

高二物理竞赛 • 电磁学与近代物理

学而思

目录

第一章 静力学	5
1.1 约束	5
1.1.1 约束分类	5
1.1.2 广义坐标与自由度	8
1.1.3 约束力与广义力	10
1.2 力系化简	13
1.2.1 静力学公理体系	13
1.2.2 力系向一点简化	17
1.3 平衡问题: 矢量力学	19
1.3.1 平衡问题的要素	19
1.3.2 平衡条件与判据	19
1.3.3 亚静定, 静定与超静定	21
1.4 平衡问题: 虚功原理	22
1.4.1 理想约束	22
1.4.2 亚静定问题的虚功原理	23
1.4.3 静定问题的求解	23
1.5 分析力学初步 *	24
1.5.1 用广义坐标表示能量	25
1.5.2 拉格朗日方程	27
1.5.3 再论冲击问题	29
1.6 平衡态稳定性	30
1.6.1 一自由度体系	30
1.6.2 多自由度体系	30
第二章 静电学	31
2.1 电荷与电场	31
2.1.1 电磁相互作用与电荷	31
2.1.2 库仑定律	32
2.1.3 电场	32
2.2 两个定律与电势	35
2.2.1 电场的高斯定律	36
2.2.2 电势与电场的环路定律	37
2.2.3 总结	38
2.3 静电能	39
2.3.1 静电势能	39
2.3.2 自能与相互作用能	40

2.3.3	电场能	42
2.4	电荷体系	43
2.4.1	电偶极子	43
2.4.2	电荷密度	46
2.4.3	极化强度 *	47
2.4.4	若干对称带电体系的电场	49
第三章	导体与介质	53
3.1	导体与静电平衡	53
3.1.1	绝缘体与导体	53
3.1.2	导体的特点	54
3.1.3	常见简单体系	58
3.2	电像法	60
3.2.1	半无限大空间的电像法	61
3.2.2	球面外与球面内的电像法	62
3.2.3	立体谐函数 *	64
3.3	电介质	68
3.3.1	微观角度理解极化	68
3.3.2	宏观角度理解极化	71
3.3.3	微观与宏观的联系	75
3.4	再议静电能	76
第四章	稳恒电流	79
4.1	稳恒电流描述与形成	79
4.1.1	德鲁特模型	79
4.1.2	费米气观点 *	80
4.1.3	能带论 *	82
4.1.4	惯性, 阻尼与回复力	84
4.1.5	稳恒电流与形成条件	85
4.2	电路与电路方程	87
4.3	电路分析基础	90
4.3.1	电路的整体结构与拓扑学结论	90
4.3.2	电路问题的求解套路	93
4.4	电路分析方法	94
4.5	半导体	95
第五章	静磁学	97
5.1	电流与磁场	97
5.1.1	磁场地位与电流分布	97
5.1.2	毕奥-萨伐尔定律	99
5.2	两个定律与矢势	101
5.2.1	磁场的环路定律	101
5.2.2	矢势与磁场的高斯定律	103
5.3	电流体系	105
5.3.1	磁偶极子	105

5.3.2	磁化强度	106
5.3.3	若干对称体系的磁场	106
5.4	磁介质与磁能	107
5.4.1	微观角度理解磁化	107
5.4.2	宏观角度理解磁化	108
5.4.3	磁场能量	108
第六章	电磁感应	105
6.1	动生电动势	105
6.2	感生电动势	105
6.3	自感与互感	106
第七章	麦克斯韦方程组	107
7.1	麦克斯韦方程组	107
7.1.1	位移电流假说	107
7.1.2	麦克斯韦方程组	109
7.1.3	电荷在电磁场中的运动	113
7.2	平面电磁波	114
7.2.1	真空中的电磁波	114
7.2.2	介质中电磁波的传播	115
7.3	电磁场能量与动量	117
7.4	电磁波辐射	117
7.4.1	电磁辐射概论	117
7.4.2	偶极辐射	118
7.4.3	辐射的相对论变换	119
7.5	电磁学单位制	119
7.5.1	高斯单位制	119
7.5.2	洛伦兹-亥维赛单位制	119
7.5.3	自然单位制	119
第八章	交流电路	121
8.1	相量表示	121
8.1.1	拟稳条件与交流元件	121
8.1.2	电阻, 电容, 电感特性	121
8.2	常见电路	123
8.2.1	谐振电路	123
8.2.2	滤波电路	123
8.2.3	电报线方程, 再论拟稳条件	123
8.3	变压器	123
8.3.1	磁路定律	123
8.3.2	理想变压器条件	123
8.4	电能传输	123
8.4.1	发电机与电动机: 三相绕组	123
8.4.2	变电站与电线损耗	123
8.4.3	市电规范	123

