

高二物理竞赛 • 电磁学与近代物理

学而思

目录

第十章 物理光学	3
10.1 经典色散理论	3
10.1.1 复波矢与复折射率	3
10.1.2 经典电子论的解释	6
10.1.3 * 辐射阻尼与散射截面	9
第十一章 量子论	13
11.1 黑体辐射	13
11.2 光粒子性	13
11.3 玻尔原子	13
11.4 物质波与波函数	14
第十二章 相对论	15
12.1 相对论运动学	15
12.2 相对论动力学	16
12.3 相对论连续物质	18
12.4 相对论电磁场	19

第十章 物理光学

10.1 经典色散理论

蓝天,白云,红太阳.在简单的自然现象中蕴含着光在传播过程中的另外一种典型的现象: **散射**(scattering).而散射却又是一个多么复杂的现象!要完全理解散射,我们得研究光的吸收与发射,因为光与物质中分子的相互作用其实本质上可以看成吸收与发射,这是 **分子光学**(molecular optics) 的研究范畴.其次,光在介质中的衰减(吸收),不同颜色的光折射率的不同(色散)其实都导致了一类散射现象(瑞利散射).但是还有不同的散射现象则表现出不同的特性,需要从更宏观或更微观的角度去建立新的理论来解释他们.

不同于以往在透明介质中的平面波传播,新的现象需要新的平面波模型.

10.1.1 复波矢与复折射率

我们在波动方程的解中引入复数是为了更好地描述振动形式的解.但这却忽视了另一种解的存在性.就是如果波矢 \mathbf{k} 本身亦为复数,由于同时又是一个矢量,可以表示为 $\mathbf{k} = \alpha + i\beta$.代入场的空间部分:

$$A(\mathbf{r}) = A_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = A_0 e^{-\beta \cdot \mathbf{r}} e^{i\alpha \cdot \mathbf{r}}$$

这就代表了一个沿 α 方向传播,沿 β 方向衰减的平面波.而 α 为波矢的实部, β 为波矢的虚部:

$$\alpha = \Re(\mathbf{k}) \quad ; \quad \beta = \Im(\mathbf{k})$$

这种波可不可以真空中传播?出人意料的是这居然是可能的.因为如果代入真空中的亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 A + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

便会发现这只需要要求:

$$\mathbf{k}^2 = (\alpha + i\beta) \cdot (\alpha + i\beta) = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \alpha \cdot \beta = 0$$

这样的波我们并不陌生,早在几何光学我们介绍光的全反射时便研究过另一侧界面中的隐失波场便是以上形式.更典型地,在 $a \times b$ 的矩形波导中传播的波满足:

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_y}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_z}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\lambda_x = \frac{2b}{m}, \lambda_y = \frac{2a}{n}, m, n = 1, 2, \dots$$

此时在 x, y 方向的振动是驻波, z 方向传播的波则是行波. x, y 方向要形成驻波是因为在边界的导体上要符合相同的边界条件,所以或都是波腹,或都是波节.亦可以用同一个

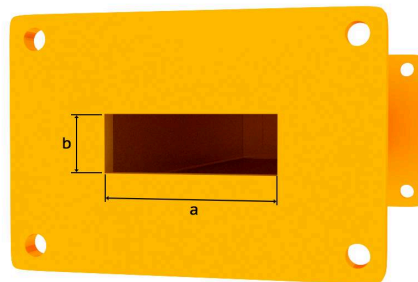


图 10.1: 矩形波导

平面波在侧面上的多次反射的叠加来理解这种兼具驻波和行波特质的场. 我们发现模式为 (m, n) 的波, 会有一个截止角频率 ω_c , 如果角频率低于此值使得波无法向前传播:

$$\omega_c = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

那如果在波导的起点的天线给出信号角频率 $\omega < \omega_c$ 会发生什么情况? 此时就是 z 方向波矢 k_z 变为虚数, 意味着波沿 z 方向不是传播而是衰减:

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{b}, 0\right), \quad \boldsymbol{\beta} = \left(0, 0, \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\right)$$

