随时间改变。或者更简单的说，我们要研究的体系就是上一章建立的稳恒电流体系，它由不变的电荷产生不变的电场，不变的电场驱动不变的电流，现在增加了不变的电流产生不变的磁场这一要素。上一章的讨论告诉我们这就是要求电流分布是无散的：

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

如何把微观电荷的运动同宏观的电流 \mathbf{j} , I 建立联系？引言中我们指出来过，微观运动电荷产生的磁场正比于量：

$$\mathbf{C} = q\mathbf{v}$$

这个量被称作电流元(current element)。事实上作为微观电荷 q 通常是基本电荷 e 的量级，从而上述量是一个微元，即使取物质中一个很小的体积 dV ，其内部包含的所有电荷个数 dN 依然未达到宏观量级时，总的电流元依然是个小量，记做 $d\mathbf{C}$ 。我们知道电流密度的定义为：

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} = nqv$$

那么体积产生的总的电流元：

$$d\mathbf{C} = dNqv = nqv dV = \mathbf{j} dV = \rho dV \cdot \mathbf{v}$$

称为体电流元(volume current element)。同理，我们可以写出面电流元(surface current element)和线电流元(curve current element)：

$$d\mathbf{C} = i dA = \sigma v dA \quad , \quad d\mathbf{C} = I dl = \lambda v dl$$

注意上面线电流元的写法，由于我们不认为 I 是矢量，故把电流元的矢量性由线元 dl 来承载。这么做的好处之后就能体会到。我们发现电流元与电荷元形成了对应关系：

	微观单元	体元	面元	线元
磁	$q\mathbf{v}$	$\mathbf{j} dV$	$i dA$	$I dl$
电	q	ρdV	σdA	λdl

图 2.2: 电荷元与电流元对应

毕奥-萨伐尔定律(Biot-Savart law) 是一个实验定律，它用于描述真空中两个孤立的电流元之间的相互作用力：

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 dl_2 \times (I_1 dl_1 \times \mathbf{e}_{12})}{r^2}$$

其中系数 $k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \approx 1 \times 10^{-7} \text{H/m}$ ² 为磁力常数，而 μ_0 称作真空磁导率(magnetic permeability of vacuum)。事实上：

$$k_e/k_m = c^2 \quad \text{或者} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

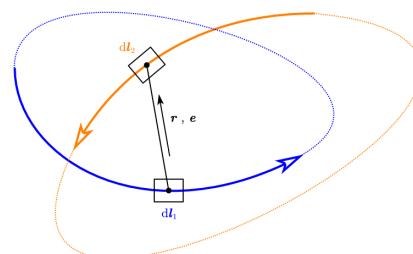


图 2.3: 电流体系间的相互作用力

²注意，2019 年 5 月 20 日之后，新的国际单位制标准下其值为 $1.000\ 000\ 000\ 82(20) \times 10^{-7} \text{H/m}$ ，不再有严格的 $\mu_0 := 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ 。

c 是真空中的光速. 这也揭示了电磁理论统一性背后的相对论本质. 我们这里还用到了电感的国际单位亨利, 而磁场的国际单位特斯拉(Tesla) 与它的关系为:

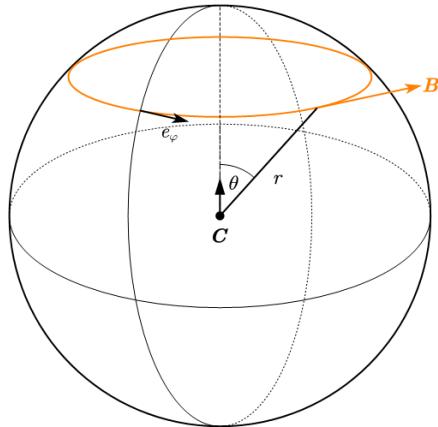
$$1\text{H} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2/\text{A}$$

另一个常用的单位来自 CGS 单位制, 即高斯(Gauss), 以纪念这位伟大的数学家在物理学上同样瞩目的贡献. 高斯在历史上被广泛使用, 直至今天也如此, 例如地表地磁场大概就在 $0.25 - 0.60\text{G}$, 它与特斯拉的换算关系为:

$$1\text{T} = 10000\text{G}$$

根据场论的精神, 我们将上式拆解为电流产生场的定律和电流在场中受力的公式:

$$\text{d}\mathbf{F}_{12} = I_2 \text{d}\mathbf{l}_2 \times \text{d}\mathbf{B}_{12}, \quad \text{d}\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 \text{d}\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{12}}{r^2}$$



如前所述, 毕奥-萨伐尔定律可以在相对论背景下由库仑定律推出, 故它继承了库仑定律的平方反比和叠加原理的特性. 但是它突出的特点是具有横向力(transverse force) 的特点: 力的方向与受力物体电流元垂直, 也与另一个只依赖于场源的磁场矢量垂直, 但这个矢量又与场源电流元的方向垂直. 两次叉乘这让力的计算变得比较复杂. 让我们以场源电流元 C 为中心, 其方向建立极坐标系, 那么磁场的大小与方向就可以从公式得到:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{C \sin \theta}{r^2} \mathbf{e}_\varphi$$

磁场符合叠加原理, 例如一个载流线圈, 源点坐标 \mathbf{r}' , 场点坐标 \mathbf{r} , 记 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\text{d}\mathbf{l} = \text{d}\mathbf{r}'$, 则其产生的磁场公式为:

$$\mathbf{B} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \text{d}\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R}{R^2}$$

图 2.4: 电流元产生的磁场

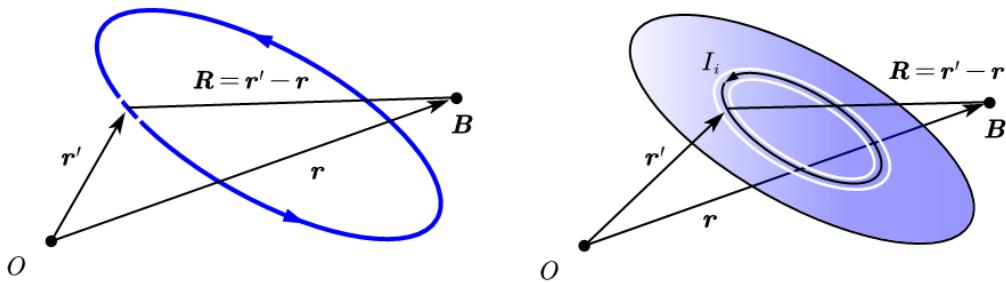


图 2.5: 连续体系产生磁场

载流线圈具有非常重要的地位, 任何体电流分布, 只要是有界区域内的稳恒电流, 电流线就必然构成闭合的回路. 那么就一定可以分解为电流圈. 如果用求和的极限表示积分但是暴力地省去极限符号, 此时磁场计算方法为:

$$\mathbf{B} = \int_{V'} \frac{\mu_0 j \times \mathbf{e}_R}{R^2} \text{d}V = \sum_i \oint \frac{\mu_0 I_i \text{d}\mathbf{l}_i \times \mathbf{e}_R}{R^2}$$

而一个线圈或一个体电流分布在外磁场中的受力为:

$$\mathbf{F} = \oint I \text{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{F} = \sum_i I_i \text{d}\mathbf{l}_i \times \mathbf{B}$$

在稳恒电流情况下, 讨论一个电流元产生的磁场是没有意义的, 因为空间的磁场必然是整个体系产生的磁场的叠加, 从而单个电流元的磁场并不具有可观测的意义, 除非电流可以独立的被操控以改变. 而讨论一个电流体系各个部分受到的作用力时, 尤其是一个电流线圈受到的作用力时, 区分内力和外力就变得尤其重要. 我们发现, 两个电流元之间的相互作用力之和:

$$d\mathbf{F}_{12} + d\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{12})}{r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times (I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{e}_{21})}{r^2}$$

根据三重矢积公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, $\mathbf{e}_{12} = -\mathbf{e}_{21}$. 得到:

$$d\mathbf{F}_{12} + d\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I_1 d\mathbf{l}_1 \times I_2 d\mathbf{l}_2) \times \mathbf{e}_{12}}{r^2}$$

一般来说不总为零, 可见朴素的牛顿第三定律在静磁场情况下失效了. 我们不得不把 $d\mathbf{F}_{12}$, $d\mathbf{F}_{21}$ 不再视作相互作用力, 而是需要通过场作为媒介. 事实上两个运动电荷之间的磁场力是在作为电场力的相对论修正, 从相对论的根本原理上, 相互作用传递速度的有限性导致力的传播被推迟, 原则上也不可能符合牛顿第三定律.

但是如果我们计算两个线圈之间的相互作用力之和:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{F} &= \oint_1 \oint_2 d\mathbf{F}_{12} + \oint_2 \oint_1 d\mathbf{F}_{21} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left(\oint_1 \oint_2 \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} d\mathbf{r}_1 + \oint_2 \oint_1 \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} d\mathbf{r}_2 \right) \end{aligned}$$

但是:

$$\begin{aligned} \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} &= -\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad \Rightarrow \quad \oint_2 \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = 0 \\ \nabla_1 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} &= -\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad \Rightarrow \quad \oint_1 \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = 0 \end{aligned}$$

从而得到:

$$\delta\mathbf{F} = 0$$

当两个环重合时, 这也代表“自己给自己的力”是零. 即使是磁场给线圈的力, 也是线圈自己产生的磁场而无法对自己产生力, 这个结果其实也是空间平移对称性 (而不是牛顿第三定律) 的必然结果. 而空间旋转对称性则给出, 任意选取 O 点计算各个电流元受力对 O 的力矩, 总和必然为零. 或者说两个线圈之间的作用力与作用力矩之间必然符合牛顿第三定律. 其证明在此不再赘述. 这样我们就证明了此前给出的理论公式与牛顿第三定律之间是自洽的, 无散的电流体系下牛顿第三定律依然成立, 尽管表面上电流元的毕奥萨伐尔定律与牛顿第三定律有冲突.

更有甚者, 我们指出, 根据麦克斯韦方程的协变性, 即使是微观电荷做相对论性运动, 只要是稳恒电流体系, 那么毕奥萨伐尔定律可以作为一个推论而具有普适性. 而对于非稳恒体系, 后面我们将会证明, 磁场此时并不能简单地由电流确定而依赖于电场的变化率, 甚至它成为了自由存在的物质形式而摆脱了电荷造成任何约束.

2.2 两个定律与矢势

2.2.1 磁场的环路定律

静磁场的环路定律(circuital law), 又称安培定律(Ampère's law) 指出, 对于一个可定向曲面 A 和它的闭合右手边界 ∂A , 有:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$$

我们用毕奥-萨伐尔定律来证明环路定律。首先，上式中的 A 和其边界上的场点位矢取为 r ，则 $dl = dr$ ，而场源电流分解为电流环 I_i 。将电流环上坐标选为 r' 。那么以上积分可按照叠加原理分解为：

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i = \sum_i \oint_{\partial A} \mathbf{B}_i \cdot dl$$

而每一项环量就可以用场点和源点的两次环积分表示，将 e_R 记做 e ：

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \oint_r \mathbf{B}_i \cdot dr \\ &= \oint_r \left(\oint_{r'} \frac{\mu_0 I_i dr' \times e_R}{4\pi R^2} \right) \cdot dr \\ &= \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \oint_r \oint_{r'} \frac{(dr \times dr') \cdot e_R}{R^2} \end{aligned}$$

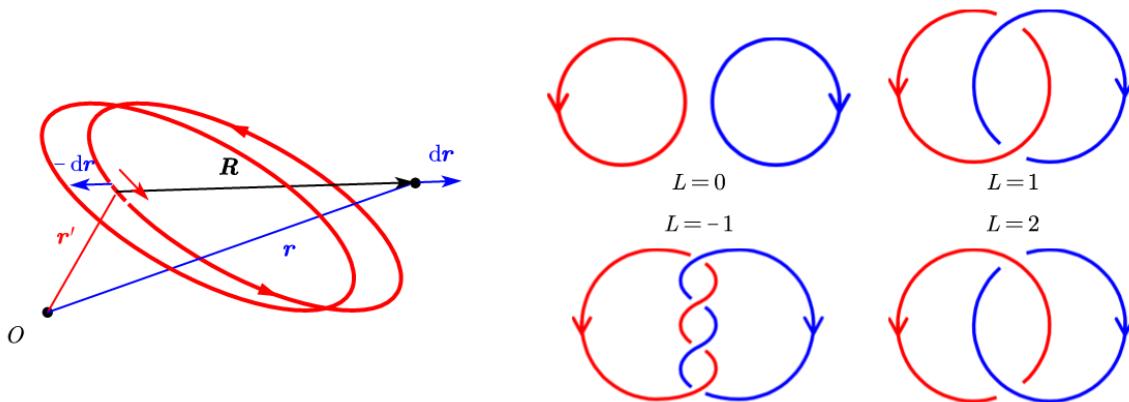


图 2.6: 环绕数

如上图所示，对上面的积分做如下诠释：当从场点 r 去看线圈时，线圈对场点产生了一个立体角 Ω 。当观察点移动 dr 时，考察立体角的改变 $d\Omega$ 。可以等效地把线圈反向移动 $-dr$ 。图中所示情况立体角将减小，算法为：

$$-d\Omega = \int \frac{dA \cdot (-e_R)}{R^2} = \oint_{r'} \frac{(-dr \times dr') \cdot (-e_R)}{R^2}$$

下面考虑以源电流圈（2.6中红圈）为边界的那个面，场点形成的安培回路（2.6中蓝圈）与这个面的交点个数为 $n_1 + n_2$ ，其中 n_1 代表蓝圈正向穿过面时方向与红圈形成右手规则的交点个数， n_2 代表蓝圈正向穿过面时方向与红圈形成左手规则的交点个数。于是再定义环绕数(linking number)：

$$\ell = n_1 - n_2$$

这是一个拓扑学不变量，它只取决于两个回路的整理性质，与面的取法无关，而且具有对称性（红对蓝与蓝对红的环绕数一致）。

从而我们注意到，如果环绕数恰好是一，那么从面上出发， Ω 从一个接近 2π 的大小一直在减小直到变为零，然后变成负的，直到回到面上直到变成接近 -2π ，虽然初末位置立体角不一定都等于 2π ，但是一定有：

$$\oint_r d\Omega = -4\pi$$

相似的，如果考虑一个环绕数为 L 的安培回路，就有：

$$\oint_r d\Omega = -4\pi\ell$$

将此前的立体角微分代入, 得到:

$$\oint_{\mathbf{r}} \oint_{\mathbf{r}'} \frac{(\mathbf{dr} \times \mathbf{dr}') \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} = 4\pi\ell$$

最后代入此前的磁场环量, 得到:

$$\Gamma_i = \mu_0 \ell_i I_i$$

最后我们总结出:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i \ell_i I_i$$

现在做极限化处理, 注意到求和式实际上就是统计了所有以右手规则为正向通过面的电流, 统一用电流密度表示就变成了自带正负的点乘的积分:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$$

此即环路定律, 由数学上的开尔文-斯托克斯定理, 我们可以把上式写出局域的微分形式:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

2.2.2 矢势与磁场的高斯定律

对电流元产生的磁场 $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} dV \times \mathbf{e}_r}{r^2}$ 引入以下矢量场是方便的:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} dV}{r}$$

这是因为如果计算球坐标下的旋度, 考虑到 \mathbf{A} 分解到 r, θ 方向分别为:

$$A_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV}{r} \cos \theta, \quad A_\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV}{r} \sin \theta$$

那么考虑一个回路³ $S : (r, \theta) - (r + dr, \theta) - (r + dr, \theta + d\theta) - (r, \theta + d\theta) - (r, \theta)$, 利用旋度的定义式:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{S \rightarrow 0} \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} / S$$

得到其旋度:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

代入便得到以下关系式:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV}{r^2} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi = \nabla \times \mathbf{A}$$

\mathbf{A} 这个矢量称作**磁矢势**(magnetic vector potential). 由于叠加原理, 一个电流分布体系的磁矢势和磁场应当为:

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} dV}{r}, \quad \mathbf{B} = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} dV \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

同样地将满足:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

以上旋度关系写成积分形式意味着一种计算磁通量的特殊方法:

$$\Phi = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

³为了避免与磁矢势符号重复, 暂时用 S 表示面元.

对于无边界的闭合曲面, 上式直接证明了磁场**高斯定律**(Gauss's law):

$$\begin{aligned}\partial\partial V = \emptyset \Rightarrow \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_{\partial\partial V} \mathbf{A} \cdot dl = 0 \\ \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

我们如果计算此前电流元产生的磁矢势的散度:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0 j dV}{4\pi r} \mathbf{e}_z \right) = \frac{\mu_0 j dV}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0 j dV \cos \theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 j dV \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi r^2}$$

又发现对电流元得到非零的结果. 但是如果考虑线圈:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \oint \frac{\mu_0 I dl \cdot \mathbf{e}_R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \cdot dr' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \nabla_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint d \left(\frac{1}{R} \right) = 0$$

从而对于任意稳恒电流体系, 通过此前积分定义的磁矢势也是无散的. 最后将磁矢势与磁场关系和磁场与电流关系联立, 注意到:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

即三重矢积公式. 我们把梯度算符 ∇ 直接看作了一个矢量. 上式右侧第一项由于磁矢势无散故为零, 从而得到:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{A}$$

电场中的式子 $\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon_0$ 与它相呼应.

可以设想存在可以像点电荷产生电场那样的方式产生磁场的物质, 称作**磁单极子**(magnetic monopole), 从而可以产生不为零的净**磁荷**(magnetic charge), 事实证明这样的物质至今都未曾找到, 从而相伴的磁场形式也仅仅存在与理论中. 但是, 总磁荷为零的体系: **磁偶极子**(magnetic dipole), 不仅仅是纯粹的理论模型, 后面可以发现线圈产生的磁场与磁偶极子是相似的.

我们记得电势可以被视作电荷在电场中运动的势能有关的物理量, 即 $E_p = q\varphi$. 那么电荷在磁场中运动时, 磁矢势代表什么物理概念呢? 如果空间中只有纯的磁场, 那么显然磁场力不做功:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} = (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

所以电荷一定是动能不变的. 但是即使如此, 我们也不认为磁场力是一个保守力, 这是因为保守力的定义应该是: 能够用势能的梯度来表示的作用力. 我们写出一个项:

$$\boldsymbol{\pi} = q\mathbf{A}$$

这个项不再具有能量的量纲而是动量的量纲. 我们知道电场除磁场的量纲为速度, 而两者与对应的矢势标势都差一个长度量纲, 故 $q\mathbf{A}$ 量纲等于用 $q\varphi$ 的能量量纲除速度, 即动量量纲. 这个动量称为**势动量**(potential momentum). 而带电粒子的旧动量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 就称作**机械动量**(kinetic momentum), 它是运动造成的, 而势动量是位置 \mathbf{r} 造成的 $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r})$, 是与磁场相互作用引起的动量. 两者之和:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\pi}$$

称作**正则动量**(canonical momentum). 不像在电场中的电荷运动机械能(动能 + 势能)守恒, 这个和也是一般不守恒的:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}} &= \dot{\mathbf{p}} + \dot{\boldsymbol{\pi}} \\ &= \mathbf{F} + q\dot{\mathbf{A}} \\ &= q\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + q\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} \\ &= -\nabla(-q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})\end{aligned}$$

最后一步把 ∇ 视作矢量使用了三重矢积公式. 注意到瞬时的 v 不被视作变量而视作常数而从偏导数符号内外移动不引起改变. 我们发现瞬时的正则动量导数似乎恰好等于某个势能的负梯度:

$$V = -qv \cdot A$$

这被称作广义势(generalized potential). 它含有速度, 从而每一个时刻有着完全不同的形式. 但不管怎样, 粒子在磁场中的运动的确是写成了一个动量导数等于势的梯度的形式(拉格朗日方程形式). 即使这样, 我们依然不认为磁场力是一个保守力.

我们来看一个具体的例子. 假设空间中的电流分布产生了一个随 y 方向变化的 x 方向的磁矢势分布:

$$A = (f(y), 0, 0) = f(y)e_x$$

那么可以验证这个式子的确符合:

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial f(y)}{\partial x} = 0$$

而产生它的电流和对应的磁场就是:

$$j = -\nabla^2 A / \mu_0 = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(y) e_x = -\frac{f''(y)}{\mu_0} e_x$$

$$B = \nabla \times A = -\frac{\partial f(y)}{\partial y} e_z = -f'(y) e_z$$

这表示一个垂直 $x-y$ 平面的磁场. 那么粒子在某一瞬时的广义势:

$$V = -qv \cdot A = -qv_x f(y)$$

其瞬时梯度就是:

$$-\nabla V = -qv_x f'(y) e_y$$

而粒子的正则动量是:

$$P = (mv_x + qf(y))e_x + mv_y e_x$$

根据此前的论述:

$$\dot{P} = -\nabla V$$

从而我们发现, 在 x 方向粒子的广义动量守恒(concervation of generalized momentum):

$$mv_x + qf(y) = \text{Const.}$$

而在 y 方向有一动力学方程:

$$ma_y = -qv_x f'(y)$$

读者可以用牛顿力学同样的论证以上两个式子的成立性.