8.4.4 电源适配器	123
第九章 相对论力学	125
9.1 相对论运动学	125
9.2 相对论动力学	126
9.3 相对论连续物质	128
第十章 光的干涉	131
10.1 标量波理论	131
10.2 分波面干涉	135
10.3 分振幅干涉	136
10.4 偏振干涉	137
10.5 相干性	139
第十一章 光的衍射	141
11.1 光栅与波带片	141
11.2 衍射积分公式	142
11.3 波前分析法	142
第十二章 物理光学	143
12.1 经典色散理论	143
12.1.1 复波矢与复折射率	143
12.1.2 经典电子论的解释	146
12.1.3 * 辐射阻尼与散射截面	149
第十三章 量子论	153
13.1 黑体辐射	153
13.2 光粒子性	154
13.3 玻尔原子	155
13.4 物质波与波函数	155
第十四章 物理学尺度	157
14.1 宇观	157
14.2 宏观	157
14.3 介观	157
14.4 微观原子	157
14.5 微观亚原子	157

第五章 静磁学

5.1 电流与磁场

5.1.1 磁场地位与电流分布

人们对磁的认识一共经历了几个阶段:

1. 起: 远古-**奥斯特**(*H. C. Ørsted*). 磁现象被认为与**磁体**(magnet) 相关. 它被设想为由**磁荷**(magnetic charge) 造成.
2. 承: 奥斯特-**麦克斯韦**(*J. C. Maxwell*). 奥斯特发现了电流的磁效应, **法拉第**(*M. Faraday*) 建立了“场”的观念, 可以定量描述电流产生的磁场, 法拉第与**亨利**(*J. Henry*) 等人发现了电磁感应, **安培**(*A.-M. Ampère*) 的**分子电流假说**解释了物质磁性的本质也是电流产生磁场.
3. 转: 麦克斯韦-**狄拉克**(*P. Dirac*). 麦克斯韦和**洛伦兹**(*H. A. Lorentz*) 给出了电磁场的普遍理论, 即**电动力学**(electrodynamics)¹, 洛伦兹和**爱因斯坦**(*A. Einstein*) 等人将电动力学纳入相对论框架. **赫兹**(*H. R. Hertz*) 的实验有效地支持了电磁场论. 洛伦兹等人的经典电子论是微观粒子与电磁场之间相互作用的第一个完备理论, 微观粒子被陆续发现, 电子的**自旋**(spin) 与**磁矩**(magnetic moment) 被发现与研究.
4. 合: 狄拉克-现今. 狄拉克主张把电子量子化为场, 提出了**量子电动力学**(quantum electrodynamics), 预言了反物质的存在, **安德森**(*C. D. Anderson*) 实验室发现正电子. 狄拉克提出了量子化的**磁单极子**(magnetic monopole) 模型, 但至今未找到磁单极子.

现在, 我们对**磁场**(magnetic field) 概念的理解就可以用下图来概括:

如何证明磁场是电场的相对论效应? 设想原参考系中只有电场, 那么无论原参考系中的速度 v_x, v_y, v_z 如何, 受力都不取决于速度大小, 它是:

$$F_x = qE_x$$

$$F_y = qE_y$$

$$F_z = qE_z$$

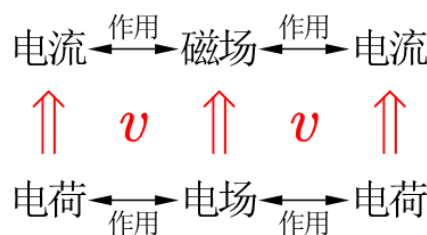


图 5.1: 磁场与电荷的关系

根据相对论的力变换公式:

$$F'_x = F_x - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{v_y F_y + v_z F_z}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})}, \quad F'_z = \frac{F_z}{\gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})}$$

代入原式, 并假设原参考系速度和变换速度相对 c 都是小量, 故新参考系速度可以使用经典的速度叠加:

$$v_x = v'_x + u, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z$$

¹这个词语却是安培发明的.

近似到与 v'_x, v'_y, v'_z 一阶相关的领头项:

$$F'_x = qE_x - qv'_y \cdot \frac{uE_y}{c^2} - qv'_z \cdot \frac{uE_z}{c^2}$$

$$F'_y = qE_y + qv'_x \cdot \frac{uE_y}{c^2}$$

$$F'_z = qE_z + qv'_x \cdot \frac{uE_z}{c^2}$$

我们如果假设以下洛伦兹力(Lorentz force)公式的成立性:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

它是磁场力分量 $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 与电场力分量 $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ 的和. 则受力公式简化为:

$$F'_x = qE'_x + qv'_yB'_z - qv'_zB'_y$$

$$F'_y = qE'_y + qv'_zB'_x - qv'_xB'_z$$

$$F'_z = qE'_z + qv'_xB'_y - qv'_yB'_x$$

对比即知道:

$$B'_x = 0, \quad B'_y = \frac{uE_z}{c^2}, \quad B'_z = -\frac{uE_x}{c^2}$$

这实际上是:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}}{c^2}$$

如果原参考系是静止点电荷产生的电场, 现在换参考系以后, 点电荷做速度为 $-\mathbf{u}$ 的匀速直线运动而产生以上磁场, 那么就能推理出, 如果点电荷以速度 \mathbf{v} 做匀速直线运动, 那么它产生的磁场必然为:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

我们从中总结出:

- 只有运动的电荷才会受到磁场力.
- 只有运动的电荷才产生磁场.
- 但是运动与静止具有相对性, 所以电场和磁场的区别就像静止与运动的区别那样是相对的, 合称电磁场(electromagnetic field).

