

高二物理竞赛 • 力学 (上)

学而思

目录

第一章 运动学	5
1.1 时空与物质	5
1.1.1 时空观, 坐标系	5
1.1.2 物质	7
1.1.3 参考系, 物理规律与其不变性	9
1.2 运动的描述	10
1.2.1 质点的运动	10
1.2.2 刚体的运动	17
1.3 参考系变换	19
1.3.1 点变换	19
1.3.2 刚体变换	21
1.4 运动的牵连	21
1.4.1 接触系	21
1.4.2 纯滚系	22
1.4.3 约束系	22
第二章 动力学	25
2.1 牛顿定律	25
2.1.1 概述	25
2.1.2 牛顿第一定律	26
2.1.3 牛顿第二定律	26
2.1.4 牛顿第三定律	27
2.1.5 质点系与它的牛顿定律	28
2.1.6 非惯性系的处理	30
2.2 动量定律	30
2.2.1 质点的动量	30
2.2.2 质点系的动量	31
2.3 角动量定律	32
2.3.1 质点的角动量	32
2.3.2 质点系的角动量	33
2.4 能量定律	34
2.4.1 质点的动能	34
2.4.2 质点系的动能	34
2.4.3 其它能量形式	35
2.5 位力定律 *	38
2.5.1 质点的位力	38

2.5.2 质点系的位力	39
2.6 碰撞问题	40
2.6.1 二质点正碰	40
2.6.2 自由刚体的碰撞	43
2.6.3 多体碰撞	43
第三章 静力学	29
3.1 约束	29
3.2 力系化简	29
3.3 平衡问题	29
3.4 虚功原理	29
3.5 分析力学初步	29
3.6 平衡态稳定性	29
第四章 振动与波	31
4.1 方程与谐振	31
4.1.1 简谐振动的定义	31
4.1.2 简谐振动的性质	31
4.2 阻尼振动与受迫振动	32
4.3 多自由度小振动 *	32
4.4 非线性摄动	32
4.5 格波	32
4.6 波动方程	32
4.7 波的色散	32
第五章 万有引力	33
5.1 有心力下运动	33
5.2 万有引力下运动	33
5.3 二体与潮汐	33
第六章 刚体	35
6.1 刚体的物理描述	35
6.2 平面平行运动	37
6.3 空间刚体运动 *	37
第七章 流体	39
7.1 流体的物理描述	39
7.2 定常流动动力学	39
7.3 黏滞流体动力学	39
第八章 弹性体	41
8.1 弹性体的物理描述	41
8.2 弹性棒, 弹性膜与弹性体	41
8.3 弹性波	41

第九章 相对论	43
9.1 相对论运动学	43
9.2 相对论动力学	43
9.3 相对论连续物质	43
9.4 相对论电磁场	43

第一章 运动学

1.1 时空与物质

物理学,从刚开始成为实验性的科学的伽利略时期开始,到近半个世纪年来理论物理学家对额外维度的探讨,都给予了**时空**(spacetime) 最核心的地位. 牛顿的理论,分析力学,经典场论,相对论这些理论最基本的图像都是时空与**物质**(matter) 的分立性. 时空是装备了一个能体现出物理物理意义的**度量**(metric) 的 3+1 维对象¹. 而物质是在每个时空点处的某种结构. 下面会分别介绍不同物质体系的描述方法. 在这之前我们来看看不同的时空观:

1.1.1 时空观,坐标系

牛顿力学理论体系基于**伽利略时空观**(Galilean spacetime picture),也就是**绝对时空观**(absolute spacetime picture). 在这里空间是三维的平直空间. 设想一个人站在该空间的某个空间点,他的胸前,头顶和右手平举的三个方向就是相互垂直的方向. 如果以自己的臂长为标准长度,他能够定义空间中每两个点之间的空间间隔. 事实上,这个人能够以一种正确的方式为每个空间点定义一个坐标,那么所有三维空间点的集合与任意两个点之间的距离为:

$$A(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad ; \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) : l^2 = \overline{AB}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

因为空间不同于时间,我们为以上数字赋予特殊的物理含义,也就是加上**量纲**(dimension). 如果两点坐标为 $(0, 0, 0)$ 和 $(1, 1, 1)$, 那么 $l = \sqrt{3}\text{m}$, 而不是 $l = \sqrt{3}$. 其单位 m 一方面表示了这个物理量的属性,另一方面指定了某个实际物理体系确定下来的固有长度大小. 现行的 (2018 年 1 月 1 日,下文同) 国际单位制对 1m 的定义如下²:

1m 是光在 $1/299792458\text{s}$ 内在真空中行进的距离.

这就是我们的**三维平直空间**(3-dimensional flat space). 注意空间点具有物理实际意义,它可以脱离坐标系而单独存在. 事实上坐标系的原点可以建立在空间中的任意点处,朝向也可以是任意方向,两个空间点之间的距离 l 不会依赖于坐标系的选取,但两个点的坐标会因坐标系不同而改变. 如果我们选取的坐标系总是下述使得两个相距很近的点之间的微元距离公式成立:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

那么建立的坐标系就是一个**笛卡尔坐标系**(Cartesian coordinate system),即**空间直角坐标系**(3D orthogonal coordinate system). 但是以空间直角坐标系为基础,我们又经常建立**球坐标**(spherical coordinate) 和**柱坐标**(cylindrical coordinate) 系统. 通常取 x 轴为**幅轴**(azimuth axis), 点在 $x-y$ 平面上的投影与原点的连线相对 x 轴转过的角度为 φ , 即**幅角**(azimuth angle). 而 z 轴为**极轴**(polar axis), 而点与原点连线与极轴的夹角 θ 为**极角**(polar angle). 天文观测用球坐标就很方便,它是以描述的空间点到原点之间的距离 r , 也

¹数学上有一套严格的说法,把这种连续,光滑的四维对象称为**伪黎曼流形**(pseudo-Riemannian manifold).

²一方面,它依赖于狭义相对论的正确性,目前极少理论物理工作者会质疑它. 另一方面,应该要先定义下文的 1s,再来定义 1m.

称**矢径**(radius), 和两个描述角位置的极角幅角来构成三个坐标 (r, θ, φ) 的. 而理论物理里也常用到的柱坐标是以 (ρ, φ, z) 为描述空间点的坐标, ρ 是空间点到 z 轴的距离.

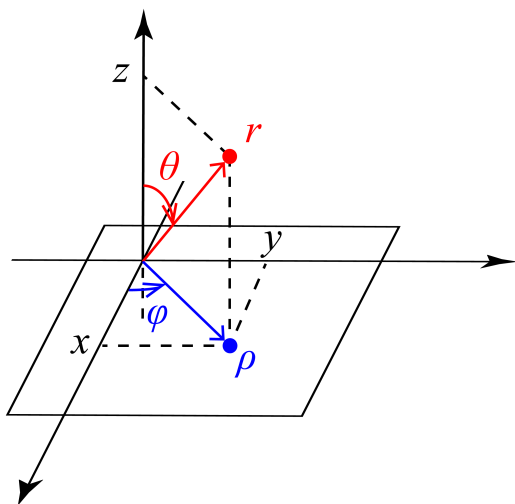


图 1.1: 三种坐标

$f(r, \theta, \varphi) = f(r, \forall \theta, \forall \varphi)$ 被称为**各向同性**(isotropic). 最后**中心对称**(centrosymmetric) 是一个很弱的对称性, 它仅仅代表函数在**中心反演**(space inversion) 下的对称性:

$$f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$$

绝对时空观中的时间则是一种完全与空间独立的属性. 实际上, 每一个空间点处的人都能感受到时间的流逝. 十分抽象的把这些不同的时刻画在一根时间轴上, 便是一维的时间坐标:

$$A(t) \in \mathbb{R} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

而时空又是两个独立的概念. 任意一个坐标点处都有时间轴, 而任意一个时刻都有一个三维空间切片. 事实上, 我们的时空是一个 3+1 维的结构, 合理地选取坐标后, 实际上可以把时空结构写成四维坐标:

$$A(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad ; \quad x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

而对于任意两个时空点, 存在绝对的时间, 也就是可以找到两个事件的绝对时间差:

$$\tau = |t_2 - t_1|$$

但空间距离却具有相对性. 我们要求在同一时刻的同一空间切片上定义空间的度量:

$$t_1 = t_2 : \quad l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

不同时刻的空间, 被线性地组织在一起, 保证每一刻都平直的空间既不会随时间膨胀收缩, 也不会旋转加速. 这种时空结构被叫做**牛顿-嘉当几何**(Newton-Cartan geometry)³.

时间是一个新的量纲, 其国际单位制对 1s 的定义为:

1s 是铯-133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射周期时长的 9192631770 倍.

牛顿-嘉当几何的显著特点是物理量的定义没有所谓的**协变性**(covariance). 固然, 在三维空间坐标框架的旋转下, 任何物理过程中的事件所发生的位置坐标发生旋转变换, 而几乎所有标量 (比如质量, 能量) 都不

³用更为严格的语言来说, 我们需要一个装备了一阶形式 “钟” c_ν 和二阶逆变半正定对称张量类空间度规 $s^{\mu\nu}$ 的四维微分流形 \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} : \quad s^{\mu\nu} c_\nu = 0$$

变,几乎所有矢量(比如动量,角动量)都按照类似坐标变换的法则发生变换.但是,对于更普遍的一系列**伽利略变换**(Galilean transformation),也就是相对匀速运动的参考系之间的变换,时空坐标的形式却不能简单地推广到能量动量角动量上.

不同于绝对时空观中时间与空间成为相互独立的量纲的特点,狭义相对论改变了对基本物理量的看法.狭义相对论把时空看成为可以相互转化的不可分割的新的 3+1 维整体,同时性已然破缺.两个时空点之间无法定义绝对的时间间隔.在**相对论时空观**(relativistic spacetime picture)下,时间和空间可以用同一把尺子去丈量:这是由于光速的不变性:

$$c = 299792458\text{m/s}$$

而量出来的长度叫做**时空间隔**(spacetime interval):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

这赋予时空以截然不同的结构,最关键的一点是,时间的绝对性被取消了,不同事件发生时间先后的比较不总是可行,相对论的有限速度因果律在这里取代了经典观点的时序因果律.我们将在本书最后介绍相对论理论.

1.1.2 物质

时空是物理过程发生的舞台.那么将物质引入后舞台上所演出的便是**事件**(event).事件这个物理概念由这样的数学工具来描述:它的第一个要素自然是时空坐标 (\mathbf{r}, t) ,是事件在时空上的外化.第二个要素是事件内禀的属性.它取决于所引入的物质种类,还取决于我们所关心问题的层次.一般用标量,矢量,乃至张量这样的数学工具来描述它.举例,电磁场物质在经典物理中用电场磁场来描述,但在**量子力学**(quantum mechanics, QM)中这不够了,需要用矢势和标势来描述才是完整的.在更深的**量子场论**(quantum field theory)中甚至这也是不够的.还需要量子化为光子才合适.又比如,电子这个很有意思的现象,最简单的模型是质点模型,内禀的属性是质量,动量与能量⁴.然而与电磁场的经典相互作用强度告诉我们还有一项内禀属性叫做电荷量.近代人们惊奇地发现原来电子还固有磁矩,也就是电子的自旋.最后狄拉克等人发展出**量子电动力学**(quantum electrodynamics, QED),统一地用一个四分量的旋量波函数和它的方程中的若干参数来完整地描述所有发现的电子内禀属性.

经典物理学⁵(classical physics)中涉及到的物质主要有:

1. 质点 (point mass, particle)

不得不承认质点是牛顿力学的根基,一切可观的结论的出发点.质点所对应的事件集合为时空中的一条**世界线**(world line).每一个时间仅仅有可能只有一个事件发生.实际上质点的运动用**运动学方程**(kinematic equation)来描述:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

而**质量**(mass)是质点必要的内禀属性.它将作为参数出现在下一节介绍的动力学方程中.它反应物质受到同样大小的相互作用运动状态改变的难易程度.国际单位制对 1kg 的定义如下:

1kg 是保存在法国巴黎布勒特伊官的国际计量局实验室的约 47 立方厘米立式铂铱合金小圆柱的质量.当然,处于实用考虑,也是很多它的官方复制体的质量.

这个定义从 1889 年至今已经有一百多年了,历史远长于其他六个国际基本单位.2018 年末将有望修改这一古老的定义方式,新的定义⁶为:

⁴不要认为动量能量不是内禀的而是由时空运动所决定的,读者可以思考在水中一个气泡的上升,它为体系带来的动量方向如何?

⁵本书的经典物理学指牛顿力学,分析力学,经典电磁学,经典统计力学与狭义相对论的范畴.

⁶一方面,它依赖于狭义相对论和量子力学的正确性,目前极少理论物理工作者会质疑它.另一方面,应该要先定义上文的 1s 和 1m,再来定义 1kg.

1kg 被这样定义:取普朗克常数的固定数值在单位 $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ 下为 $6.62607015 \times 10^{-34}$.

长度, 时间和质量为三大力学量纲, 量纲是物理量的属性, 物理量的表示方法为数值加单位, 每个量纲有自己独特的一套单位, 不同单位间差一个纯数的倍率. 在物理量的加减时量纲必须相同而且结果保持量纲不变. 但不同量纲物理量可以进行乘除而生成新的量纲. 除了简单的加减乘除的以上规则以外, 其他特殊函数必须只能作用在无量纲的纯数上. 这叫做**量纲法则**(dimensional rules).

2. 质点系 (particle system)

质点系是对质点的一种自然扩展. 讨论质点的运动时质点受到的相互作用来自何方? 在牛顿力学的框架下必然来自施力物体. 故把两个质点作为整个体系讨论, 把相互作用区分为内力与外力而推广之前的结论, 在这个过程中我们能体会到哪些结论是一脉相承的普遍规律而哪些需要重新审视与修改. 从原理上质点系不过是多个质点同时存在的情况而已. 而经典统计力学是这种观点的提炼与延伸, 它着眼于一个宏观大分子数的体系的长时间平均下的行为, 理论上常常结合概率论的做法, 对等概率的体系代表点构成的系综做平均. 从中提取统计力学下不平凡的物理量.

3. 连续介质 (continuous media)

一方面, 连续介质是从纯粹的理论过渡到实际问题的至关重要一步. 另一方面, 在处理连续介质的问题中形成了场论, 它作为了一种与质点截然不同的物理图像形成了自己的一整套理论. 更重要的, 量子场论认为由于不确定原理, 质点与世界线的观点实际上是作为场的传播的一种近似. 也就是说, 场论相比质点的力学更具有兼容性和普适性. 对于简单的连续介质, 内禀的属性由每一个点处的质量密度 ρ 和速度 \mathbf{v} 描述, 这实际上形成了一个标量场和矢量场:

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t) \quad ; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

而动力学方程的列法又强烈依赖于介质内的相互作用. 于是这个大的问题又分出很有代表性的弹性力学和流体力学, 还有介于两者之间的粘弹性塑性模型等等. 还有从热力学平衡态出发考虑的近平衡态统计力学方法.

4. 场 (field)

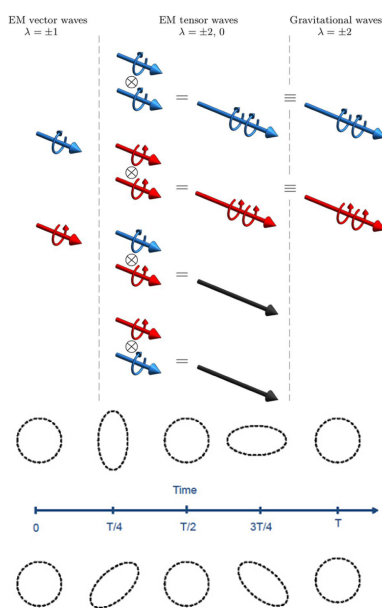


图 1.2: 引力波与电磁波的区别

关于场的理解历史上经历了两个过程. 第一个阶段是正如上面的连续介质的做法, 场是作为某种事先已经被研究的足够清楚的粒子体系与它们之间的相互作用的描述方法与数学工具. 而从牛顿时代开始人们就默认了超距作用的存在, 而场数学工具的第二个作用就是描述电荷之间, 质量之间的超距作用. 但是逐渐人们意识到相互作用传播速度的有限性, 于是场开始变成某种与物质其他耦合的物质而单独存在, 这就是第二阶段, 人们意识到了场本身就是一种物质, 电子与电子之间不能直接相互作用, 电子改变了真空, 稳定地与电磁场相互作用而产生库仑场, 然后在第二个电子产生相互作用力. 将场作为某种先验地存在于时空中的物质形式进行描述与研究的学科就叫做**场论**(field theory). 有哪些可能的场形式? 场的物理量如何书写? 场与粒子, 场与场之间如何相互作用便是场论的研究内容. 比如说, 动力学所关心的内容, 场的质量本身没有定义, 可以定义的一般是场的定域动量与波矢, 能量与角频率, 平面波的

色散关系等等. 的确, 场论最基本的做法是傅里叶分解, 它认为平面波是不受任何相互作用时的场的惯性运动方式, 而任何场的运动, 每一时刻都可以分解成一系列平面波的叠加. 就好像任何复杂体系的运动本质上都是质点系的运动, 而质点的运动每时每刻都可以看出匀速运动那样.