2.3 电流体系

研究更进一步的磁场与电流相互作用的模型前, 熟悉一些常见的电流体系的结论是大有裨益的, 这些包括:

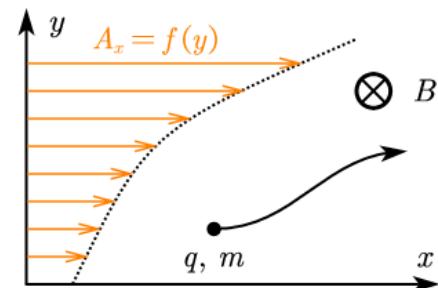


图 2.7: 正则动量守恒

2.3.1 磁偶极子

同样类似于对静电学中一个分布在原点附近的电流体系在远场产生的电势进行展开的思想, 我们此时运用到静磁学情形: 计算一个分布在原点附近的电流体系在远场产生的磁矢势:

$$\mathbf{A} = \int_{V'} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

利用分解为线圈可以简化以上计算:

$$\mathbf{A} = \sum_i \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_i d\mathbf{l}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

依然利用静电学中的展开公式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} &= [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2]^{-\frac{1}{2}} = (\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r}_i^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx (\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - 2\frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}}{r^2}\right) \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \cdot \mathbf{r}_i \end{aligned}$$

代入上式, 注意到 $d\mathbf{l}_i = d\mathbf{r}_i$ 得到磁矢势展开的前两项:

$$\mathbf{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_i I_i \oint d\mathbf{r}_i + \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \sum_i I_i \oint (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i$$

第一项由于对回路积分必然为零. 第二个积分中需要注意 \mathbf{e}_r 照理应当是可以提取到积分号外面的常矢量, 但是这样积分内部的 $\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_i$ 构成了一个不直观的张量. 我们采用一个更加简单的做法: 常矢量点乘法(method of dot product by a constant vector). 任意取一个常矢量 \mathbf{v} 来点乘积分结果:

$$\mathbf{v} \cdot \oint (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i = \oint (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}_i) = \mathbf{e}_r \cdot \oint (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i$$

这样倒是可以实现 \mathbf{e}_r 移到积分外, 但代价是另一个类似的 \mathbf{v} 又到了积分内. 其实无济于事. 但是注意到中间的积分其实完全可以使用开尔文-斯托克斯定理:

$$\oint (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}_i) = \oint [(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{r}_i = \int_{S_i} \nabla \times [(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{S}_i$$

根据叉乘的定义:

$$\nabla \times [(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{v}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) v_x & (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) v_y & (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) v_z \\ \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{vmatrix}$$

其中 $\mathbf{e}_r = (e_{rx}, e_{ry}, e_{rz})$ 和 (v_x, v_y, v_z) 都是常的. 故求偏导只发生在点乘式 $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i$ 中的一项上给出不为零的系数. 即:

$$\nabla \times [(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{v}] = \begin{vmatrix} e_{rx} & e_{ry} & e_{rz} \\ v_x & v_y & v_z \\ \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{v}$$

最终得到:

$$\mathbf{v} \cdot \oint (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i = \int_{S_i} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}_i = \mathbf{v} \cdot \left[\left(\int_{S_i} d\mathbf{S}_i \right) \times \mathbf{e}_r \right] = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{e}_r)$$

由于工具 \mathbf{v} 的任意性, 现在就可以看出以下关系:

$$\oint (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i = \mathbf{S}_i \times \mathbf{e}_r$$

再代入此前的磁矢势, 得到最终结果:

$$\mathbf{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \left(\sum_i I_i \mathbf{S}_i \right) \times \mathbf{e}_r$$

在讨论最终结果前我们对上式出现的一种现象需要做进一步的解释. 如图2.8所示, 一个线圈对应的面矢量 \mathbf{S} 的标准定义实际上对应着以下线圈上的路径积分:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

这样定义也绝非完美, 我们自然觉得, 一个线圈对应的面矢量的确定应该是与坐标原点选取无关的, 但上式在表面上有关. 如果原点位移了 \mathbf{R} , 两个积分的差为:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}' &= \frac{1}{2} \oint (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \times d(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \\ &= \frac{1}{2} \oint (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \times d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{S} - \frac{1}{2} \mathbf{R} \times \oint d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{S} \end{aligned}$$

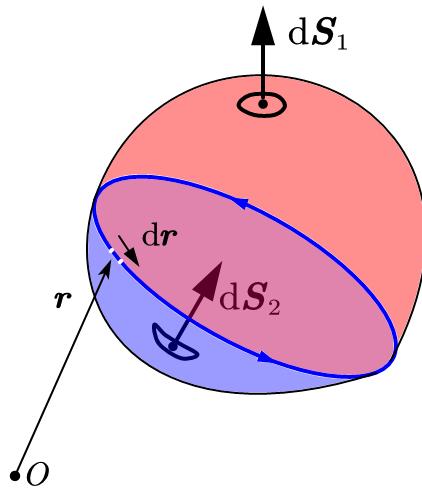


图 2.8: 线圈与面矢量

故以上定义的确不依赖于原点的选取. 但是我们要问, 为什么上式就表示以线圈为边界的面矢量呢? 而这样定义又有何好处? 事实上, 如过按照通常的方式来定义一个边界所确定的面的面矢量, 那么就面临着一个奇怪的问题: 不同的面可能共用了同一个边界, 甚至会出现莫比乌斯带那样, 一个简单的闭合曲线却以一个反常的不可定向的面的边界的形式出现了, 我们甚至可以在一个圆环作为边界的情况下构造出莫比乌斯带型的不可定向曲面来, 将莫比乌斯带的边界扯成一个圆环即可. 为了避免这种情况, 我们最好是用曲线积分来定义面矢量, 这样对于复杂曲线(比如自己打结的曲线, 比如螺旋线)也不必受难以确定以其为边界的曲面之苦. 事实上, 如果对于2.8那样的曲线较为简单的情况, 选取以其为边界的可定向曲面, 依然把右手定则确定的微元面矢量积分定义为整个面的面矢量, 那么对于2.8中两个不同的面:

$$\mathbf{S}_1 = \int_{S_1} d\mathbf{S}_1, \quad \mathbf{S}_2 = \int_{S_1} d\mathbf{S}_2$$

我们自然也要问, 以上两个积分是否会相等? 事实上如果把两个积分相减, 就得到了在一个体的闭合表面上的面元积分:

$$\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 = \oint_{\partial V} d\mathbf{S}$$



图 2.9: 莫比乌斯带

要想得到上式的值, 我们又再一次使用常矢量点乘法:

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2) = \oint_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

很显然, 这表示一个常矢量场在闭合面上的通量, 如匀强电场通过一个闭合面的电通量代数和, 从而一定是零. 由 \mathbf{v} 的任意性, 总有:

$$\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 = 0 \quad , \quad \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2$$

从而这个定义也是不依赖于曲面的选取的, 而为了把之前标准定义的曲线积分和对面元的积分联系起来, 我们再使用常矢量点乘法:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{1}{2} \oint_{\partial S} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int_S \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

利用 \mathbf{v} 为常矢量时可以在 ∇ 前后移动的特性, 得到:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r} = 3\mathbf{v} - \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$$

代入上式:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{1}{2} \oint_{\partial S} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int_S 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{v} \cdot \int_S d\mathbf{S}$$

从而就证明的确这个曲线积分就是面矢量:

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial S} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \int_S d\mathbf{S} = \mathbf{S}$$

关于用曲线积分得到总的面矢量 \mathbf{S} 还有一种几何理解方式, 再仔细观察图2.8就会发现, 项:

$$\frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

实际上就是原点 O 出发向曲线上的一段 $d\mathbf{r}$ 连线形成的三角形面元, 它恰好是从 O 出发向曲线上的所有点引射线形成的锥面上的一个面元, 故积分就得到整个锥面的总面矢量且与曲线环绕方向恰好符合右手规则, 它也是一种特殊的以曲线为边界的面的总面矢量.

终于我们回到此前电流体系形成的磁矢势问题, 现在我们就定义一个载流 I_i 的线圈形成的磁矩(magnetic moment) 为:

$$\mathbf{m}_i = I_i \mathbf{S}_i$$

而这个电流体系形成的总磁矩就是:

$$\mathbf{m} = \sum_i \mathbf{m}_i = \sum_i I_i \mathbf{S}_i$$

那么在远场的磁矢势的领头项就是由磁矩产生的平方反比项:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

这个式子其实非常类似电流元 C 产生的磁场公式:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

但是要计算磁矩产生的磁场, 应对以上形式的磁矢势来求旋度, 计算可得:

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \quad , \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}$$

也许令人惊讶的是, 其关于 r, θ 变化的形式居然与电偶极子产生的电场的公式一致⁴.

磁矩产生的磁场具有非常重要的地位, 第一是因为任何情况下这都会是一个电流体系激发的磁场的领头项, 因为磁单极子不存在, 类似点电荷产生平方反比的电场那样的磁荷项, 由于磁高斯定律, 永远是不可能的. 磁矩的计算方式上面已经给出, 但是我们依然要指出, 将求和再还原为对提电流的积分, 可以得到磁矩的体积分算法:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV$$

而最简单的磁矩模型就是一个平面圆环, 其电流为 I , 半径为 R . 那么磁矩就是:

$$m = I\pi R^2$$

而考虑 $I \rightarrow \infty, S \rightarrow 0$ 的模型, 就构成了点磁偶极子(point dipole)的情况. 此时体系产生的磁场将严格符合我们得出的三个计算式:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r}{r^2}, \quad B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}$$

第二, 任何稳恒电流体系可以向线圈分解, 而任何线圈又可以向磁偶极子来分解. 我们把载有电流 I 的线圈所在的可定向曲面分解为无穷多无穷小的网格, 并让每一个网格都载有同样的方向的电流 I , 那么网格形成的总电流分布实际上就是原线圈的电流分布, 因为有公共边的两个网格在公共边上的电流一定恰好反向而产生的电流互相抵消, 最后只剩下最外面的一圈边界上电流被保留下来. 从而不管是产生的场还是在外场中的受力均可以用于等效原来的线圈.

磁偶极子的磁势能, 受力与力矩:

$$V = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{B}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

2.3.2 磁化强度

- 磁化强度(magnetization):

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m}$$

- 磁化强度造成的体电流与面电流分布:

$$\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}, \quad \mathbf{i}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$$

2.3.3 若干对称体系的磁场

- 无限长载流直线:

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

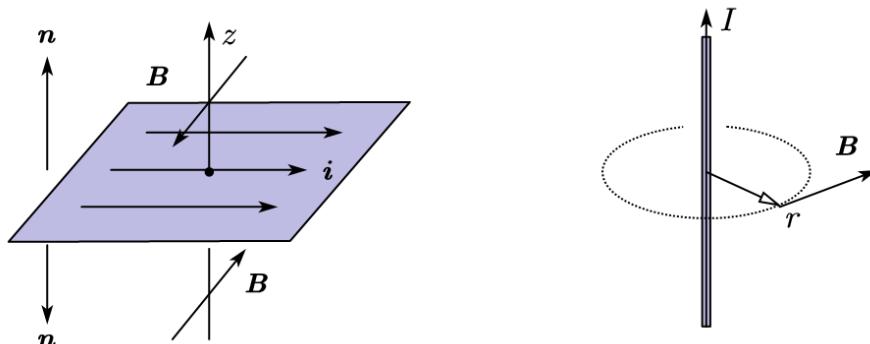


图 2.10: 无限大平面与无限长直线

⁴其实这个形式是拉普拉斯算符, 或者说, 背后的对称性导致的必然结果

- 无限大载流平面:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{i} \times \mathbf{n}$$

- 圆环: 半径为 R 的标准载流线圈轴线上磁场:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I R}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z$$

该处的径向场强可以由磁高斯定理确定:

$$\frac{1}{2} \frac{dB_r}{dr} + \frac{dB_z}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_r \approx -\frac{3\mu_0 I R z r}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

- 无限长密绕螺线管: 无论其横截面形状, 总是有:

$$B = \mu_0 i = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

2.4 磁介质与磁能

2.4.1 微观角度理解磁化

- 分子的固有磁矩: 电子自旋磁矩 + 电子轨道磁矩.
- 如果分子具有固有磁矩, 那么按照热力学规律发生取向磁化: 磁矩倾向于取与外磁场相同的方向, 宏观上产生顺磁性(paramagnetism). 类似于电介质的极化, 微观上顺磁磁化规律可以写作:

$$\bar{\mu} = \alpha \mathbf{B}$$

- 电子的磁矩与角动量的比称为旋磁比(gyromagnetic ratio), 轨道旋磁比与自旋旋磁比分别为:

$$\gamma_L = -\frac{e}{2m_e} \quad , \quad \gamma_S = -\frac{e}{m_e}$$

角动量量子化理论告诉我们, z 方向上电子轨道与自旋角动量只能为:

$$L_z = \pm n\hbar \quad , \quad S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

故 z 方向上的磁矩的单位就是著名的玻尔磁子(Bohr magneton):

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0.00579 \text{ meV/T}$$

事实上由于自旋-轨道耦合, 分子磁矩可以是玻尔磁子的分数倍.

- 原子核也有磁矩, 显然由于质子质量比质子质量大三个量级, 故根据旋磁比算法, 其磁矩也小三个量级. 虽然对分子磁矩和宏观磁化几乎没有贡献, 但是利用在磁场下形成的各个能级间跃迁吸收发射电磁辐射的原理可以造成核磁共振(nuclear magnetic resonance) 现象.
- 如果分子的固有磁矩为零, 那么在外磁场下会产生一个与外磁场反向的磁矩, 宏观上造成抗磁性(diamagnetism). 从微观来看似乎与电介质极化的方向相反, 但是从宏观效果上却与电介质削弱电场的效果相同, 这是电与磁固有的区别导致的.

- 抗磁性的微观起源为电子轨道运动的拉莫尔进动(Larmor precession). 由轨道运动产生的力矩, 角动量, 磁矩三者关系可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad , \quad \boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L} \quad , \quad \frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M} \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \mathbf{L} &= -\gamma \mathbf{B} \times \mathbf{L} = \frac{e \mathbf{B}}{2m} \times \mathbf{L} \end{aligned}$$

故在运动学上, 电子将以以下角速度发生进动:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2m} \mathbf{B}$$

电子原来的轨道运动半径如果按照玻尔半径 a_0 估计, 而角动量量级为 \hbar , 那么现在附加的角速度与原来的角速度的比为:

$$\Omega/\omega \sim \frac{ea_0^2}{2\hbar} B$$

故产生的磁矩与原来的玻尔磁子的比值的量级也与之相当, 得到磁矩的量级为:

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} \sim -\frac{e^2 a_0^2}{4m} \mathbf{B}$$

系数便是抗磁性磁化的分子磁化率的量级, 它一般比顺磁性磁化要小一到两个量级.

- 有一些金属, 或者特殊的金属化合物具有独特的铁磁性(ferromagnetism), 微观上它们由介观的包含大量原子的磁畴(magnetic domains) 构成. 每一个磁畴由于单元之间的关联已经超过了热力学的涨落而成为了决定性的因素, 使得所有电子的自旋几乎都严格指向同一个方向, 磁化达到饱和. 而材料的磁化过程其实是不同的磁畴在外磁场下的转向. 它的磁化率将远远大于简单的顺磁和抗磁磁化. 而且体现出非线性和历史相关性.

2.4.2 宏观角度理解磁化

- 出于 \mathbf{B} 和 \mathbf{M} 的旋度分别为总电流密度和磁化电流密度, 引入磁场强度(magnetic field strength) 以区别于以往一贯描述磁场的 \mathbf{B} , 一般可区别称作磁通密度(magnetic flux density):

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

这样这个矢量的旋度就只取决于外电流:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f$$

- 在顺磁或铁磁的柱状介质外绕制密绕螺线管, 那么没有介质时其磁通密度为:

$$B_0 = \mu_0 i$$

那么, 由于此时加入介质时磁化电流不影响 \mathbf{H} 的计算, 故磁场强度为:

$$H = \frac{B_0}{\mu_0} = i$$

但是磁化电流的存在将产生一个与原磁场同向的附加磁场, 使得介质内部的磁场变大, 那么定义此时磁场与原磁场的比值为相对磁导率(relative magnetic permeability):

$$B/B_0 = \mu_r$$

那么把绝对磁导率定义为 $\mu = \mu_r \mu_0$, 就有以下关系式:

$$B = \mu H = \mu i$$

$$M = (\mu_r - 1)H = \chi_m H$$

其中 χ_m 就是宏观的磁化率(magnetic susceptibility). 对于抗磁性物质, 其值是小于零的.

2.4.3 磁场能量

磁场体系的能量的计算方法可以证明可以有用电流与矢势和用能量密度两种计算方法:

$$I = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV = \int \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 dV$$

同样地, 两个体系同时存在时, 体系将产生自能与相互作用能. 如两个电感元件如果之间存在互感, 那么其总能量应当为:

$$E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

如果存在介质, 其能量密度需要加上磁化带来的能量, 能量密度变为:

$$w = \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

第三章 磁生电

3.1 电磁感应

静止电荷产生的静电场，稳恒电流产生的静磁场，这些都已经被我们研究地足够充分了。是时候，我们也该思考以下问题：

1. 如果电荷不是完全静止，静电场是否会有改变？
2. 如果电荷不是完全静止，会不会产生一个磁场？
3. 如果电流不是完全稳恒，静磁场是否会有改变？
4. 如果电流不是完全稳恒，会不会产生一个电场？

其中问题 1, 3 在我们看来已经有答案：非静止的、非稳恒的源自然要产生非静电场和非静磁场，至少产生的场需要相对元产生一定的推迟。问题 2, 4 就值得更进一步地研究。其中问题 2 的答案是可以被推理出来的，它就是下一章麦克斯韦发现的重要现象：不能单独假设只有电流会产生磁场，不然磁场的旋度将不会自洽，从而根据电荷守恒发现只需要假设电荷运动造成的变化的电场也能造成一个磁场。尽管第三点更容易被解释。但是历史地看，人们更早地得到了问题 4 的答案：变化的磁场（源于非稳恒的电流）必然造成一个新的电场，它完全独立于电荷产生的那一类电场，因为这个电场有旋度而无散度。它被称作**涡旋电场**(eddy electric field)。

在对历史上的背景做一个回顾前重新探讨一下此前概念的定义是有必要的。我们有洛伦兹力公式：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

这个表达式实际上构成了描述电场、磁场强度的量 \mathbf{E} , \mathbf{B} 的唯一操作性定义：只需要在空间中放置试探电荷 q ，并给它一个测试速度 \mathbf{v} 就可以通过受力的结果定义空间该点的电磁场。它的普遍性与协变性只能通过实验来验证，两者都是随时间变化的矢量场，且其值依赖于参考系的选取：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \xrightarrow{\mathbf{v}} (\mathbf{E}', \mathbf{B}')$$

而暂时取消关于电势与矢势的定义。很难想像如何在电场可能有旋，磁场可能有散的情形下依然承认：

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

因为我们记得梯度一定无旋，旋度一定无散：

$$\nabla \times \nabla\varphi = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

于是现在问题变成了，要研究通过此前式子定义的二分量电磁场 (\mathbf{E}, \mathbf{B}) 是如何依赖于产生它们的电荷的运动形式的（注意，后面还讲证明存在不由电荷产生的电磁场）。历史背景上最早被发现的性质莫过于法拉第电磁感应定律(Faraday's law of induction)，它的一个现代版本的表述为：

$$\oint_{\partial V} (E_x dt dx + E_y dt dy + E_z dt dz + B_x dy dz + B_y dz dx + B_z dx dy) = 0$$

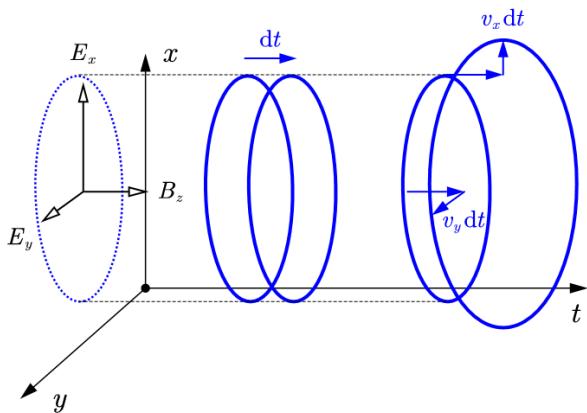


图 3.1: 法拉第电磁感应定律

其中 ∂V 表示任意一个四维时空中一个三维体的边界。而如果取这个体为一个三维空间中静止的二维曲面以一个非常短的时间间隔 dt 为高形成的柱体造成的边界，上式就变成了我们可能更熟悉的式子：

$$\begin{aligned} & \left(\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) dt + \int_{t+dt, A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} - \int_{t, A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \\ & \Rightarrow \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_A}{dt} \end{aligned}$$

这个式子被当时的诸多物理学家（法拉第，亨利，楞次等）在实验室里测量验证。它无可辩驳地证明了在变化的电磁场下，电场将会成为有旋的场，过去理论的根基无疑发生了动摇。

十分有意思的是，另一个相关的结果也同时被研究了：当我们考虑的不是一个四维空间的母线沿时间方向的柱体，而是如图3.1那样上底下底不一样（但依然垂直于时间轴）的台状体，实际上就是一个在运动的线圈（不限于平移，可以扩大缩小或任意弯曲）。设线圈边缘的速度为 v ，那么在侧面也会造成一个磁场积分的分量，上式就会变成：

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_A}{dt} - \oint_{\partial A} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ & \Rightarrow \oint_{\partial A} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_A}{dt} \end{aligned}$$

上式左侧恰好又变成了完整的洛伦兹力（单位电荷受到的）。事实上在实验室它也只能作为一个整体被测量，上式左侧其实就是实验室测得的线圈上的电动势，两项分别构成了感生电动势与动生电动势，右侧则是线圈包含的磁通量对时间的导数。从而一个更复杂但也更浅显易懂的法拉第电磁感应定律表述为：

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_{\text{transformer}} + \mathcal{E}_{\text{motional}} \\ \mathcal{E}_{\text{motional}} &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ \mathcal{E}_{\text{transformer}} &= \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

但是，法拉第电磁感应定律又不全然是实验定律，背后体现的相对论协变性是不难理解的。我们从本章的论述就会逐渐明白这一点。

3.1.1 动生电动势

动生电动势(motional electromotive force) 并不是什么新奇的现象。在静磁场下我们足以理解动生电动势，它只不过是上一章就研究过的磁场力的另一个效应，此时存在非静电力：

$$\mathbf{K} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

考虑它沿导线方向的分量对回路积分就是此前在稳恒电流章节中介绍的电动势:

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

上式经常会被表述为: 导线单位时间切割的磁感线根数. 这样的表述的合理性在于, 注意到上式中的三重标积可以化为:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v})$$

点乘后就是导线元扫过的面元, 故积分的项的确也就表示扫过的面积上的磁通量, 从而不难理解这类电动势自动就符合法拉第电磁感应定律:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

如果考虑导线中的电荷沿导线方向的另一个速度造成的电流 I , 那么其电流元就会导致一个安培力:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

一段电路动生电动势做功的功率:

$$dP_{\mathcal{E}} = d\mathcal{E} \cdot I = I(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

该功率变成了电路内部的能量. 是注意到安培力作为磁场力的另外一个分力也要做功, 功率为:

$$dP_A = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$$

这个功将转化为导线的机械能. 那么由于磁场力本质上不会做功, 这一点很容易就能够利用三重标积公式在两个功率上得到印证:

$$dP_{\mathcal{E}} + dP_A = 0$$

从而两个功率的大小代表机械能和电能转化的快慢. 对于电动机, 电能转化为机械能, 对于发电机, 机械能转化为电能.