我们还注意到来自理论推导过程中产生的重要公式:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

由于推导的近似性这两个式子似乎没有太多说服力. 但是历史上这两个式子是作为实验规律先被总结, 再有麦克斯韦的普遍电磁理论, 最后才是洛伦兹和爱因斯坦对其背后的相对论基础的研究.

5.1.2 毕奥-萨伐尔定律

强调一下本章研究的范围是重要的. 我们暂时只研究**静磁场**(static magnetic field), 其场源为电流, 且其分布不随时间, 从而改变的磁场也不随时间改变. 或者更简单的说, 我们要研究的体系就是上一章建立的稳恒电流体系, 它由不变的电荷产生不变的电场, 不变的电场驱动不变的电流, 现在增加了不变的电流产生不变的磁场这一要素. 上一章的讨论告诉我们这就是要求电流分布是无散的:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

如何把微观电荷的运动同宏观的电流 \mathbf{j} , I 建立联系? 引言中我们指出来过, 微观运动电荷产生的磁场正比于量:

$$\mathbf{C} = q\mathbf{v}$$

这个量被称作**电流元**(current element). 事实上作为微观电荷 q 通常是基本电荷 e 的量级, 从而上述量是一个微元, 即使取物质中一个很小的体积 dV , 其内部包含的所有电荷个数 dN 依然未达到宏观量级时, 总的电流元依然是个小量, 记做 $d\mathbf{C}$. 我们知道电流密度的定义为:

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} = nq\mathbf{v}$$

那么体积产生的总的电流元:

$$d\mathbf{C} = dNq\mathbf{v} = nq\mathbf{v}dV = \mathbf{j}dV = \rho dV \cdot \mathbf{v}$$

称为**体电流元**(volume current element). 同理, 我们可以写出**面电流元**(surface current element) 和**线电流元**(curve current element):

$$d\mathbf{C} = i d\mathbf{A} = \sigma \mathbf{v} d\mathbf{A} \quad , \quad d\mathbf{C} = I d\mathbf{l} = \lambda \mathbf{v} d\mathbf{l}$$

注意上面线电流元的写法, 由于我们不认为 I 是矢量, 故把电流元的矢量性由线元 $d\mathbf{l}$ 来承载. 这么做的好处之后就能体会到. 我们发现电流元与电荷元形成了对应关系:

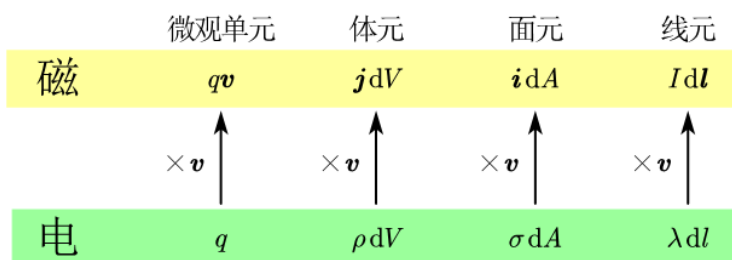


图 5.2: 电荷元与电流元对应

毕奥-萨伐尔定律(Biot-Savart law) 是一个实验定律, 它用于描述真空中两个孤立的电流元之间的相互作用力:

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{12})}{r^2}$$

其中系数 $k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \approx 1 \times 10^{-7} \text{H/m}^2$ 为磁力常数, 而 μ_0 称作**真空磁导率**(magnetic permeability of vacuum). 事实上:

$$k_e/k_m = c^2 \quad \text{或者} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

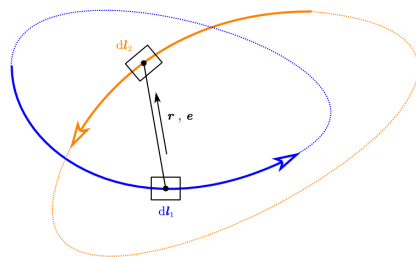


图 5.3: 电流体系间的相互作用力

²注意, 2019 年 5 月 20 日之后, 新的国际单位制标准下其值为 $1.000\,000\,000\,82(20) \times 10^{-7} \text{H/m}$, 不再有严格的 $\mu_0 := 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$.

c 是真空中光速. 这也揭示了电磁理论统一性背后的相对论本质. 我们这里还用到了电感的国际单位亨利, 而磁场的国际单位**特斯拉**(Tesla) 与它的关系为:

$$1\text{H} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2/\text{A}$$

另一个常用的单位来自 CGS 单位制, 即**高斯**(Gauss), 以纪念这位伟大的数学家在物理学上同样瞩目的贡献. 高斯在历史上被广泛使用, 直至今日也如此, 例如地表地磁场大概就在 $0.25 - 0.60\text{G}$, 它与特斯拉的换算关系为:

$$1\text{T} = 10000\text{G}$$

根据场论的精神, 我们将上式拆解为电流产生场的定律和电流在场中受力的公式:

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B}_{12}, \quad d\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{12}}{r^2}$$