场论根据其描述方法分为标量场论, 矢量场论, 张量场论和旋量场论等. 电磁场论是矢量场论, 它用四势矢量 (φ, \mathbf{A}) 来描述. 引力场论在广义相对论弱场近似下是张量场论, 但传播的引力波和电磁波类似只能有两种偏振, 其模式为 $+$ 型和 \times 型, 这又是不同于电磁波的. 在现代的观点中, 场是真空中某种激发, 十分类似于一张二维的拉紧的薄膜, 没有任何振动时它已经固有能量了, 场物质反应为膜的各种振动形式. 而一个石子受到外力而压弯了膜, 就可以理解为粒子与场之间的相互作用.

1.1.3 参考系, 物理规律与其不变性

坐标系(coordinate system) 是一套用来描述时空点位置的坐标系统, 而**参考系**(reference system) 则是下文将引申的一类坐标系的统称.

在伽利略时空观⁷下参考系的定义相对简单. 我们只需要任意指定一个观察者, 观察者可以在 $3+1$ 维的时空中作任意运动, 每一个时刻对应一个测量的坐标系统: 观察者分别以右手边, 胸前和头顶三个方向建立坐标系, 坐标系的刻度就是其代表的位置到原点观察者处的空间距离. 这样便可以表示任意事件的时空坐标. 而且构成一个三维空间直角坐标系. 叫做观察者的**固有参考系**(proper reference system).

物理规律的本质是什么? 在一个特定的参考系中, 我们进行一些物理量的测量, 测量得到的值之间在特定的实验条件下会满足特定的关系而不依赖于某些具体的参数, 一般都是等式. 这样的普遍成立的等式就可以反映某些物理规律. 从**动力学**(kinetics) 的角度理解, 体系的演化是**状态**(state) 随时间的演化, 而体系的状态由一组完备的**态参量**(state variable) 描述, 态参量可以包含一些广义坐标 q_α 和他们对时间的导数即广义速度 $v_\alpha = \dot{q}_\alpha$. 而以下**决定论**(determinism) 则对物理规律的形式做出了规定:

动力学系统:

已知某时刻 $t = 0$ 的初态 $\{q_\alpha(0), \dot{q}_\alpha(0)\}$ 后, 应能预言任意将来的状态 $\{q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)\}$.

事实上, 不光是将来的状态, 而且在一般经典物理的框架下, 过去的状态也是可以“预言”的. 这是因为我们进一步要求动力学系统的规律是以下形式的二阶方程:

$$f_i(\ddot{q}_\alpha, \dot{q}_\alpha, q_\alpha, t) = 0$$

而且广义坐标的个数应该和方程的数目一致, 方程是至多二阶的. 微分方程的描述在数学上完全导致了体系彻底的决定性, 只要知道初始条件便可以往前往后推理所有发生的物理现象⁸.

这一物理学科研究范围内的原理很强大, 强大到历史上很多物理学家和哲学家都质疑过它的真实性和适用性. 最著名的莫过于拉普拉斯提出的**拉普拉斯妖**(Laplace's demon) 的论点: 如果存在一个全知的拉普拉斯妖, 能够知道在某一时刻宇宙中所有原子的精确位置与动量, 那么任意时刻的状态也能被预言. 这种决定论观点总是被拿来与**自由意志论**(free will) 去归谬, 如果过去与未来都已经被谱写, 那么人类所有的行为的意义和动机也就不能被解释. 这直到今天也是科学与哲学未能获得满意的回答的问题.

但是科学的一个目的就是在于能够对未发生的事情进行预言, 所以本着对决定论的认可与尊重, 我们才能继续我们的科学研究.

下一个伽利略相对性原理.

⁷本章仅限讨论非相对论, 相对论见后

⁸更有甚者, 经典物理也难以解释耗散现象, 在忽略耗散时, 方程应该还具有平移对称性 (不显含 t) 和时间反演对称性 (方程对广义速度是偶函数). 此时对将来和对过去的预言在广义速度取相反数时是完全对称的, 而且预言只依赖于时间差不依赖于初始时刻.

1.2 运动的描述

1.2.1 质点的运动

质点的运动是复杂的连续体的运动的基础. 所谓运动(motion) 就是每一个时间都有一个位置. 就是说位置是时间的函数:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

我们使用实数上的矢量空间和矢量来刻画真实的物理学上的二维或三维空间和其中的点. 也即:

$$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \text{ or } \mathbb{R}^3$$

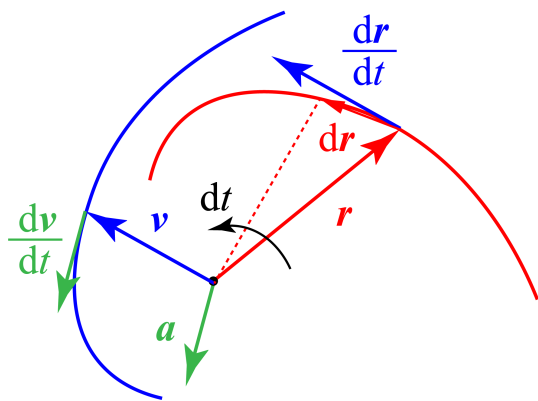


图 1.3: 质点的位置, 速度与加速度

前者对应二维运动, 后者对应三维运动. 我们从中可以发现, 函数是描述运动的数学工具, 对矢量与函数的分析知识便是运动学和物理学的基础. 而运动学本身是可以看成是数学的一个分支的. 对质点的位置矢量求导数便得到速度矢量, 再求导数或是求二阶导数便是加速度矢量:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)] - [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t)]}{\Delta t^2}$$

正如图??所示, 我们可以把每一个瞬时的速度矢量共起点画出来, 并把端点连做曲线, 此时背景的空间往往叫做速度空间(velocity space), 它的更普遍的对应是动量空间, 这在近代物理的理论值具有重要地位. 引入速度空间后质点的运动便可以等价地在速度空间中进行研究. 比如在均匀重力场中的抛体运动在速度空间中就是简单的竖直向下的匀速直线运动. 而平方反比力下的天体运动(开普勒问题) 实际上在速度空间中可以证明将变为变速偏心圆周运动. 这使得通过速度求加速度就好像通过位置求速度那样方便. 具体求法接下来还得进一步展开.

加速度的导数偶尔也会进入物理研究的视野, 它被叫做急动度(jerk). 即:

$$\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}$$

矢量函数概念就是实数到矢量的映射, 但是具体能写出函数形式的例子在物理中却不是那么常见. 比如抛体运动的运动对应的函数, 即运动方程(equation of motion)⁹为:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$$

它是牛顿定律下以下微分方程结论的解:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g}$$

但是在一般情况下, 要表示出一个既有大小又有方向的矢量函数, 我们得采用分解的思想, 研究能够完全确定这个矢量值的参数. 通常有以下做法:

1. 直角坐标系下的分解

在一个欧几里得空间里的一个参考系中研究问题, 很常见的一种做法是建立直角坐标系来表示一个点的位置. 以更普遍的三维运动为例. 既然物体的位置由坐标 (x, y, z) 来表示. 我们就能认为表示运动的任务

⁹指运动学运动方程, 动力学运动方程就是反应运动的规律的, 能够最终解出来运动学运动方程的微分方程.

由三个标量函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 来承担. 其实这与上面介绍的用矢量来表示位置是非常一致的, 因为实际上点的坐标通常也被理解为原点指向这个点的矢量在三个基矢的坐标:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

出于哈密顿 (Hamilton) 爵士关于把三维空间三个方向基矢视作四元数代数运算的旋转等效的奇妙观点, 我们分别把 x, y, z 方向的基矢按照惯例记做 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. 也常常因为它们是单位矢量 (长度为 1), 而记做 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. 这样便能把 \mathbf{r} 分解出 x, y, z 来.

分解以后, 重新合成便能得到需要的物理量. 这其中的意思是: 比如我们为了求一个曲线运动速度或者加速度的 x 分量. 也就是求下列表达式:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

中的分量 v_x, a_x . 其求法非常直接, 便是:

$$v_x = \frac{d}{dt}x(t) \quad , \quad a_x = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

这相当于是说, 求导数和向某固定方向投影是可以交换前后次序的:

$$\mathbf{i} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{i} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{v})$$

这是当然的, 因为矢量点乘的导数的法则也符合与标量乘积求导数类似的莱布尼茨法则, 而常矢量 \mathbf{i} 不随着运动改变. 所以导数只有对 \mathbf{r}, \mathbf{v} 求导的项.

在数学上, 曲线段也经常描述为是与某实数上区间同胚(homeomorphic) 的几何图形, 这其实就是说, 存在自变量 t , 不失一般性地, 我们让其取值范围为 $(-\infty, +\infty)$. 而存在一个从这个自变量到三维空间点 (x, y, z) 的光滑映射:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

在数学上看, 这其实就是曲线方程: 其参数方程的唯一给法. 这样的式子就给出了几何学上的光滑曲线的定义. 而不同于以往我们对曲线是 $y = f(x)$ 的图像的刻板认识. 但在这里, 我们恰巧发现如果把参数 t 理解为时间的话, 这恰好就对应到了一个粒子在三维空间中的运动, 出于这样的原因, 我们把反应了粒子位置随着时间变化的方程称为运动方程. 它是轨迹方程(function of trajectory) 的一种特殊情况. 对于轨迹方程, 我们只需要通过符合方程的点 (x, y, z) 构成粒子所有运动中经过的位置构成的集合即可. 例如, 在地面 $z = 0$ 出发以仰角 φ 斜抛一个物体. 那就以出发点为原点建立坐标系, 竖直向上为 z 轴, 抛的方向向前为 x 轴. 那么运动方程为:

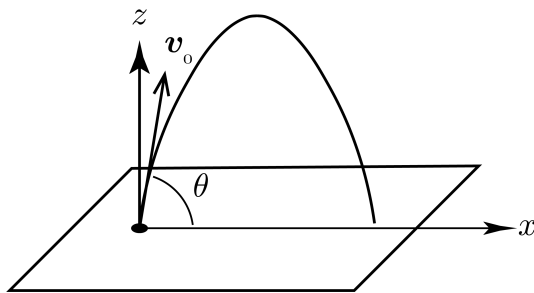


图 1.4: 抛体运动

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \varphi \\ z = v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

但是轨迹方程不仅可以写成以上形式, 还可以消去 t 得到:

$$z = x \tan \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \varphi)$$

2. 平面极坐标系下的分解

如果质点做平面运动, 那么我们问题得到了简化. 此时往往有些情形下我们关心从原点的观察者出发看质点的运动时, 质点离观察者的距离和质点相对观察者的方位. 故引入极坐标系(polar coordinate system) 是自然而然的做法. 其步骤为: 确定观察者位置为极点(pole), 引出一条原点出发的射线为极轴(polar axis); 测量质点位置到极点距离 r 为矢径(radius); 从极点指向质点位置形成矢量矢径 \mathbf{r} , 测量极轴绕极点沿指定的正方向旋转到与矢径重合时旋转的角度 θ 为极角(polar angle). 描述质点的位置时, (r, θ) 即构成极坐标.

仍然, 极坐标可以用来表示质点的唯一位置: 只需要给出 (r, θ) 就可以确定位置. 所以只要知道函数 $r(t), \theta(t)$ 就能够确定其运动, 这便是极坐标下的运动方程. 同理如果消去 t 就能得到另一类轨迹方程. 只要物体运动轨迹不经过极点, 我们总是取 $r(t), \theta(t)$ 为光滑的函数. θ 的取值为 $(-\infty, +\infty)$ 以保证运动的连续性. 不过 θ 相差 $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 的所有坐标表示运动过程中的同一位置.

例如, 在之前的抛体运动中, 如果取 z 轴为极轴, 那么其极坐标下的运动方程为:

$$\begin{cases} r^2 = (v_0 t + \frac{1}{2} g t^2)^2 = \frac{1}{4} g^2 t^4 - g v_0 t^3 \sin \varphi + v_0^2 t^2 \\ \tan \theta = \frac{2 v_0 \cos \varphi}{2 v_0 \sin \varphi - g t} \end{cases}$$

这会有利于我们分析一些问题. 例如如果关心以何种倾角抛出一个物体, 物体离我们的距离会越来越远? 就只需要让 r 为关于 t 的增函数, 除了对 r 求导的做法, 一种更加明智的做法可能是注意到关系式:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} > 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} r^2) > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} r^2) &= \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \\ &= (v_0 t + \frac{1}{2} g t^2) \cdot (v_0 + g t) > 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (v_0 + \frac{1}{2} g t) \cdot (v_0 + g t) = \frac{1}{2} g^2 t^2 - \frac{3}{2} g v_0 t \sin \varphi + v_0^2 > 0$$

这就化为求关于 t 的二次函数恒大于零的系数条件问题, 结论是初等的: 判别式小于零:

$$\left(\frac{3}{2} g v_0 \sin \varphi\right)^2 - 4 \left(\frac{1}{2} g^2\right) (v_0^2) < 0 \Rightarrow \sin \varphi < \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

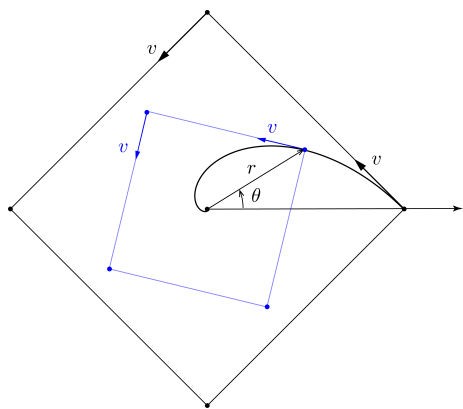


图 1.5: 首尾相追

但是对于位置和速度, 我们还知道一个信息, 就是它们夹钝角而且为 $3\pi/4$. 用直角坐标系的公式仔细化简的话也可以得到:

$$\tan \phi_{\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}} = -1 \Rightarrow \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{x\dot{y} - y\dot{x}} = -1$$

采用极坐标系描述抛体运动也许是费力而不讨好的. 但是描述其他一些运动又比直角坐标系存在天然的优势. 比如一类经典追击问题的表述如下: 四个平面运动的质点初始组成正方形. 这个环形的结构中每一个质点都向着前一个质点运动发生追击. 其中运动速度矢量具有变化的方向, 即向着前方质点. 但具有不变的速率 v . 确定物体的运动方程和轨迹.

对于这个问题, 预先的关于物体在时间为 t 时的位置信息是几乎完全空缺的, 但对于速度矢量我们知道一个信息: 其大小为 v . 如果考虑直角坐标系, 这个条件表示为:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v$$

但这就较难求解¹⁰. 那么如果采用极坐标系会为我们带来何种新的思路呢?

那就是**活动标架**(moving frame)的引入. 无论粒子在何处, 粒子的 \mathbf{r} 一定是作为 r 和 θ 的函数的. 那么可以在粒子所在的点沿两个方向建立局域的 $R - \Theta$ 直角坐标系. 这两个方向怎么确定呢? 其实就是基矢的方向:

$$\mathbf{e}_r := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \bigg/ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_\theta := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \bigg/ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$$

上式中后一个偏导数的模为 r 是显然的. 只需要考虑到圆的弧长和半径的关系即可.

局域的标架给我们什么方便? 我们由偏导数和全微分的法则可以描述局域物体的微小位移. 本质上, 这相当于 $d\mathbf{r}$ 和 $d\theta$ 导致的位矢 \mathbf{r} 改变 $d\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{r}_{(dr, d\theta)} = d\mathbf{r}_{(dr, 0)} + d\mathbf{r}_{(0, d\theta)} = dR\mathbf{e}_r + d\Theta\mathbf{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_{(dr, d\theta)} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta \\ \Rightarrow dR &= dr, \quad d\Theta = r d\theta \end{aligned}$$

可见在曲线坐标情形下坐标的改变量 $dr, d\theta$ 与在对应质点位移方向走过的弧长 $dR, d\Theta$ 的值一般是不一样的. 它们之前的比值 (弧长/坐标变化) 称作**拉梅系数**(Lamé coefficient).