事实上即使对于变化的电磁场, 其中磁场也是永远不做功的. 这一点从磁场的操作定义式就可以看出来, 磁场力作为速度与磁场的叉乘是垂直于速度的. 但要注意, 一般不说洛伦兹力不做功, 因为电场力也要算作是洛伦兹力的一部分, 洛伦兹力没有道理不包括电场力.

当动生电磁感应发生在一个变化的电磁场中运动的线圈上时, 根据 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 在线圈上的积分给出了整个感应电动势贡献中的一项, 实际磁通量的导数才对应总的感应电动势, 而动生电动势相当于把磁场视作常数求导得到的值:

$$\mathcal{E}_{\text{motional}} = -\left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{B \text{不变}}$$

3.1.2 感生电动势

动生电动势并没有带来新的物理现象. 但是它的结果却给我们以启示: 磁通量的改变与导线中的感应电动势有关. 那么只需要稍微思考一下另外的参考系中观察者看到的现象就不难推理出另一种感应电动势的可能.

相对性原理容易说明, 如果产生磁场的物质在发生运动以致使其发生变化, 那么即使线圈静止, 也会产生感应电动势. 那么内部电荷受到的非静电力就必然不是磁场力, 因为根据电磁场的定义:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

而现在线圈 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. 我们只能把这个力称作电场力. 这种电场称作感生电场(induced electric field). 有时, 它被理解为变化的磁场产生的, 这其实是因为在线圈看来电动势公式应该¹是:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

¹在忽略某些可能的相对论效应的意义下.

这个式子的直接推论就是:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

这个式子与电流产生磁场的数学结构相似性:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

暗示了把磁场的改变看作电场的一类源似乎是合适的, 确实从操作性上可以这么做, 甚至原来静磁学中的一切电流产生磁场的结论都可以原封不动地用来求变化的磁场下的感生电场. 但事实上, 我们还有两个更加本质的看法.

一是把感生电场看作静磁场的相对论效应, 这又和上一章静磁场开头时把磁场本身看作电场的相对论效应的做法如出一辙. 原参考系中的速度为 v_x, v_y, v_z , 而具有磁场 B_x, B_y, B_z 时受力为:

$$F_x = q(v_y B_z - v_z B_y)$$

$$F_y = q(v_z B_x - v_x B_z)$$

$$F_z = q(v_x B_y - v_y B_x)$$

这一次倒好, 我们连近似都不做了, 直接认为一个相对原系以 u 沿 x 方向运动的参考系下受力就是原系中的受力:

$$F'_x = F_x, \quad F'_y = F_y, \quad F'_z = F_z$$

用经典的速度叠加:

$$v_x = v'_x + u, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z$$

得到:

$$F'_x = q(v'_y B_z - v'_z B_y)$$

$$F'_y = -qu B_z + q(v'_z B_x - v'_x B_z)$$

$$F'_z = qu B_y + q(v'_x B_y - v'_y B_x)$$

从而由洛伦兹力公式, 的确在新参考系中产生了电场:

$$E'_x = 0, \quad E'_y = -u B_z, \quad E'_z = u B_y$$

这实际上就是:

$$\mathbf{E} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

故如果一个点相对一个稳恒电流体系以 $-\mathbf{v}$ 运动, 即稳恒电流体系相对这个点具有均匀的速度 \mathbf{v} 时, 这个点产生的涡旋电场就是:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \left(\int \frac{\mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{e}_R}{4\pi R^2} dV \right)$$

而如果电流的各个部分不一致, 由叠加原理也可以得到表达式:

$$\mathbf{E} = \int \frac{\mu_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{v}}{4\pi R^2} dV$$

我们不加证明地指出上式可以通过矢量微分的方法化简成我们马上要得到的形式, 这就是第二种涡旋电场产生的条件的理解方式: 变化的磁场事实上又由变化的电流产生. 最终连接感生电场与其源头: 变化的电流的, 是以下公式:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\int \frac{\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}}{4\pi r^2} dV$$

请注意, 我们又非常奇妙地定义了一个磁矢势。这是因为我们依然将磁场体系视作准恒(quasistatic)的。即磁场主导的情况下, 磁场场源运动速度远小于光速以至于产生的电场 $E \ll cB$ 。从而磁矢势就被“近似”定义为与静磁场一样的电流的体积分:

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}}{r^2} dV$$

唯一要注意的是, 由于 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 依赖于电流的稳恒性条件, 以至于它和 $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$ 都从原理上不再准确。将上式对回路进行积分便得到同样的感生电动势公式作为其正确性的一个验证:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

我们趁热也来看看准恒情况下关于电场电势的定义。诚然我们不能为真实的电场定义一个电势 φ 使它满足:

$$-\nabla \varphi = \mathbf{E}$$

因为此时的电场是涡旋的。但是仿照之前磁矢势的“近似”定义, 我们自然也可以自然地“近似”定义电标势为:

$$\varphi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r^2} dV$$

那么, 留下的一个矛盾就变成了:

$$\mathbf{E} \neq -\nabla \varphi$$

这也没啥古怪的, 实际上在准恒条件下“近似”成立²的一个式子为:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

这样就把电场分为了两个部分, 一个是只与每时每刻的净电荷分布有关的“静电场”分量, 一个是由电流的改变造成的“涡旋电场”分量。而电势总是定义在前者上的。

事实上我们此前稳恒电流章节大量使用到了电路中各点的电势, 在涡旋电场遍布电路中的各个支路时, 这个电势实际上也就是我们现在所阐明的电势概念。更特别地, 把 $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 视作非静电力 \mathbf{K} , 而如果电路中电荷除了受到静电力 $-\nabla \varphi$ 和非静电力 \mathbf{K} 外不受其他非静电力, 即有微观欧姆定律 $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$, 在准恒或稳恒的条件下对支路进行积分, 就得到了部分电路的欧姆定律:

$$IR = \Delta\varphi + \mathcal{E}$$

如果将上式乘以电流, 就得到能量等式:

$$I^2 R = UI + \mathcal{E}I$$

尤其是对回路而言, 电压一圈下来没有改变:

$$I^2 R = \mathcal{E}I$$

那么其焦耳热来源为感生电磁感应的电动势对电流的做功 $\mathcal{E}I$ 。因为是电场所以是可以做功的。但是其实这个感生涡旋电场本身作为磁场变化的产物而能量远低于磁场能量, 所以其实最终能量来自于磁场里的能量。下一章我们将讨论电磁场整体的能量。现在不妨这么想: 涡旋电场对感应线圈上的电流做了功, 那么就必然存在运动的场源电流, 而它们又置身于感应线圈上的电流产生的磁场中, 从而移动它们需要外力做额外的功, 很多情况下正是这个功在补偿从磁场中通过电磁感应漏向电场的能量。

²例如让体系以小量角频率 ω 发生振动, 那么下式在 ω 一阶下精确。

当感生电磁感应发生在一个变化的电磁场中运动的线圈上时, 根据 $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 在线圈上的积分给出了整个感应电动势贡献中的一项, 实际磁通量的导数才对应总的感应电动势, 而感生电动势相当于把线圈视作不动求导得到的值:

$$\mathcal{E}_{\text{transformer}} = -\left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{A \text{不变}}$$

将感应电动势的动生和感生部分合并, 得到完整的法拉第电磁感应定律:

$$\mathcal{E} = -\left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{B \text{不变}} - \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{A \text{不变}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

3.2 自感与互感

- 自感定义与自感系数公式:

$$\Psi = LI \quad , \quad L = \frac{\mu N^2 S}{l}$$

- 两线圈互感时的相关公式:

$$E = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + MI_1 I_2$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= L_1 I_1 + MI_2 \quad \Rightarrow \quad U_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ \Psi_2 &= L_2 I_2 + MI_1 \quad \Rightarrow \quad U_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \\ U_1 I_1 + U_2 I_2 &= -\frac{dE}{dt} \end{aligned}$$

第四章 麦克斯韦方程组

4.1 麦克斯韦方程组

4.1.1 电生磁

磁荷不存在,为电磁学规律带来了充分的简化.但是目前我们发现的三种现象:静止电荷产生电场,稳恒电流产生磁场,变化电流(通过产生变化的磁场)产生涡旋电场,并不是电磁学客观规律的全部.前两章我们已经充分说明,后两种现象其实都是相对性原理的后果.在一个参考系内不变的电荷分布,必将在另一个参考系看来产生电流,稳恒电流也会因为在另一个参考系而随时间变化,从而在一个参考系中纯粹的电场可以在另一个参考系内引发磁场和涡旋电场.电磁学的最后一项现象,由麦克斯韦(J. C. Maxwell)在1861提出的,位移电流产生磁场的现象,在某种程度上也由相对性原理引发.我们之后就可以发现这一点.

一切的源起,在于麦克斯韦对安培环路定律普遍性的质疑.我们不能认为在变化的荷与场的情况下,磁场的安培环路定律具有普适性.它写作:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

为何质疑?考虑一个电容器不断充电的过程,如图所示.我们可以认为在距离电容较远的某点处,取一个垂直于导线的半径足够小的圆盘 S_1 后,边界环路上的磁场与导线上的电流之间符合安培环路定律的关系.但是注意到如果我们选择一个兜状的面 S_2 时,它的边界可以与圆盘边界完全一致.但是由于它把导线和一个极板完全兜住,故这个面上完全没有电流.从而就不能认为这个面和它的边界符合安培环路定律!至少, S_1 和 S_2 绝对不可能同时符合安培环路定律!这是因为,等号左侧这两个面边界上具有同一个磁场的环路积分,但是等号右侧却是不一样的电流通量: S_1 上为导线电流 I 而 S_2 上为零.两个等式是不可能同时成立的.

但是空间中的磁场又的确是客观存在的,而不是虚无缥缈的辅助物理量,我们依然可以通过对带电粒子受到的洛伦兹力的要求来确定空间中某处的磁场值:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

那么如何寻找这种情况下正确反映磁场计算方法的公式?麦克斯韦做到了这一点,而他的做法其实可以被简单的归纳为三点:

逻辑上要求自洽,数学上发展工具,哲学上遵从吝啬原则(law of parsimony)¹.

首先第一点,安培环路定律从逻辑上已经不能自洽了,所以必须修改它,一个合理的想法是为它增添一项:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + (?)$$

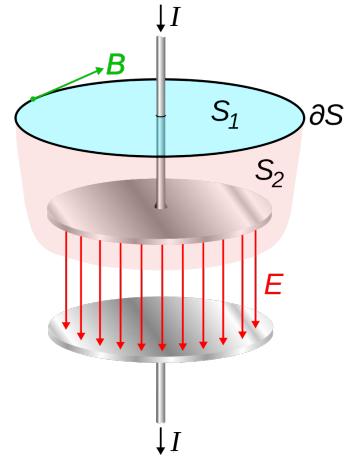


图 4.1: 修正安培环路定律

¹ 又做奥卡姆剃刀 (Occam's razor): 如无必要,勿增实体. 认为基本规律的不同表述之间越简单的描述约能反应基本规律的本质.

增添这一项的目的就是为了能避免如之前电容器充电情况下的矛盾情况的发生. 事实上电容器充电的例子就提供了修改之后的表达式是否正确的试金石.

为了找到这个项, 矢量微分工具就发挥了不可替代的作用. 使用微分形式以上积分等式写作:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + (?)$$

再两边同时取散度, 左边数学上一定变成零, 从而得到添加的项需要符合的条件:

$$\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \nabla \cdot (?) = 0$$

再注意到电荷电流符合连续性方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

从而得到:

$$\nabla \cdot (?) = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

为了实现这一点, 最简单的一种可能性为:

$$(?) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

这是因为电场的散度就会回到电荷:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

但是我们注意到, 使得之前的要求成立的添加项 (?) 不是唯一的, 事实上在刚刚的结果上添加任意一个矢量场的旋度都不改变其散度的值:

$$\nabla \cdot \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{F} \right) = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + 0$$

于是最后一个思想就发挥了作用: 如无必要, 勿增实体. 往往简单而自洽的形式就能反映真实的物理规律. 从而麦克斯韦就利用这样的推理得到了修正的安培环路定律:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

同时麦克斯韦提出了以下视角去解释以上式子背后的物理图像: 我们定义位移电流(displacement current):

$$\mathbf{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

那么我们的工作可以归纳为一句话: 通过引入虚构位移电流, 导致与真实电流的和形成一个没有散度(即连续)的电流场:

$$\nabla \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{j}_d) = 0$$

举例来说, 在之前的电容器充电的场合下, 如果忽略电容器的边缘效应, 那么从上方往下通过的电流为 I 时, 电容器上积累的面电荷密度 σ 的增长为:

$$I = \dot{\sigma} S$$

从而电容内部的场强就会随之增长:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \dot{E} = \frac{I}{\varepsilon_0 S}$$

从而把电场的导数视作位移电流的话, 造成的总电流就是:

$$I_d = j_d S = \varepsilon_0 \dot{E} S = I$$

从而实际上补充位移电流后电流并没有在电容器极板上中断,这样也就不会造成之前电容器上不同面上电流不同而造成的矛盾情况.

如果认为补充这一项后形成的新安培环路定律具有在任意变化的电磁场下的普适性,我们可以发现,这样的一条规律在数学形式上具有与感生电场规律具有某种“对称性”.尤其是当空间中某处没有通过实际电流时,此时两条规律分别为:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

即,变化的磁场(部分来源于变化的电流分布)会产生电场,变化的电场(部分来源于变化的电荷分布)会产生磁场.

我们曾经解释过第一个式子,它实际上可以解释为动生电动势现象的相对论效应.即在一个参考系中的磁场会在另一个参考系中招致电场:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

而一个参考系中的电场在另一个参考系中招致磁场这样的对称行为,实际上我们在之前静磁学章节中建立毕奥-萨伐尔定律时就已经有介绍过,得到的结果为:

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}$$

这就不难看出两者之间的对称性来.而第一个式子,我们通过一个参考系中的动生电动势与另一个参考系中的感生电动势都与法拉第电磁感应定律相联系的思路,就推出了电场的旋度公式:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \Rightarrow \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

注意到系数 $1/c^2$ 实际上就是 $\mu_0 \epsilon_0$,完全仿照这个过程,我们也能得到磁场的环量也将等于电通量的导数,即对应有:

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \Rightarrow \oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

所以至此我们可以总结:电磁学的所有规律,都可以看做唯一一个规律:即库仑定律,在相对论原理下分化出来的丰富变式.

4.1.2 麦克斯韦方程组

将四个规律:电荷产生电场,电流产生磁场,变化的磁场产生电场,变化的电场产生磁场组合到一起,就得到了麦克斯韦方程(Maxwell equations),实际上指以下方程组²:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

它完整而全面地描述了场与荷之间的关系.在之前的观点中,我们认为电荷是因,场是结果.这种观点之后将不再适用,这是因为在数学形式上,变化的电场和磁场可以互相产生,之后我们利用这一点能找到完全

²但是其实这四个方程是一个整体,正如电磁场本身应当视作一个整体对待

脱离电荷存在的电磁波解. 而完整的电磁理论实际上只需要再配合电场磁场本身的定义, 即洛伦兹的力公式:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

然而, 同样的一个现象 (电荷与场之间的相互作用) 可以有不同理论来描述. 力学我们就曾经介绍过牛顿经典力学体系和尝试过分析力学的可能性. 静电学和静磁学中, 电场和磁场不仅可以由场强来描述, 我们也研究了由势来描述的可能性. 当时的势与电荷的关系是比较简单的:

$$\varphi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \rho dV , \quad \mathbf{A} = \int \frac{\mu_0 j}{4\pi r} dV$$

那么能不能为变化的电磁场整体采取一个用势来描述的方法? 至少以上两个式子应当被摒弃, 因为他们只描述了电荷直接产生的电场与电流直接产生的磁场. 而我们知道变化的电荷与电流可以交叉地产生磁场和电场. 事实上之前成立的以下两个描述势与场强之间关系的式子也应当考虑摒弃:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

后一个式子不会招致明显的矛盾, 因为即使在变化电磁场下, 依然有:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

故无需添加新项即可成为恒等式.

矛盾集中体现在第一条上. 两边同时取旋度就能看出其中的不妥之处:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla\varphi$$

其中左侧根据麦克斯韦方程, 它等于磁场的对时间变化率, 它不需要为零. 但是右侧根据数学规律它必然为零. 这就造成了矛盾.

解决这个问题的核心思想, 其实与麦克斯韦发现位移电流的思想完全一致. 我们添加一个项以使得矛盾消除, 以相同的思路推理, 过程留给读者, 可得这个项为:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

这一点本身又不难理解. 我们知道完整的电磁理论有四个要素, 在最低阶的近似下之前的式子反映了电荷直接产生电场与电流直接产生磁场的要素. 那么我们添加的项实际上反映了变化的电流产生电场的要素: 因为磁矢势由电流产生, 那么它的导数自然反映了变化的电流, 而它构成了电场的第二项.

而变化的电荷产生磁场, 它不会在新的场与势的关系式中体现, 这是因为这样的改变直接同时改变了 \mathbf{B} 和 \mathbf{A} 的值. 前者通过位移电流, 后者之后介绍. 从而使得 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 依然成立. 从而我们总结出任意情况下描述电磁场的标势和矢势需要符合的关系:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

但是, 接下来我们会引入一个惊人的不确定性: 其中的端倪在静电静磁学中其实已经出现苗头: 电势, 具有一个整体常数的不确定性, 这是因为电势的零点选取其实本质上是任意的, 以下变换后产生的标量场依然可以作为电势:

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + C$$

只有进一步规定无穷远处的电势为零才能回到之前点电荷积分的电势公式:

$$\varphi(\infty) = 0$$

而静磁场的情况则更具有戏剧性: 我们之前通过电流元直接积分产生的磁矢势其实符合以下性质:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

当然以上两个结果都还要求势不随时间改变, 比如:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

如果仅仅希望能通过磁矢势的旋度计算磁场 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, 即使进一步要求 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, \mathbf{A} 的取法其实也不唯一. 可以证明, 如果找到所谓的三维调和函数, 即在全空间满足以下规律的标量场:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

常数就属于调和函数, 除此之外我们还能举出很多的例子:

$$\phi = x, x^2 - y^2, xy, x^2 + y^2 - 2z^2, e^x \sin y, \dots$$

那么任意找一个调和函数梯度形成的矢量场:

$$\mathbf{F} = \nabla \phi$$

那么不难看出这个场就会符合:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

从而以下对磁矢势的变换就可以在不改变对磁矢势的要求下, 造成同一个磁场:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \& \quad \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

我们从其中归纳出两个概念. 一是我们要求电势和矢势根据具体问题不同选取不同的条件, 上面过程中出现的各种要求就有:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0 \\ \varphi(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

这些称作**规范条件**(gauge condition). 或者简单称作**规范**.