在真空中尚可以产生衰减的波¹, 更何况在各种介质中. 事实上, 描述光在介质中随着传播的距离而衰减的现象早有一经验公式, 即**比尔-朗博-布葛律**(Beer-Lambert-Bouguer law):

$$\frac{I(l)}{I(0)} = e^{-(\sum_i n_i \sigma_i)l}$$

其中 $I(0)$ 为在传播 l 前的光强, $I(l)$ 为在传播 l 后的光强. n_i 是构成介质的第 i 种分子的数密度, σ_i 为描述其吸收本领的**衰减截面**(attenuation cross section). 例如对大气来说主要的衰减因素就来自气溶胶, 干净的海水则能提供 200m 左右的透光带, 如果有的话, 浮游植物含有的光合色素是造成衰减的主要原因. 而对于强衰减性质的介质, 我们可以唯象地认为波在介质中的传播为:

$$|A(l)| = |A(0)|e^{-\beta l} \Rightarrow I(l) = I(0)e^{-2\beta l}$$

这样的选择是有道理的. 下以导电导致的损耗为例: 在不漏电介质中, 麦克斯韦关系本应为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0} \end{cases}$$

这样便有:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

但是, 如果介质漏电, 且符合 $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, 那么以上方程就改写为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\sigma\mathbf{E} \end{cases}$$

¹事实上, 只需要亚波长的结构便可造成衰减.

对最后一个式子所引发的不同在光学情况下是很好处理的. 因为单色光总是具有固定的频率 ω , 那么其实以上式子无非是把 $\frac{\partial}{\partial t}$ 变成 $-i\omega$. 在磁导率被认为几乎等于真空磁导率的情形下, 这相当于说:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\omega \varepsilon \mu \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{array} \right. \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\omega \varepsilon \mu \mathbf{E} - i\sigma \mu \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

所以对于漏电介质², 通常会有复电容率(complex permittivity) 的说法³, 它就是以上把电容率和电导率合并以后的新的复常数, 用它第四个方程就与真空中的方程没有任何区别了, 除了系数是一个复数:

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} : \quad \nabla \times \mathbf{H} + i\omega \varepsilon' \mu \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

这样一个方程的解是可以完全照搬之前的解的, 因为数学上可以证明复数解具有可解析延拓(analytic continuation) 的特性. 从而容易发现, 复波矢就变为:

$$\mathbf{k}^2 = \omega^2 \varepsilon' \mu$$

这样就得到:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2 \varepsilon \mu, \quad 2\alpha \cdot \beta = 2\alpha\beta \cos \theta = \omega\sigma\mu > 0$$

此时传播波矢 α 与衰减波矢 β 就不一定要垂直了, 它们必须夹锐角, 也就是说, 如果电磁波在漏电介质或者导体中传播, 沿传播方向必须要衰减. 我们最后引入光学中使用最多的复折射率(complex refraction index), 按照原来的看法它意味着 $k^2 = n^2 k_0^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v^2}$. 现在要更小心些, 因为 $\mathbf{k} = \alpha + i\beta$ 已经包含两个不贡献的波矢部分. 故我们先对以下表达式开方:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \cos \theta &= \omega^2 \varepsilon' \mu \\ \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \cos \theta} &= n \frac{\omega}{c} = (n_1 + in_2) \frac{\omega}{c} \end{aligned}$$

通过以上两式对比, 我们能得到两个方面. 第一是复折射率实部 n_1 与虚部 n_2 分别是这样依赖于相对介电常数 $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ 和电导率 σ 的:

$$\begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} \right)} \\ n_2 &= \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon_r} \omega \varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} \right)^{-1}} \end{aligned}$$

第二组关系式如果已知了介质的两个折射率, 那么在介质中传播的波的两个波矢 α 和 β 需要满足的关系为:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= (n_1^2 - n_2^2) \frac{\omega^2}{c^2} \\ \alpha\beta \cos \theta &= n_1 n_2 \frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned}$$

只有当 $\theta = 0$ 才恰有:

$$\alpha = n_1 \frac{\omega}{c}, \quad \beta = n_2 \frac{\omega}{c}$$

²即使不漏电, 也会由于有损耗而等效于有复电容率.

³对于普通的导体, 也一样可以讨论复电容率, 或者更常见地, 复电导率(complex conductivity). 它不仅包含由于原子实部分极化导致的电容性, 还要包含由于电子运动惯性导致的电感性.

10.1.2 经典电子论的解释

下面我们来介绍历史上发挥了重要作用的经典电子论. 它虽然不够精确但物理图像十分重要.