既然叫做活动标架法, 那么显然随着粒子的运动, 两个基矢 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ 的方向也在不断改变中. 我们用极坐标, 就是把一个物理量 \mathbf{A} 分解到粒子运动的瞬时局域坐标系中:

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta$$

那么在粒子发生运动后, 以上矢量的改变应当由四部分组合而成:

$$d\mathbf{A} = d'\mathbf{A} + \tilde{d}\mathbf{A}$$

$$d'\mathbf{A} := dA_r\mathbf{e}_r + dA_\theta\mathbf{e}_\theta$$

$$\tilde{d}\mathbf{A} := A_r d\mathbf{e}_r + A_\theta d\mathbf{e}_\theta$$

其中 d' 表示相对变化, 类似于选取跟随旋转的活动标架而旋转的参考系后, 矢量的变化量, 故基矢自己的变化是被无视了的. 而原来的 d 才表示绝对的变化. 而 \tilde{d} 所带来的变化称作牵连变化或随体变化. 它是即使前面的相对变化为零也会带来的, 由于标架的“拉拽”导致的旋转带来的改变. 事实上很容易证明其中的:

$$d\mathbf{e}_r = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{e}_r = +d\theta\mathbf{e}_\theta$$

$$d\mathbf{e}_\theta = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{e}_\theta = -d\theta\mathbf{e}_r$$

其中 $d\boldsymbol{\theta}$ 是方向垂直于纸面向外的, 大小即极坐标下物体坐标之角坐标的增量 $d\theta$.

这就足以给出:

$$(d\mathbf{A})_r = dA_r - A_\theta d\theta$$

$$(d\mathbf{A})_\theta = dA_\theta + A_r d\theta$$

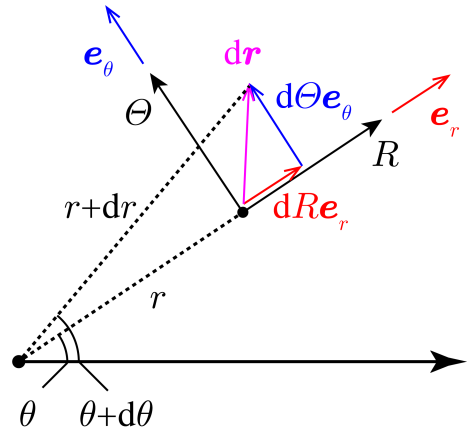


图 1.6: 极坐标系的活动框架

¹⁰有兴趣的读者可以挑战一下.

两边再同时除以时间, 我们得到粒子运动过程中一个矢量导数的两个分量与这矢量两个分量的导数之间的关系:

$$(\dot{\mathbf{A}})_r = \dot{A}_r - \dot{\theta} A_\theta$$

$$(\dot{\mathbf{A}})_\theta = \dot{A}_\theta + \dot{\theta} A_r$$

导数的分量不等于分量的导数, 这也是坐标系的弯曲所带来的. 数学上, 这意味算符 ∂_t 与算符 $\mathbf{e} \cdot$ 的**不对易性**(non-commutative):

$$\mathbf{e} \cdot (\partial_t \mathbf{A}) \neq \partial_t (\mathbf{e} \cdot \mathbf{A})$$

通过这个原理, 我们可以推理得到:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + 0\mathbf{e}_\theta \Rightarrow r_r = r, r_\theta = 0$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow v_r = \dot{r}_r - \dot{\theta} r_\theta = \dot{r}, v_\theta = \dot{r}_\theta + \dot{\theta} r_r = \dot{\theta} r$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} \Rightarrow a_r = \dot{v}_r - \dot{\theta} v_\theta = \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r, a_\theta = \dot{v}_\theta + \dot{\theta} v_r = \ddot{\theta} r + 2\dot{\theta} \dot{r}$$

这个操作甚至可以继续下去, 计算急动度等:

$$\mathbf{j} = \dot{\mathbf{a}} \Rightarrow j_r = \dot{a}_r - \dot{\theta} a_\theta = \ddot{r} - 3\dot{\theta}\ddot{r} - 3\dot{\theta}^2 \dot{r}, j_\theta = \dot{a}_\theta + \dot{\theta} a_r = \ddot{\theta} r + 3\ddot{r} + 3\dot{\theta}\ddot{r} - \dot{\theta}^3 r$$

...

极坐标下速度, 加速度的公式是非常常用的, 它们是:

$$\mathbf{v} = (\dot{r}, \dot{\theta} r) \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r, \ddot{\theta} r + 2\dot{\theta} \dot{r})$$

故, 在之前的首尾相追问题??中以正方形中心为原点, 以初始位置为极轴方向建立极坐标系. 那么两个条件: 速度大小恒定为 v 和位矢速度夹角恒定 $3\pi/4$ 表述为:

$$v_r^2 + v_\theta^2 = v^2, \quad \frac{v_\theta}{v_r} = -1$$

相当容易解出来两个分速度的值, 再结合之前的速度公式:

$$\dot{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}v, \quad \dot{\theta} r = \frac{\sqrt{2}}{2}v$$

这样, 便可以轻松解出运动方程来, 结合初始条件, 不妨设初始矢径为 r_0 , 幅角为 0:

$$\dot{r} = -\frac{v}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = r_0 - \frac{vt}{\sqrt{2}}$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{2}r_0 - vt} \Rightarrow \theta = -\ln\left(1 - \frac{vt}{\sqrt{2}r_0}\right)$$

轨迹方程通过上述方程消参即可. 但也可以通过之前的微分方程相除得到新微分方程求解, 曲线为**对数螺线**(logarithmic spiral):

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \Rightarrow r = r_0 e^{-\theta}$$

平面的极坐标系在三维空间的推广为**柱坐标系**(cylindrical coordinate system) 和**球坐标系**(spherical coordinate system). 类似公式的核心也与平面极坐标相差无几, 都在于活动标架的基矢微分. 请读者自行推导.

3. 自然坐标系下的分解

设想仍然采用活动标架法的思路, 但是, 标架的方向不再由粒子的位置相对事先建立的背景的坐标系的关系而决定. 而是紧密地由粒子运动的性质: 瞬时的速度方向, 轨迹曲线的弯曲方向等决定. 那么我们就得到了特殊的标架: **自然坐标系**(natural coordinates).

自然坐标系的建立是派生于粒子运动的轨迹的那条曲线的性质的. 借助牛顿等人创立的微积分与笛卡尔等人创立的解析几何的帮助, 对于光滑曲线曲面的性质的研究构成了**古典微分几何**(classical differential geometry) 的主要课题.

我们考虑三维空间问题. 对于一条空间曲线, 它总是一些点的集合, 而如果规定某个起始点以后, 每一个点都会有一个 s 坐标, 它就是从起始点到这个点的弧长. 而其实我们可以把 s 视作一个自变量, 因为 s 改变而改变的是不同点的位置 \mathbf{r} . 也就是说 $\mathbf{r}(s)$ 作为 s 的函数. 那么这个曲线在某一点处的切矢量就可以被自然地定义为:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

以上矢量模自然为 1. 因为分子 $d\mathbf{r}$ 的长度就是分母的 ds . 方向则是在曲线的**切线**(tangent line) 方向. 切线是这样一种线: 曲线上有一点 P . 如果在 P 两侧任取一个点 Q 并连接 PQ , 使 Q 无限接近 P 即 $ds \rightarrow 0$, 那么 PQ 所在的直线的极限就是 P 点的切线. 这又引申出第二个概念: 如果在 P 两侧各取一个点 Q, R . 那么 PQR 三点确定的圆也将随着 Q, R 同时无限接近于 P 而具有极限. 这个圆叫做**密切圆**或**曲率圆**(osculating circle). 其所在的平面叫做**密切平面**(osculating plane). 而圆心 C 为**曲率中心**(center of curvature), 最后, 实际上 P 到 C 的方向就是**法**(normal) 方向, 该方向的单位矢量叫做**法矢量** \mathbf{n} . 而副法矢量 $\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\beta}$ 所决定的方向为**副法**(binormal) 方向. 这样三个矢量便构成**弗雷内框架**(Frenet frame) 或称 TNB 框架.

事实上, 如果计算曲线在过程中的转向, 它可以用三个矢量方向的变化来表示. 如果计算三个矢量对 ds 的变化率, 一定能写作:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = +0\boldsymbol{\tau} + k\mathbf{n} + \varepsilon\boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\boldsymbol{\tau} + 0\mathbf{n} + \gamma\boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\varepsilon\boldsymbol{\tau} - \gamma\mathbf{n} + 0\boldsymbol{\beta}$$

这是因为框架一定要具有正交归一的一套基矢量, 而且这个性质在曲线上任何一点都要成立, 指的是以下六个式子:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

对六个式子分别求导数就看出来了, **一个单位矢量自己的导数必然垂直于自身**, 从而三个基矢导数在自己上的投影都必须为零. 而两个不同基矢的导数互相在对方方向的投影则会正负相消, 这样才能保证两个矢量始终正交. 就能理解之前的 9 个系数为什么要写成这个形式.

最后我们指出, 系数 ε 应当是 0. 这是因为作为法线方向的定义本身, 它就应当在 $\boldsymbol{\tau}$ 的变化量 $d\boldsymbol{\tau}$ 所在的方向上. 从而第一个式子不会具有 $\boldsymbol{\beta}$ 方向的分量. 综上所述, 我们得到了:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = +k\mathbf{n}$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\boldsymbol{\tau} + \gamma\boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\gamma\mathbf{n}$$

这就是**弗雷内公式**(Frenet formulae). 其中 k 称作曲线的**曲率**(curvature). 它的意义是衡量了曲线方向转动的快慢, 事实上由于曲线切线的无穷小转动角度其实在竖直上恰好会等于无穷小矢量 $d\boldsymbol{\tau}$ 的长度, 从而

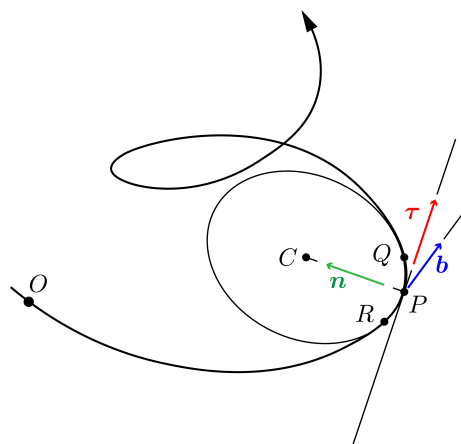


图 1.7: Frenet 框架

有:

$$k = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| = \frac{d\theta}{ds}$$

即, 曲率为: 质点沿曲线走单位长度所转过的角度. 曲率半径实际上是曲率的倒数. 它是曲率圆的半径 $\rho = 1/k$.

而 γ 则被称作**挠率**(torsion). 我们通过弗雷内公式的第三式可以发现, 挠率反映了副法矢量, 或者说被复法矢量作为法平面的密切平面, 绕曲线此时的切线的旋转快慢. 它使得粒子瞬时运动的那个平面在改变着. 下面我们会发现, 实际上挠率对运动学中直到加速度的表达式都是没有任何贡献的.

如何用自然法描述粒子的运动? 事实上这就相当于把粒子运动的路程 s 和三个矢量 $\boldsymbol{\tau}$, \boldsymbol{n} , $\boldsymbol{\beta}$ 都表示为时间的函数:

$$s(t), \boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{\beta}(t)$$

但事实上, 曲线本身轨迹必须先存在才能让我们事先确定好框架, 而这样一个曲线其实本身由 $\boldsymbol{r}(s)$ 给出, 而且满足:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}, \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = k\boldsymbol{n}, \quad \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3} = -k^2\boldsymbol{\tau} + \frac{dk}{ds}\boldsymbol{n} + k\gamma\boldsymbol{\beta}$$

然后我们唯一要做的就是给出 $s(t)$ 函数, 这一定可以帮助我们确定运动的各个量.

事实上, 由于泰勒展开公式, 近似到三阶:

$$\Delta\boldsymbol{r} \simeq \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}ds + \frac{1}{2}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}ds^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}ds^3 = (kds - \frac{k^2}{6}ds^3)\boldsymbol{\tau} + (\frac{k}{2}ds^2 + \frac{1}{6}\frac{dk}{ds}ds^3)\boldsymbol{n} + \frac{k\gamma}{6}ds^3\boldsymbol{\beta}$$

如果只保留领头项, 忽略高阶小量. 我们就得到, 在粒子运动的局域坐标系中, 位移 ds 长度到达的点三个坐标 T , N , B 分别近似为:

$$T = ds, \quad N = \frac{k}{2}ds^2, \quad B = \frac{k\gamma}{6}ds^3$$

仍然考虑之前的三阶近似下的严格 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与 ds 的关系, 这一次代入 $s(t)$ 的三阶套了展开:

$$ds \simeq \dot{s}dt + \frac{\ddot{s}}{2}dt^2 + \frac{\dddot{s}}{6}dt^3$$

我们整理 dt 的各阶项, 最终得到:

$$\Delta\boldsymbol{r} \simeq \boldsymbol{v}dt + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}dt^2 + \frac{1}{6}\boldsymbol{j}dt^3$$

其中速度与加速度的公式为:

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + k\dot{s}^2\boldsymbol{n}$$

速度方向必然沿切向, 大小上就等于 \dot{s} , 即单位时间走过的弧长. 而加速度则有两个分量. 一是由于速率在增减导致的切向加速度, 大小等于 $a_\tau = \ddot{s}$; 第二项则是由于曲线的弯曲导致的法向加速度. 它的值为 $a_n = \dot{s}^2/\rho$.

如果要计算急动度等, 可以从之前的泰勒展示中获得, 其实还可以直接对加速度求导数, 此时表达式会突然产生很多项:

$$\boldsymbol{j} = (\dddot{s} - k^2\dot{s}^3)\boldsymbol{\tau} + (3k\dot{s}\ddot{s} + \dot{k}\dot{s}^3)\boldsymbol{n} + k\gamma\dot{s}^3\boldsymbol{\beta}$$

利用自然坐标下的分解方式, 如果已经直到特定曲线的曲率, 就可以根据质点在曲线上的运动方式来计算运动的加速度. 但是反过来利用运动学公式来确定曲线的曲率半径也不失为一种极其简单的做法. 我们注意到, 利用加速度在垂直于速度方向的那个分量即为 v^2/ρ 的结论, 可以得到:

$$\rho = \frac{v^3}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}|}$$

例如,如果已知二维空间中的曲线方程 $y = f(x)$. 那么如果命一质点在曲线上运动且满足 $x = t, y = f(t)$, 那么速度为 $\mathbf{v} = (1, f')$, 加速度为 $\mathbf{a} = (0, f'')$. 利用上式可得:

$$\rho = \frac{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''|}$$

再例如. 之前的首尾相追问题中, 曲线对数螺线写作:

$$r = ae^{k\theta}$$

如何计算曲率半径? 我们让粒子在曲线上绕极点做匀速旋转, 也就是:

$$\theta = \omega t, \quad r = ae^{k\omega t}$$

那么借助极坐标的加速度公式得:

$$\mathbf{v} = (\dot{r}, \dot{\theta}r) = (k\omega ae^{k\omega t}, \omega ae^{k\omega t}) = (k\omega r, \omega r)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r, \ddot{\theta}r + 2\dot{\theta}\dot{r}) = ((k^2 - 1)\omega^2 ae^{k\omega t}, 2k\omega^2 ae^{k\omega t}) = ((k^2 - 1)\omega^2 r, 2k\omega^2 r)$$

代入之前的曲率公式便可以得到:

$$\rho = \sqrt{1 + k^2}r$$

1.2.2 刚体的运动

关于刚体的运动, 它的定义我们其实将在之后的刚体专门的章节又一次做更进一步的探讨. 初步我们认为所谓刚体就是这样一种物体: 存在一个特殊的参考系 (平动或转动) 能够使得该物体上每一个点都每时每刻相对静止. 但是这样我们又涉及到下一节才讲的参考系的概念. 在此我们又不得不早于预期提及.

为此我们换一种更加直观的方式引入这些概念而不是去严格定义刚体与参考系的概念. 设想我们有一个正交的刚性框架, 即三条射线状坐标轴构成的物体, 下称 ξ, η, ζ 轴, 该框架就会自然造成四个矢量. 首先是框架原点 C 的位置矢量 \mathbf{r} . 其次是三坐标轴方向的三个基矢¹¹ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. 它们都会随着时间变化, 可以用四个导数表征. 其中 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$. 但是, 对于三个基矢导数有没有更加简单的描述方法呢? 如果我们把三个基矢导数就向三个基矢本来的方向分解¹²:

$$\dot{\mathbf{i}} = +\omega_{11}\mathbf{i} + \omega_{12}\mathbf{j} + \omega_{13}\mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{j}} = +\omega_{21}\mathbf{i} + \omega_{22}\mathbf{j} + \omega_{23}\mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{k}} = +\omega_{31}\mathbf{i} + \omega_{32}\mathbf{j} + \omega_{33}\mathbf{k}$$

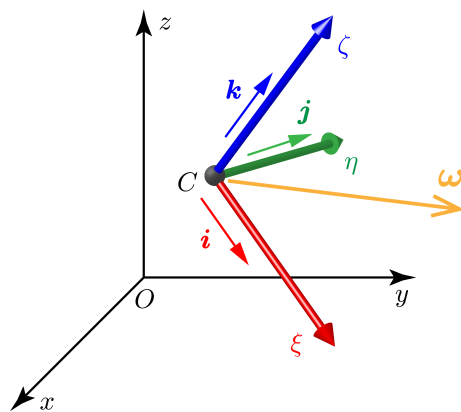


图 1.8: 刚体的本征框架

依然, 我们注意到出于以下正交归一的结构不会改变, 在求导下为零, 所以上述表达式中的九个系数反对称:

$$\frac{d}{dt} \begin{cases} 1 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \\ 0 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} \end{cases} = 0 \Rightarrow \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$$

¹¹ 原来的基矢方向记做 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$.