但是, 即使存在规范条件, 例如静磁场下要求 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 或者进一步放宽干脆没有任何规范条件的限制, 我们发现电势和矢势其实不是位移确定的, 同样的一个电磁场, 在下式成立的条件下:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

势 φ, \mathbf{A} 存在不同的取法, 普遍来说, 存在以下**规范变换**(gauge transformation):

$$\varphi' = \varphi + \phi, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{F}$$

它能使得在特定规范下虽然描述场的势改变, 但是它不反映场的真实改变. 即同一个场对应多种相差规范变换的势的取法. 这种现象称作**非物理自由度**(nonphysical dof.). 它深刻反映了标势矢势不能直接反映可测量的物理量的实质, 正似我们在经典力学中一贯强调的势能的道理: 其本身绝对大小没有可测量的意义, 可以测量的是其在过程中的变化, 它才有实际物理意义. 但是, 对于标势矢势的哪一部分具有实际的物理意义还有待之后进行考察. 选取更多的规范可以消除势的不确定性, 这种操作称作**规范固定**(gauge fixing).

这就不难理解在普遍的电磁场方程中, 同样也存在着标势和矢势的不确定性. 更有甚者, 正如电场强度和磁场强度是描述同一个电磁场的两个侧面, 那么标势和矢势也是描述同一个电磁场的两个侧面, 两者的不确定性甚至是互相联系的. 如果没有任何实现假定的规范条件, 我们发现选取任意的随时间变换的标量场做变换:

$$\forall \phi = \phi(\mathbf{r}, t)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \phi}{\partial t} , \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \phi$$

可以发现它不改变通过之前式子计算的电场和磁场的强度. 从而这是一个非常普遍的规范变换.

而对于普遍的电磁理论, 它也是囊括静电学和静磁学的普遍情况的. 可以想见, 在不同的规范条件下就会产生不同的势. 例如对于静电学, 之前我们通过标势来描述电场, 这一点就不是必然的. 如果选取所谓的外尔规范 (Weyl gauge):

$$\varphi = 0$$

那么电场就必须全权由矢势 \mathbf{A} 来描述, 但这一点也毫无难度, 只需要取:

$$\mathbf{A} = - \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \mathbf{e}_r}{r^3} dV \cdot t$$

这就足以使得:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \mathbf{e}_r}{r^3} dV , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

事实上, 外尔规范是在研究磁现象占主导地位时常采用的规范, 此时电磁场整体都单由矢势 \mathbf{A} 来描述, 电场可以形象地视作由矢势变化产生的“感生电场”. 而在电现象占主导地位时, 更常采用库仑规范 (Coulomb gauge):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

可以证明这样做带来的好处是标势的计算变得很简单: 只需要把电磁场和势之间的关系代入麦克斯韦方程, 我们得到两个恒等式和以下两个联系势和电荷电流的复杂关系式:

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \nabla\varphi}{\partial t} = -\mu_0\mathbf{j}$$

代入规范条件, 首当其冲地我们发现: 第一个式子变成了:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

这和静电学中的公式一致. 从而电势可以完全按照静电学的方式来计算, 它产生一个静电场. 而矢势则用来计算电荷分布变化带来的附加磁场和更高阶的感生电场.

但是, 除了静电或静磁现象占主导地位的两种情况, 我们之后研究的最多的是第三种情况: 那便是辐射占主导地位的情形. 此时无论是电荷密度或是电流密度, 要么其量级远远达不到辐射场对应的大小, 要么就是在一周期内平均值为零从而净效应很弱. 在这一类情况下, 使用的最多的是所谓的洛伦茨规范³ (Lorenz gauge). 写作:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

这个神奇的条件使得之前描述势和电荷之间的关系变得非常简单, 背后原因在于可以证明这个条件也是唯一的在相对论变换下不同参考系内形式一致的规范条件. 在这个规范下:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j}$$

这实际上构成了带非齐次项的波动方程. 一般称作达朗贝尔方程 (d'Alembert equations).

由于其最为简洁而普遍的形式. 我们之后的讨论都将以洛伦茨规范为默认规范, 并在以上达朗贝尔方程和关于荷与场强的麦克斯韦方程, 以及用势计算场强的关系式基础上展开讨论.

³这里的洛伦茨 (L. V. Lorenz) 不同于洛伦兹 (H. A. Lorentz), 前者为丹麦物理学家, 后者为荷兰物理学家

4.1.3 电荷在电磁场中的运动

在静磁学中我们简要介绍了磁矢势对于电荷与磁场相互作用的物理意义。电势为引入场的试探电荷带来相互作用的电势能。而磁矢势的改变似乎会改变试探电荷的某类动量。通过之前的讨论，我们发现电势和矢势其实内部具有非物理的自由度，从而并不总是为试探电荷带来可以直接观测的物理量，之前的电势带来电势能的情况，其实仅仅是特殊情况下成立的结论，并不具有普适性。

但是电势对应电势能的推导思路是依然可以借鉴的：我们考虑了洛伦兹力的功，并把电磁场用势来表示，依然这么做给出：

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} \\ &= q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \\ &= q\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

我们考虑两个关系，其一为：

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi$$

其背后的道理我们在力学中阐释过：第一项为电荷运动过程中达到的点具有的电势的全导数，它由不考虑电荷位移时电势随时间的局部导数和不考虑电势本身随时间改变而仅考虑随电荷位移导致的电势改变的随体导数项合成。

第二个关系为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$$

背后的道理为：当我们考虑 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ 整体作为时空 r, t 的函数时， \mathbf{v} 被我们视作了外来的参变量而不是时空的函数，从而能够从偏导数符号中提出。

通过这两点，我们得到了：

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -q\frac{d}{dt}\varphi + q\frac{\partial}{\partial t}(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

而左侧应当是电荷动能 T 的变化率。那么这就给出了：

$$\frac{d}{dt}(T + q\varphi) = \frac{\partial}{\partial t}q(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

事实上，单纯从洛伦兹力公式出发：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

考虑到等号左侧为粒子动量 \mathbf{p} 的变化率，我们也可以通过推导（静磁场那一章我们推导过没有电场的对应结果）给出以下式子：

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} + q\mathbf{A}) = -\nabla q(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

这两个结论引出了三组物理概念：

一是隶属于能量的概念： T 为动能， $q\varphi$ 现在可称作电磁势能。而其和 $H = T + q\varphi$ 应当称作广义能量。

二是隶属于动量的概念： \mathbf{p} 为动量， $q\mathbf{A}$ 就是我们新发现的一个物理效应，事实上磁矢势的物理意义可以理解为与位置有关的存储于场中的粒子的动量，称作电磁势动量。而机械动量 \mathbf{p} 与势动量 $q\mathbf{A}$ 的和 $\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$ ，称作广义动量。

事实上大家已经发现，这种称呼其实就是来源于分析力学中的相应理论架构，事实上电磁场中的电荷运动这一个实例我们之前分析力学正是以它举过例子，读者可以对照着理解。故其实我们还可以把 $H = T + q\varphi$ 称作哈密顿量(hamiltonian)，而 $\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$ 称作正则动量(cannonical momentum)。

最后还有一个概念，它出现于之前两个等式的右侧，它也是一种势能函数，但是并不对应真实能量，而是出现在电荷运动的拉格朗日量中作为势能函数。这个项称作广义势：

$$V = q(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

其表达式中反常地出现了粒子的速度, 是一种速度势.

以往出现的守恒律与对称性现在就在这两个表达式中体现的淋漓尽致:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\nabla V$$

举例来说: 静电场中带电粒子的运动, 粒子总能量守恒; 静磁场中带电粒子的运动, 粒子干脆动能都不改变. 这都是源于广义势不随时间改变 (时间平移对称性导致能量守恒). 而在静磁场问题中还经常出现某方向动量与某个关于位置的函数的和守恒的情况, 究其本质是因为合理选取规范后, 磁矢势 \mathbf{A} 和电势 φ 都与某个位置坐标无关 (空间平移对称性导致动量守恒).

4.2 平面电磁波

4.2.1 真空中的电磁波

自由空间中的麦克斯韦方程:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

也可以用势来描述, 此时达朗贝尔方程直接变成波动方程:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

注意背后要求洛伦茨规范成立:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

十分使得注意的是, 以上所有的方程, 作为齐次方程, 是具有非零解的. 最典型的解为平面波解:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\varphi = 0$$

$$\frac{E_0}{B_0} = c \quad , \quad \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0 \quad , \quad \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{k}$$

$$\mathbf{E}_0 = -i\omega \mathbf{A}_0 \quad , \quad \mathbf{B}_0 = -ik \times \mathbf{A}_0$$

$$\omega/k = c$$

4.2.2 介质中电磁波的传播

注意在介质中,不能再仿照真空中的电磁波传播公式而写出齐次的麦克斯韦方程.这是因为介质内部完全可以存在电荷和电流,从而计算电场磁场的散度旋度时必然需要考虑到他们.但是我们此前研究过的电介质和磁介质的理论告诉我们,通过引入位移 \mathbf{D} 和磁场强度 \mathbf{H} ,可以有效地规避掉由介质产生的电荷和电流造成的电场散度和磁场旋度,即:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

对于第二式可能需要更多的说明:我们知道如果在静磁学磁介质问题中,如果把总电流密度 \mathbf{j} 分解为磁化电流密度 \mathbf{j}_M 和自由电流密度 \mathbf{j}_f ,那么磁场旋度公式写作:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 \mathbf{j}_M + \mu_0 \mathbf{j}_f$$

以往的做法是将磁化电流归因于磁化强度的不均匀性 $\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}$,并进一步定义 $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$,这样就给出:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f$$

但是现在作为自由介质 $\mathbf{j}_f = 0$.然而又由于是变化的电磁场,故磁场旋度需要增添电场变化带来的项.还有一点需要引起注意:极化强度 \mathbf{P} 的变化也会带来一个极化电流密度 \mathbf{j}_P ,它应当为:

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

对比极化电荷密度 $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 与极化电荷的连续性方程就不难理解这个式子.另外引人注目的一点是,这个电流与极化强度的关系完全类似与位移电流与电场强度的关系.如果做求和就会变成电位移的导数,这正是麦克斯韦当初把电场强度的导数称作“位移电流”的原因.

现在修改之后的磁场旋度写作:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}_M + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

最后两项十分恰好地凑出了电位移 \mathbf{D} .从而整理就得到了介质中修正的齐次磁场旋度公式.

在普遍的介质中的麦克斯韦方程就写作:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

在这里介质兼具电与磁的特性,这表现在以下两个用于描述介质的结构方程上:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{E}$$

其中 ε, μ 称作介质的电容率和磁导率.它们,超出我们以往的认知的是,往往是复数⁴.这一方面来自于微观极化和磁化机理上的弛豫,我们之后物理光学还将进一步研究这个问题,还有一方面来自于一个非常直接的原因:我们综合了不导电的电介质和磁介质,却忽视了介质本身完全可能导电的情况.对于导电性能较

⁴非各向同性介质中甚至抽象为复张量

差的情形,比如漏电的介质,考虑传导电流 j_c 实际上就是自由电流,那么磁场旋度的方程还需要被进一步修改为:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

如果是考虑单一频率的电磁波,那么对时间求导的操作必然转变为乘 $i\omega$. 如果介质电导率为 σ ,那么可以把等号右侧进行以下变形:

$$j_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + i\omega \varepsilon \mathbf{E} = i\omega \left(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} = i\omega \mathbf{D}' = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t}$$

这样就通过定义**复电容率**(complex permittivity):

$$\varepsilon' = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega}$$

实现了把传导电流也吸收进了电位移中,造成了形式上的统一. 代价是电容率和相关的其他所有物理量都需要理解为复数.

这样的做法对于漏电绝缘介质是完全适用的. 但是对于导电性能非常好的导体介质中电磁波的传播,最好是单独建立新的处理方法. 有兴趣的读者可以阅读其他相关书籍. 我们指出,我们统一用复数描述不同情况下介质中电磁波传播的做法,从之后的结果上来看是符合事实的.

把介质的两个结构方程代入介质的齐次麦克斯韦方程,就得到了均匀介质中一般形式的麦克斯韦方程,习惯上总是以 \mathbf{E}, \mathbf{H} 作为变量:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

这两个方程具有高度的对称性,其解也与真空中的解相似,只有两点发生了改变,一是传播速度变为:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

这一点建立在 ε, μ 都是实数的基础上. 如果出现复数的情形,那么上式一般写作:

$$k = \sqrt{\varepsilon \mu} \omega$$

即此时将出现复波矢的情况. 意味着电磁波在介质中的传播伴随着耗散与衰减.

第二点就是电场磁场振幅强度的比例. 真空中这个比为 c ,现在由以下等式描述:

$$\varepsilon E_0^2 = \mu H_0^2$$

对于所谓**良导体**(good conductor) 的情况,电导率 σ 特别大,以至于使得复电容率 ε' 中反倒是与电导率成正比的虚部远大于反应介电的实部. 那么电磁波在良导体中的传播就存在严重的衰减. 此时有两个结论:

第一是对电磁场比值的公式,取 $\varepsilon' \rightarrow \infty$,就能发现:

$$E_0 \rightarrow 0$$

即良导体中类似于静电平衡情况下的导体,内部电场是非常微弱的. 磁场相对电场虽然很大,但是也需要迅速沿传播方向衰减.

第二是 k 的公式有以下渐进关系:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \sim k \propto \sqrt{\frac{1}{\omega}} \cdot \omega = \sqrt{\omega}$$

即随着频率升高,传播与衰减的特征距离 λ 将越来越小. 这意味着高频交流电路中电流仅仅集中于导线表面薄薄的一层,会减小导线的有效截面积而增大线路损耗. 这个现象称作**趋肤效应**(skin effect).

4.3 电磁场能量与动量

真空中电磁场的能量密度为:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}^2$$

能流密度, 即著名的坡印亭矢量(Poynting vector) 为:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

而动量密度与能流密度紧密联系:

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$$

4.4 电磁波辐射

4.4.1 电磁辐射概论

麦克斯韦方程实际上描述了两类现象:

一类我们已经通过之前所有章节逐一学习. 表面上看包括静止的电荷产生电场, 稳恒的电流产生磁场, 变化的电荷分布与电流分布产生感应的磁场和电场四类. 但是其实无非都是第一类由库仑定律描述的基本规律在相对论变换下的衍生物. 在这一大类现象中, 场始终都是电荷的附庸, 基本的逻辑是先有荷, 再有场. 空间分布上, 场源电荷对远方的场的支配量级服从平方反比律.

通过本章的推理我们逐渐看到第二类截然不同的图像存在的可能性. 它诞生于同一个麦克斯韦方程, 但是故事不再由电荷主演, 主角阵容中新增了一颗闪亮的明星: 辐射场(radiation field). 平面波实际上就是形形色色辐射场中最单纯的一种. 显然, 它可以独立于电荷而存在. 但是依然, 电荷也愿意主动参与进麦克斯韦方程搭建的舞台中, 与辐射场这样的强势主角又将擦出怎样的火花? 简单来说, 我们将得到以下两个新的现象:

电荷发出辐射, 电荷吸收辐射.

凭借电荷吸收辐射的可能性, 第二类电磁现象也与第一类现象区分开来. 更何况电荷激发辐射场的空间分布也区别于第一类现象, 在辐射情形下, 远方的场是一次反比的. 这一点之后就能发现.

最后我们针对电荷发出辐射与吸收辐射的条件进行推理: 静止的点电荷产生静电场, 匀速运动的点电荷产生一个静电场的相对论变换, 这是毫无疑问的事实. 在这些场合下没有辐射场的产生.

所以, 显然电荷做加速运动是电荷激发辐射场的必要条件.

实际上, 电荷做加速运动其实即使就是电荷激发辐射场的充要条件, 我们之后就能给出电荷辐射场与辐射功率与其加速度的直接联系.

那么如何看待电荷吸收辐射的过程?

事实上这个过程可以看做电荷发射辐射的时间反演. 麦克斯韦方程具有明确的时间反演对称性, 只需要令 $t \rightarrow -t, \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}, \mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$. 其他量不改变就可以看出这一点. 辐射作为麦克斯韦方程的解, 其时间反演解自然也是合理的. 但需要注意先后发生的两件事总是存在因果的区别, 故时间反演后, 因果关系需要重新解释, 两个物理现象需要理解为不具有相通性⁵的独立现象. 我们可以举一个电荷吸收辐射的例子: 考虑电子的经典模型: 将一个平面电磁波照射到真空中的自由电子上, 那么电子就会在周期性的电场力(速度不大时磁场力可忽略)作用下做简谐振动, 那么根据下一小节的内容我们将知道, 电子会以一定功率向四面八方产生辐射场. 那么根据能量守恒, 电子必然是从原来入射的平面波中吸收了能量, 即平面波在一个周期内对电子做净的正功. 这种先吸收再辐射的行为就称作散射(scattering), 而以上经典的处理方法构成托马斯散射模型(Thomas scattering model). 而散射的总功率, 对应了原来平面波面积为 σ 范围内通过的功率. 这个面

⁵例如, 不能通过洛伦兹变换来颠倒因果.

积称作**散射截面**(scattering cross section). 经典理论计算结果为:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

其中 r_e 就是由洛伦兹提出的**经典电子半径**(classical electron radius):

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$$

4.4.2 偶极辐射

通过点电荷产生的电势公式, 我们知道, 数学上以德爾塔函数作为泊松方程的非齐次项的解为一次反比势:

$$\nabla^2 \varphi = -\delta(\mathbf{r}) \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi r}$$

数学上容易猜想并证明, 如果将方程替换为达朗贝尔方程, 而如果将非齐次项以 ω 的角频率产生振荡, 那么这个新的方程的解应当变为球面波:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \Rightarrow \varphi = \frac{e^{i(\omega t \pm kr)}}{4\pi r}, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

对于两个可能的解, + 数学上表示内行球面波, - 数学上表示外行球面波. 两个解在时间反演下对称. 目前我们在因果性上是考虑电荷体系的自发辐射, 故考虑负号的外行波解.

现在考虑一个这样的体系: 两个无限小的导体球用长为 l 的导线连接, 第一个球位于 $x = \frac{l}{2}$ 处, 第二个导体球位于 $x = -\frac{l}{2}$ 处. 由于两个球发生了 LC 振荡, 第一个球上电荷量为 $q_+ = q \cos \omega t$, 第二个球上电荷量为 $q_- = -q \cos \omega t$. 那么导线上的电流为 $I = -\omega q \sin \omega t$. 如果换成复数记法, 把实际值看做复数的实部, 则:

$$q_+ = q e^{i\omega t}, \quad q_- = -q e^{i\omega t}, \quad I = i\omega q e^{i\omega t}$$

定义从第二个球指向第一个球的矢量为 \mathbf{l} . 那么此时标势和矢势符合的达朗贝尔方程就写作:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{q}{\epsilon_0} \delta\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2}\right) e^{i\omega t} + \frac{q}{\epsilon_0} \delta\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2}\right) e^{i\omega t} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -i\mu_0 \omega q l \delta(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

那么标势和矢势的解就根据之前的数学结论得到:

$$\begin{aligned} \varphi &= e^{i\omega t} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{l}}{2}|}}{|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{l}}{2}|} - e^{i\omega t} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}+\frac{\mathbf{l}}{2}|}}{|\mathbf{r}+\frac{\mathbf{l}}{2}|} \\ \mathbf{A} &= e^{i\omega t} \cdot \frac{i\mu_0 \omega q l}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \end{aligned}$$

这样的解称作**推迟势**(retarded potential) 解. 而对于电势可以进一步在足够远 $r \gg l$ 处进行小量近似, 我们不再考虑两项分母的区别, 这只会带来类似于电偶极子远方的电势那样的平方反比的高阶小量. 而主要关注分子的差:

$$\begin{aligned} e^{-ik|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{l}}{2}|} - e^{-ik|\mathbf{r}+\frac{\mathbf{l}}{2}|} &\approx \frac{de^{-ikr}}{dr} \cdot \left(\left| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2} \right| - \left| \mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2} \right| \right) \\ &\approx ik l \cos \theta e^{-ikr} \end{aligned}$$

其中 θ 为 \mathbf{r} 方向与 \mathbf{l} 的夹角. 则在以 \mathbf{l} 方向为极轴的球坐标下, 写出近似后的标势与矢势:

$$\begin{aligned} \varphi &= e^{i(\omega t - kr)} \cdot \frac{ikql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \\ A_r &= e^{i(\omega t - kr)} \cdot \frac{i\mu_0 \omega ql \cos \theta}{4\pi r}, \quad A_\theta = -e^{i(\omega t - kr)} \cdot \frac{i\mu_0 \omega ql \sin \theta}{4\pi r} \end{aligned}$$

最后再由势与场之间的关系:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

忽略超过一阶反比于半径的项, 就最终得到了电磁场的表达式:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_\theta \mathbf{e}_\theta, \quad E_\theta = -\frac{\omega^2 q l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} e^{i(\omega t - kr)} \\ \mathbf{B} &= B_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad B_\varphi = -\frac{\omega^2 q l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} e^{i(\omega t - kr)} = \frac{E_\theta}{c}\end{aligned}$$

从而取实部, 计算瞬时能流密度为:

$$S = \frac{\omega^4 q^2 l^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \cos^2(\omega t - kr)$$

在一个周期内的平均辐射能流为:

$$\bar{S} = \frac{\omega^4 q^2 l^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2}$$

最后计算全立体角内的总辐射功率:

$$P = \int_0^\pi \bar{S} \cdot 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\omega^4 q^2 l^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

考虑到辐射等价于由两个电荷量恒定, 但在 $\pm l/2$ 范围内做简谐振动, 加速度振幅为 $a = \omega^2 l/2$ 的电荷共同贡献. 那么每一个电荷加速度幅值 a 对应的辐射幅值为:

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

这就是著名的拉莫尔公式(Larmor formula).