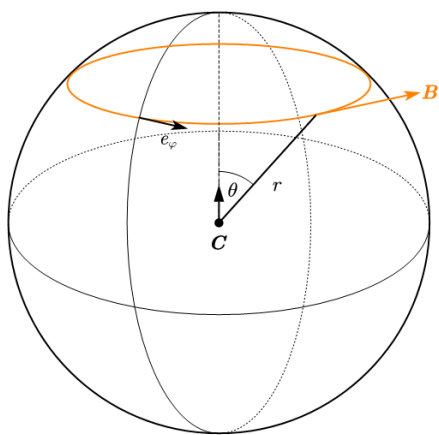


图 5.4: 电流元产生的磁场

如前所述, 毕奥-萨伐尔定律可以在相对论背景下由库仑定律推出, 故它继承了库仑定律的平方反比和叠加原理的特性. 但是它突出的特点是具有**横向力**(transverse force) 的特点: 力的方向与受力物体电流元垂直, 也与另一个只依赖于场源的磁场矢量垂直, 但这个矢量又与场源电流元的方向垂直. 两次又乘这让力的计算变得比较复杂. 让我们以场源电流元 C 为中心, 其方向建立极坐标系, 那么磁场的大小与方向就可以从公式得到:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{C \sin \theta}{r^2} \mathbf{e}_\varphi$$

磁场符合叠加原理, 例如一个载流线圈, 源点坐标 \mathbf{r}' , 场点坐标 \mathbf{r} , 记 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}'$, 则其产生的磁场公式为:

$$\mathbf{B} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R}{R^2}$$

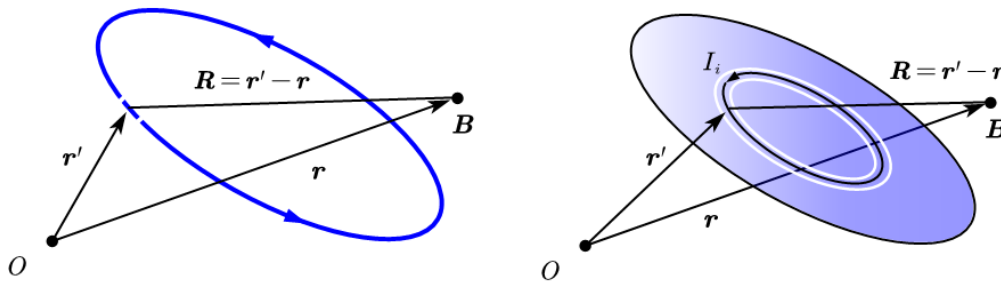


图 5.5: 连续体系产生磁场

载流线圈具有非常重要的地位, 任何体电流分布, 只要有界区域内的稳恒电流, 电流线就必然构成闭合的回路. 那么就一定可以分解为电流圈. 如果用求和的极限表示积分但是暴力地省去极限符号, 此时磁场计算方法为:

$$\mathbf{B} = \int_{V'} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{e}_R}{R^2} dV = \sum_i \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_i d\mathbf{l}_i \times \mathbf{e}_R}{R^2}$$

而一个线圈或一个体电流分布在外磁场中的受力为:

$$\mathbf{F} = \oint I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{F} = \sum_i I_i d\mathbf{l}_i \times \mathbf{B}$$

在稳恒电流情况下, 讨论一个电流元产生的磁场是没有意义的, 因为空间的磁场必然是整个体系产生的磁场的叠加, 从而单个电流元的磁场并不具有可观测的意义, 除非电流可以独立的被操控以改变. 而讨论一个电流体系各个部分受到的作用力时, 尤其是一个电流线圈受到的作用力时, 区分内力和外力就变得尤其重要. 我们发现, 两个电流元之间的相互作用力之和:

$$d\mathbf{F}_{12} + d\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{e}_{12})}{r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times (I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{e}_{21})}{r^2}$$

根据三重矢积公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, $\mathbf{e}_{12} = -\mathbf{e}_{21}$. 得到:

$$d\mathbf{F}_{12} + d\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I_1 d\mathbf{l}_1 \times I_2 d\mathbf{l}_2) \times \mathbf{e}_{12}}{r^2}$$

一般来说不总为零, 可见朴素的牛顿第三定律在静磁场情况下失效了. 我们不得不把 $d\mathbf{F}_{12}$, $d\mathbf{F}_{21}$ 不再视作相互作用力, 而是需要通过场作为媒介. 事实上两个运动电荷之间的磁场力是在作为电场力的相对论修正, 从相对论的根本原理上, 相互作用传递速度的有限性导致力的传播被推迟, 原则上也不可能符合牛顿第三定律.

但是如果我们计算两个线圈之间的相互作用力之和:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{F} &= \oint_1 \oint_2 d\mathbf{F}_{12} + \oint_2 \oint_1 d\mathbf{F}_{21} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left(\oint_1 \oint_2 \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} d\mathbf{r}_1 + \oint_2 \oint_1 \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} d\mathbf{r}_2 \right) \end{aligned}$$

但是:

$$\begin{aligned} \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} &= -\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \Rightarrow \oint_2 \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = 0 \\ \nabla_1 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} &= -\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \Rightarrow \oint_1 \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = 0 \end{aligned}$$

从而得到:

$$\delta\mathbf{F} = 0$$

当两个环重合时, 这也代表“自己给自己的力”是零. 即使是磁场给线圈的力, 也是因为线圈自己产生的磁场而无法对自己产生力, 这个结果其实也是空间平移对称性 (而不是牛顿第三定律) 的必然结果. 而空间旋转对称性则给出, 任意选取 O 点计算各个电流元受力对 O 的力矩, 总和必然为零. 或者说两个线圈之间的作用力与作用力矩之间必然符合牛顿第三定律. 其证明在此不再赘述. 这样我们就证明了此前给出的理论公式与牛顿第三定律之间是自洽的, 无散的电流体系下牛顿第三定律依然成立, 尽管表面上电流元的毕奥萨伐尔定律与牛顿第三定律有冲突.