¹² 由于字母 \mathbf{i}, \mathbf{j} 上本来就有点, 所以在符号上约定遇到要在这两个字母上加点时改为横向 $\dot{\mathbf{i}}, \dot{\mathbf{j}}$. 偶尔也见到反而去掉点的 i, j . 出于这样无法表示高阶导数, 我们不采用这种模式.

出于某种符号约定与对称的原因,我们把导数重新写作:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{i}} &= +\omega_3 \mathbf{j} - \omega_2 \mathbf{k} \\ \dot{\mathbf{j}} &= -\omega_3 \mathbf{i} + \omega_1 \mathbf{k} \\ \dot{\mathbf{k}} &= +\omega_2 \mathbf{i} - \omega_1 \mathbf{j}\end{aligned}$$

这样,如果我们定义一个矢量:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}$$

就能够造成:

$$\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$$

这就是刚体的角速度(angular velocity) 矢量. 用它可以计算刚体中的各种转动的物理量.

具体来说,什么叫做刚体?事实上以上三个坐标轴本身就构成了刚体,或者是某刚体的一部分. 如果一个空间点每时每刻向杆坐标系的三个坐标面引三垂线,三个坐标都始终保持常数,那么就说这个空间点是固连(fixed) 在该坐标系中的. 而如果一个物体上的每一个点都固连带该坐标系中,那么相对这个坐标系该物体就无法发生形变,从而这就是一个刚体. 这种情况下,刚体与坐标系就存在一个相互关系,这个坐标系是由刚体所对应的固连坐标系,而坐标系本身又可以视作某种不能变形的刚体.

我们在坐标系中找到固连在坐标系上的两个点,或者说在刚体上找到固连在刚体上的两个点(以后不加区分). 从一个点指向另一个点形成矢量 \mathbf{R} , 由于固连在坐标系中,这个矢量对坐标系造成的三个分量都是固定的,也就是 $\mathbf{R} = R_1 \mathbf{i} + R_2 \mathbf{j} + R_3 \mathbf{k}$ 中的 R_1, R_2, R_3 都是常数. 那么这个矢量跟随坐标系而变化的导数就是:

$$\dot{\mathbf{R}} = R_1 \dot{\mathbf{i}} + R_2 \dot{\mathbf{j}} + R_3 \dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\omega} \times (R_1 \mathbf{i} + R_2 \mathbf{j} + R_3 \mathbf{k}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$$

在物理上,这就是说,任何固连在转动坐标系中的矢量 \mathbf{R} 都将角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 跟随坐标系旋转, $\boldsymbol{\omega}$ 的方向就是瞬时转动轴, $\boldsymbol{\omega}$ 的大小就是旋转角速度大小. 注意两点,一是这个角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是全局的,无论矢量相对坐标系在任何位置,无论距离最初选取的坐标系中心有多远,只要固连在坐标系中,就会以完全一样的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 去改变 $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$. 二是这个角速度作用在任何量纲上. 无论是两个空间点之间的那个(位移) 矢量,还是速度矢量,力矢量等等,任意量纲的矢量 \mathbf{A} 只要相对旋转坐标系具有固定的方向,在地面系中就会跟着坐标系一同旋转而具有导数:

$$\dot{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad \text{for } \mathbf{A} \text{ fixed in frame } C - \xi\eta\zeta$$

以后我们可以脱离坐标系而讨论刚体. 为了研究刚体的运动,我们只需要在刚体上取一个合适的固连点 C 作为中心(类似于坐标系的原点),这个点叫做基点(cardinal point). 那么,不失一般性地,刚体的运动将用基点 C 的位置 $\mathbf{r}(t)$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 描述. 譬如,为了求得某一时刻刚体上一点 P 的速度. 我们可以找到从 C 指向 P 的矢量 \mathbf{R} . 那么,由于 $\mathbf{r}_{OC} + \mathbf{r}_{CP} = \mathbf{r}_{OP}$. 这就是说:

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_{OP} = \dot{\mathbf{r}}_{OC} + \dot{\mathbf{r}}_{CP} = \mathbf{v}_C + \dot{\mathbf{R}}$$

最后再由之前的用角速度算导数的方法,得到著名的基点法速度表达式:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$$

即:刚体上一点速度等于跟随基点平动的速度 \mathbf{v}_C 加上绕基点以 $\boldsymbol{\omega}$ 转动的速度 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ 的和.

至于加速度,只需要对上式再求一次导数 $\dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{v}}_C + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}$:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$$

即:刚体上一点速度等于跟随基点平动的加速度 \mathbf{a}_C 加上绕基点以 $\boldsymbol{\beta}$ 转动的角向加速度 $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}$, 最后再加上由于速度 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ 本身也在绕轴以 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转带来的向轴加速度 $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ 的和.

1.3 参考系变换

1.3.1 点变换

事实上,对旋转坐标系的分析正如对刚体的分析那样,一个旋转坐标系的描述正由两点构成,一是这个参考系原点 C 的运动方程. 给出它我们就可以求出任意时刻另一个参考原点的速度与加速度:

$$\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C, \quad \mathbf{a}_C = \ddot{\mathbf{r}}_C$$

第二点就是要给出新参考系的旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}$, 角加速度记作 $\boldsymbol{\beta} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$. 通过上一节我们知道, 如果选取固连在新参考系的点 P , 并且把 CP 记作 \mathbf{r}' . 那么 P 点速度加速度 (现在记作 $\mathbf{v}_c, \mathbf{a}_c$) 为:

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}'$$

我们现在研究什么问题呢? 如果我们在 $O-xyz$ 系中给出一个质点, 也用 P 表示, 的运动方程 $x(t), y(t), z(t)$. 其实也就给出了在 $C-\xi\eta\zeta$ 系中的运动方程 $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$. 那么把位矢 OP 记作 \mathbf{r} , CP 记作 \mathbf{r}' . 再把 OC 记作 \mathbf{r}_C . 于是得到恒等式:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}'$$

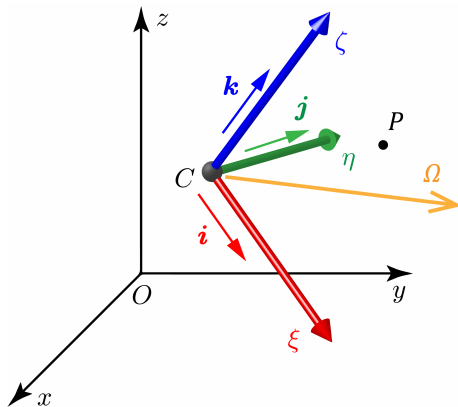


图 1.9: 参考系变换

但这不代表 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}'$. 这里我们要注意有一点已经悄悄发生了, 那就是导数, 作为一个算符, 变成了一个有多种自由定义余地的概念. 只要想想这一点: 从运动方程求出速度的过程叫做求导¹³, 但是同一个运动方程对应的运动是同一个运动, 但是在不同参考系中依然可以有多个不同的取值. 这就足以说明有多种不同的求导方法. 具体来说, 这里的 \mathbf{r}' 可能有三种情况: a. 固连在 C 系中, 相对 C 系大小方向不变. b. 相对地面系 O 系大小方向都不变, 即 P 跟随 C 相对地面系平移. c. 两者都不是. 那么相应地定义三种导数:

1. 绝对导数: 即平常的 $\frac{d}{dt}$, 可以简单地用加点来代替. 我们还创造一个新的符号 D 来表示求导, 例如对于情形 b, 这个导数就是零. 求导数的方法是: 找到一个矢量在 O 系中每时每刻向三个坐标轴方向的投影分量并分别求导最后组合为矢量. 用这个导数能定义 P 点在 O 系中的速度与加速度:

$$\mathbf{v} = D\mathbf{r} (= \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{a} = D\mathbf{v}$$

2. 相对导数: 这就是要换相对 C 系的视角来研究一个矢量的导数了. 我们记作 D' . 例如对于情形 a, 那么相对导数就是零. 求导数的方法是: 找到一个矢量在 C 系中每时每刻向三个坐标轴方向的投影分量并分别求导最后组合为矢量. 这也就是说它用来定义相对速度和相对加速度是合适的:

$$\mathbf{v}' = D'\mathbf{r}' = \dot{r}'_1\mathbf{i} + \dot{r}'_2\mathbf{j} + \dot{r}'_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{a}' = D'\mathbf{v}' = \ddot{r}'_1\mathbf{i} + \ddot{r}'_2\mathbf{j} + \ddot{r}'_3\mathbf{k}$$

3. 随体导数: 这是矢量由于跟随 C 系转动而带来的相对 O 系的变化率. 我们记作 \tilde{D} . 例如在情形 a 中, \mathbf{r}' 随体导数就是 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. 这个算符其实就等价于 $\boldsymbol{\omega} \times$, 这是因为他就定义为:

$$\tilde{D}\mathbf{A} = A_1\ddot{\mathbf{i}} + A_2\ddot{\mathbf{j}} + A_3\ddot{\mathbf{k}} = A_1\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} + A_2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} + A_3\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \times (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

值得注意的是, 这三个导数算符之间有如下关系:

$$D = \tilde{D} + D'$$

¹³ 导数就是从运动方程到速度矢量的映射

这很容易证明, 对一个矢量求导数, 一看分量变不变, 而看基矢量本身有没有旋转. 那么就会产生两项. 实际上就是莱布尼茨法则.

于是这才能推理参考系变换的公式. 我们对 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}'$ 两边求绝对导数:

$$\mathbf{v} = D\mathbf{r} = D\mathbf{r}_C + D\mathbf{r}' = \mathbf{v}_C + (\tilde{D} + D')\mathbf{r}' = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}'$$

再次对上式两边求绝对导数:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= D\mathbf{v} = D\mathbf{v}_C + D\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times D\mathbf{r}' + D\mathbf{v}' \\ &= \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\tilde{D} + D')\mathbf{r}' + (\tilde{D} + D')\mathbf{v}' \\ &= \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}' \\ &= \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}' \end{aligned}$$

这两个公式就是参考系变换下的变换公式:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'$$

如何理解以上的公式? 事实上结构也很简单, 我们把加速度中的最独特的一项单独拿出来叫做**柯里奥利加速度**(Coriolis acceleration):

$$\mathbf{a}'_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

那么以上两公式具有以下结构:

$$\text{绝对} = \text{牵连} + \text{柯氏} + \text{相对}$$

柯氏即柯里奥利. 相对速度与相对加速度就是 \mathbf{v}' , \mathbf{a}' . 言下之意就是我们定义了所谓的**牵连速度**(convected velocity) 与**牵连加速度**(convected acceleration):

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}'$$

细心的读者已经发现了, 这两个式子和本节最开始推导出来的固连在 C 系中的点的绝对速度, 加速度公式是一致的. 牵连速度 (加速度), 顾名思义, 被转动参考系 “带着走” 的速度 (加速度). 也正是以上规律启发我们总结出以下的动点动系法来理解看似复杂的速度加速度合成公式:

1. 确定定系, 动系, 动点, 定点. 定系往往就是地面系; 动系一般是相对某刚体或人为构造的刚性框架相对静止的参考系¹⁴; 动点就是选做研究对象的相对两个系一般都有运动的点. 最后, 定点指的是这样的概念: 在研究的一瞬间与动点重合, 但是始终保持与动系固连的特殊参考点.
2. 在定系考虑动点的运动. 算出绝对量. 在动系考虑动点的运动. 算出相对量. 在定系中考虑定点的运动, 它的量就是牵连量.
3. 建立绝对相对牵连之间的等量关系.
4. 唯一要注意的是: 只有当转动系是真转动的 $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, 而且相对动系动点也是真运动的 $\mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$ 时, 我们才有必要在加速度中添加一项柯氏加速度 $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$. 从推导过程来看, 一是即使固连在动系中的速度矢量也会跟随动系转动而带来加速度, 二是动系中的相对位矢产生变化而带来在变化的牵连速度从而产生加速度, 是造成柯氏加速度的两个因素. 这一项不是因为在动系中的某特定位置而造成的, 事实上与 \mathbf{r}' 无关, 决定性因素是 “相对动系有速度”.

¹⁴注意, 以下整个过程都可以脱离具体的坐标系而计算, 这就为坐标系的选取 (种类是直角坐标系, 极座标系还是自然坐标系, 方向如何) 彻底提供了自由.

最后值得注意,如果 ω 和 β 恒为零,这也不少见,那么这样的动系就是**平动系**(translational frame).此时公式极为简单,没有柯氏加速度,牵连量就是动系原点或任意固连点的量:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}', \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}'$$

1.3.2 刚体变换

刚体的变换是点变换的直接推论.同样地,首先已知动系相对定系具有原点速度 \boldsymbol{v}_C 和加速度 \boldsymbol{a}_C 以及角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度 $\boldsymbol{\beta}$,又已知定系中刚体基点速度加速度,现在记作 \boldsymbol{V} , \boldsymbol{A} .事实上我们还要给出刚体自己的角速度角加速度才算是刚体的完整描述,它们为 $\boldsymbol{\Omega}$, \boldsymbol{B} .那么绝对的和相对的各个量之间的关系为:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}' + \boldsymbol{V}', \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}'$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{R}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{A}', \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}' + \boldsymbol{B}'$$

证明过程留作练习由读者自己思考.

1.4 运动的牵连

最后本节旨在枚举一些在运动学解题中十分常见的初等模型与结论.

1.4.1 接触系

两个几何图形具有一个交点是一件非常常见的事情.交点将同时与两个几何图形保持结合关系.动态地看待这个问题,我们可以分别利用两个几何图形自身的运动和交点相对两者的运动合成来写出交点的速度矢量与加速度矢量来,但是作为同一个研究对象两种写法的结果理应相等.这构成了一组方程.

尤其是,在上述“相交系”中我们还有一类十分独特的情形,就是两个几何图形相切.两个平面形刚体如果始终保持相互接触,其轮廓之间就是这样的关系.此时要知道客观地这形除了一种约束:不是让两个刚体做任意运动都可以让两者保持相切的.所以必然存在所谓的**约束方程**(equation of constraint).而这个方程的列法其实就是基于之前说的接触点的速度的一致性.

让我们看一个例子,它不仅帮助我们理解接触系,还可以帮助我们理解纯滚系.就是经典的在粗糙的地面上做匀速纯滚动的圆盘.首先应当注意到,涉及到所谓的“瞬时接触点”时可能指的是以下三个点之一:

1. 刚体 1 上的定点 P_1 . 在这里取盘为刚体 1, 此时这个点是做旋轮线运动的那个点, 此时恰好位于最低位置.

2. 刚体 2 上的定点 P_2 . 在这里取地面为刚体 2, 那么这个点就是一个静止的点.

3. 动点 P_3 . 就是每时每刻的切点形成的运动对象. 在这里我们可以把圆盘变为圆筒, 并且让一只松鼠在圆筒内部跑动以保持其在最低位置, 也就是每时每刻的切点. 那么松鼠做匀速直线运动.

我们有什么结论呢? 如果把 P_1 的瞬时速度在法线方向与切线方向的分速度与加速度写出来, 分别是 $v_{1n}, v_{1\tau}, a_{1n}, a_{1\tau}$ 并约定法向以向刚体 1 内侧为正, 切向可以以切线的任意一个方向为正. P_2 同理为 $v_{2n}, v_{2\tau}, a_{2n}, a_{2\tau}$. 那么让我们考虑一下 P_3 的速度与加速度. 这就不难发现, 如果采用动点动系法, 就有:

速度: 无论相对刚体 1 还是 2, P_3 的速度都是牵连加相对. 牵连速度就是定点的速度, 但相对速度由于点的轨迹就是刚体的轮廓, 故方向必然在切线方向. 然后由于速度的唯一性, 这可以给出:

$$v_{1n} = -v_{2n}$$

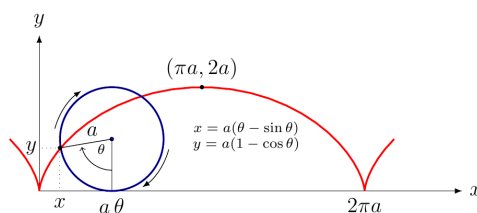


图 1.10: 圆盘在地面上做纯滚动

加速度:道理是相同的,但需要注意两点,一是相对加速度具有了法线方向的分量.二是如果严格换一个刚体的转动系往往会带来柯氏加速度.具体解题时这仍然不失为一种常见的解题思路,但是难以总结现成的美妙,下一小节通过添加纯滚动这一更强的结论我们可以得到相应的方程.但是这个方程肯定是存在且可列式的,毕竟:

以上两个方程构成对接触系的约束的刻画.