第五章 交流电路

5.1 相量表示

5.1.1 拟稳条件与交流元件

- 拟稳条件: 一是忽略传输线上的推迟, 即传输线的分布电容电感电阻电导都被忽略, 如果不忽略同一导线两端电流就会不一致且导线将分去电压. 二是忽略元件内部的推迟. 不忽略会导致元件非理想.
- 拟稳条件对应数学表述:

$$\lambda \gg l \quad , \quad T \gg \frac{l}{c}$$

- 交流电路瞬时值描述: 每一瞬时类似直流电路, 但是电压电流在变化:

$$u = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

直流电路中的图, KVL, KCL 均成立. 但是多了电容电感两种元件, 其特性之后介绍.

- 有效值:

$$U = U_0/\sqrt{2} \quad , \quad I = I_0/\sqrt{2}$$

有效值存在意义是为了直接算平均功率:

$$P = I^2 R = U^2 / R = UI$$

- 交流电路的相量描述:

$$\tilde{U} = U e^{j\varphi_u}$$

$$\tilde{I} = I e^{j\varphi_i}$$

5.1.2 电阻, 电容, 电感特性

- 复阻抗:

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}$$

两种分解方法:

$$\tilde{Z} = |\tilde{Z}| e^{j \arg \tilde{Z}} = Z e^{j\delta}$$

Z 称为阻抗, δ 为余损耗角.

$$\tilde{Z} = R + iX$$

R 称为电阻, X 称为电抗.

- 复导纳:

$$\tilde{Y} = \frac{\tilde{I}}{\tilde{U}}$$

两种分解方法:

$$\tilde{Y} = |\tilde{Y}| e^{j \arg \tilde{Y}} = Y e^{j\delta}$$

Y 称为导纳, δ 为余损耗角.

$$\tilde{Y} = G + iB$$

G 称为电导, B 称为电纳.

- 电阻

$$\tilde{Z} = R$$

- 电感

$$\tilde{Z} = j\omega L$$

$Z_L = \omega L$ 为感抗. 任何阻抗若电抗为正称为感抗.

- 电容

$$\tilde{Z} = -\frac{j}{\omega C}, \quad \tilde{Y} = j\omega C$$

$Z_C = \omega C$ 为容抗. 任何阻抗若电抗为负称为容抗.

- 元件功率分为视在功率, 有功功率, 无功功率.

视在功率:

$$S = UI = I^2 Z$$

有功功率:

$$P = UI \cos \delta = I^2 R = \operatorname{Re}(\tilde{U}\tilde{I}^*) = \frac{1}{2}(\tilde{U}\tilde{I}^* + \tilde{U}^*\tilde{I})$$

无功功率:

$$P' = UI |\sin \delta| = I^2 |X|$$

三者关系:

$$P' = P \tan |\delta|, \quad S^2 = P^2 + P'^2$$

损耗角:

$$\tan \varepsilon = \frac{P}{P'} = \frac{R}{|X|}, \quad \pm \delta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

5.2 常见电路

5.2.1 谐振电路

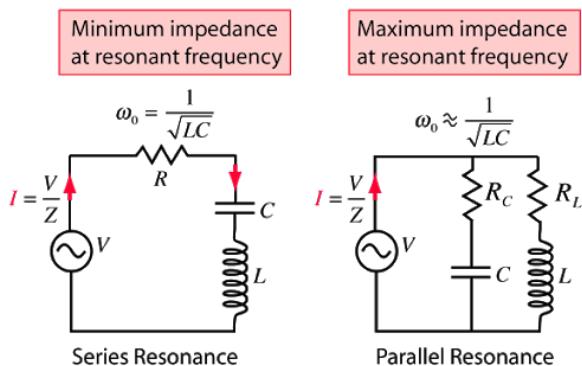


图 5.1: 串联谐振与并联谐振

- 串联谐振:

$$\tilde{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

谐振条件: 电流作为响应与电压无相位差:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

此时恰也有最小阻抗, 电流最大.

品质因数 Q :

$$Q = \frac{U_L}{U_R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

- 并联谐振: 谐振一般定义为相位谐振点, 即电流作为响应与电压无相位差. 此时阻抗一般接近最大值, 故干路电流反而较小. 支路电路往往远大于干路电流. 振幅达最小值的振幅谐振点一般不与相位谐振点重合.

第六章 光的干涉

6.1 标量波理论

标量波是指以下标量偏微分 **波动方程**(wave equation) 的解:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A(\mathbf{r}, t) = 0$$

分别在直角坐标、柱坐标、球极坐标下用所谓的分离变量法可以得到一些正确的基础解¹:

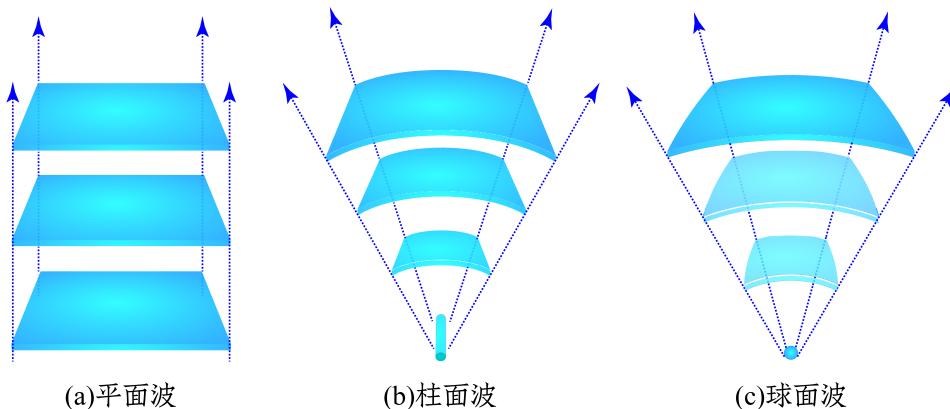


图 6.1: 三种典型的波

$$1. \ A(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi)$$

要求 $\frac{\omega}{|k|} = c$. 此为传播方向为 k 的平面行波.

$$2. \ A(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{\sqrt{\rho}} \cos(\omega t - k\rho + \phi)$$

要求 $\frac{\omega}{|k|} = c \cdot k > 0$ 时为向外传播的柱面行波, k 小于零则向内传播.

$$3. \ A(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{r} \cos(\omega t - kr + \phi)$$

要求 $\frac{\omega}{|k|} = c \cdot k > 0$ 时为向外传播的球面行波, k 小于零则向内传播.

容易发现,以上波全都具有这样的形式:

$$A(\mathbf{r}, t) = |A|(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \varphi(\mathbf{r}))$$

也就是说,每个点的相位都在以共同的 ω 做等速率的增加,代表一种同步的振动.而振动幅度 $|A| > 0$ 是要由于波的传播特点和能量流动的连续性而缓慢变化的.具体传播方向则看相位的梯度:

$$\boldsymbol{k} = +\nabla \varphi$$

¹以下三式都要求 $\omega > 0$ ，数学上看 $\omega < 0$ 也没错，但是利用三角函数的性质可以将 t 系数变号而不带来新的解。

在近似的意义上, $\frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = c$ 是没有问题的. 而 c 便是波传播的速度. 在真空与介质 (写作 v) 中出现在光的波动方程中的 $\frac{1}{c^2}$ 中的 c 其实是:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} , \quad v = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

约等于符号是因为考虑到了透明光学介质一般磁性质不显著故 $\mu_r \approx 1$.

我们不是很推荐用三角函数来计算波动光学. 要写成复指数的形式, 而实际三角函数理解为它的有效的实部, 虚部是为了方便计算而添加的没有物理效应的. 而且波动光学统一约定, 利用三角函数的形式, 为相位增添一个负号, 使得光在同一刻沿传播方向相位是增加的, 改为:

$$A(\mathbf{r}, t) = |A|(\mathbf{r}) e^{i(\varphi(\mathbf{r}) - \omega t)} = |A|(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})} e^{-i\omega t} = A(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

在以后情形下我们都将把这种符号约定称为“光学符号约定”, 而以往的指数上的宗量随时间增加随传播方向减小的符号约定称为“电磁学符号约定”. 以上讨论就引出了复振幅 $A(\mathbf{r})$ 的概念. 而之前找到的各点振幅 $|A|$ 和 φ 现在就被整合在了一起, 作为复振幅的模与幅角:

$$|A|(\mathbf{r}) = |A(\mathbf{r})| , \quad \varphi(\mathbf{r}) = \arg A(\mathbf{r})$$

回过头来再看, 我们在解波动方程时, 实际上从一开始就没有必要认为该标量 $A(\mathbf{r}, t)$ 是一个实数, 在复数域内解, 也能够直接得到完全与上述等效一样的结果. 最后我们发现, 该复数标量场 $A(\mathbf{r}, t)$ 如果能够符合波动方程, 其实部与虚部也是能够分别满足波动方程的:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A(\mathbf{r}, t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Re A(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Im A(\mathbf{r}, t) = 0 \end{cases}$$

如果再要求这样的 $A(\mathbf{r}, t)$ 具有形式 $A(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$, 数学上也就是对变量 t 分离变量, 物理就意味着研究单色光的传播, 那么代入便会发现实际上 $A(\mathbf{r})$ 需要满足的对空间的方程为 **亥姆霍兹方程** (helmholtz equation):

$$(\nabla^2 + k^2) A(\mathbf{r}) = 0 , \quad k = \frac{\omega}{c}$$

这就是整个波动光学理论的核心方程. 在继续阐述之前我们先说说 A 指什么. 其实真空与线性介质 (不导电) 电磁场几乎每个量 (标势, 矢势, 电场, 磁场) 都是符合波动方程的:

$$A : \{\varphi, A_x, A_y, A_z, E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A(\mathbf{r}, t) = 0 , \quad (\nabla^2 + k^2) A(\mathbf{r}) = 0$$

所以作为复数的标量波理论就构成了光干涉, 衍射等波动光学课题的数学基础. 而且我们率先注意到其中的两点:

一是, 波动方程, 亥姆霍兹方程是线性方程, 也就是说, 如果两个光场都符合方程, 那么两个场直接逐点做标量加法得到的场也会自动符合方程. 这也就是之后干涉, 衍射操作的重要前提. 如果由于两个原因同时产生了两束光波, 那么只要写出各自的场, 加在一起便是整个体系现在的光场. 这就是双光束干涉时我们将会采取的做法.

二是, 平面波与球面波的重要性. 只要是行波, 在任意一点就可以按照平面波来近似. 如果取其 \mathbf{k} 方向为 z 方向, 那么局部的光场为:

$$A(\mathbf{r}) = A e^{ikz}$$

但是旁边的点 (x_1, y_1) 的最佳平面波的近似却不一定平行于 z 轴, 它应该为:

$$A(\mathbf{r}) = A e^{i[k_z z + k_x(x - x_1) + k_y(y - y_1)]}$$

这下便有第一个近似条件了, 我们叫做**傍轴条件**(paraxial condition). 它要求光线传播方向与 z 轴夹一个小角度. 此时我们习惯把 x 和 y 方向方向余弦 $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y$ 使用的约 90 度的角度 α_x, α_y 的余角记做方向角, 也就是说:

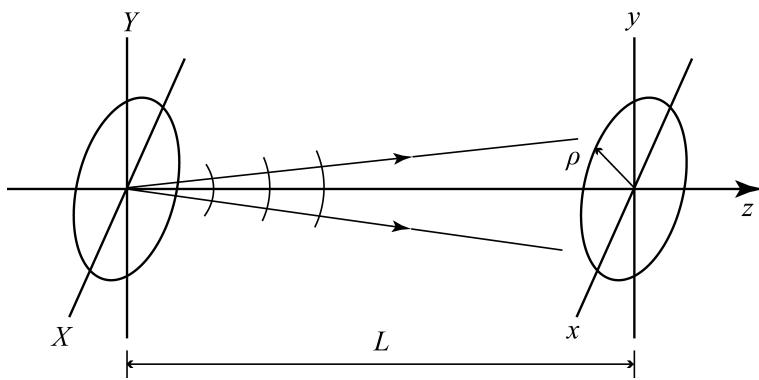


图 6.2: 球面波向平面波近似

$$\sin \theta_x \approx \theta_x = \frac{k_x}{k}, \quad \sin \theta_y \approx \theta_y = \frac{k_y}{k}, \quad k_z \approx \sqrt{1 - \theta_x^2 - \theta_y^2} k \approx k$$

在傍轴近似下, 以上以方向角 (θ_x, θ_y) 传播的平面波被方便地写为:

$$A(\mathbf{r}) = A e^{ikz} e^{i\phi} e^{ik(\theta_x x + \theta_y y)} = A' e^{ik(\theta_x x + \theta_y y)}$$

经常的, 我们只需要关心在像屏 $z = 0$ 上的场, 参考上图. 所以上式我们可以把不变的系数都统一写作 A' .

但是平面波却不总是好的近似, 我们已经发现了, 像上图那样, 如果在物屏 $z = -L$ 上原点 $X = 0, Y = 0$ 处有一点光源发出球面波, 那么光屏上 $(0, 0)$ 处和 (x_1, y_1) 处的近似公式就采取了不同的形式. 所以我们会寻求更好的球面波近似. 但且慢, 是不是任意情况下光场中的任意一点附近的场都能近似为一个球面波呢? 答案显然是否定的. 比如柱面波很显然就不能被近似为球面波, 因为其**波前**(wavefront), 即等相位面沿垂直于传播方向的一个方向弯曲而另一个方向却是平直的. 事实上球面波的光源是点, 柱面波的光源是线. 而介于柱面波与球面波中间的某种不对称波前就连光源都没法找到. 但是球面波的地位仍然是重要的. 这体现在两点上. 一是在真实的光路系统中, 点光源是切实存在且常用的. 此时物方到像方的点到点的消除了像差的理想成像是我们努力追求的方向. 故在这样的系统中光波的确一直都适合被近似为球面波, 而平面波也被当做一种光源在无穷远的特殊状态而处理. 二是, 若把波前上各个点当成是新的次波源向前发射出球面波而在前方相干叠加形成新的光场, 后面在衍射这一章我们数学上可以证明这就是计算光的传播的正确方式. 其中用到的球面波作为一种本质上重要的物理对象, 即**传播子**(propagator), 有着重要的物理地位.

故我们研究从物屏 $z = -L$ 的 (X, Y) 处传播到像屏 $z = 0$ 处 (x, y) 点的球面波的场:

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \frac{I}{\sqrt{L^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2}} e^{ik\sqrt{L^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2}} \\ &= \frac{I}{L} e^{ikL} \left[1 + \frac{(x - X)^2}{L^2} + \frac{(y - Y)^2}{L^2} \right]^{-\frac{1}{2}} e^{ikL \left[\left[1 + \frac{(x - X)^2}{L^2} + \frac{(y - Y)^2}{L^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right]} \end{aligned}$$

由于傍轴条件, 我们发现方向角 (u_x, u_y) , $u_x = \frac{x}{L}, u_y = \frac{y}{L}$ 和方向角 (U_x, U_y) , $U_x = \frac{X}{L}, U_y = \frac{Y}{L}$ 都是小量, 而传播到光屏上该点的光的方向角 (k 方向) 为 $(u_x - U_x, u_y - U_y)$. 仅考虑领头项, 把不随 x, y 变化的系数记为常数, 我们发现:

$$A(x, y) = A e^{\frac{1}{2}kL[(u_x - U_x)^2 + (u_y - U_y)^2]} = A' e^{ik\frac{x^2 + y^2}{2L}} e^{-ik\frac{Xx + Yy}{L}}$$

也就是说光屏上的波由两个相因子决定. 第一个是平方相关于 x, y 的 $\varphi_1 = k \frac{x^2 + y^2}{2L} = \pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda L}$, 第二个恰好是平面波的相因子 $\varphi_2 = -k \frac{Xx + Yy}{L} = -k(U_x x + U_y y) = k(\theta_x x + \theta_y y)$. 就是说当点光源相对 $(x, y) = (0, 0)$ 从 $X < 0, Y < 0$ 的方向照过来能够在原点附近获得方向角为正的平面波场.

那么球面波能够被近似为球面波的条件也就不言自明了, 它要求第一个相因子的相位很小不干扰第二个相因子, 也就是 $\varphi_1 \ll \pi$, 也就是远场条件(farfield condition):

$$\rho^2 \ll \lambda L \Leftrightarrow L \gg \frac{\rho^2}{\lambda}$$

其实换一个角度理解这个条件, 如果远场条件被满足, 但是在这样的 ρ 内第二个相因子变化也非常小时, 整个 A 几乎就是常数, 这时候也形成不了有价值的光场, 所以我们如果要求 $\varphi_2 \gg \varphi_1$, 还能发现第三个条件 $X, Y \gg x, y$. 对于这个条件我们做这样的理解, 相位的绝对大小是没有观测效果的. 我们需要的其实是光束干涉时相位的差值. 故这其实是要求物屏的花样尺寸要远大于像屏上干涉花样的观测范围.

在远场条件不被满足的情况下, 考虑第一个相因子对第二个相因子的影响, 会造成干涉图样的扭曲与形变, 几何光学上会造成最基础的像差: 相散和散焦.

在介绍下两节具体的干涉之前, 对干涉的原理做一个简要的介绍是有必要的. 根据之前的介绍, 空间中如果同时存在两个光场:

$$A_1(\mathbf{r}) = |A_1|(\mathbf{r})e^{i\varphi_1(\mathbf{r})} ; A_2(\mathbf{r}) = |A_2|(\mathbf{r})e^{i\varphi_2(\mathbf{r})}$$

我们可以找到其单独存在时的光强, 一般来说, 光强为位置的缓变函数:

$$I_1(\mathbf{r}) = |A_1|^2 = A_1^* A_1 ; I_2(\mathbf{r}) = |A_2|^2 = A_2^* A_2$$

然而光场的叠加是有两种典型的方式的. 最常见的其实是非相干叠加(incoherent superposition). 此时出于下面要介绍的原因, 光强是可以逐点直接相加的:

$$I(\mathbf{r}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r})$$

将自然界或人造的两束来源不同的光照在一次是无法观察到干涉花样的. 光的干涉条件比机械波干涉条件来的苛刻的多. 在某些细心制备的实验室条件下才能观察到干涉花样, 此时光场是相干叠加(coherent superposition). 在光学之中相干度是十分值得关注的. 我们将在之后的一节中集中讨论. 读者可能自然地认为相干叠加时为复振幅相加:

$$A(\mathbf{r}) = A_1(\mathbf{r}) + A_2(\mathbf{r})$$

但是其实无论非相干叠加还是相干叠加上式都适用, 那么是什么造成了两者的区别呢? 我们把上式模方求光强:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) &= A^* A \\ &= (A_1^* + A_2^*)(A_1 + A_2) \\ &= A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + A_1^* A_2 + A_2^* A_1 \\ &= I_1 + I_2 + |A_1||A_2|e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + |A_1||A_2|e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

上式中出现的交叉项 $2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ 就叫干涉项(interference term). 它是关于位置的快变函数.乍一看这也未免太快了, 因为只要当空间位置改变一个波长, 相位 φ 就会有 π 的量级的改变, 这样干涉项在这个过程中就会有正负号的改变. 从而产生干涉花样. 在实际的干涉实验中, 合理的仪器设置可以使得这个空间特征长度被放大到人眼或助视仪器可以直接观测的程度. 从而这就是干涉实验的基础.

那么为什么对于非相干叠加情形我们直接去掉了干涉项. 那是因为在之前我们做把光场向标量复振幅简化的过程中去掉了公共的单色光时间演化项 $e^{i\omega t}$. 这并不是永远合理的做法. 真实光场由于后面要介绍的各种原因, 可以认为相位随时间的演化并不是完全线性增加的而是有随时间偏离期望值的方差越来越大的涨落. 从而两束并没有关联的自然光之间不同时刻同一点 \mathbf{r} 的相位差 $\delta = \varphi_2(\mathbf{r}) - \varphi_1(\mathbf{r})$ 是一个在随机涨落的数, 只要涨落够大, $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ 项的随时间平均就会总是趋近于零. 从而干涉现象也就消失了.

在以下的两小节中, 我们先不用关心相干性的问题, 认为不同光场的叠加总是有“完美的相干性”: 完全稳定的相位差. 我们会在不同干涉装置的介绍中去强调为什么总是能保证“完美的相干性”的成立.