更有甚者, 我们指出, 根据麦克斯韦方程的协变性, 即使是微观电荷做相对论性运动, 只要是稳恒电流体系, 那么毕奥萨伐尔定律可以作为一个推论而具有普适性. 而对于非稳恒体系, 后面我们将会证明, 磁场此时并不能简单地由电流确定而依赖于电场的变化率, 甚至它成为了自由存在的物质形式而摆脱了电荷造成的任何约束.

5.2 两个定律与矢势

5.2.1 磁场的环路定律

静磁场的**环路定律**(circuit law), 又称**安培定律**(Ampère's law) 指出, 对于一个可定向曲面 \mathbf{A} 和它的闭合右手边界 $\partial\mathbf{A}$, 有:

$$\oint_{\partial\mathbf{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{\mathbf{A}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$$

我们用毕奥-萨伐尔定律来证明环路定律. 首先, 上式中的 A 和其边界上的场点位矢取为 \mathbf{r} , 则 $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$, 而场源电流分解为电流环 I_i . 将电流环上坐标选为 \mathbf{r}' . 那么以上积分可按照叠加原理分解为:

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i = \sum_i \oint_{\partial A} \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l}$$

而每一项环量就可以用场点和源点的两次环积分表示, 将 \mathbf{e}_R 记做 \mathbf{e} :

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \oint_{\mathbf{r}} \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{r} \\ &= \oint_{\mathbf{r}} \left(\oint_{\mathbf{r}'} \frac{\mu_0 I_i d\mathbf{r}' \times \mathbf{e}_R}{4\pi R^2} \right) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \oint_{\mathbf{r}} \oint_{\mathbf{r}'} \frac{(d\mathbf{r} \times d\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} \end{aligned}$$

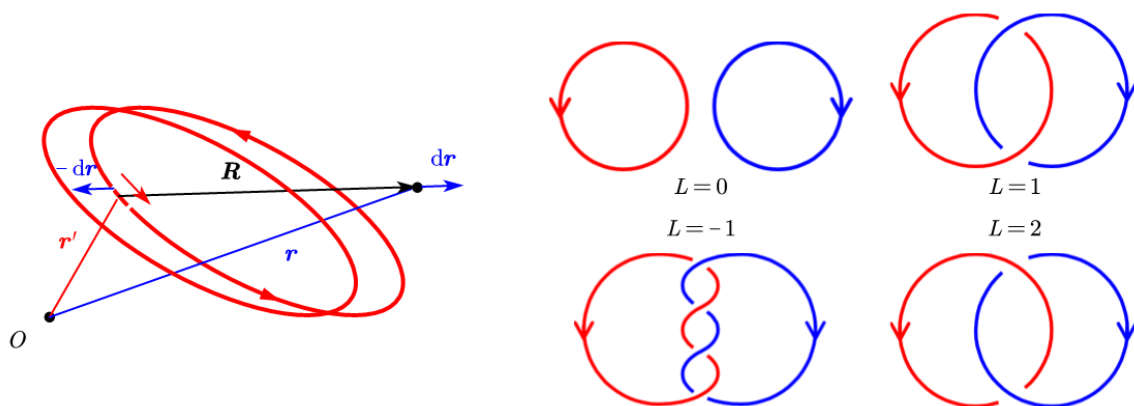


图 5.6: 环绕数

如上图所示, 对上面的积分做如下诠释: 当从场点 \mathbf{r} 去看线圈时, 线圈对场点产生了一个立体角 Ω . 当观察点移动 $d\mathbf{r}$ 时, 考察立体角的变化 $d\Omega$. 可以等效地把线圈反向移动 $-d\mathbf{r}$. 图中所示情况立体角将减小, 算法为:

$$-d\Omega = \int \frac{d\mathbf{A} \cdot (-\mathbf{e}_R)}{R^2} = \oint_{\mathbf{r}'} \frac{(-d\mathbf{r} \times d\mathbf{r}') \cdot (-\mathbf{e}_R)}{R^2}$$

下面考虑以源电流圈 (5.6中红圈) 为边界的那个面, 场点形成的安培回路 (5.6中蓝圈) 与这个面的交点个数为 $n_1 + n_2$, 其中 n_1 代表蓝圈正向穿过面时方向与红圈形成右手规则的交点个数, n_2 代表蓝圈正向穿过面时方向与红圈形成左手规则的交点个数. 于是再定义**环绕数**(linking number):

$$\ell = n_1 - n_2$$

这是一个拓扑学不变量, 它只取决于两个回路的整理性质, 与面的取法无关, 而且具有对称性 (红对蓝与蓝对红的环绕数一致).