1.4.2 纯滚系

上面的圆盘在地面上发生的运动实际上还是纯滚动.我们将首先给出纯滚动的定义,再来讨论纯滚动时的更强的附加条件,毕竟纯滚动相比简单的接触系还多一个约束.

事实上考虑相对运动就知道了,接触点在刚体 1 或 2 上相对运动的弧长就是相互滚动过的接触弧长,在两个刚体上应当具有公共值,这便是纯滚动的定义.这就是说:

$$v'_1 = v'_2 = \dot{s}\tau$$

最后再利用 $v = v_{1c} + v'_1 = v_{2c} + v'_2$. 便得到了附加条件:

$$v_{1\tau} = v_{2\tau}$$

这就是常见的纯滚条件一,也就是说只有当相互接触的两个刚体定点切向速度一致才构成纯滚动.否则就是纯滚动的反面:必有相对滑动,俗称“连滚带滑”.

考虑加速度我们将得出一个不可思议但容易忽视的结论.首先注意到,如果两个刚体角速度分别为 ω_1 和 ω_2 ,作为平面问题写成统一正方向的标量.而再设两刚体在接触点处轮廓的曲率为 k_1 和 k_2 .那么由于相对两刚体点在轮廓上的运动造成的单位时间切线方向的转角为:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_1}{ds} \frac{ds}{dt} = k_1 \dot{s}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{d\theta_2}{ds} \frac{ds}{dt} = k_2 \dot{s}$$

而每当点成为切点两切线也会重合成为公切线,那么两个转角的和就是单位时间内两个刚体的相对转角:

$$\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} = |\omega_1 - \omega_2|$$

最后,列出对刚体 1 和 2 牵连 + 柯氏 + 相对应当一致的方程:

$$a_{1n} - 2\omega_1 \dot{s} + k_1 \dot{s}^2 = -(a_{2n} - 2\omega_2 \dot{s} + k_2 \dot{s}^2)$$

整理得到纯滚条件二:

$$a_{1n} + a_{2n} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{k_1 + k_2}$$

这是一个必然大于零的表达式¹⁵,它意在,两个相接触的点必然后来会分离,这个分离加速度只与两刚体瞬时转动快慢和接触点弯曲程度有关,与平动转动加速度都没有关系.

1.4.3 约束系

约束是一种普遍存在且可以普遍讨论而有很广的适用范围的物理现象.本节并非要详细讨论约束,这一点在之后第三章静力学中再加以详细讨论.这里只讨论两个问题:绳系和杆系.

¹⁵注意 k 本身可以小于零,但两个 k 的和必然大于零.

对于不可伸长的轻绳模型, 如果它也被拉直 (因为内部受力不为零又没有外力). 那么在运动学层面上就等价于不可伸长的轻杆. 设杆长为 l , 把两端点 1 和 2 速度加速度沿平行与杆与垂直与杆方向分解, 具有关系:

$$v_{1\perp} - v_{2\perp} = \omega l$$

$$v_{1\parallel} - v_{2\parallel} = 0$$

$$a_{1\perp} - a_{2\perp} = \beta l$$

$$a_{1\parallel} - a_{2\parallel} = -\omega^2 l$$

其中第二个关系就是著名的端点沿杆方向分速度必须是常数. 对于绳子, 即使绕过了定滑轮, 显然沿定滑轮的切向速度也一直不变, 因为绳子不可伸长.

最后, 如果绳子允许弯曲但不允许伸长, 其运动学约束方程该如何列? 那就要求绳子上每一点在“局部”沿切向方向没有相对速度, 表示为公式就是:

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

注意这个条件不可以写为:

$$\frac{dv_{\tau}}{ds} = \frac{d(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})}{ds} = 0$$

第二章 动力学

2.1 牛顿定律

2.1.1 概述

中世纪到近代以来物理学的发展,可谓沧海桑田,旧的观点被否定,几十年以后突然又以全新的面貌出现在物理学理论中.其中,实验中观察到各种令人惊诧的结果,无论物理学所依托的数学形式一变再变,要说亘古不变的主题,恐怕只有自然界的神奇与深邃,和我等凡人难以参透其中奥妙却仍为之孜孜不倦研究的决心.物理是一门研究自然界存在的运动并提出解释与理解方法的学科.运动形式多种多样,变化万千,但很多都被我们或多或少地解释,其实总结来看,从古至今我们也仅仅拥有过两类解释:一类由牛顿提出,一类则来自爱因斯坦.前前后后经历了大概以下发展:

亚里士多德: 天体运行,自由落体是自然 (nature) 的运动;“树欲静而风不止”是强迫 (violent) 的运动.但错误地认为“物体越重,下落越快”

伽利略: 辩证地看待亚里士多德的观点,开创性地提出相对性原理,成功论证与形成惯性与常见运动的正确认识.

笛卡尔,惠更斯等: 成功得到大量动力学公式,包括后来的牛顿第二定律,动能的表达式与能量守恒定律,

牛顿开创的相互作用观: 开创性的提出物质间存在相互作用,相互作用是改变物质运动状态的原因.并很好地把天体的运动归结到互相之间产生的相互作用上.后人建立了场的理论以后,超距的粒子间相互作用就不再被理论学家们采纳了,而要理解为场与粒子的相互作用,再晚一点,场和粒子都被赋予了波粒二象性,粒子也要被理解为场,但所有场都要被分解为平面波,平面波又要被量子化.如果没有相互作用,那么这些平面波的运动状态就不会发生改变,只有相互作用才会改变其运动,或传播方向发生偏折(发生散射),或强度发生改变(粒子的产生与湮灭).牛顿的观点是以**相互作用**(interaction)为核心的观点.

拉格朗日,哈密顿等: 将牛顿的结果与观点上升到**分析力学**(analytic mechanics)的高度.将复杂体系的结构浓缩在统一的一个能量函数或作用量泛函数中.为后来场论建立和相对论,统计力学,量子力学的发展都提供了理论支持.

马赫: 批判牛顿的过于绝对的时空观.预言质量分布会对惯性本身产生影响.

爱因斯坦开创的几何观: 仿佛又回到了亚里士多德,不仅仅是无相互作用下的匀速直线运动,一切在万有引力下的天体运动其实也是“自然”的运动.看上去复杂的曲线运动不过也是沿对被引力所扭曲的弯曲时空几何下的天然“直线”---测地线 (geodesic) 运动而已.对引力问题提出开创性的解释.率先描绘了 20 世纪建立的若干理论的物理图像.

天体物理,粒子物理: 爱因斯坦以后的理论研究中很多问题还处于开放状态.时而采用牛顿的相互作用观,时而采用爱因斯坦的几何观.是一种两个图像的有机结合.

我们今天说**经典力学**(classical mechanics) 大多数情况即指**牛顿力学**(Newtonian mechanics), 指的是由伽利略最初引领, 笛卡尔, 惠更斯等奠基, 牛顿集大成的一套理论. 它以伽利略的**两种新科学的对话与数学展示**(Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze) 和牛顿的**自然哲学的数学原理**(Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica) 两篇文献为核心. 逻辑上以质点的牛顿三大定律为基础. 不包括后来上升到的分析力学层次, 作为绝对时空观适用伽利略变换, 不兼容相对论.

牛顿定律总结如下:

1. 第一定律: 在惯性系中, 一个质点应静止或匀速直线运动. 除非有外力施加于物体.
2. 第二定律: 在惯性系中, 质点受力的矢量和 \mathbf{F} 等于其质量 m 与加速度 \mathbf{a} 的乘积.
3. 第三定律: 一个质点对另一个质点施加作用力时, 另一个质点同时将施加反作用力于第一个质点, 作用力与反作用力等大反向共线.

三个定律之间的联系是很值得讨论的. 对三个基本定律的设置反映了很多物理思想¹. 分析如下:

2.1.2 牛顿第一定律

牛顿第一定律旨在阐述时空的平直性.

也正基于以上这一点, 我们不能仍为牛顿第一定律可以由牛顿第二定律出发推导. 它不是表面上的牛顿第二定律中 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 的特例. 恰恰相反, 即使从形式上看, 也应当先由牛顿第一定律给出**惯性系**(inertial frame) 的概念才能适用牛顿第二定律. 那么怎样的参考系是惯性系呢? 牛顿第一定律是暗含认可**绝对惯性系**(absolute inertial frame) 的存在性的. 在这样第一个系中牛顿第一定律才可以成立. 这一个系无非就是由某种特殊运动状态的观察者 (绝对观察者) 建立的三维欧几里得空间坐标系外带一维时间坐标. 而只要质点不受力 (力是对相互作用的描述, 只要远离其它所有物质就会使质点成为**孤立**(isolated) 的), 就会静止或匀速直线运动, 所谓匀速直线运动是指:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot t$$

其中三个速度 v_x, v_y, v_z 都是常数. 但是我们发现, 相对这个系做匀速直线运动的另一个无自转观察者建立的系中, 原来做匀速直线运动的质点现在依然做匀速直线运动. 所以这样的系也叫做惯性系, 可以叫做相对惯性系. 即: 惯性系就是任何相对绝对惯性系做匀速直线运动的参考系. 而惯性系就是牛顿定律成立的前提条件.

所以牛顿的经典力学体系的第一大特点是承认绝对惯性系的存在性. 实际上承认这一点也几乎等价于承认了时空的平直性. 只不过在众多彼此等价 (任何物理实验都不足以判断这些系的不等价性) 的系中, 牛顿认为还应当有一个第一性的, “最初” 的惯性系.

2.1.3 牛顿第二定律

牛顿第二定律是牛顿定律的核心, 旨在描述相互作用对运动的影响.

相互作用(interaction) 是牛顿经典力学后经过了几百年发展而浓缩出来的更普遍的概念. 如果没有相互作用, 物质基本的运动模式就是“惯性”的, 如匀速运动的粒子或传播的平面波. 任何使物质偏离这种“惯性”运动的模式的原因就都在相互作用上. 相互作用的模式是多种多样的, 除了牛顿指出的下面仔细讨论的

¹例如爱因斯坦狭义相对论的两个假设在某种意义上与牛顿第一第二定律的逻辑完全一致. 都是先定义时空背景再阐述物理规律的共性.

情形,光会因为与物质相互作用而产生吸收和散射,两个惰性气体原子靠近时两个电子云也会产生量子的诱导极化而使原子间产生范德瓦耳斯吸引.这些都是广义的相互作用,但是为了描述它们,前者需要借助波来描述光这种物质,后者还需要借助波函数来描述电子云,相互作用更是要依赖于薛定谔方程等来理解.所以经典物理理论有它的适用性,这一点在下面我们需要记住.

这也就是牛顿经典力学体系的第二大特点了:物质的基本模型一律视作**质点**(mass point)²,相互作用的基本模型一律视作**力**(force),质点具有惯性这一基本属性,用**质量**(mass)来描述.

从牛顿第二定律 $F = ma$ 形式上看,难免会由于数学思维得出“用力来定义质量的多少”或者是“用质量定义力的大小”这样的观点,而进入力与质量循环定义的误区.但实际上谁也没有定义谁.因为正常的物理思维是先要提前定义质量和力:

首先质量是受力物体所固有的属性之一,它具有广延性:如果把质量为 m_1 的质点与质量为 m_2 的质点复合为一个大质点,其质量变为 $m_1 + m_2$.可比性:任意两个质点的质量都可以依照在同样大小的力下的行为来比较其质量的比例关系³.和固有性:只要质点没有变性,质量就不变,所以在不同参考系去看同一个质点,在运动的不同时刻质量都是严格不变的,也称“质量守恒”,我们将避免这一称呼,因为一般的守恒量只是针对一个参考系中的过程中的各个状态,而换一个系看守恒量往往要变,质量却显然不变,这是其一;另外相对论下质量就不再守恒了,它不普遍,这是其二.

力也是对固有的相互作用的强度做的描述.它也是固有的,应当有一种合理的公式去描述施力物体的状态如何影响施加的力(这个力也与受力物体的状态有关).而且如果换一个参考系考虑,力的强度是不变的.根据力对质点产生的效果,力也应当具有矢量性,不同两个力是可以比较的,很多情况下甚至可以叠加:多个施力物体互不影响各自施加的力,同时作用于同一个受力物体,在生活中这种现象非常常见,不难得出这样的总结.

于是才有了牛顿的著名论断:

$$F = ma$$

这样一个定律内容是丰富的,它首先是兼容于伽利略相对性原理从而自洽:在另外的惯性系中考察, F 和 a 都是不变的.但是又不是兼容于相对性原理的唯一解决方案,狭义相对论,就提供了另一套可能性,在低速极限 $v \ll c$ 时狭义相对论的动力学方程表达式和这并无二致;其次质量 m 作为系数联系了力(原因)与加速度(结果)这并不是偶然,它也是为了和叠加原理相协调:一份的力作用在一份质点上产生这样的加速度,那么把两份力各自作用在两份质点上那就还是产生同样的加速度.所以力除以质量决定运动学加速度⁴那是天经地义.至于为什么两份力作用在原来的一份质点上会产生加速度加倍的效果,这就是经典力学中的类似于公理性质的存在了.

2.1.4 牛顿第三定律

牛顿第三定律是对“相互作用”中的“相互性”的刻画,暗示了动量与角动量守恒.

任何物理理论,如果妄想短短几条式子中道尽万千世界发展与变化的规律,都是玄学而不是科学.科学的精神是要基于事实,进行总结与归纳,借助数学进行基本的抽象与再创造.所以现实就是,世界的运行本就是复杂的,不可预测的.物理学的发展史也就充满了惊人的转折:每当人们以为在某一个大的领域有简单而清晰的图像共识的时候,总是会有意外发生告诉人们特殊情况下理论不再适用.原则上,没有任何命题能够成为物理学上的公理:它能无条件适用于从宇观到微观的方方面面.

牛顿清楚地意识到了物质与物质之间相互作用的复杂性,是不可能用几个简单的公式写出所有情况下他的理论中两个任意质点之间的作用力的.所以退而求其次,用牛顿第三定律来描述了所有情形下这样的力需要满足的条件.的确合情合理.但是又看牛顿第三定律的提法本身是否合理?

² 牛顿甚至认为光也适用于质点模型

³ 事实上用碰撞实验可以给出一个更简单的比较质量的方法,让待测质量的质点以一个单位的速度去正碰撞一个以 x 个单位速度运动的单位质量的质点,若恰好停下就说明待测质量为 x 个单位质量,若没停下就改变 x 的值直到停下.

⁴ 即 $F/m = f(v, a)$

实际上我们先注意到动量守恒和角动量守恒的条件比牛顿第三定律的条件要强(也更本质):我们可以由前者推导出后者.以动量为例,动量是用来描述一个体系的动力学运动趋势的.动量守恒就意味着,如果一个孤立的体系的一部分“平均地”在初始时刻具有向前运动的趋势,比如一部分向前运动而另一部分静止.那么之后就绝对不可能演化为向后运动.或者还可以这么理解:如果看到一个质点在做一个非匀速直线运动:比如忽快忽慢的直线运动,那么显然单独看质点本身动量并不守恒.但是这必然意味着质点不是孤立的,必须和别的体系一同看作一个整体,质点增加或减少的动量必须由体系的另一部分的动量减少或增加来抵消,来满足整体动量守恒的需求.如果体系仅仅由两个质点构成,再把动量的增加或减少的快慢理解为受力(动量定理),我们就有了牛顿第三定律中关于相互作用力等大,反向的部分.

所以动量守恒可以用来“证明”牛顿第三定律中的一对相互作用力.同理角动量守恒则可以用来证明牛顿第三定律中质点间相互作用力共线的部分.最后读者可以验证牛顿第三定律的数学形式为⁵:

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}$$

之所以这么理解是因为,动量守恒和角动量守恒显得更普适.事实上,它们是体系物理规律在空间平移对称性和旋转对称性下具有协变形式的直接推论.这一点是由近代著名的**诺尔特定理**(Noether Theorem)这一数学定理精确证明了的.

也正是牛顿第三定律暗示了牛顿经典力学体系的缺点.因为我们无法解释牛顿第三定律的“自然性”,取消牛顿第三定律所构成的体系无非是具有外力的非孤立系(动量不守恒),牛顿第三定律为体系增添的“结构性要求”并没有很好地由理论解释与包含.所以才有了后来建立在对守恒量,尤其是能量进行强调的分析力学理论的提出.

2.1.5 质点系与它的牛顿定律

对于复杂体系,牛顿提出一种可能的等效观点,就是把任意这样的体系看做是一种离散的质点系的推广.质点系由质点集合 $\{(m_i, \mathbf{r}_i)\}$, $(i = 1, 2 \cdots n)$ 组成.我们只要找到从质点理论到有限质点构成的质点系理论中那些不变的结论,就有理由相信这些结论可以推广到复杂的真实体系.因为真实体系被期待可以用一个足够大数目的质点系来近似.对于复杂的质点系首先需要引入**质心**(center of mass, CM) 的概念:

$$\overline{\{(m_i, \mathbf{r}_i)\}} = (m_C, \mathbf{r}_C)$$

我们的做法是:直接把质心理解为一个新的质点,它具有新的质量 m_C 和位置 \mathbf{r}_C ,并满足表达式:

$$m_C = \sum_i m_i \quad ; \quad \mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

可以把上式读作:质心的质量等于质点系的总质量,质心的位矢是各个质点位矢关于质量的加权平均.