6.2 分波面干涉

以下几种干涉装置一般统一归为分波面干涉(interference by dividing wave-front). 因为它们实现的核心思想都是让本来沿各个方向独立传播的波前的部分改变传播方式而在空间中产生交叠.

- 杨氏双孔干涉: 单色扩展光源-单孔-双孔-光屏.

“完美的相干性”: 诚然, 单色扩展光源可以分解为大量点光源的叠加, 彼此之间是非相干的 (激光等非相干光源除外). 但是, 单孔的存在可以使得我们忽略此前的光场结构而直接把单孔视作单个点光源, 由它发出的光的同一波前上两点具有完全相干性. 实际上, 即使我们对到达单孔的来自扩展光源不同点光源的光进行分解, 那么每一个光波此后通过单孔形成新的球面波, 再通过双孔形成两个具有稳定相位差 (下面会计算) 的相干球面波, 并在光屏上形成干涉条纹, 只要不同点光源形成的条纹位置完全一致, 就等效于从单孔出来的光波整体具有“完美的相干性”.

条纹间距公式:

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d}$$

缺点: 只利用了点光源波面上非常有限的两个小面元. 而以下的都是改善方案, 直接将波面分成两个区域分别进行成像以实现干涉:

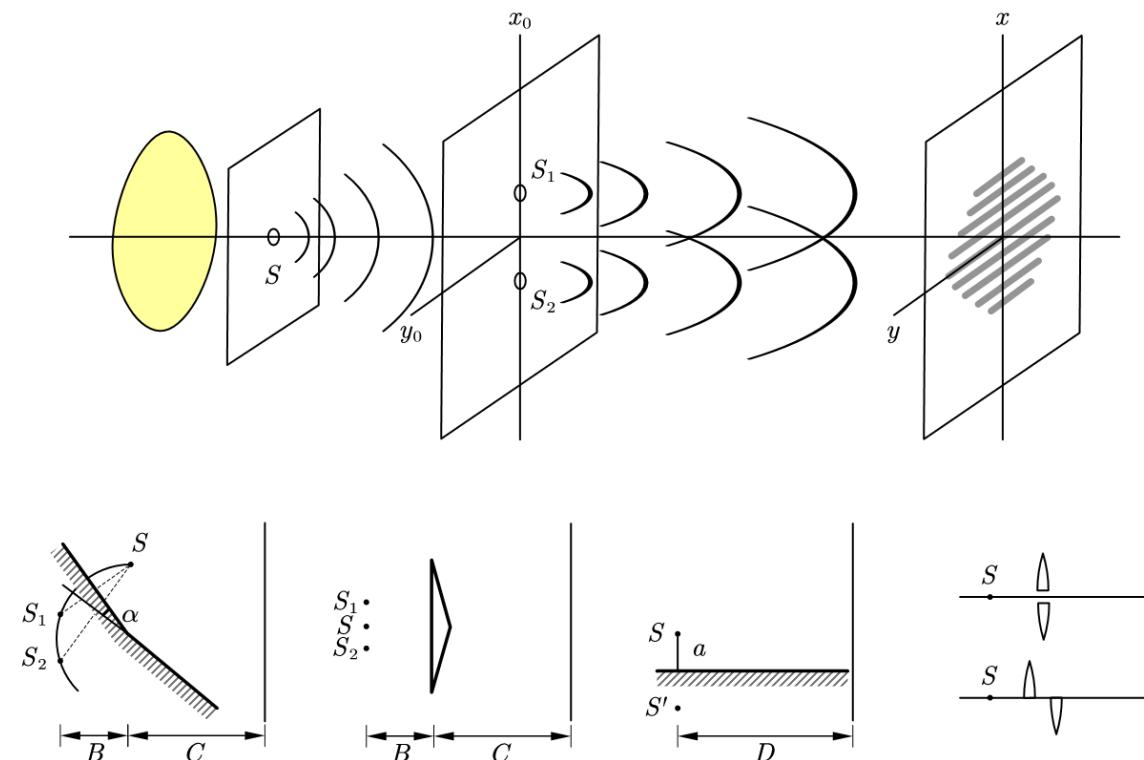


图 6.3: 分波面干涉们

- 菲涅尔双面镜:

$$\Delta x = \frac{\lambda(B + C)}{2\alpha B}$$

- 菲涅尔双棱镜:

$$\Delta x = \frac{\lambda(B + C)}{2(n - 1)\alpha B}$$

棱镜的正反放置有区别.

- 劳埃德镜:

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{2a}$$

- 比累对切透镜: 横竖分开有区别.
- 散斑干涉: 如果在带一层玻璃板的镜面上撒粉末, 那么粉末作为散射源, 对于单色光入射情况也可以视作点光源处理. 此时也可以发生分波面干涉: 一部分吸收入射光后形成相应的散射光, 经反射后继续传播. 而一部分入射光先反射再被散射. 相当于在入射光波面上通过粉末和粉末的反射像发生了分波面干涉.

作为干涉, 一般指两个波的叠加. 但是实际情况常常遇到多光束干涉(multiple-beam interference) 的情况. 比如把杨氏实验换成多个孔, 或者把孔换成全同的散射单元. 多光束干涉的进一步推广就是衍射(diffraction), 此时一个空间区域内的整个波前应当被分解为无穷多个面微元, 各产生一个波, 在光屏上叠加, 后面会发现表达式成了一个积分.

6.3 分振幅干涉

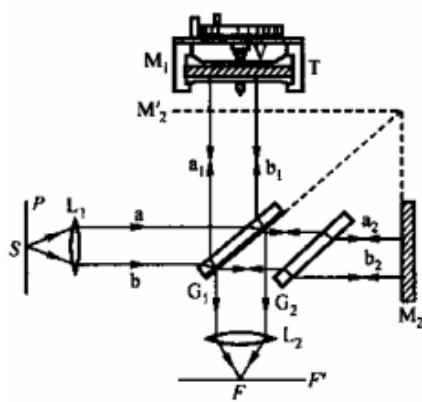


图 6.4: 迈克耳孙干涉仪

以下几种干涉装置一般统一归为分振幅干涉(interference by dividing amplitude). 因为它们实现的核心思想, 相比去把一个波前分成几个部分, 它选择保持了波前的完整性, 而是通过界面效应把其强度分解为透射与反射两个成分.

- 迈克耳孙干涉仪:

G_1 为半透半反镜, G_2 为完全透射的补偿板. M_2, M'_2 对 G_1 为物像关系. 那么在光屏中央为亮斑条件:

$$2d = j\lambda$$

事实上, 等价于薄膜干涉, 可以是等倾或者等厚.

- 薄膜等厚干涉: 光线倾角固定(往往受制于光路), 薄膜不同厚度处形成不同光程差导致干涉条纹.

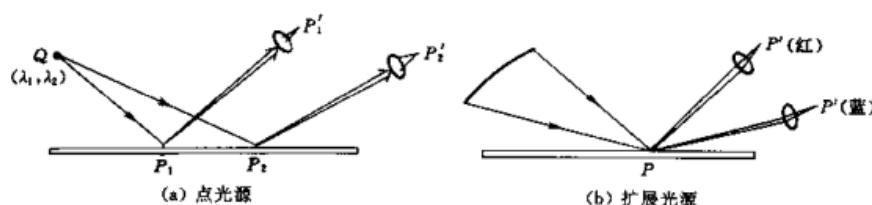


图 6.5: 薄膜等厚干涉

- 薄膜等倾干涉: 薄膜厚度固定, 不同光线倾角处造成不同光程差导致干涉条纹.

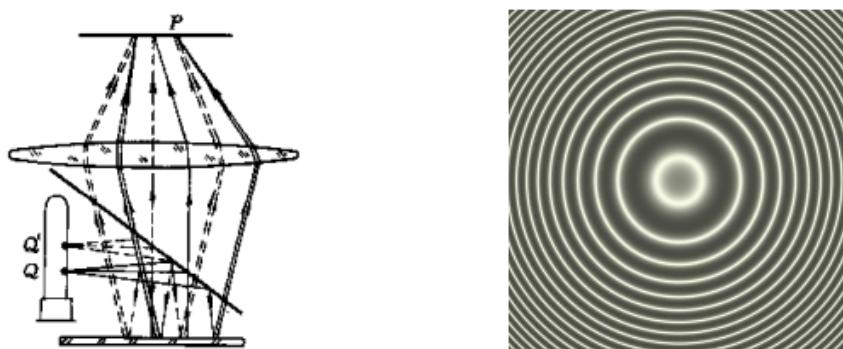


图 6.6: 薄膜等倾干涉

根据有无半波损失, 薄膜等厚等倾干涉的光程差均为:

$$\delta = 2nd \cos \theta \left(+\frac{\lambda}{2} \right)$$

- 法布里-泊罗干涉仪(Fabry-Pérot interferometer).

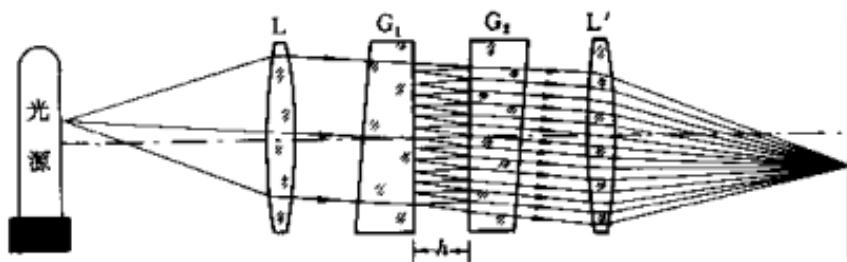


图 6.7: FP 干涉仪

真正的薄膜干涉往往是一个多光束干涉. 以 FP 干涉仪为例, 透射振幅为:

$$A_1 = t^2 A_0 = T A_0 = (1 - R) A_0$$

$$A_{i+1} = r^2 A_i e^{ik\delta} = R e^{ik\delta} \cdot A_i$$

做等比数列求和, 代入薄膜光程差公式, 模方取光强得:
到:

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(kd \cos \theta)}$$

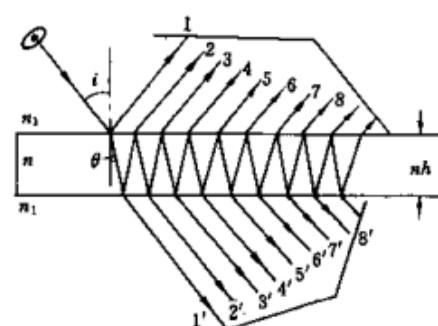


图 6.8: 多光束干涉

6.4 偏振干涉

- 相干度:

$$\gamma = \frac{\langle A_1^* A_2 \rangle}{\sqrt{\langle A_1^* A_1 \rangle \langle A_2^* A_2 \rangle}}$$

一般是个复数, 如果模为零代表完全不相干, 如果模为一代表完全相干, 但是幅角代表两个信号的相位差. 模在零一之间代表部分相干.

- 密度矩阵包含有一个偏振态的全部信息:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \langle A_x^* A_x \rangle & \langle A_x^* A_y \rangle \\ \langle A_y^* A_x \rangle & \langle A_y^* A_y \rangle \end{bmatrix}$$

对角线元素都是实数:两个方向光强. 迹: 总光强.

- 线偏振光:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{P} = I \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

- 圆偏振光, 左旋右旋分别为:

$$\mathbf{P} = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{P} = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

- 椭圆偏振光, 左旋右旋分别为:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} I_x & -i\sqrt{I_x I_y} \\ i\sqrt{I_x I_y} & I_y \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} I_x & i\sqrt{I_x I_y} \\ -i\sqrt{I_x I_y} & I_y \end{bmatrix}$$

- 以上三种光都具有完全相干性. 完全相干的光的任意两个分量, 或者是经过之后的偏振器件处理前后的各分量之间, 都具有模一的相干度. 但是, 两个不同的完全相干光之间又可以是不相干的. 偏振态为完全相干的充要条件为:

$$\det \mathbf{P} = 0$$

- 自然光: 相干度最差的光:

$$\mathbf{P} = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 一般的光称作部分偏振光. 一般来说密度矩阵写作:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} e^{-i\varphi} \\ I_{xy} e^{i\varphi} & I_y \end{bmatrix}$$

可以证明可以找到“主方向”, 一方面, 这两个方向光强分别达到最大和最小 (取 x 方向最大, y 方向最小), 另一方面取这样的方向后恰好有 $\varphi = \pi/2$. 故部分偏振光在主方向坐标系中永远可以写作:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} I_{max} & -iJ \\ iJ & I_{min} \end{bmatrix}$$

即: 视作椭圆偏振光和一个与之不相干的自然光的叠加.

- 偏振片: 筛选某个特定方向的分振动:

$$A_\theta = A_x \cos \theta + A_y \sin \theta$$

- 波片: 命 x, y 方向的透射振动产生一定的相位差. 二分之一波片产生 $\varphi = \pi$ 相位差, 四分之一波片产生 $\varphi = \pi/2$ 相位差, 合理选取时间原点可以认为 y 方向相位不变, 那么:

$$A'_x = e^{i\varphi} A_x \quad , \quad A'_y = A_y$$

6.5 相干性

- 空间相干性: 在光源产生的光场同一时间 (同一波前) 上选取两个不同的空间点, 其信号相干度模不足一, 且随着点距离变大而愈发不相干的情况:

$$A_1 = A(\mathbf{r}_1, t) \quad , \quad A_2 = A(\mathbf{r}_2, t)$$

$$\gamma = \frac{\langle A_1^* A_2 \rangle}{\sqrt{\langle A_1^* A_1 \rangle \langle A_2^* A_2 \rangle}} \quad , \quad |\gamma| < 1$$

一般原因: 光源的扩展性. 对于宽度为 b 的单缝, 相干角度为:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{b}$$

- 时间相干性: 在光源产生的光场同一位置 (同一波列) 上选取两个不同的时间点, 其信号相干度模不足一, 且随着时间间隔变大而愈发不相干的情况:

$$A_1 = A(\mathbf{r}, t + \Delta t) \quad , \quad A_2 = A(\mathbf{r}, t)$$

$$\gamma = \frac{\langle A_1^* A_2 \rangle}{\sqrt{\langle A_1^* A_1 \rangle \langle A_2^* A_2 \rangle}} \quad , \quad |\gamma| < 1$$

一般原因: 发光的不连续性, 存在波列长度 L . 内在原因为光源的非单色性, 即波长存在不确定度 $\Delta\lambda$. 两者符合:

$$L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

第七章 光的衍射

7.1 光栅与波带片

- 光栅衍射: 光栅常数, 即空间周期为 d , 缝宽为 a , 总共刻 N 道. 那么:

$$I = I_0 \cdot f_1(\theta) \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2, \quad \beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

其中 $f_1(\theta)$ 为之后可以算出来的与单缝衍射有关的慢变 (需要 $a \ll d$) 的单元因子:

$$f_1(\theta) = \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

体现光栅的结构的是后面的结构因子:

$$f_2(\theta) = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2, \quad \beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

从中可以得到三个信息: 主极大方向 $d \sin \theta_j = j\lambda$, 主极大强度 $I = N^2 I_0$, 主极大宽度 $\delta\theta \sim j\lambda/Nd$

- 圆孔菲涅尔衍射: 波带法与半波带法. 核心在于以下等式:

$$\frac{dS}{r} = \text{const.} \cdot dr$$



图 7.1: 波带法与半波带法

这说明不同位置的波前上的带状面元, 根据其对要计算的点所造成的光程差, 相等的光程差造成完全相等的振幅, 尽管面元的面积不相等. 只需要把这些振幅相等, 相位不等的光矢量进行合成.

合成方法一般有两种, 对于半波带问题把面元分解为半波带显得方便. 而复杂问题需要按照微元分解, 下一节将介绍面元对要计算的点的光矢量贡献还有一个起到调制作用的角度因子, 故合成图像一般为:

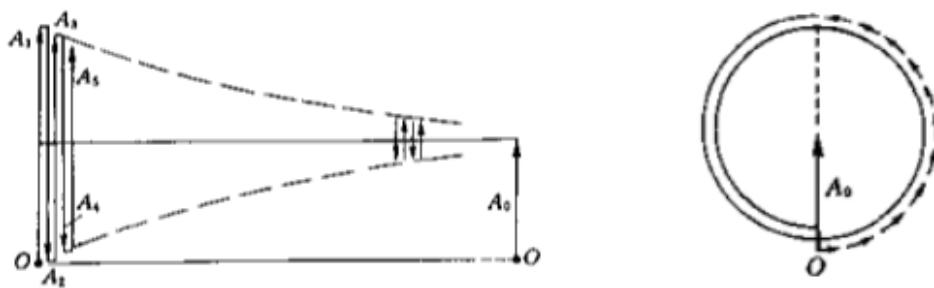


图 7.2: 分组合成与积分合成

- 波带片: 预想将一点光源和一要计算光强的点中间合适距离处的波前按照半波带分解, 再制造一光学器件, 或者遮住奇数半波带而开放偶数半波带, 或者遮住偶数半波带而开放奇数半波带. 就构成了波带片. 如果在一张圆形的片上入射平行光, 而选取距离为 f 的点计算光程, 那么各个半径为:

$$\rho_j = \sqrt{j\lambda f}$$

这样的波带片可以当做一个焦距为 f 的透镜使用. 但是成像并不唯一, 容易证明它具有一组虚焦点和实焦点.

7.2 衍射积分公式

- 基尔霍夫衍射积分公式:

$$A(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\lambda} \int \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{F} \cdot \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

F 为角度因子, 若入射波波矢 \mathbf{k}' 方向为 e' , 子波波矢 \mathbf{k} 方向为 e , 面元 dS 方向为 n , 则有:

$$F = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}'}{2} = \frac{\cos \theta + \cos \theta'}{2}$$

- 夫琅和费衍射公式: 如果在衍射屏后放置焦距为 f 的透镜并在后焦面上观察, 并且忽略角度因子. 把入射场在衍射屏作用后的波前写作 $A(x_0, y_0)$. 那么这个情况具有更简单的公式:

$$A(\theta_x, \theta_y) = \frac{1}{i\lambda f} \iint A(x_0, y_0) e^{-i(k_x x_0 + k_y y_0)} dx_0 dy_0$$

- 矩孔衍射:

$$I = I_0 \cdot \left(\frac{ab}{\lambda f} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_x, \beta = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta_y$$

- 圆孔衍射: 直径 d , 艾里斑半角 θ :

$$\theta \approx \frac{1.22\lambda}{d}$$

第八章 相对论力学

8.1 相对论运动学

- 光速不变原理: 时空的结构为平直时空: $ds^2 = c^2 dt^2 - dx_i^2$: 物质运动的“舞台”.
- 相对性原理: 物理规律的协变性:

$$\text{Sca.} = \text{Sca.}, \quad \text{Vec.} = \text{Vec.}, \quad \text{Vec.} \cdot \text{Vec.} = \text{Sca.} \text{ etc.}$$

- 四-标量**(four-scalar) 与**四-矢量**(four-vector) 的定义: 类比三维空间标量矢量, 但按闵可夫斯基空间处理.
- 洛伦兹变换的定义: 保度规的变换. 物理上是不同共原点惯性参考者建立的参考系.
- 洛伦兹群:

$$\text{SO}(3, 1) = \langle R_x, R_y, R_z, B_x, B_y, B_z \rangle$$

其中 B_x 为 x 方向的**推促**(boost):

$$\begin{bmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- 经典物理没有协变性, 但电磁学与相对论理论具有协变性. 意为所有物理定律都由协变的对象构成, 这主要包括标量, 矢量, 张量, 旋量四类. 四-矢量尤其常见:

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

出于方便, 四-矢量也被简记为 $A_\mu = (A_0, A_i) = (A_0, \mathbf{A})$. 而 $A_i = (A_1, A_2, A_3)$ 是三维矢量的简记. 四-矢量与四-矢量可以算**伪内积**(pseudo-inner-product):

$$A_\mu B^\mu = A_0 B_0 - A_i B_i$$

伪内积将得到四-标量. 即参考系变换下不变的量.

- 洛伦兹变换下任意四-矢量具有不变量 $A_\mu A^\mu = A_0^2 - \mathbf{A}^2$, 对于类时四-矢量这将大于零, 即 $A_\mu A^\mu = A_{\text{proper}}^2$; 事实上以速度 $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{A}}{A_0}c$ 做洛伦兹变换, 可以把空间分量变为零. 这叫做**本征参考系**(proper reference system). 得到本征四-矢量 $A'_\mu = (A_{\text{proper}}, \mathbf{0})$.
- 三个基本图像:
 - 尺缩: $L = L_0/\gamma$.
 - 钟慢: $t = \gamma t_0$.
 - 同时相对性: $\tau = -\beta \frac{x}{c}$.

只要是真的尺子, 真的钟, 就永远不可能错! 没有真的尺子和钟就去构造.

- 相对论质点运动:

具有四-标量: 间隔 $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$, 本征时 $dt_0 = ds/c$, 下四-速度的不变模长 $v_\mu v^\mu = c^2$.