从而我们注意到, 如果环绕数恰好是一, 那么从面上出发, Ω 从一个接近 2π 的大小一直在减小直到变为零, 然后变成负的, 直到回到面上直到变成接近 -2π , 虽然初末位置立体角不一定都等于 2π , 但是一定有:

$$\oint_{\mathbf{r}} d\Omega = -4\pi$$

相似的, 如果考虑一个环绕数为 L 的安培回路, 就有:

$$\oint_{\mathbf{r}} d\Omega = -4\pi\ell$$

将此前的立体角微分代入, 得到:

$$\oint_{\mathbf{r}} \oint_{\mathbf{r}'} \frac{(\mathbf{dr} \times \mathbf{dr}') \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} = 4\pi\ell$$

最后代入此前的磁场环量, 得到:

$$\Gamma_i = \mu_0 \ell_i I_i$$

最后我们总结出:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i \ell_i I_i$$

现在做极限化处理, 注意到求和式实际上就是统计了所有以右手规则为正向通过面的电流, 统一用电流密度表示就变成了自带正负的点乘的积分:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$$

此即环路定律, 由数学上的开尔文-斯托克斯定理, 我们可以把上式写出局域的微分形式:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

5.2.2 矢势与磁场的高斯定律

对电流元产生的磁场 $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}dV \times \mathbf{e}_r}{r^2}$ 引入以下矢量场是方便的:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}dV}{r}$$

这是因为如果计算球坐标下的旋度, 考虑到 \mathbf{A} 分解到 r, θ 方向分别为:

$$A_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV}{r} \cos \theta, \quad A_\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV}{r} \sin \theta$$

那么考虑一个回路³ $S: (r, \theta) - (r + dr, \theta) - (r + dr, \theta + d\theta) - (r, \theta + d\theta) - (r, \theta)$, 利用旋度的定义式:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{S \rightarrow 0} \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} / S$$

得到其旋度:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

代入便得到以下关系式:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV}{r^2} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi = \nabla \times \mathbf{A}$$

\mathbf{A} 这个矢量称作**磁矢势**(magnetic vector potential). 由于叠加原理, 一个电流分布体系的磁矢势和磁场应当为:

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}dV}{r}, \quad \mathbf{B} = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}dV \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

同样地将满足:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

以上旋度关系写成积分形式意味着一种计算磁通量的特殊方法:

$$\Phi = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

³为了避免与磁矢势符号重复, 暂时用 S 表示面元.

对于无边界的闭合曲面, 上式直接证明了磁场**高斯定律**(Gauss's law):

$$\begin{aligned}\partial\partial V = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_{\partial\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \\ \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

我们如果计算此前电流元产生的磁矢势的散度:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV}{r} \mathbf{e}_z \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} j dV \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV \cos \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV \cdot \mathbf{e}_r}{r^2}$$

又发现对电流元得到非零的结果. 但是如果考虑线圈:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \cdot d\mathbf{r}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \nabla_{\mathbf{r}'} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint d \left(\frac{1}{R} \right) = 0$$

从而对于任意稳恒电流体系, 通过此前积分定义的磁矢势也是无散的. 最后将磁矢势与磁场关系和磁场与电流关系联立, 注意到:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

即三重矢积公式. 我们把梯度算符 ∇ 直接看作了一个矢量. 上式右侧第一项由于磁矢势无散故为零, 从而得到:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{A}$$

电场中的式子 $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$ 与它相呼应.

可以设想存在可以像点电荷产生电场那样的方式产生磁场的物质, 称作**磁单极子**(magnetic monopole), 从而可以产生不为零的净**磁荷**(magnetic charge), 事实证明这样的物质至今都未曾找到, 从而相伴的磁场形式也仅仅存在与理论中. 但是, 总磁荷为零的体系: **磁偶极子**(magnetic dipole), 不仅仅是纯粹的理论模型, 后面可以发现线圈产生的磁场与磁偶极子是相似的.

我们记得电势可以被视作电荷在电场中运动的势能有关的物理量, 即 $E_p = q\varphi$. 那么电荷在磁场中运动时, 磁矢势代表什么物理概念呢? 如果空间中只有纯的磁场, 那么显然磁场力不做功:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} = (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

所以电荷一定是动能不变的. 但是即使如此, 我们也不认为磁场力是一个保守力, 这是因为保守力的定义应该是: 能够用势能的梯度来表示的作用力. 我们写出一个项:

$$\boldsymbol{\pi} = q\mathbf{A}$$

这个项不再具有能量的量纲而是动量的量纲. 我们知道电场除磁场的量纲为速度, 而两者与对应的矢势标势都差一个长度量纲, 故 $q\mathbf{A}$ 量纲等于用 $q\varphi$ 的能量量纲除速度, 即动量量纲. 这个动量称为**势动量**(potential momentum). 而带电粒子的旧动量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 就称作**机械动量**(kinetic momentum), 它是运动造成的, 而势动量是位置 \mathbf{r} 造成的 $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r})$, 是与磁场相互作用引起的动量. 两者之和:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\pi}$$

称作**正则动量**(canonical momentum). 不像在电场中的电荷运动机械能 (动能 + 势能) 守恒, 这个和也是一般不守恒的:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}} &= \dot{\mathbf{p}} + \dot{\boldsymbol{\pi}} \\ &= \mathbf{F} + q\dot{\mathbf{A}} \\ &= q\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + q\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} \\ &= -\nabla(-q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})\end{aligned}$$

最后一步把 ∇ 视作矢量使用了三重矢积公式. 注意到瞬时的 \mathbf{v} 不被视作变量而视作常数而从偏导数符号内外移动不引起改变. 我们发现瞬时的正则动量导数似乎恰好等于某个势能的负梯度:

$$V = -q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

这被称作**广义势**(generalized potential). 它含有速度, 从而每一个时刻有着完全不同的形式. 但不管怎样, 粒子在磁场中的运动的确是写成了一个动量导数等于势的梯度的形式(拉格朗日方程形式). 即使这样, 我们依然不认为磁场力是一个保守力.