质心的求法是符合交换律与结合律的.这在质量上是显然的,因为质心质量就是各个质点质量构成的连加式.对于质点位矢,考虑总质量为 m_1 的第一个质点系 $(m_{1i}, \mathbf{r}_{1i})$ 和总质量为 m_2 的第二个质点系 $(m_{2j}, \mathbf{r}_{2j})$ 复合而成的整个质点系,如果直接算两个体系质心形成的质心:

$$\frac{m_1 \mathbf{r}_{1C} + m_2 \mathbf{r}_{2C}}{m_1 + m_2} = \frac{\sum_i m_{1i} \cdot \frac{\sum_i m_{1i} \mathbf{r}_{1i}}{\sum_i m_{1i}} + \sum_j m_{2j} \cdot \frac{\sum_j m_{2j} \mathbf{r}_{2j}}{\sum_j m_{2j}}}{\sum_i m_{1i} + \sum_j m_{2j}} = \frac{\sum_{k \in 1 \& 2} m_k \mathbf{r}_k}{\sum_{k \in 1 \& 2} m_k}$$

可以发现这就是整个体系的质心.这种方法就是“组合法”,比如求几根棍子的质心,可以把棍子替换为在质心的质点再求.由此还可以引申出“割补法”或者“负质量法”,不过就是把上式反过来理解:如果我们

⁵ \mathbf{F}_{12} 表示 1 给 2 的力.

要求第一个体系的质心, 不难验证可以这样求:

$$\mathbf{r}_{1C} = \frac{m\mathbf{r}_C - m_2\mathbf{r}_{2C}}{m - m_2}$$

动态地看待求质心的式子, 还可以发现, 求导以后, 我们得到了质心作为一个在运动的质点, 其速度, 加速度也是可以直接从原质点系来做加权平均的:

$$\mathbf{v}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} \quad ; \quad \mathbf{a}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{\sum_i m_i}$$

为了推导出质点系的类似的牛顿定律, 我们发现牛顿三大定律是缺一不可的. 当然原则上如果没有牛顿第三定律, 我们就把作用在每一个质点 m_i 上的合力, 不管施力物体是谁, 记作 ${}^t F_i$, “t” for “total”. 原则上我们也可以得到:

$${}^t \mathbf{F} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \quad {}^t \mathbf{F} = \sum_i {}^t \mathbf{F}_i$$

这一点很容易证明, 只需要把每个质点的牛顿定律加起来即可. 但是注意到牛顿第三定律既然正确, 我们就可以做进一步的研究: 把任何质点受力分解为 **内力** (internal force) 和 **外力** (external force):

$${}^t \mathbf{F}_i = {}^{in} \mathbf{F}_i + {}^{ex} \mathbf{F}_i$$

内力指 $i = 1, 2 \cdots n$ 个质点之间一对一对存在的力, 所以实际上不如写明:

$${}^{in} \mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}$$

最后单独的那个真正的外力以后直接简写为 ${}^{ex} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i$.

经过这么一番折腾完以后, 我们还是把所有质点的牛顿定律来求和, 但是注意到由于牛顿第三定律关于相互作用力等大反向的部分, 内力相互抵消, 得到:

$$\mathbf{F} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \quad \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

这就是质点系的牛顿第二定律, 相比上面那个也对的直接把每个牛二加起来的表达式, 能引起注意的变化只有一点, 那就是: 不需要考虑内力! 但正是这一点极大地简化了很多实际问题的分析.

值得一提, 我们顺理成章地要考虑另外两个层面的规律, 一是 “对质心”, 二是 “相对质心”. 前者值的是, 把质心作为一个质点来研究问题. 那么问题也很简单, 利用之前证明过的:

$$\mathbf{a}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{\sum_i m_i} \quad \Rightarrow \quad m_C \mathbf{a}_C = \sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

就可以得到:

$$\mathbf{F} = m_C \mathbf{a}_C$$

这就是著名的 **质心运动定律** (motion law of CM). 特殊的, 如果合外力 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. 那么退化到 **质心守恒**: 质心做匀速直线运动或者静止.

最后我们提出质心系的概念. **质心系** (frame relative to CM) 指: 原点在质心的平动欧几里得坐标系. 结合我们已经学过的和将来要学的所有内容我们把其性质罗列如下, 请读者能够给出证明的直接证明, 给不出的带着问题往下学习:

- 质心系虽然有非惯性力, 但非惯性力与原力系主矢和为零.
- 质心系虽然有非惯性力, 但非惯性力系对质心的主矩为零.
- 质心系是零动量系.
- 质心系虽然有非惯性力, 但非惯性力在过程中总功和为零.
- 取质心为原点能使质点系二阶矩最小, 故刚体相对所有平行轴中以过质心的轴转动惯量最小.
- 只有取质心才能写出柯尼希定理.

2.1.6 非惯性系的处理

虽然牛顿定律只在惯性系中成立. 但是如果我们选取一个相对惯性系的转动系, 其原点速度加速度为 v_C 与 a_C . 而角速度与角加速度分别为 ω 与 β . 本来在原来的惯性系中研究一个质点, 正确的式子是:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

现在换了参考系以后, 将不能仿照上式写出一个依然正确的式子. 但是加速度变换总是对的:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_C + \beta \times \mathbf{r}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') + 2\omega \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'$$

而我们也永远认为力矢量在参考系变化下是大小与方向都不变的:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'$$

代入就足以得到依然正确的, 仅仅用新的非惯性系中的各个参量表示的类牛顿定律. 我们以后将直接叫做非惯性系中的牛顿定律:

$$\mathbf{F}' + (-m\mathbf{a}_C) + (-m\beta \times \mathbf{r}') + [-m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}')] + (-2m\omega \times \mathbf{v}') = m\mathbf{a}'$$

可以发现, 这类似于需要为质点运动虚构一些力, 它们全都称作**惯性力**(force of inertial). 包括:

- 平动惯性力 $-m\mathbf{a}_C$, 典型的情况就是平动而非转动的非惯性系中的惯性力. 特点是一个恒力, 而与质点的运动状态无关.
- 切向惯性力 $-m\beta \times \mathbf{r}'$ 与惯性离心力 $-m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}')$, 典型的情况是绕轴做旋转的参考系. 特点是这两个力仅仅依赖于质点的位置, 离轴越远力越大, 在轴上力就消失了.
- 柯里奥利力 $-2m\omega \times \mathbf{v}'$, 典型的情况是相对转动系还有运动的情况. 特点是给出一个与位置无关, 但是正比与速度大小, 方向始终垂直于速度方向的力.

如果我们的研究对象是一个刚体而非质点, 那么相当于每一个质点上都要受到不同的惯性力. 此时如果考虑这些所有力作用在刚体上的等效合力和力矩, 那么将是一个非常复杂的情况, 尤其是, 各个柯里奥利力将对刚体整体造成所谓的“回转力矩”, 用这个观点可以解释很多第七章刚体中的现象, 感兴趣的读者可以参考相关资料.

2.2 动量定律

这四节我们将罗列质点与质点系动力学的核心内容. 读者应当具有初等的牛顿理论的基础. 这一部分与三个牛顿定律的关系如何? 首先它们是牛顿定律的自然延伸, 属于并占据经典力学的主要部分. 其次这些结论与相关推论适用性很强. 比如三个守恒律: 动量能量与角动量的守恒几乎是在所有物理理论中普适的. 从内容上看关于质点系的定律自然就包含了单质点的相应特殊情况. 而写法总是有三种: 相对地面系的, 相对质心系的和把质心作为质点的. 联系三种写法的是质心系独有的各个柯尼希定理. 最后, 能量比较特殊我们单独列一小节多加阐述, 具体的碰撞问题加一节, 最后再补充一个新的位力定律. 便构成了一 3×3 条定律为主干的本章的内容. 实际上也就是牛顿经典力学的核心部分.

2.2.1 质点的动量

质点的**动量**(momentum) 定义为:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

很直接地可以推导出质点的**动量定理**(law of momentum) 来,用 \mathbf{F} 表示合力:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

证明过程就是把牛顿定律右侧拿来等量代换.

质点动量守恒并不是守恒律最常见的提法.但是不管怎样,我们能看出来,如果在某方向⁶分力为零,那么该方向分动量导数为零,从而是一个不变量.

2.2.2 质点系的动量

依据上一节的符号约定,质点系 $\{m_i, \mathbf{r}_i\}$ 中第 i 个质点的牛顿定律写作:

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} = m_i \mathbf{a}_i$$

所谓质点系的动量定理,无非就是把上式拿去对每一个质点求和,然后等号右侧化为动量的形式.过程中我们发现需要定义:

质点系的总动量:

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$

外力矢量和:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

过程中内力全然抵消,这就导致了最后表达式简单地为:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

接下来就是研究质心的两个层次,一是把质心作为质点研究等号左侧的“作用”和等号右侧的“动力学量”;二是考虑相对质心系的引入惯性力以后的新写法.

如果在地面系中质点系受到一个力 \mathbf{F}_α ,那么把这个力移动到质心上以后,我们认为这个力是不需要改变的.但是如果考虑相对质心系,固然原来的力也是存在且不变,但是还得考虑惯性力.那么总的合力推导出来应当是:

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}' = \mathbf{0}$$

后者是因为惯性力的合力 $\sum_i -m_i \mathbf{a}_C = \sum_i -m_i \mathbf{a}_i = -\mathbf{F}$. 我们发现:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}'$$

形如上式的式子都可以叫做**柯尼希定理**(König theorem). 再看动量,质心动量就应当是质点系总动量,而相对质心系动量必然为零:

$$\mathbf{p}_C = \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{0}$$

前者由于质心的定义很容易看出来,后者一般被叫做:质心系是零动量系,两者之和符合:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_C + \mathbf{p}'$$

这就不难看出:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= \frac{d\mathbf{p}_C}{dt} \\ \mathbf{F}' &= \frac{d\mathbf{p}'}{dt} \end{aligned}$$

⁶必须是直角坐标!比如极坐标下 $F_\theta = 0$ 但 p_θ 不守恒, $L = rp_\theta$ 才是对应的守恒量,个中缘由涉及到分析力学.

最后我们讨论普遍的**动量守恒**(conservation of momentum).

第一, 动量守恒是普遍的, 虽然表面上看 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ 一个体系的动量只要外力不为零就会有非零的导数. 但是根据动量守恒的精神, 一个体系的动量增必然以另一个体系动量的减为代价, 也就是需要注意到既然存在外力 \mathbf{F} , 那就需要考虑力作用的相互性. 只要把所有施力物体都归入同一个体系使相互作用封闭. 那么等号左侧只能为零, 那么等号右侧就会有普遍的动量守恒.

第二, 有些场合动量不以质点为载体而是以场为载体. 动量依然守恒, 毕竟我们将认为场给质点的力与“质点给场的力”构成反作用力符合牛顿第三定律. 事实上只要可能涉及到超距作用就一定是要用场来处理的, 不用场处理可能导致不精确甚至谬误的结果, 这是因为牛顿第三定律都不一定适用. 只要想想一个质点位置突然改变, 由于相互作用传递速度必然有限导致相隔一定距离的第二个质点受力变化将会延迟, 就不能使得这个力等于同一时刻的反作用力, 那么两质点的动量和就不再守恒. 另一种典型的情况是两个电流元之间的磁场安培力也不符合牛顿第三定律, 全都是因为有场的动量未计入计算的缘故. 所以这些场合, 如果牛顿第三定律“近似”适用, 我们才说质点系的动量“近似”守恒. 严格的动量守恒设计场论的知识, 有兴趣的读者可以进行相关学习.

2.3 角动量定律

角动量的逻辑与上一节是完全一致的. 只不过在牛顿定律的数学处理上要多一步罢了.

2.3.1 质点的角动量

选取一个参考系的原点 O 以后便可以写出质点的位矢 \mathbf{r} . 那么质点受力对 O 的**力矩**(moment of force, moment, torque) 定义为:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

而为质点则定义一个动力学量也就是**角动量**(angular momentum):

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

之所以这么做, 一种想法是对牛顿定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 两侧用 \mathbf{r} 叉乘的一种可能的构造思路⁷. 这就能给出**角动量定律**(law of angular momentum):

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

证明过程只消注意到右边莱布尼茨法则出来两项的另一项 $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

角动量定律有一个值得注意的点, 那就是**矩**(moment) 的中心的选取的任意性. 角动量 (动量的矩) 和力矩都因为是 O 点计算的才具有位矢 \mathbf{r} , 这个点叫做**矩心**(center of moment). 而选取不同的矩心的结果就会产生不一样的定律的表达式形式, 它们都是对的. 但是解题时何以选取? 这个复杂的问题我们下一章再做简要介绍.

另一个点是原则上必须选取不动的点作为矩心. 选取动点暗含两层意思, 一是, 可能要把每一个粒子对动点的动量理解为相对速度对应的动量. 二是, 可能在求角动量的导数时要求的是跟随动点的角动量的导数. 无论哪一点都将使得相应结论不再正确. 当然, 如果两种可能的更改都没有发生, 即, 仅仅是这一时刻对这一点列瞬时的角动量定律, 下一时刻换下一个点列. 那么这就是构成一个时时刻刻都成立的等式, 只有在这种意义下角动量定律才可以原封不动地应用. 否则需要重新从牛顿定律出发加以推导.

质点的角动量守恒也不是一个典型的结论. 但是有一种典型的情形: 就是平面上一个有心力作用下的质点运动是角动量总是守恒的. 因为此时 $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{0}$.

⁷Noether 定理才是严谨的构造思维.

2.3.2 质点系的角动量

定义质点系的总角动量:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

外力力矩和 (不需要包括内力):

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

每一个质点的牛顿定律, 现在我们用每一个质点的位矢做叉乘:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i$$

然后再来求和, 注意到牛顿第三定律中的“共线”性 $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$ 让第二项内力也一一对一对抵消了. 于是得到质点系的角动量定律:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

同理, 考虑把外力移动到质心形成的总力矩和相对质心系的力矩, 把从质心出发的各个质点的位矢记作 \mathbf{r}'_i , 就有:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}, \quad \mathbf{M}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$$

后一个式子隐藏着一个关键信息: 质心系中惯性力以质心为矩心时力矩和为零, 这可以如下推导:

$$\sum_i \mathbf{r}'_i \times (-m_i \mathbf{a}_C) = - \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{a}_C = -\mathbf{0} \times \mathbf{a}_C$$

而质心的角动量与相对质心的总角动量为:

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_C \times m_C \mathbf{v}_C, \quad \mathbf{L}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$$

注意后一式中由于换系, 相对质心速度应当为 $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C$. 如此定义以后依然可以符合柯尼希定理:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_C + \mathbf{M}'$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + \mathbf{L}'$$

对于后者我们简略写出证明过程:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_i (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i) \\ &= \mathbf{r}_C \times \left(\sum_i m_i \right) \mathbf{v}_C + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times \left(\sum_i m_i \mathbf{v}'_i \right) + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \mathbf{L}_C + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{L}' \end{aligned}$$

于是也就有质心的角动量定律和相对质心的角动量定律:

$$\mathbf{M}_C = \frac{d\mathbf{L}_C}{dt}$$

$$\mathbf{M}' = \frac{d\mathbf{L}'}{dt}$$

容易看出**角动量守恒**(conservation of angular momentum) 也是普遍的. 而场的角动量也是可能涉及超距作用时需要考虑的因素.

2.4 能量定律

能量的情况就有一些不一样了. 在动能定理的层面上逻辑相似, 但是内力不再可以忽略, 而且动能往往不守恒, 即使守恒也不普遍, 能量普遍地需要守恒, 但这又不能在经典力学框架下加以证明. 纯属特殊情况下的特殊结论或是一种令人信服的归纳假设.

2.4.1 质点的动能

力作用在质点上对质点做功(work) 的功率(power) 定义为:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

一个具体的过程才可以说做功, 它等于功率的时间积分, 也可以按照力点乘位移来做积分:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

质点的动能(kinetic energy) 则定义为:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

这么定义的出发点也可以是从 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 出发, 两变同时点乘 \mathbf{v} 得到所谓的动能定律(law of kinetic energy):

$$P = \frac{dT}{dt}$$

证明过程只需要注意到 $d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = d(v^2) = 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = 2v dv$ 为恒等式.

质点动能守恒也不是一个典型的结论. 如果质点受的合力始终垂直于质点速度, 那么便有动能守恒. 比如把质点约束在一个光滑的椭球面上做惯性运动, 或者是让电荷在一个任意的不随时间变化的磁场中运动都属于这种情况, 动能是不变量.