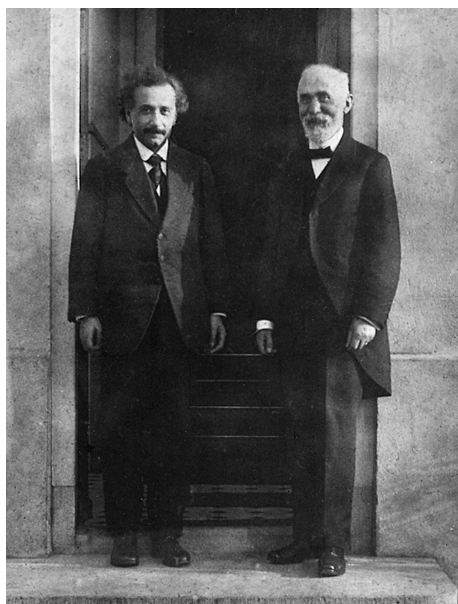


图 10.2: Einstein 与 Lorentz

历史上虽然电子作为粒子的发现是 1897 年**汤姆孙**(J. J. Thomson) 的工作. 但是早在半个世纪前人们就开始逐渐相信物质由两种带电粒子构成并在导电时可以移动的模式了. 人们用这样的模型去想象输运现象, 电磁感应, 热电耦合等现象并取得了丰硕的成果, 经典电磁学早在 1860 年代便在**麦克斯韦**(J. C. Maxwell) 的工作下达到顶点进入尾声. 剩下来的几十年时间历史让位给了**洛伦兹**(H. A. Lorentz), 洛伦兹对电磁学的贡献是深远的. 他承前人之大成, 讨论电磁场与电磁介质的相互作用, 讨论电磁学原理与古老的伽利略式相对性原理的结合; 又开近代物理之先河, 电子论自然地导向了量子理论, 而电磁学又自然地促成了狭义相对论的诞生. 事实上, 早年间狭义相对论在学界被介绍时便是以洛伦兹和爱因斯坦这一对忘年交命名的洛伦兹-爱因斯坦理论.

电子, 这样一个基本粒子可以说是妇孺皆知的概念, 它带一个单位的负电荷, 其基本参数为:

$$e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{C} \quad m_e = 9.10938356 \times 10^{-31} \text{kg}$$

然而出于各种原因, 在经典电子论中的电子却又是一个陌生的概念. 根据洛伦兹的经典电子论精神, 重的原子实被认为静止, 轻的束缚电子被认为在外场中可以运动, 且主要受电场的影响⁴. 电子在外电场中相对原子实的位移造成了电偶极矩. 出于好的近似, 将电子视作被绑在连接中心的弹簧的另一端的质点. 质量为 m 不再被认为与基本粒子的质量一致, 事实上这个质量的本质实际上是虚无的, 因为当考虑到原子与电磁场相互作用的严格理论时图像将完全是量子的而超出了此处可以讨论的范围, 这样的一个为了解释现象去构造的模型就叫**唯象模型**(phenomenological model). 但是其电荷量还是 $-e$, 弹簧劲度系数为 k . 这样子我们就可以写出电子在外电场中的动力学方程:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = -e\mathbf{E}$$

但是我们还忽略了一点, 加速运动的电荷会产生辐射, 也会因为辐射而带走能量和动量, 这就被视作介质对电磁波吸收, 散射的根本原因. 也同样为了唯象地描述它, 我们认为电子是受到了一个辐射阻尼力 $\mathbf{f} = -\gamma\dot{\mathbf{r}}$. 这样以上方程就被修改为:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = -e\mathbf{E}$$

命 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 代表**共振频率**(resonance frequency) 或待会就会说明的**吸收频率**(absorption frequency). 再命入射电磁波为频率 ω 的光, 按光学符号约定 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, 那么很容易解出受迫振动解 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$, 振幅为:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{-e\mathbf{E}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega/m}$$

我们现在就能算出动态的分子极化率来, 它被定义为分子中 Z 个价电子产生的偶极矩 $\mathbf{p} = -Ze\mathbf{r}$ 与外电场 \mathbf{E} 的比值, 可以发现它也是个复数, 依赖于外光场的频率:

$$\alpha(\omega) = \frac{Ze^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega/m}$$

我们知道, 对于具体介质的极化总是与各个单元的极化有关. 我们在此讨论稀薄的无固有偶极矩的气体

⁴根据洛伦兹力公式 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, 而电磁场中 $E = cB$, 故 $v \ll c$ 时磁场力可以忽略.