我们来看一个具体的例子. 假设空间中的电流分布产生了一个随 y 方向变化的 x 方向的磁矢势分布:

$$\mathbf{A} = (f(y), 0, 0) = f(y)\mathbf{e}_x$$

那么可以验证这个式子的确符合:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial f(y)}{\partial x} = 0$$

而产生它的电流和对应的磁场就是:

$$\mathbf{j} = -\nabla^2 \mathbf{A} / \mu_0 = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(y)\mathbf{e}_x = -\frac{f''(y)}{\mu_0} \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial f(y)}{\partial y} \mathbf{e}_z = -f'(y)\mathbf{e}_z$$

这表示一个垂直 $x-y$ 平面的磁场. 那么粒子在某一瞬时的广义势:

$$V = -q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = -qv_x f(y)$$

其瞬时梯度就是:

$$-\nabla V = -qv_x f'(y)\mathbf{e}_y$$

而粒子的正则动量是:

$$\mathbf{P} = (mv_x + qf(y))\mathbf{e}_x + mv_y\mathbf{e}_y$$

根据此前的论述:

$$\dot{\mathbf{P}} = -\nabla V$$

从而我们发现, 在 x 方向粒子的**广义动量守恒**(conservation of generalized momentum):

$$mv_x + qf(y) = \text{Const.}$$

而在 y 方向有一动力学方程:

$$ma_y = -qv_x f'(y)$$

读者可以用牛顿力学同样的论证以上两个式子的成立性.

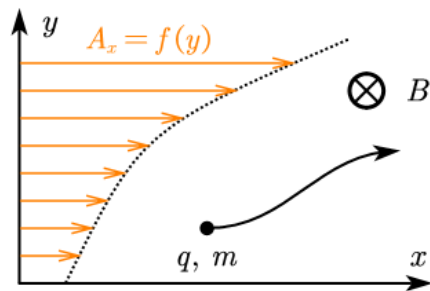


图 5.7: 正则动量守恒

5.3 电流体系

5.3.1 磁偶极子

- **磁偶极子**(magnetic dipole) 模型一般不指由正负磁单极子构成的体系, 和电偶极子类似, 它也来自矢势与磁场计算过程中的多极展开, 由于需要用到较深的张量知识, 在此仅仅给出展开的结果:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r}{r^2}, \quad B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}$$

其中 \mathbf{m} 称作**磁矩**(magnetic moment), 任何情况下这都会是一个电流体系激发的磁场的领头项, 因为磁单极子不存在, 类似点电荷产生平方反比的电场那样的磁荷项, 由于磁高斯定律, 永远是不可能的.

- 一个线圈, 面矢量为 S , 它的磁矩, 由于以下积分公式:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

可以发现:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times I d\mathbf{l} = I\mathbf{S}$$

如果考虑 $I \rightarrow \infty, S \rightarrow 0$ 的模型, 就构成了点磁偶极子(point dipole).

- 磁偶极子的磁势能, 受力与力矩:

$$V = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad , \quad \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

5.3.2 磁化强度

- 磁化强度(magnetization):

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m}$$

- 磁化强度造成的体电流与面电流分布:

$$\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad , \quad \mathbf{i}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$$

5.3.3 若干对称体系的磁场

- 无限长载流直线:

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r \quad , \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

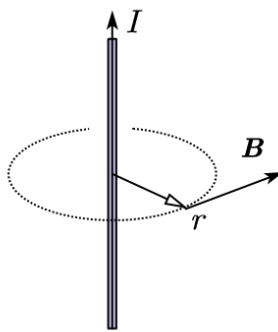
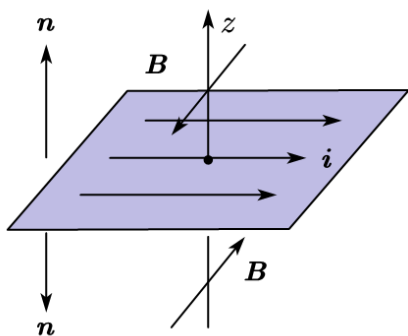


图 5.8: 无限大平面与无限长直线

- 无限大载流平面:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{i} \times \mathbf{n}$$

- 圆环: 半径为 R 的标准载流线圈轴线上磁场:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I R}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z$$

该处的径向场强可以由磁高斯定理确定:

$$\frac{1}{2} \frac{dB_r}{dr} + \frac{dB_z}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_r \approx -\frac{3\mu_0 I R z r}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