2.4.2 质点系的动能

定义质点系的总动能:

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

但是, 单独求外力的功率和是没有用的, 因为内力也有它的功率, 且不为零. 所以我们写出整个体系的总作用力的功率:

$$P = \sum_i P_i + \sum_{\{ij\}} P_{\{ij\}} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{\{ij\}} (\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i)$$

顾名思义, 求和 $\sum_{\{ij\}}$ 意为对每一对力涉及的后面的向进行求和. 每一项必然涉及到两个质点, 选取好

每一对质点以后就可以写出项来而不在于选取的顺序. 故如果共有 n 个质点的话一共最多会有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 对, 事实上既然 ij 交换要求项本身又不会变, 总是有:

$$\sum_{\{ij\}} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1}$$

这样对每一个质点的牛顿定律点乘质点的速度:

$$\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

同理, 求和可得质点系的动能定律:

$$P = \frac{dT}{dt}$$

同理,考虑外力移动到质心后对质心运动做功的功率和相对质心系的系统所有力的功率和:

$$P_C = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_C, \quad P' = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}'_i + \sum_{\{ij\}} (\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}'_j + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}'_i)'$$

这里也隐藏着两点,一是作用在质心上的力又只需要考虑外力了,因为内力的和本来就是零.二是质心系中的惯性力又因为做功总是零而不需要写在第二个式子中了,也就是:

$$\sum_i (-m_i \mathbf{a}_C) \cdot \mathbf{v}'_i = - \left(\sum_i m_i \mathbf{v}'_i \right) \cdot \mathbf{a}_C = -\mathbf{0} \cdot \mathbf{a}_C$$

而质心的动能和相对质心的总动能为:

$$T_C = \frac{1}{2} m_C v_C^2, \quad T' = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

如此定义以后将符合柯尼希定理:

$$P = P_C + P'$$

$$T = T_C + T'$$

证明过程请读者自己完成.同时,也有对质心的动能定律和相对质心的动能定律:

$$P_C = \frac{dT_C}{dt}$$

$$P' = \frac{dT'}{dt}$$

导致能量与角动量和动量不同的原因是,动能守恒绝对不是什么普遍结论,不仅不普遍而且还很罕见.能量才是普遍守恒的.我们细细比较其中区别:

2.4.3 其它能量形式

从表面上看,很容易观察出来,即使整个质点系已经囊括了全部的施力物体了,相互作用是封闭的,也就是每一个质点上都没有外力只有内力:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

此时依然总功率可以不等于零:

$$P = \sum_{\{ij\}} P_{\{ij\}} = \frac{dT}{dt} \neq 0$$

从而还和动量,角动量那样的守恒律已经成为了妄谈.

从实质上看,我们对于动量定律角动量定律还有一种说法:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

力,带来动量的转移;力矩,带来角动量的转移.但是同样的说法换到做功上就不合适了:的确,下式成立:

$$P = \frac{dT}{dt}$$

但是功率不能认为是动能的转移.的确,功率是能量的转移;也的确,功率就是单位时间变成的动能.但是它不一定来自动能.只需要设想两个带正电的小球相互排斥而获得速度,那么显然把其间的力视作相互作用力时,两小球的动能并不是互相转移的关系,而是都因为力做功而获得动能,这个动能来自下面要讲的势能,或者场的能量.

所以能量守恒这一论调,不像另外两个守恒律,至少是不能从牛顿定律中单独推导.但是只要上升到分析力学立刻就可以发现能量守恒是完整体系相互作用不显含时间(稳定体系)的结果.在经典层面上通过补充下面三个独立而正确的说法便可以使得能量守恒可以被证明出来.

保守力

保守力意为由势能函数描述的力. 势能函数是至关重要的概念, 为了确定一个体系的运动, 原则上只需要给出势能函数和初始状态便可以完全求解了. 复杂的体系之所以复杂, 一是粒子数大, 二是初始状态随机. 但是各式各样的整体行为, 往往就蕴藏在任意两个粒子的相互作用的形式中. 而这个相互作用我们相信它总是保守的.

就是说, 存在二体相互作用函数, 也就是势能(potential energy) 函数 V , 如果两个粒子分别在 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 . 势能应当只与位置有关 (与速度加速度无关), 也不能含有时间:

$$V = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

而势能决定作用力:

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 V, \quad \mathbf{F}_{21} = -\nabla_1 V$$

如果能够找到这样的势能函数, 那么就把这样的力叫做保守力(conservative force).

如何理解以上的形式? 它的等价的写法是:

$$\begin{aligned} F_{12x} &= -\frac{\partial V}{\partial x_2}, & F_{12y} &= -\frac{\partial V}{\partial y_2}, & F_{12z} &= -\frac{\partial V}{\partial z_2} \\ F_{21x} &= -\frac{\partial V}{\partial x_1}, & F_{21y} &= -\frac{\partial V}{\partial y_1}, & F_{21z} &= -\frac{\partial V}{\partial z_1} \\ dV &= V(\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_2 - \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_1 \end{aligned}$$

那么首先这就提出了一个要求, 由于相互作用力总是应当满足牛顿第三定律的, 而且体系应当也具有对称性, 那么势能函数必然只取决于两个质点的相对位矢, 且与两个质点的相对位矢的方向没有关系, 只能和其大小有关系, 也就是说:

$$V = V(R), \quad R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

这自然就可以计算出:

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{dV}{dR} \mathbf{e}_{12}, \quad \mathbf{F}_{21} = -\frac{dV}{dR} \mathbf{e}_{21}$$

其中 \mathbf{e}_{12} 和 \mathbf{e}_{21} 分别代表 1 指向 2 和 2 指向 1 的单位矢量.

第二点是, 在任一个元过程中, 这一对相互作用内力做的功的和, 一方面由于动能定律等于转化为 1 和 2 的总动能 dT , 另一方面还等于势能的减少:

$$\mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_1 = -dV$$

这就造成了能量函数 $H = T + V$ 的守恒:

$$dT = -dV \Rightarrow H|_t = H|_{t=0} = E$$

在更多情况中, 我们让施力物体静止在固定点, 但是施力物体亦是一个质点系而非质点, 研究单个质点作为受力物体的运动. 那么显然此时质点符合 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. 但是质点依然受到所的合力还是一个保守力, 只需要把它与各个施力物体的势能函数相加, 整体作为这个质点位矢的一元函数即可:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$$

总之, 原则上可以用势能函数描述的力就是保守力. 虽然从中文还是英文的名字来看, 似乎暗示了只要能量守恒就应当视作保守力, 但这是不恰当的. 例如一个不随时间变化的磁场中一个电荷的运动, 显然动能不随时间变化是个常数, 但这绝对不意味着体系的势能函数为 $V(\mathbf{r}) = 0$ 或常数. 的确, 这样能够使得“能量函数” $H = T + V$ 守恒到一个常数 $E = T|_{t=0}$, 但是这样的势能函数不能用来刻画磁场给质点的力:

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \neq -\nabla V$$

所以这个力不能用势能来描述,从而并不是保守力⁸.

约束力

从微观相互作用到宏观发生了很复杂的变化.但是很多情况下体系依然存在一个势函数.例如单摆的动能和势能就可以写为:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \\V &= mgl(1 - \cos\theta) \\H(\theta, \dot{\theta}) &= T + V\end{aligned}$$

显然,这里用的不再是摆球的位矢 \mathbf{r} 作为势能的坐标.而是换成了 θ 这样的**广义坐标**(generalized coordinates),对应的广义力 $-\frac{\partial V}{\partial \theta}$ 实际上是一个力矩,把广义力乘广义坐标的微分实际上就是释放的势能.我们发现小球受到的力是重力和绳子的拉力,这个势能函数实际上就是只考虑了重力势能.为什么可以这么做?这是因为绳子的拉力就是一个十分典型的约束力.从守恒律的角度来看,它不会影响其他力造成的动能和势能守恒.这一点也十分自然,因为这样的绳子的确没有任何机制能够存储能量.

这也就是说,对**约束力**(constraint force)的要求主要就体现在它不能做功上.显然,上一例中的绳子拉力并不对摆球做功.容易验证,光滑的面接触,不可伸长的轻绳轻杆连接的两个物体,其约束力对约束的单个物体多整个体系做的总功总是零.它们都是典型的约束力.更详细的讨论见下一章.我们最后以一个例子来看待对约束力的要求.

如果一个体系的两个广义坐标 q_1, q_2 对应的物体之间有一个约束 $F(q_1, q_2) = 0$,如两个用长为 l 的不可伸长的轻杆连接的质点的 x 坐标就必须满足:

$$F(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 - [l^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2] = 0$$

那么在任何过程中两个坐标的变化量 dq_1 和 dq_2 就必须满足:

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2}dq_2 = 0$$

同时作为约束力,对两个物体做功的和必须为零:

$$Q_1dq_1 + Q_2dq_2 = 0$$

这就给出了约束力的条件.约束力应当具有形式:

$$Q_1 = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_1}, Q_2 = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial q_2} \quad \text{s.t.} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

两个 λ 就代表了约束力的强度.这个式子的一种最简单情况是,同一个不可伸长的轻杆对两侧两质点的作用力必然是等大反向的.总之,不做总功就是约束力的核心特性.

耗散力

从微观到宏观,一个很重要的不同就是对**内能**(inner energy)的忽视.设想一个静止的小球,用力一掷小球便飞走.在静止时小球内部依然有大量运动的粒子.就纵使设想小球是一个质点系.考虑到内部的势能,加上其总动能便是此时的内能 U :

$$U = V + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

⁸其实在分析力学中如果引入磁矢势 \mathbf{A} 那么这个力可以作为 $U = -q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ 的负梯度,这中含有速度的势能叫做广义势函数.但是即使可以定义势函数,习惯上依然不把这个力叫做保守力.因为可以验证此时动能与这个势能的和又不再守恒了.

我们还要求这样的质点系不能具有动量,也就是目前就在这个质点系的质心系(其实是瞬时与质心共速的惯性系)中,才能认为这个小球是“静止”的:

$$\mathbf{0} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$

但是如果小球如果以速度 \mathbf{u} 被抛出去,当作质点 $m = \sum_i m_i$ 其动量和动能自然是:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}, T = \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2, \quad T = \frac{p^2}{2m}$$

即,动能是由于动量而产生的能量.这种说法是贴切的.因为柯尼希定理足以告诉我们,作为质点的动量就是抛出小球作为质点系的总动量 $\sum_i m_i(\mathbf{v}_i + \mathbf{u}_i) = m\mathbf{u}$.而抛出小球的总能量,势能部分是不变的,再把动能部分用柯尼希定理:

$$H = V + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 = U + T$$

从而动能是由于运动而具有的能量这一点就不言而喻了.如果速度 $u = 0$ 那么体系就只有内能.

正是基于这一点,我们考虑一个宏观“质点”系的能量时,“质点”并不是完全理想的模型,仅仅是足够小的质点系的一种“打包”.那么体系的总的能量就可以由“质点”的动能,“质点”间相互作用的势能,以及“质点”的内能三部分协同构成.前两部分是宏观的能量,习惯上还是合称为“机械能”.后一部分则是微观形式的能量.而耗散力是这样一种力,在认可微观过程总是能量守恒的前提下,就只剩下能量转移的方向了.根据热力学第二定律,自发进行的过程具有普遍的特性:总是趋向于宏观形式的能量减少,无规则热运动形式的能量增加.那么耗散力(dissipative force)就是期间起到搬运能量作用的那个力.也就是说,对于质点系耗散力总是做负功,使得体系动能减少而转变为内能(也称发热):

$$|W| = -W = \Delta U$$

而体系动能增加还是减少还依赖于两点,一是势能的释放可能会补偿由于耗散减少的动能.二是,我们一直默认体系封闭没有外力.但是如果有外力,外力做功也会使得体系的动能发生改变.

综上所述,对一个宏观的质点系,往往其能量转化与守恒写为以下这个形式:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i - \sum_{\{ij\}} ({}^d\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_j + {}^d\mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i) = \frac{d}{dt}(T + V)$$

左侧第一项就是外力做功输入的能量的功率.第二项是内力中的耗散力(已用左上角标 d 表示了耗散)向内能转化的能量的功率.右边就是因为这两个原因而增加的机械能的功率.这就是普遍形式的功原理(work-energy principle).它仅仅是换着法子写了动能定律而已.但是这种写法是为了用能量守恒(conservation of energy)的角度看问题.

2.5 位力定律 *

位力定律从来都在动力学理论的大框架的边缘.主要原因可能是因为并不对应任何有意义的守恒律.但在有的场合却能够发挥奇效.

2.5.1 质点的位力

不同于力矩,位力(virial),顾名思义就是位矢点乘力,而不是叉乘:

$$\mathcal{V} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$$

而我们也为质点运动新定义一个动力学量,也把角动量的叉积变为点积,叫做“G”:

$$G = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$$

可以发现 G 本身是 $I = \frac{1}{2}mr^2$ 的导数:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) = \mathbf{r} \cdot m \mathbf{v}$$

但是仿照角动量定理写的以下式子并不成立:

$$\mathcal{V} = \frac{dG}{dt}$$

事实上:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{2} m (\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot m \mathbf{a} + 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 = \mathcal{V} + 2T$$

或者说,位力为粒子的“G”的变化率与瞬时动能两倍的差,这构成**位力定律**(law of virial):

$$\mathcal{V} = \frac{dG}{dt} - 2T$$

有什么场合有用呢?一个典型的场合就是爱因斯坦对布朗运动的研究.我们建立一个这样的模型不妨设想花粉粒子受到一个随时间随机变化的力 $\mathbf{f}(t)$. 一个可以通过给一个恒力测出定向漂移运动而测出来的,正比于速度大小的阻尼力 $-\gamma \mathbf{v}$. 这也就是说位力为:

$$\mathcal{V} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{f}(t) - \gamma \mathbf{v}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(t) - \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} r^2$$

带入位力定律并在很长的一段时间 τ 内对两边进行积分:

$$\int_0^\tau \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(t) dt - \frac{\gamma}{2} r^2 \Big|_0^\tau = G \Big|_0^\tau - 2 \int_0^\tau T dt$$

最后如果再在两边同时处以趋于无限大的 τ . 这对于第一项和第四项这就相当于对积分的内容求过程中的平均,前者显然为零,因为 $\mathbf{f}(t)$ 只依赖于时间且完全随机,平均值就是零. 后者需要注意到动能是恒大于零的,不管如何取平均总不会为零,事实上热学上考虑这应当等于花粉与容器中的分子构成热力学平衡时的平均动能 $\frac{3}{2}kT$. 从而不除 τ 这一项就应该写为 $-3kT\tau$. 第三项的 G 也总是有限的,除以无限长的 τ 自然趋于零. 最后第二项不妨让初始时刻的 $r(0) = 0$. 最后得到:

$$r^2(\tau) = \frac{6kT}{\gamma} \tau$$

这就和三维扩散方程 $r^2(t) = 3x^2(t) = 6Dt$ 不谋而合. 我们发现描述分子力涨落导致无规行走的扩散系数 D 与描述耗散的阻尼系数 γ 之间具有如下的**爱因斯坦-斯莫卢霍夫斯基关系**(Einstein-Smoluchowski relation):

$$D = \frac{kT}{\gamma}$$

这个式子是更普遍的**涨落-耗散定律**(law of fluctuation-dissipation) 的原型. 这个定律有力说明了耗散力的本质与热力学涨落的统一性.

2.5.2 质点系的位力

同理,把位力定律进行多质点的求和,完全类似于角动量定律的情况,但是又类似动能定律推导内力没能抵消,我们得到:

$$\mathcal{V} = \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i + \sum_{\{ij\}} (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_{ji}) = \frac{dG}{dt} - 2T$$

其中“G”自然指质点系的“G”的和,动能 T 也是总的动能. 第二项中求和的每一项由于牛顿第三定律,可以进一步化简为:

$$\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{F}_{ij}$$

一般,上面这个式子用来处理稳定的,束缚态的体系之间的量的平均值.在这个意义下,等号右侧的 $\frac{dG}{dt}$ 就平均为零.实际上 G 作为 I 的导数本身就已经平均为零呢.例如我们可以利用这个式子来证明理想气体的物态方程,此时就几乎有:

$$I = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 = \int \frac{1}{2} \rho r^2 dV = \text{Const.}$$

毕竟宏观气体的热平衡下密度分布是几乎均匀的.而最后一项,作为平动动能的平均就应当是:

$$T = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} \nu R T$$

最后左侧第二项的内力在理想气体中也认为不存在.就只剩下体系受到的外力项了.而外力实际上就是在气体容器上气体压强对容器压力的反作用力:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = \oint \mathbf{r} \cdot (-p d\mathbf{S})$$

其中 p 又是个常数.最后这个积分可以从散度定理出发证明,或者注意到 $\frac{1}{3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ 就是从原点出发连接面元 S 构成的各个圆锥的体积.这给出了:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = -3pV$$

最后代入以上结论就得到了:

$$pV = \nu R T$$

这就是用力定理得到理想气体物态方程的简单思路.历史上著名的**昂内斯方程**(Onnes equation),就是用位力展开给出了有内部相互作用时的物态方程的形式:

$$p = RT \left(\frac{1}{v} + \frac{B_2}{v^2} + \frac{B_3}{v^3} + \cdots \right)$$

其中 v 为摩尔体积.而 $B_2, B_3 \cdots$ 称为第二,第三 \cdots 位力系数⁹.可以用经典的位力定理来推证这个式子,但其实统计物理采取的相互作用图像才是对这个式子的最佳诠释.