具有四-矢量: 四-位移 $dx_\mu = (cdt, d\mathbf{r})$, 四-速度 $v_\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$, 四-加速度见下节.

- 速度变换公式:

$$\gamma' = \frac{1 - \frac{uv_x}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \gamma$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_{y,z} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} v_{y,z}$$

- 光行差公式: 可以用速度变换推导, 也可以之后用流变换推导:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\cos \theta'}$$

- 相对论下讨论刚体? 模型存在缺陷: 隧道佯谬, 转盘佯谬. 故整个刚体运动学都没有必要建立.

8.2 相对论动力学

- 动量-能量构成四矢量的必要性: 守恒律需要被保留且协变.

- 四-动量:

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), p_\mu p^\mu c^2 = E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4, \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} c^2}{E}$$

$$\mathbf{p} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- 普遍的过程的守恒律:

$$\sum_i p_{i,\mu} = \sum_j p_{j,\mu}$$

- 四-力与四-加速度:

$$a_\mu = \frac{dv_\mu}{dt_0} = \left(\gamma \frac{d\gamma}{dt} c, \gamma \frac{d\gamma \mathbf{v}}{dt} \right), \frac{d\mathbf{v}}{dt} := \mathbf{a}$$

$$F_\mu = \frac{dp_\mu}{dt_0} = \left(\gamma \frac{dE}{cdt}, \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) := \left(\gamma \frac{W}{c}, \gamma \mathbf{F} \right)$$

- 推论一: $F_\mu = a_\mu$. 但三维矢量之间不会直接符合 Newton-like 的动力学方程.
- 推论而: $F_\mu v^\mu = 0$. 这个三维继续可以得到:

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p}, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dE$$

- 单方向受力时, 在该方向的推促下力不变.
- 本征加速度与本征力: 它本意指的是四-速度的本征系中的四-加速度与四-力, 不过神奇的是恰好让两者的时间分量变为零 (类空, 与类时的四-速度正交), 空间分量为 \mathbf{a}_0 , \mathbf{F}_0 :

$$\mathbf{F}_0 = m\mathbf{a}_0$$

$$a_\mu a^\mu = -a_0^2$$

- 沿平行于本征加速度与本征力方向施以推促:

$$F = F_0, \quad a = a_0/\gamma^3$$

- 沿垂直于本征加速度与本征力方向施以推促:

$$F = F_0/\gamma, \quad a = a_0/\gamma^2$$

- 快度(rapidity): $\beta = \tanh\vartheta$, $\gamma = \cosh\vartheta$.
- 自然坐标下的相对论性牛顿定律:

$$F_\tau = \gamma^3 m a_\tau$$

$$F_n = \gamma m a_n$$

- 相对论关于碰撞的新理解:

情形	经典	相对论
弹性	无耗散, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$, $E' = E$	粒子守恒, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$, $E' = E$
非弹性	有耗散, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$, E 不可列	粒子变性, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$, $E' = E$

只有一个例外: 光子的散射若频率不变, 叫做弹性散射. 如经典的瑞利散射, 米氏散射; 但如果频率变了, 叫做非弹性散射, 如拉曼散射, 康普顿散射.

- 相对论碰撞根据具体情形一般有以下大的分类: 弹性的散射, 非弹性的散射, 粒子反应.
- 质点系的动量-能量也将构成一个四-矢量, 即:

$$(E, \mathbf{p}) = \sum_i (E_i, \mathbf{p}_i)$$

那么这个四-矢量的本征系速度:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E}$$

称作动量中心系 (center-of-momentum frame), 以代替经典物理的质心系. 简称动心系. 顾名思义, 此系中质点系总动量为零: 而总能量:

$$E_0^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

m_0 为动心系中的总动质量, 以后称作质点系的等效静质量. 这个式子可以解释一部分的质量起源问题.

- 一个等效静质量 m_0 的质点系若选取相对动心系以 v 运动的参考系, 动量与能量为:

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E = \sum_i E_i = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- 放能反应: $\sum_i m_i > \sum_j m_j$. 则无论取哪个系, 静能转化为动能的量都相等. 定义为反应能 Q :

$$Q = \left(\sum_i m_i - \sum_j m_j \right) c^2$$

- 吸能反应: $\sum_i m_i < \sum_j m_j$. 则具有阈能. **仅在动心系中**, 反应发生的最小动能 (阈能) 的值为:

$$Q = \left(\sum_j m_j - \sum_i m_i \right) c^2$$

8.3 相对论连续物质

- 若有一守恒荷 Q 作为四-标量, 则其空间分布与流动构成一个密度场 ρ, \mathbf{j} :

$$dQ = \rho dV$$

$$dQ = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} dt$$

- 那么 $(\rho c, \mathbf{j})$ 是一个四-矢量且符合洛伦兹变换, 如 x 方向的推促:

$$\begin{bmatrix} \rho' c \\ j'_x \\ j'_y \\ j'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho c \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{bmatrix}$$

- 若有一平面波场, 其必要的一个要素为相位, 它随着时空分布必然写作:

$$\varphi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

ω 称作角频率, \mathbf{k} 为波矢.

- 那么由于相位为四-标量, 且可以写作以下形式, 故 $k_\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ 为四-矢量, 称作四-波矢:

$$\varphi = k_\mu x^\mu$$

如 x 方向的推促:

$$\begin{bmatrix} \omega'/c \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$$

- 可以从上式出发得到光行差公式, 同时也能得到多普勒效应公式. 在前提 $\omega/k = c$ (四-波矢类光) 时:

$$\omega' = \omega \cdot \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}$$

- 将三维的力密度和功率密度:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV}$$

$$p = \frac{dP}{dV}$$

合并可以得到四-力密度 $f_\mu = (p/c, \mathbf{f})$.

第九章 物理光学

9.1 经典色散理论

蓝天,白云,红太阳.在简单的自然现象中蕴含着光在传播过程中的另外一种典型的现象: **散射**(scattering).而散射却又是一个多么复杂的现象!要完全理解散射,我们得研究光的吸收与发射,因为光与物质中分子的相互作用其实本质上可以看成吸收与发射,这是**分子光学**(molecular optics)的研究范畴.其次,光在介质中的衰减(吸收),不同颜色的光折射率的不同(色散)其实都导致了一类散射现象(瑞利散射).但是还有不同的散射现象则表现出不用的特性,需要从更宏观或更微观的角度去建立新的理论来解释他们.

不同于以往在透明介质中的平面波传播,新的现象需要新的平面波模型.

9.1.1 复波矢与复折射率

我们在波动方程的解中引入复数是为了更好地描述振动形式的解.但这却忽视了另一种解的存在性.就是如果波矢 \mathbf{k} 本身亦为复数,由于同时又是一个矢量,可以表示为 $\mathbf{k} = \alpha + i\beta$.代入场的空间部分:

$$A(\mathbf{r}) = A_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = A_0 e^{-\beta \cdot \mathbf{r}} e^{i\alpha \cdot \mathbf{r}}$$

这就代表了一个沿 α 方向传播, 沿 β 方向衰减的平面波.而 α 为波矢的实部, β 为波矢的虚部:

$$\alpha = \Re(k) ; \beta = \Im(k)$$

这种波可不可以真空中传播?出人意料的是这居然是可能的.因为如果代入真空中的亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 A + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

便会觉得这只需要求:

$$\mathbf{k}^2 = (\alpha + i\beta) \cdot (\alpha + i\beta) = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \alpha \cdot \beta = 0$$

这样的波我们并不陌生,早在几何光学我们介绍光的全反射时便研究过另一侧界面中的隐失波场便是以上形式.更典型地,在 $a \times b$ 的矩形波导中传播的波满足:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_y}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_z}\right)^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \\ \lambda_x = \frac{2b}{m}, \lambda_y = \frac{2a}{n}, m, n &= 1, 2 \dots \end{aligned}$$

此时在 x, y 方向的振动是驻波, z 方向传播的波则是行波. x, y 方向要形成驻波是因为在边界的导体上要符合相同的边界条件,所以或都是波腹,或都是波节.亦可以用同一个

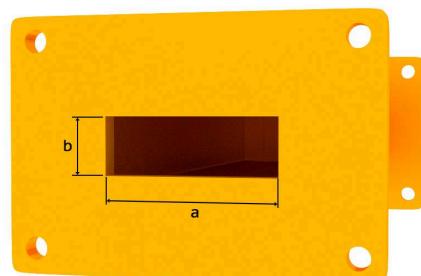


图 9.1: 矩形波导

平面波在侧面上的多次反射的叠加来理解这种兼具驻波和行波特质的场. 我们发现模式为 (m, n) 的波, 会有一个截止角频率 ω_c , 如果角频率低于此值使得波无法向前传播:

$$\omega_c = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

那如果在波导的起点的天线给出信号角频率 $\omega < \omega_c$ 会发生什么情况? 此时就是 z 方向波矢 k_z 变为虚数, 意味着波沿 z 方向不是传播而是衰减:

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{b}, 0 \right) , \quad \boldsymbol{\beta} = \left(0, 0, \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right)$$

在真空中尚可以产生衰减的波¹, 更何况在各种介质中. 事实上, 描述光在介质中随着传播的距离而衰减的现象早有一经验公式, 即**比尔-朗博-布葛律**(Beer-Lambert-Bouguer law):

$$\frac{I(l)}{I(0)} = e^{-(\sum_i n_i \sigma_i)l}$$

其中 $I(0)$ 为在传播 l 前的光强, $I(l)$ 为在传播 l 后的光强. n_i 是构成介质的第 i 种分子的数密度, σ_i 为描述其吸收本领的**衰减截面**(attenuation cross section). 例如对大气来说主要的衰减因素就来自气溶胶, 干净的海水则能提供 200m 左右的透光带, 如果有的话, 浮游植物含有的光合色素是造成衰减的主要原因. 而对于强衰减性质的介质, 我们可以唯象地认为波在介质中的传播为:

$$|A(l)| = |A(0)|e^{-\beta l} \Rightarrow I(l) = I(0)e^{-2\beta l}$$

这样的选择是有道理的. 下以导电导致的损耗为例: 在不漏电介质中, 麦克斯韦关系本应为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

这样便有:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} , \quad k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$$

但是, 如果介质漏电, 且符合 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, 那么以上方程就改写为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \sigma \mathbf{E} \end{array} \right.$$

¹事实上, 只需要亚波长的结构便可造成衰减.

对最后一个式子所引发的不同在光学情况下是很好处理的. 因为单色光总是具有固定的频率 ω , 那么其实以上式子无非是把 $\frac{\partial}{\partial t}$ 变成 $-i\omega$. 在磁导率被认为几乎等于真空磁导率的情形下, 这相当于说:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\omega \varepsilon \mu \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{array} \right. \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\omega \varepsilon \mu \mathbf{E} - i\sigma \mu \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

所以对于漏电介质², 通常会有复电容率(complex permittivity) 的说法³, 它就是以上把电容率和电导率合并以后的新的复常数, 用它第四个方程就与真空中的方程没有任何区别了, 除了系数是一个复数:

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} : \quad \nabla \times \mathbf{H} + i\omega \varepsilon' \mu \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

这样一个方程的解是可以完全照搬之前的解的, 因为数学上可以证明复数解具有可解析延拓(analytic continuation) 的特性. 从而容易发现, 复波矢就变为:

$$\mathbf{k}^2 = \omega^2 \varepsilon' \mu$$

这样就得到:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2 \varepsilon \mu, \quad 2\alpha \cdot \beta = 2\alpha\beta \cos \theta = \omega \sigma \mu > 0$$

此时传播波矢 α 与衰减波矢 β 就不一定要垂直了, 它们必须夹锐角, 也就是说, 如果电磁波在漏电介质或者导体中传播, 沿传播方向必须要衰减. 我们最后引入光学中使用最多的复折射率(complex refraction index), 按照原来的看法它意味着 $k^2 = n^2 k_0^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v^2}$. 现在要更小心些, 因为 $\mathbf{k} = \alpha + i\beta$ 已经包含两个不贡献的波矢部分. 故我们先对以下表达式开方:

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \cos \theta = \omega^2 \varepsilon' \mu$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \cos \theta} = n \frac{\omega}{c} = (n_1 + in_2) \frac{\omega}{c}$$

通过以上两式对比, 我们能得到两个方面. 第一是复折射率实部 n_1 与虚部 n_2 分别是这样依赖于相对介电常数 $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ 和电导率 σ 的:

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} \right)}$$

$$n_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon_r} \omega \varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} \right)^{-1}}$$

第二组关系式如果已知了介质的两个折射率, 那么在介质中传播的波的两个波矢 α 和 β 需要满足的关系为:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (n_1^2 - n_2^2) \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\alpha\beta \cos \theta = n_1 n_2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

只有当 $\theta = 0$ 才恰有:

$$\alpha = n_1 \frac{\omega}{c}, \quad \beta = n_2 \frac{\omega}{c}$$

²即使不漏电, 也会由于有损耗而等效于有复电容率.

³对于普通的导体, 也一样可以讨论复电容率, 或者更常见地, 复电导率(complex conductivity). 它不仅包含由于原子实部分极化导致的电容性, 还要包含由于电子运动惯性导致的电感性.

9.1.2 经典电子论的解释

下面我们来介绍历史上发挥了重要作用的经典电子论。它虽然不够精确但物理图像十分重要。

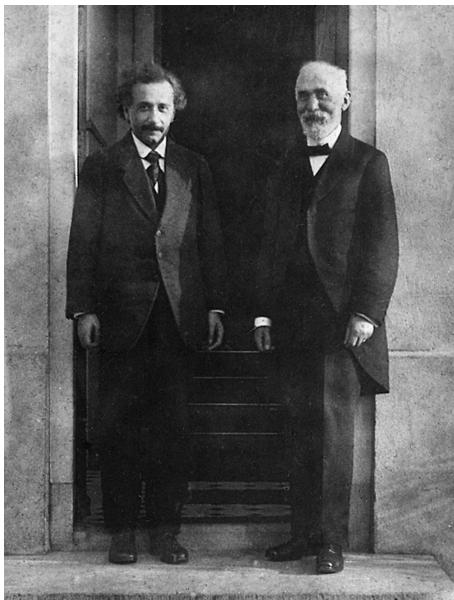


图 9.2: Einstein 与 Lorentz

历史上虽然电子作为粒子的发现是 1897 年汤姆孙 (J. J. Thomson) 的工作。但是早在半个世纪前人们就开始逐渐相信物质由两种带电粒子构成并在导电时可以移动的模型了。人们用这样的模型去想象输运现象, 电磁感应, 热电耦合等现象并取得了丰硕的成果, 经典电磁学早在 1860 年代便在麦克斯韦 (J. C. Maxwell) 的工作下达到顶点进入尾声。剩下来的几十年时间历史让位给了洛伦兹 (H. A. Lorentz), 洛伦兹对电磁学的贡献是深远的。他承前人之大成, 讨论电磁场与电磁介质的相互作用, 讨论电磁学原理与古老的伽利略式相对性原理的结合; 又开近代物理之先河, 电子论自然地导向了量子理论, 而电磁学又自然地促成了狭义相对论的诞生。事实上, 早年间狭义相对论在学界被介绍时便是以洛伦兹和爱因斯坦这一对忘年交命名的洛伦兹-爱因斯坦理论。

电子, 这样一个基本粒子可以说是妇孺皆知的概念, 它带一个单位的负电荷, 其基本参数为:

$$e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{C} \quad m_e = 9.10938356 \times 10^{-34} \text{kg}$$

然而出于各种原因, 在经典电子论中的电子却又是另一个陌生的概念。根据洛伦兹的经典电子论精神, 重的原子实被认为静止, 轻的束缚电子被认为在外场中可以运动, 且主要受电场的影响⁴。电子在外电场中相对原子实的位移造成了电偶极矩。出于好的近似, 将电子视作被绑在连接中心的弹簧的另一端的质点。质量为 m 不再被认为与基本粒子的质量一致, 事实上这个质量的本质实际上是虚无的, 因为当考虑到原子与电磁场相互作用的严格理论时图像将完全是量子的而超出了此处可以讨论的范围, 这样的一个为了解释现象去构造的模型就叫唯象模型 (phenomenological model)。但是其电荷量还是 $-e$, 弹簧劲度系数为 k 。这样子我们就可以写出电子在外电场中的动力学方程:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = -e\mathbf{E}$$

但是我们还忽略了一点, 加速运动的电荷会产生辐射, 也会因为辐射而带走能量和动量, 这就被视作介质对电磁波吸收, 散射的根本原因。也同样为了唯象地描述它, 我们认为电子是受到了一个辐射阻尼力 $\mathbf{f} = -\gamma\dot{\mathbf{r}}$ 。这样以上方程就被修改为:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = -e\mathbf{E}$$

命 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 代表共振频率 (resonance frequency) 或待会就会说明的吸收频率 (absorption frequency)。再命入射电磁波为频率 ω 的光, 按光学符号约定 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, 那么很容易解出受迫振动解 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$, 振幅为:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{-e\mathbf{E}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega/m}$$

我们现在就能算出动态的分子极化率来, 它被定义为分子中 Z 个价电子产生的偶极矩 $\mathbf{p} = -Z\mathbf{er}$ 与外电场 \mathbf{E} 的比值, 可以发现它也是个复数, 依赖于外光场的频率:

$$\alpha(\omega) = \frac{Ze^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega/m}$$

我们知道, 对于具体介质的极化总是与各个单元的极化有关。我们在此讨论稀薄的无固有偶极矩的气体

⁴根据洛伦兹力公式 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, 而电磁场中 $E = cB$, 故 $v \ll c$ 时磁场力可以忽略。

在外电磁波中的极化⁵, 此时不难想到介质的介电常数应该直接依赖于分子极化率, 事实上, 极化强度为:

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E} = n \mathbf{p}$$

从而得到复电容率的值:

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \frac{n Z e^2 / m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \gamma \omega / m}$$

通常, 把 $n Z e^2 / \varepsilon_0 m$ 称作等离子体频率(plasma frequency) 的平方 ω_p^2 . 那么上式也作:

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \gamma \omega / m} \varepsilon_0$$

出现虚部其实就意味着损耗, 在振动的过程中电场在持续不断地对振子输入能量而导致了电磁波的衰减. 只不过这里的损耗并不是导电行为导致的. 写出复电容率的实部和虚部 $\varepsilon' = \varepsilon_1 + i \varepsilon_2$:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cdot \left[1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega / m)^2} \right]$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \cdot \frac{\gamma \omega_p^2 \omega / m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega / m)^2}$$

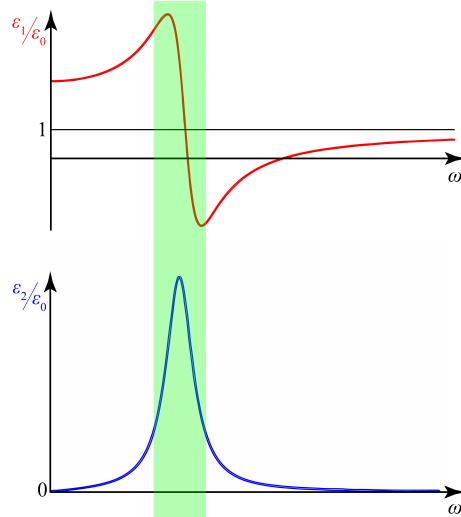


图 9.3: 复电容率与频率的关系

两个函数看上去复杂, 其实都属于近似的洛伦兹型函数(lorentzian function). 图像如右图所示. 在绿色带状区域这个函数有着较大的转折. 这发生在 $\omega \approx \omega_0$ 处. 若做近似, 认为反应损耗的 γ 较小. 则令 $\omega^2 - \omega_0^2 = x$, $\gamma \omega_0 / m = a$, 那么上式在带状区域附近近似为标准的洛伦兹型:

$$\varepsilon_1 / \varepsilon_0 = 1 - \omega_p^2 \cdot \frac{x}{x^2 + a^2}$$

$$\varepsilon_2 / \varepsilon_0 = \omega_p^2 \cdot \frac{a}{x^2 + a^2}$$

电容率的实部在带状区域由区域外的缓慢增加转为剧烈减少, 而恰好在这样一个区域, 电容率的虚部突然变得很大. 我们习惯上用虚部这种洛伦兹函数增加到最大值的一半的两个点之间的间距作为特征的半高峰宽(full width at half maximum, FWHM). 对于洛伦兹型, 其值恰为 $x = \pm a$ 之间的间距 $2a$, 但是注意到要转化为 ω 对应的间距, 它恰好为:

$$\Gamma = \frac{\gamma}{m}$$

我们可以从这个模型中清楚地看到两个物理现象: 色散(dispersion) 与吸收(absorption). 前者就是说折射率依赖于波长, 这和复电容率的实部依赖于频率只是说法不同本质一样. 而复电容率的虚部, 根据之前的讨论, 也就代表吸收. 我们发现在入射光的频率近似为谐振子的固有频率 ω_0 时, 对应经典力学中发生共振的区域附近, 色散和吸收都变得很显著. 我们知道, 经典电子论给出的解释仅仅是一个唯象模型, 所以相关的参数都要根据实验结果来确定. ω_0 可以根据发生强烈吸收与色散的波长来确定, 而 γ/m 则根据吸收峰的半高峰宽 Γ 来确定, 最后等离子体频率 ω_p 则比较有趣, 我们恰好可以根据零频率处的折射率 n_0 来确定它:

$$n_0^2 = \varepsilon_1(0) / \varepsilon_0 = 1 + \omega_p^2 / \Gamma^2$$

那么实际情况是否这么简单呢? 至少通过对右图的常温下水的色散的测量中我们发现, 除了在可见光波段水几乎是透明的而具有大约 1.33 的折射率, 在近红外 (0.8-2.5 μm) 与中红外 (2.5-15 μm) 波段的短波区定性上符合以上模型推导出来的结果. 但是中红外到远红外 (15-1000 μm) 则明显偏离以上结果.