- 无限长密绕螺线管: 无论其横截面形状, 总是有:

$$B = \mu_0 i = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

5.4 磁介质与磁能

5.4.1 微观角度理解磁化

- 分子的固有磁矩: 电子自旋磁矩 + 电子轨道磁矩.
- 如果分子具有固有磁矩, 那么按照热力学规律发生取向磁化: 磁矩倾向于取与外磁场相同的方向, 宏观上产生顺磁性(paramagnetism). 类似于电介质的极化, 微观上顺磁磁化规律可以写作:

$$\bar{\mu} = \alpha B$$

- 电子的磁矩与角动量的比称为旋磁比(gyromagnetic ratio), 轨道旋磁比与自旋旋磁比分别为:

$$\gamma_L = -\frac{e}{2m_e} \quad , \quad \gamma_S = -\frac{e}{m_e}$$

角动量量子化理论告诉我们, z 方向上电子轨道与自旋角动量只能为:

$$L_z = \pm n\hbar \quad , \quad S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

故 z 方向上的磁矩的单位就是著名的玻尔磁子(Bohr magneton):

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0.00579\text{meV/T}$$

事实上由于自旋-轨道耦合, 分子磁矩可以是玻尔磁子的分数倍.

- 原子核也有磁矩, 显然由于质子质量比电子质量大三个量级, 故根据旋磁比算法, 其磁矩也小三个量级. 虽然对分子磁矩和宏观磁化几乎没有贡献, 但是利用在磁场下形成的各个能级间跃迁吸收发射电磁辐射的原理可以造成核磁共振(nuclear magnetic resonance) 现象.
- 如果分子的固有磁矩为零, 那么在外磁场下会产生一个与外磁场反向的磁矩, 宏观上造成抗磁性(diamagnetism). 从微观来看似乎与电介质极化的方向相反, 但是从宏观效果上却与电介质削弱电场的效果相同, 这是电与磁固有的区别导致的.
- 抗磁性的微观起源为电子轨道运动的拉莫尔进动(Larmor precession). 由轨道运动产生的力矩, 角动量, 磁矩三者关系可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad , \quad \boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L} \quad , \quad \frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M} \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \mathbf{L} &= -\gamma \mathbf{B} \times \mathbf{L} = \frac{e\mathbf{B}}{2m} \times \mathbf{L} \end{aligned}$$

故在运动学上, 电子将以以下角速度发生进动:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2m} \mathbf{B}$$

电子原来的轨道运动半径如果按照玻尔半径 a_0 估计, 而角动量量级为 \hbar , 那么现在附加的角速度与原来的角速度的比为:

$$\Omega/\omega \sim \frac{ea_0^2}{2\hbar} B$$

故产生的磁矩与原来的玻尔磁子的比值的量级也与之相当, 得到磁矩的量级为:

$$\bar{\mu} \sim -\frac{e^2 a_0^2}{4m} \mathbf{B}$$

系数便是抗磁性磁化的分子磁化率的量级, 它一般比顺磁性磁化要小一到两个量级.

- 有一些金属, 或者特殊的金属化合物具有独特的**铁磁性**(ferromagnetism), 微观上它们由介观的包含大量原子的**磁畴**(magnetic domains) 构成. 每一个磁畴由于单元之间的关联已经超过了热力学的涨落而成为了决定性的因素, 使得所有电子的自旋几乎都严格指向同一个方向, 磁化达到饱和. 而材料的磁化过程其实是不同的磁畴在外磁场下的转向. 它的磁化率将远远大于简单的顺磁和抗磁磁化. 而且体现出非线性和历史相关性.

5.4.2 宏观角度理解磁化

- 出于 B 和 M 的旋度分别为总电流密度和磁化电流密度, 引入**磁场强度**(magnetic field strength) 以区别于以往一贯描述磁场的 B , 一般可区别称作**磁通密度**(magnetic flux density):

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

这样这个矢量的旋度就只取决于外电流:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f$$

- 在顺磁或铁磁的柱状介质外绕制密绕螺线管, 那么没有介质时其磁通密度为:

$$B_0 = \mu_0 i$$

那么, 由于此时加入介质时磁化电流不影响 \mathbf{H} 的计算, 故磁场强度为:

$$H = \frac{B_0}{\mu_0} = i$$

但是磁化电流的存在将产生一个与原磁场同向的附加磁场, 使得介质内部的磁场变大, 那么定义此时磁场与原磁场的比值为**相对磁导率**(relative magnetic permeability):

$$B/B_0 = \mu_r$$

那么把绝对磁导率定义为 $\mu = \mu_r \mu_0$, 就有以下关系式:

$$B = \mu H = \mu i$$

$$M = (\mu_r - 1)H = \chi_m H$$

其中 χ_m 就是宏观的**磁化率**(magnetic susceptibility). 对于抗磁性物质, 其值是小于零的.

5.4.3 磁场能量

磁场体系的能量的计算方法可以证明可以有电流与矢势和用能量密度两种计算方法:

$$I = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV = \int \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 dV$$

同样地, 两个体系同时存在时, 体系将产生自能与相互作用能. 如两个电感元件如果之间存在互感, 那么其总能量应当为:

$$E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

如果存在介质, 其能量密度需要加上磁化带来的能量, 能量密度变为:

$$w = \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$