2.6 碰撞问题

本小节不讨论连续体与可能带来的动量传输问题.仅仅限于质点,刚体及在理想约束下发生的碰撞过程的讨论.

2.6.1 二质点正碰

碰撞(collision),表面上看很复杂,理论上它被抽象一个持续时间无限短,作用力无限大的理想过程.却总是要伴随或者不伴随着能量损失.这是因为它所对应的实际发生的过程总是一个复杂的多体问题:它涉及到物质的弹性,往下涉及晶格的结构,往上涉及材料的特性.但是和你的模型总是让问题变得简单,这使得我们可以从现象出发建立唯象理论.

一维问题中,质量为 m_1 的质点以速度 v_1 取碰撞一个质量为 m_2 的速度为 v_2 的质点.关心的是碰撞后的末速度 v'_1, v'_2 .传统的观点似乎总是以守恒律为重:我们不出意外地列出:

$$\begin{aligned} m_1 v'_1 + m_2 v'_2 &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 &= \frac{1}{2} m_1 v^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v^2_2 \end{aligned}$$

⁹已经默认第一位力系数 $B_1 = 1$

似乎这样就能求出一个结果来.但这个讨论是非常不完全的.首先结论并不对.事实上碰撞的结果本就是不确定的,其变化的范围一般从**完全非弹性**(completely inelastic)到**弹性**(elastic)的都有可能,必须得取决于碰撞物材料的弹性.以上仅仅是一个弹性碰撞的解.其次方法也不妥,这是因为用守恒律固然方便,但这就等于忽视了相互作用发生的细节.碰撞的过程彻底变成了一个“黑箱子”,失掉了很多本来可以获得的结论.

所以对于碰撞的过程,最佳选择是设出过程中相互作用的冲量来.但是相比把力设出来,设出冲量是否就意味着没有公式来计算过程中碰撞力对两个物体做的功?我们先指出,碰撞过程的做功本身也是一个有歧义的概念.设想一个人站在光滑的水平地面上,具有初速度向墙撞去,但是推了一把墙使得自己停了下来,那么墙对人的力是否做功?这个问题回答“是”和“否”都是有道理的,因为表述的物理概念不同:如果是考虑把人视作质点系,那么墙对人的力作用在手掌上,力作用过程中手掌始终与墙面接触而没有做功,这就给出了“否”的结果,还能说明人减少的动能实际上最终并不会传递给墙面,就好像其逆过程:人推墙把自己推开人获得的动能也应当来自于人自身生物能而不是墙面.但是如果把人视作质点,那这就是一个人与墙之间的完全非弹性碰撞,根据动能定理墙对人做的功,实际上,是对人质心做的功,就等于人获得的质心动能.这样也可以给出“是”的结果.

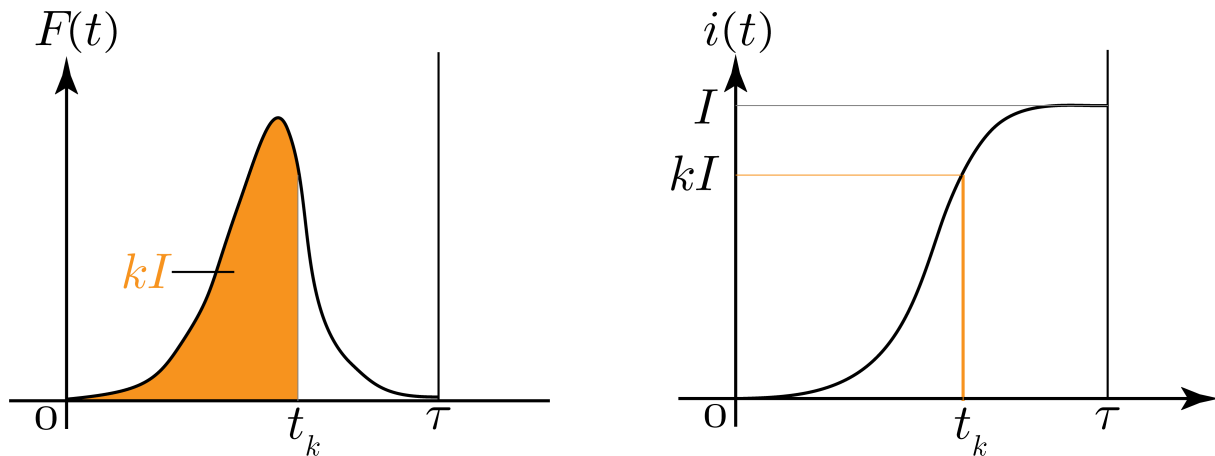


图 2.1: 力与累积的冲量

虽然这个问题倒是也分析地清,但这足以告诉我们,选取一个简单清晰的模型的必要性.为此我们进一步设出碰撞过程中两质点之间持续作用的力 $F(t)$, 它从 0 时刻开始产生到 τ 时刻作用结束.但是,并不是只有两质点直接接触才发生作用力,事实上我们可以人为把这两个力加在相距较远的两个质点上,用这样的模型去等效本来可能复杂的碰撞过程.

我们再把过程中累积的冲量定义为一个函数:

$$i(t) = \int_0^t F(t') dt'$$

并且把最终造成的总作用冲量记作 I :

$$I = \int_0^\tau F(t') dt'$$

那就必然有一个时刻冲量累积到 kI , 可以把这个时刻记作 t_k , 即:

$$i(t_k) = kI$$

事实上由于 i 是严格单调的增函数, 就存在反函数 i^{-1} , 那么这个时间就是:

$$t_k = i^{-1}(kI)$$

有 $i^{-1}(0) = 0$, $i^{-1}(I) = \tau$. 这样就足够我们去计算过程中相互作用力的做功了. 由于是真实碰撞的模拟, 那么必然 $v_1 \geq v_2$ 碰撞才可以发生. 当冲量累积到 i 时, 两个质点的速度分别为:

$$u_1 = v_1 - \frac{i}{m_1}$$

$$u_2 = v_2 + \frac{i}{m_2}$$

这说明过程 1 速度不断减小, 2 速度不断增加. 现在就足够写出力对 1 和 2 做功的功率了. 分别为:

$$P_1 = -F u_1 = -\frac{di}{dt} \left(v_1 - \frac{i}{m_1} \right)$$

$$P_2 = F u_2 = \frac{di}{dt} \left(v_2 + \frac{i}{m_2} \right)$$

最后如果把功率对时间积分, 我们发现积分自动以 i 为自变量了:

$$W_1 = \int_0^\tau P_1(t) dt = - \int_0^I \left(v_1 - \frac{i}{m_1} \right) di$$

$$W_2 = \int_0^\tau P_2(t) dt = \int_0^I \left(v_2 + \frac{i}{m_2} \right) di$$

线性函数的积分, 就等于函数值初末值的平均值乘以积分区间的长度, 这就给出了一个 **冲量乘速度形式的功**, 碰撞过程中相互作用力对质点 1 和质点 2 的功应当是:

$$W_1 = -\frac{1}{2} I (v_1 + v'_1)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} I (v_2 + v'_2)$$

这并不是任何让人意外的结论, 如果带入动量定理 $I = m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$ 就能发现这两个功无非就是末动能减初动能, 其实就是反映了动能定律. 不过注意到表达式推导过程中对动量定律的应用我们发现这个表达式倒不是纯粹的任意情况下都通用的功的定义. 在使用动量定律前的这个功的积分:

$$W = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{I}$$

倒是的确通用的.

如果定义碰前接触速度 $v = v_1 - v_2$, 碰后分离速度 $v' = v'_2 - v'_1$. 我们可以发现:

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2} I (v' - v)$$

又定义恢复系数 $e = v'/v$. 碰撞就因此分为四类:

1. 完全非弹性碰撞, I 最小的情况, 作为一个实际的碰撞过程分离速度必然也至少为零 $v'_2 \geq v'_1$, 否则 1 仍然在接近 2 力就不可能会消失. 所以 I 最小就是让碰撞后共速, 这样 $e = 0$ 就是完全非弹性碰撞的决定 I 大小的条件.

2. 完全弹性碰撞. 考虑碰撞过程的能量转化, 显然, 如果 $W_1 + W_2$ 不等于零, 前后的总动能就不会是不变量. 但是如果要求碰前碰后动能不变, 这就构成了完全弹性碰撞, 简称弹性碰撞. 此时, 除了可以列动能不变来求解 I , 我们发现这等价于 $v = v'$, 也就是 **接触速度等于分离速度**. 以后我们将总是认为弹性碰撞的等价对应条件是 $e = 1$.

3. 非弹性碰撞 (不完全的). 这是最符合实际情况的一类碰撞. 这种碰撞中 $0 < e < 1$. 也就是 $v' < v$ 的情况. 功 $W_1 + W_2$ 是小于零的, 说明碰撞过程动能有损失, 能量去向是显而易见的: 变成了两个碰撞的物体的内能, 这里的内能可能就是热学上的内能, 也可以是视作弹性体时虽然整体动量为零但局部有弹性波而产生的宏观动能与势能. 这种情况之所以普遍是因为, 碰前往往整个物体没有这样的弹性波, 能量处于最低的状态, 碰后这个能量总是会大于零. 故能量总是有损失的.

4. 超弹性碰撞. 也就是 $e > 1$. 碰撞后分离速度大于接触速度. 因碰撞而获得动能. 这样的过程也并不少见, 炸弹的爆炸, 或者刚刚的人推墙使人动起来都是这种情形. 特点是别的能量会释放出来转化为动能. 前提需要注意不能违背动量守恒.

2.6.2 自由刚体的碰撞

如果把两个质点的碰撞换为两个自由刚体相碰撞, 这里我们只考虑平面情况, 那么同理碰撞会产生一个冲量 \mathbf{I} . 但是这个冲量却有两种可能性, 如果是光滑的刚体, 那么碰撞的冲量必然沿法线 n 方向. 但是如果是粗糙的刚体, 那么还可以有沿切线方向的分量. 不管何种情况我们来证明两个恒成立的结论:

一是, 1 对 2 做的功或 2 对 1 做的功总是满足:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}')$$

这里 \mathbf{v} 和 \mathbf{v}' 指的便是力的作用点, 即固连在刚体上的点的速度. 证明这个定理思路类似于之前的做法. 我们可以为过程中的冲量累计选取一个变量 $k(t)$. 当 $k = 0$ 时碰撞刚刚开始, 而 $k = 1$ 时碰撞就结束了. 变量取 k 时作用的冲量为:

$$\mathbf{i}(t) = k(t) \mathbf{I}$$

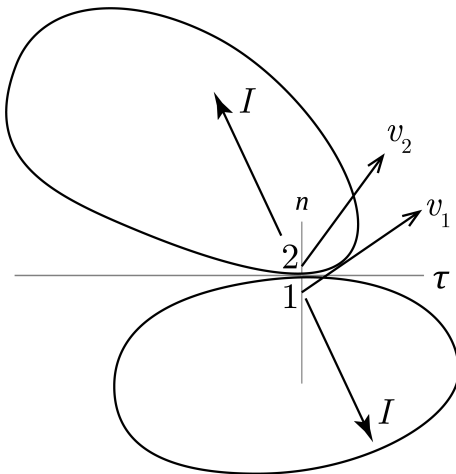


图 2.2: 两刚体碰撞

那么由于冲量对刚体质心速度和刚体旋转角速度的影响都是线性的, 而且碰撞点速度也将线性依赖于这些值. 从而积累到变量 k 时, 点具有速度:

$$\mathbf{u} = k\mathbf{v}' + (1 - k)\mathbf{v}$$

于是利用做功的积分式:

$$W = \int_0^{\tau} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dt = \int_0^I \mathbf{u} \cdot d\mathbf{i} = \int_0^1 [k\mathbf{v}' + (1 - k)\mathbf{v}] \cdot \mathbf{I} dk = \frac{1}{2} \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}')$$

二是, 不损失机械能的条件是, 或者更特殊地, 在无摩擦的碰撞中弹性碰撞的条件是, 接触点形成的沿冲量方向的接触分速度等于该方向的分离分速度. 这个证明也是简单的. 只需要把点乘式后面的速度分解在冲量方向并把两个功相加为零即可. 也就是我们有广义的 $e = 1$ 与动能不变作为弹性碰撞的等价条件.

2.6.3 多体碰撞

如果碰撞是多体的往往有两种不同的处理思路: 一是屡次碰撞的思路, 最典型的碰撞就是牛顿摆情况, 小球与多个连续放置的小球的碰撞如果视作屡次的弹性碰撞就能解释体系形成周期性运动的原因. 因为两个质量相等的小球的碰撞总是简单的交换速度. 此时我们注意到碰撞结束后, 最左侧的两球之间从接触速度的 v 变成了 0, 而最右侧的两小球却从 0 变成了 v :

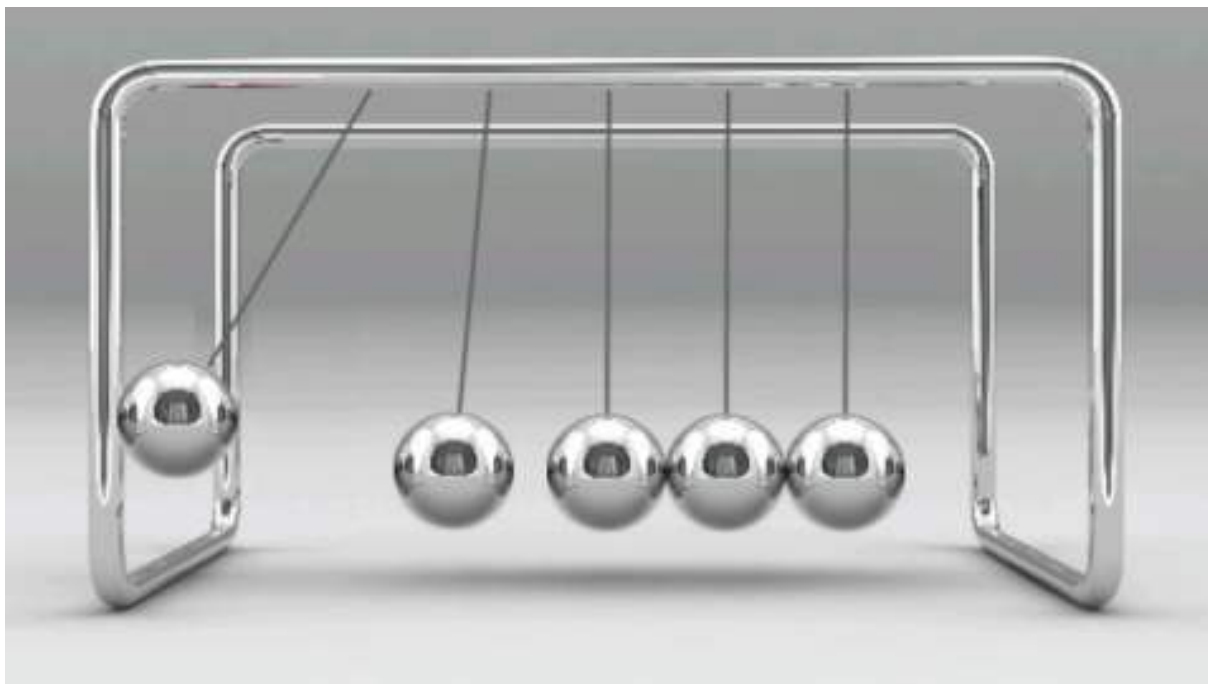


图 2.3: 牛顿摆

但是如果把最右边的小球要撞击的四个小球视作一个带约束的整体,显然既然四个小球必须作为一个整体运动,它们之间的相互作用冲量是不会做功的.同样的道理也适用于任何带约束的多体碰撞场合,虽然碰撞涉及多个物体,但是真正具有接触速度的只有一个碰撞点,那么作为约束其它点处不可能产生分离速度.从而动能不损失的条件依然是在撞击的点处法向接触速度等于分离速度.

不难理解,实际的多体碰撞总是介于两种极端情形之间的.如果是无限多个无限小的球无限密排,这就变成了一个连续的弹性介质中的波动的解的问题,波的传播速度和碰撞速度之间的大小关系就成为了一个具有决定性意义的因素.容易分析,思路一适用与撞击速度很快四个小球还来不及达到平衡的情况.而思路二适用于波的传播速度非常快,任何冲量作用在四个小球上都相当于在推动四个球构成的整体的情况.