⁵如果是液体或固体, 一方面由于不同的偶极子间的相互影响不可忽略导致公式需要修正, 也因为极化方式还有取向极化等所以需要修正, 但全都只影响定量结果, 定性的图像仍然是适用的.

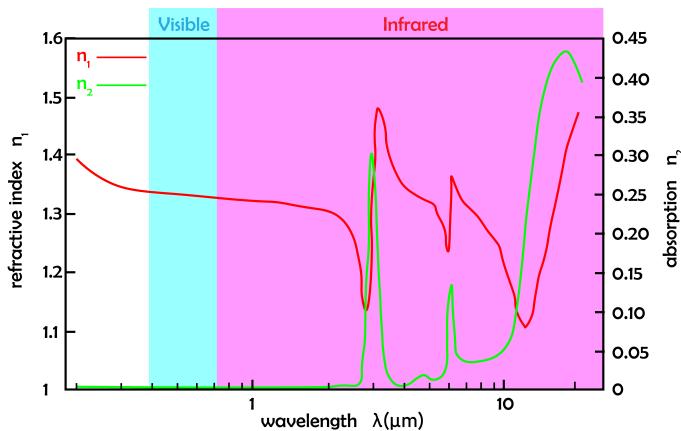


图 9.4: 水的可见-红外色散曲线

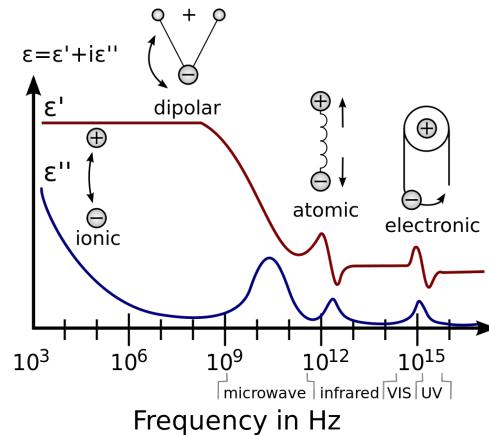


图 9.5: 光与原子作用类型

事实上,在不同的波段,适用于不同的光与物质相互作用的基本模型.微波波段光波长足够长使得晶体的正负离子做大范围的整体相对运动⁶,就是晶格振动.红外则开始使得分子振动,包括转动和振动等形式.再往下的可见波段才是电子共振,也包括原子间的能带共振和原子内的能级共振.最后在紫外波段,电子甚至能直接被电离,这就造成了光与物质相互作用问题的复杂性.

但无论哪种相互作用的机制,我们上述推导得到的描述有着特定共振频率的色散与吸收的最终公式是十分普适的.它只有三个待定的参数:共振频率 ω_0 ,半高峰宽 Γ 和反应共振强度的等离子体频率 ω_p .我们接下来要做的,是把不同振子,不同吸收效应带来的结果进行求和:

$$\begin{aligned}\epsilon_1/\epsilon_0 &= 1 + \omega_p^2 \cdot \sum_i \frac{c_i(\omega_i^2 - \omega^2)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \Gamma_i^2 \omega^2} \\ \epsilon_2/\epsilon_0 &= \omega_p^2 \cdot \sum_i \frac{c_i \Gamma_i \omega}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \Gamma_i^2 \omega^2}\end{aligned}$$

其中 ω_p 仍然统计各个吸收峰的总强度,而 c_i 系数的和必须为 1 则统计各个吸收峰的相对强度.我们最后计算远离吸收带处的折射率值.忽略各个 Γ_i 后得到:

$$n^2 = 1 + \omega_p^2 \cdot \sum_i \frac{c_i}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

上式就是著名的塞尔迈耶尔方程(Selmeier's equation),如果用波长表示则为:

$$n^2 = 1 + \sum_i a_i \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2}, \quad a_i = \frac{c_i \omega_p^2 \lambda_i^2}{4\pi^2 c^2}$$

上式依然可以做近似,把共振的各个波长 λ_i 从小到大按 i 来排列.不妨设 $\lambda_i \ll \lambda_{i+1}$,而 λ 恰好接近 λ_i ,那么忽略所有 λ_{i+1} 及之后对应的小量项并将 λ_{i-1} 及之前的项直接近似为 a_i :

$$\begin{aligned}n^2 &\approx 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + \frac{a_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \\ &= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_i + \frac{a_i \lambda_i^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \\ &\approx 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_i + \frac{a_i \lambda_i^2}{\lambda^2} \\ &= A_0 + \frac{B_0}{\lambda^2}\end{aligned}$$

⁶十分类似于热运动的那种形式,区别在于这是外场诱导的有规律的振动,而且正负电荷位移一定反相,对应热振动的特定光学支.

而进一步近似得到:

$$\sqrt{A_0 + \frac{B_0}{\lambda^2}} = \sqrt{A_0} \left(1 + \frac{B_0}{A_0 \lambda^2}\right)^{1/2} = \sqrt{A_0} \left(1 + \frac{B_0}{2A_0 \lambda^2} - \frac{B_0^2}{8A_0^2 \lambda^4} + \dots\right)$$

一般就总结为如下柯西色散公式(Cauchy dispersion formula):

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

有时为了精度原因再加上四阶项 $+C/\lambda^4$. 而从推导过程中我们发现系数之间的联系:

$$A = \sqrt{1 + \sum_1^i a_i}, \quad B = \frac{a_i \lambda_i^2}{2A}$$

9.1.3 * 辐射阻尼与散射截面

我们此前得到了电荷做加速运动时需要满足的辐射能流和拉莫尔公式:

$$S = \frac{q^2 \ddot{r}^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta, \quad P = \frac{q^2 \ddot{r}^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3}$$

从这个式子中可以看出, 在有加速度 \ddot{r} 的情况下, 辐射场的动量分布是关于电荷中心对称的. 故虽然会造成电荷的动能损失, 但是似乎不造成电荷的动量改变. 但是这一点其实不够准确. 因为偶极辐射本身过程中就包含有取最低阶项的近似成分. 本来可以精确计算的非零发射动量在这个过程中完全有可能被忽略. 而洛伦兹和亚伯拉罕在 1892 年通过将点电荷模型扩大为一个半径很小的球体证明了球体自己产生的辐射场会给自己一个动量的改变. 其中一部分解释为自带场产生的质量对应的跟随电荷运动的动量改变. 另一部分则就对应一个辐射阻尼力(radiation damping force), 后人称之为洛伦兹-亚伯拉罕力(Lorentz Abraham force). 后来量子电动力学进一步将其表达式精确化, 它为:

$$f = +\frac{q^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \ddot{r}$$

这样一个力却不大可能代表电荷与场这样一个无限多自由度⁷系统的全部. 注意到以下量具有时间量纲, 我们可以把电荷受到一个外力 \mathbf{F} 并与辐射场相互作用下电荷符合的动力学方程在仅考虑辐射阻尼力的情况下简化为:

$$\tau = \frac{q^2}{6\pi \varepsilon_0 m c^3}$$

$$m\ddot{r} = \mathbf{F} + m\tau \ddot{r}$$

这样一个简化就会招致祸端: 若在一维情况下, 将受力设置为以下元脉冲函数(unit pulse function):

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t < -0.5) \\ 1 & (-0.5 \leq t \leq 0.5) \\ 0 & (t > 0.5) \end{cases}$$

通过解数值方程 $\tau \ddot{x} - \ddot{x} = -F(t)/m$, 把 $a = \ddot{x}$ 视作待解函数, 可得通解:

$$a(t) = \begin{cases} A_1 e^{t/\tau} & (t < -0.5) \\ A_2 e^{t/\tau} + \frac{1}{m} & (-0.5 \leq t \leq 0.5) \\ A_3 e^{t/\tau} & (t > 0.5) \end{cases}$$

⁷每一点的场强全都是独立的变量. 类似于一张连续的弹性膜, 膜的位移就相当于场的激发.

且三个系数满足使 a 为连续函数的条件:

$$A_1 - A_2 = \frac{e^{0.5/\tau}}{m}, \quad A_3 - A_2 = \frac{e^{-0.5/\tau}}{m}$$

从中可以看出 $A_3 \neq A_1$. 这就导致了一个尴尬的结果: 在 $t < -0.5, t > 0.5$ 两段过程中, 至少有一段过程电荷做非匀速直线运动. 通过因果律来分析, 当力尚未作用在电荷上时, 电荷自然没有道理产生加速度. 故应取 $A_1 = 0$. 那么在这个外力作用于电荷一段时间后并撤销后, 这个理论预言电荷已经被一个扰动后的电磁场挟持以致做以下运动:

$$A_3 = -\frac{e^{0.5/\tau} - e^{-0.5/\tau}}{m}$$

$$a = -\frac{e^{0.5/\tau} - e^{-0.5/\tau}}{m} \cdot e^{t/\tau}$$

无疑, 这是荒诞的, 加速度不仅不是零, 甚至还随时间趋近于无穷大, 这种病态的行为显然没有在实际观测中出现过. 其实, 根据这个辐射阻尼力的推导过程中忽略的高阶项需要足够小的要求来看, 我们上面定义的 τ 恰好界定了这个近似可以进行的条件, 那便是我们关心的过程的 $\ddot{\mathbf{r}}$ 变化的特征时间 T 需要不大于对电子以上定义的特征时间的量级:

$$T \ll (\sim) \tau = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3} = 6.27 \times 10^{-24} \text{s}$$

在知道这个辐射阻尼力的做法的适用条件之后我们再来看一个常见的简单推导方法. 我们注意到辐射阻尼公式与辐射功率拉莫尔公式系数的高度相似性. 不难去思考两者的联系, 实际上:

$$\frac{q^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2 \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \right) - \frac{q^2 \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

可见辐射阻尼力对粒子做负功的功率与拉莫尔辐射功率之间仅仅相差一项. 我们指出在我们研究的电磁波照射到振子的经典色散模型中, 电子做周期性运动, 故这一项的周期积分为零:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2 \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \right) dt = \frac{q^2 \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \Big|_0^T = 0$$

故如果一个表达式能代表辐射阻尼, 它必然具有上式具有的形式. 而在 $T \ll (\sim) \tau$ 时, 正如我们之前介绍的那样, 这个做法是合理的.

利用特征时间 τ , 在频率 ω 的电磁波下的谐振子的动力学方程, 考虑辐射阻尼时, 就写作:

$$m\ddot{\mathbf{r}} - m\tau \ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = -e\mathbf{E}$$

这看上去与之前我们给出的谐振子的形式存在出入. 实际上, 在简谐 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ 的情况下, 对时间导数相当于乘以 $i\omega$. 于是上式写为:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega^2 \tau \dot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = -e\mathbf{E}$$

这就可以看出, 实际上之前的经典色散理论不过是将 $m\omega^2 \tau$ 整体取做 γ 而已. 引入辐射阻尼的现象之后我们就可以看出 γ 与角频率潜在的比例关系 $\gamma \propto \omega^2$.

在这个基础上我们解出单电子某维度上做振动的函数:

$$x = Ae^{i\omega t} = -\frac{eE_x/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega^3 \tau}$$

通过这个振幅我们除了推导色散, 还可以得到两个十分有意义的结果:

第一个结果是重新去计算电子辐射的功率, 即把外电磁场能量单位时间散射的那部分能量. 根据偶极振荡公式:

$$\bar{P} = \frac{e^2 \omega^4 |x|^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

而入射电磁波,如果就是沿 z 方向传播,沿 x 方向偏振的平面波,则具有平均能流:

$$S = \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \frac{|E_x|^2}{2} = \frac{\epsilon_0 c |E_x|^2}{2}$$

用这个功率除以这个能流,我们得到一个面积量纲的物理量.实际上就是相当于电子吸收了这个面积里面的辐射并以散射的形式做了新的辐射发射.这个面积称作**散射截面**(scattering cross section),计算可得:

$$\sigma = \frac{\bar{P}}{S} = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \cdot \frac{1}{\omega^2 \tau^2 + (1 - \omega_0^2/\omega^2)^2}$$

而其中 r_e 就是我们之前提过的**经典电子半径**(classical electron radius).它恰恰是在洛伦兹等人在研究辐射的问题时提出的.故也称**洛伦兹半径**(Lorentz radius):

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$

我们首先注意一点:由于 τ 是个很短的时间,故能够使得 $\omega\tau \sim 1$ 的角频率对应的光波具有以下的量级:

$$\omega \sim 10^{23} \text{ rad/s} , \quad \lambda \sim 12 \text{ fm} , \quad E \sim 105 \text{ MeV}$$

这实际上是一个极高的频率了,到这个能标,光子对电子的影响已经完全不能忽略光子的量子性,当然也要考虑电子的波动性,康普顿散射和量子电动力学的理论时必要的.而物质形成的体系总是有 $\omega_0\tau \ll 1$,故即使在 $\omega \gg \omega_0$,一般也可以把 $\omega\tau$ 视作小量.那么在这种场合下:

$$\sigma \approx \frac{8}{3} \pi r_e^2$$

这个截面称为**汤姆孙截面**(Thomson cross section).反映了在高频电磁波作用下电子接近自由电子散射电磁波的行为.

而在低频下 $\omega \ll \omega_0$,可做近似:

$$\sigma \approx \frac{8}{3} \pi r_e^2 \cdot \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

这个式子后面会介绍,反映了瑞利散射的基本原理.

最后,在 $\omega \approx \omega_0$ 时,截面表达式的分母很接近零.散射截面远大于汤姆孙截面,电子强烈吸收外电磁场能量,并造成大的散射.这称作**共振散射**(resonance scattering).实验上实际上也观察到了这个现象.但是洛伦兹经典色散理论的弱点就在于它是个经典的理论,并不能很好地解释实验中得到的数据,因为它没有构建出理论模型中谐振子的量子本质.

第二个结果,我们来考察一下这个振子在外界电磁场下产生的振动能量:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} k \Re e(x)^2 + \frac{1}{2} m \Re e(\dot{x})^2 \\ &= \frac{1}{4} m (\omega^2 + \omega_0^2) |x|^2 \\ &= \frac{e^2}{2\epsilon_0 m \omega^2} \cdot \frac{\omega^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^6 \tau^2} \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 |E_x|^2 \end{aligned}$$

这样也许还不足以引起理论上的价值.但是如果设想一个复杂的电磁波场,它总可以分解为简单的平面波场(参考下一节介绍的傅里叶变换理论).那么该点的瞬时 x 方向电场就可以分解为:

$$E_x(t) = \int_0^\infty [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] d\omega$$

而对于波 $A(\omega) \cos \omega t$ 和 $B(\omega) \sin \omega t$,在谐振子上激发的能量是:

$$K(\omega) = \frac{e^2}{2\epsilon_0 m \omega^2} \cdot \frac{\omega^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^6 \tau^2} \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 [A(\omega)^2 + B(\omega)^2]$$

作为原因,多个谐振电场的叠加产生的结果就是简单的振子的振动的简单叠加,这是因为谐振电场与振子的振动满足的微分方程是线性的.而按照简谐分解的一个数学结果就是,能量也可以直接叠加:

$$\overline{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_x^2(t)} = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\varepsilon_0 A(\omega)^2 \overline{\cos^2 \omega t} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 B(\omega)^2 \overline{\sin^2 \omega t} \right] d\omega = \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{1}{2} \varepsilon_0 [A(\omega)^2 + B(\omega)]^2 d\omega$$

从这个角度来看,振子就会因此具有 x 方向的平均能量:

$$\begin{aligned} K_x &= \int K(\omega) d\omega \\ &= \int \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m \omega^2} \cdot \frac{\omega^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^6 \tau^2} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 [A(\omega)^2 + B(\omega)]^2 d\omega \end{aligned}$$

如果考虑一个热力学系统,辐射和振子达到了一个温度为 T 的热平衡.那么经典理论认为:每一个振子在一个方向上应当具有平均能量 kT .这一点之后由普朗克发现是错误的.但是如果我们坚持这个做法,由于电磁辐射的内能密度亦可以根据频率展开:

$$\begin{aligned} u &= \overline{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_x^2(t)} + \overline{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_y^2(t)} + \overline{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_z^2(t)} + \overline{\frac{1}{2\mu_0} B_x^2(t)} + \overline{\frac{1}{2} B_y^2(t)} + \overline{\frac{1}{2\mu_0} B_z^2(t)} \\ &= 6 \cdot \overline{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_x^2(t)} \\ &= \int_0^\infty u(\omega d\omega) \end{aligned}$$

这就得到了:

$$u(\omega) = 3 \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 [A(\omega)^2 + B(\omega)]^2$$

从而之前的积分就可用 $u(\omega)$ 表示.但是又由于 τ 很小,故仅在 $\omega \sim \omega_0$ 附近近似:

$$\begin{aligned} K_x &= \int \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m \omega^2} \cdot \frac{\omega^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^6 \tau^2} \cdot \frac{u(\omega)}{3} d\omega \\ &= \int \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m \omega_0^2} \cdot \frac{2\omega_0^4}{4\omega_0^4 (\omega - \omega_0)^2 + \omega_0^6 \tau^2} \cdot \frac{u(\omega_0)}{3} d\omega \\ &= \frac{e^2 u(\omega_0)}{12\varepsilon_0 m \omega_0^2} \cdot \int \frac{dx}{x^2 + \omega_0^2 \tau^2 / 4} \\ &= \frac{e^2 u(\omega_0)}{12\varepsilon_0 m \omega_0^2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} \\ &= kT \end{aligned}$$

代入 τ 的表达式,这就得到了:

$$u(\omega_0) = \frac{3kT \omega_0^3}{2\pi^2 c^3}$$

这就是辐射与振子热力学平衡的理论基础,从此建立的理论可以导出著名的瑞利-金斯公式,从而招致了著名的紫外灾难.普朗克提出了辐射的量子理论成功地解决了这个问题.参见下一章.

第十章 量子论

10.1 黑体辐射

- 黑体辐射的性质:

- 总辐射强度:

$$J = \sigma T^4 = \frac{1}{4} u c$$

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4) = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$$

- 辐射频域谱: 普朗克公式:

$$J(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

- 辐射空间谱: 郎伯定律:

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{J}{\pi} \cos \theta$$

- 非黑体满足基尔霍夫定律: 某角频率 ω 下发射率 $e(\omega)$ 与吸收率 $a(\omega)$ 必然相等. 发射率是

$$\frac{dE}{dSdt} = \int E(\omega) d\omega$$

$$e(\omega) = E(\omega)/J(\omega)$$

故基尔霍夫定律发现:

$$e(\omega) = a(\omega)$$

10.2 光粒子性

- 光子概念:

$$E = \hbar\omega , \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

- 用于解释普朗克公式: 玻色-爱因斯坦统计.

- 用于解释光电效应:

$$E_k = h\nu - W \geq eU \rightarrow I$$

10.3 玻尔原子

- 精细结构常数(fine structure constant):

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

- 半经典假设: 忽略电子的波动性, 认为仍然有轨道运动, 且为圆周运动, 符合牛顿力学:

$$m \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}$$

- 量子化假设: 角动量是量子化的, 或者作用量量子化:

$$mv_n \cdot 2\pi r_n = nh$$

- 定态跃迁假设: 基态 $n = 1$ 是能量最低的稳定态, 其他态与基态彼此之间都有可能发生转变, 转变是瞬间发生的, 伴随着一个光子的吸收或发射, 且需要能量守恒:

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$$

$$h\nu = E_n - E_m$$

- 玻尔理论的解:

$$r_n = n^2 a_0$$

$$v_n = \frac{\alpha c}{n}$$

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{\alpha^2 mc^2}{2n^2}$$

其中 E_0 为第一电离能, 氢原子为 13.6 eV. 而 a_0 为玻尔半径, 它与另外两个特征长度: 电子康普顿波长:

$$\lambda_e = \frac{h}{mc}$$

经典电子半径:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$$

符合;

$$\alpha = \frac{\lambda_e/2\pi}{a_0} = \frac{a_0}{r_e}$$

10.4 物质波与波函数

- 匀速运动的粒子对应一个平面波;

$$\psi = A e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

且符合德布罗意关系:

$$E = \hbar\omega$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

- 对这个波的诠释: 模方表示粒子在某空间点被探测到的概率分布函数:

$$f(\mathbf{r}) = |\psi|^2$$

$$\int f(\mathbf{r}) dV = 1$$

- 测不准原理: 平面波情况下粒子位置是不确定的, 但是动量却唯一. 任意一个波函数可以分解为不同概率的平面波的叠加, 那么某方向上位置和动量的两个不确定度(标准差)满足:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$