在外电磁波中的极化⁵, 此时不难想到介质的介电常数应该直接依赖于分子极化率, 事实上, 极化强度为:

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E} = n \mathbf{p}$$

从而得到复电容率的值:

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \frac{nZe^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega/m}$$

通常, 把 $nZe^2/\varepsilon_0 m$ 称作**等离子体频率**(plasma frequency) 的平方 ω_p^2 . 那么上式也作:

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega/m} \varepsilon_0$$

出现虚部其实就意味着损耗, 在振动的过程中电场在持续不断地对振子输入能量而导致了电磁波的衰减. 只不过这里的损耗并不是导电行为导致的. 写出复电容率的实部和虚部 $\varepsilon' = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cdot \left[1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega/m)^2} \right]$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \cdot \frac{\gamma\omega_p^2\omega/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega/m)^2}$$

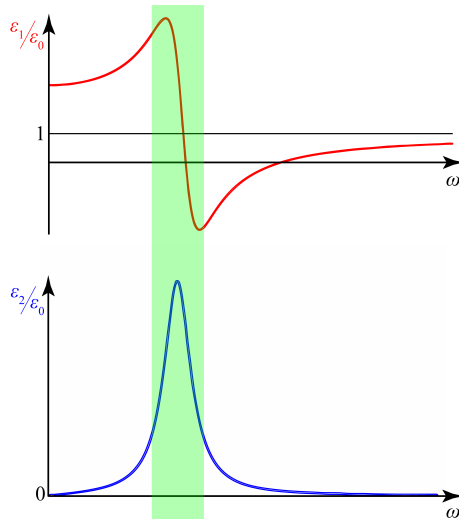


图 10.3: 复电容率与频率的关系

两个函数看上去复杂, 其实都属于近似的**洛伦兹型函数**(lorentzian function). 图像如右图所示. 在绿色带状区域这个函数有着较大的转折. 这发生在 $\omega \approx \omega_0$ 处. 若做近似, 认为反应损耗的 γ 较小. 则令 $\omega^2 - \omega_0^2 = x$, $\gamma\omega_0/m = a$, 那么上式在带状区域附近近似为标准的洛伦兹型:

$$\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 1 - \omega_p^2 \cdot \frac{x}{x^2 + a^2}$$

$$\varepsilon_2/\varepsilon_0 = \omega_p^2 \cdot \frac{a}{x^2 + a^2}$$

电容率的实部在带状区域由区域外的缓慢增加转为剧烈减少, 而恰好这样一个区域, 电容率的虚部突然变得很大. 我们习惯上用虚部这种洛伦兹函数增加到最大值的一半的两个点之间的间距作为特征的**半高峰宽**(full width at half maximum, FWHM). 对于洛伦兹型, 其值恰为 $x = \pm a$ 之间的间距 $2a$, 但是注意到要转化为 ω 对应的间距, 它恰好为:

$$\Gamma = \frac{\gamma}{m}$$

我们可以从这个模型中清楚地看到两个物理现象:**色散**(dispersion) 与**吸收**(absorption). 前者就是说折射率依赖于波长, 这和复电容率的实部依赖于频率只是说法不同本质一样. 而复电容率的虚部, 根据之前的讨论, 也就代表吸收. 我们发现在入射光的频率近似为谐振子的固有频率 ω_0 时, 对应经典力学中发生共振的区域附近, 色散和吸收都变得很显著. 我们知道, 经典电子论给出的解释仅仅是一个唯象模型, 所以相关的参数都要根据实验结果来确定. ω_0 可以根据发生强烈吸收与色散的波长来确定, 而 γ/m 则根据吸收峰的半高峰宽 Γ 来确定, 最后等离子体频率 ω_p 则比较有趣, 我们恰好可以根据零频率处的折射率 n_0 来确定它:

$$n_0^2 = \varepsilon_1(0)/\varepsilon_0 = 1 + \omega_p^2/\Gamma^2$$

那么实际情况是否这么简单呢? 至少通过对右图的常温下水的色散的测量中我们发现, 除了在可见光波段水几乎是透明的而具有大约 1.33 的折射率, 在近红外 (0.8-2.5 μm) 与中红外 (2.5-15 μm) 波段的短波区定性上符合以上模型推导出来的结果. 但是中红外到远红外 (15-1000 μm) 则明显偏离以上结果.

⁵如果是液体或固体, 一方面由于不同的偶极子间的相互影响不可忽略导致公式需要修正, 也因为极化方式还有取向极化等所以需要修正, 但全都只影响定量结果, 定性的图像仍然是适用的.

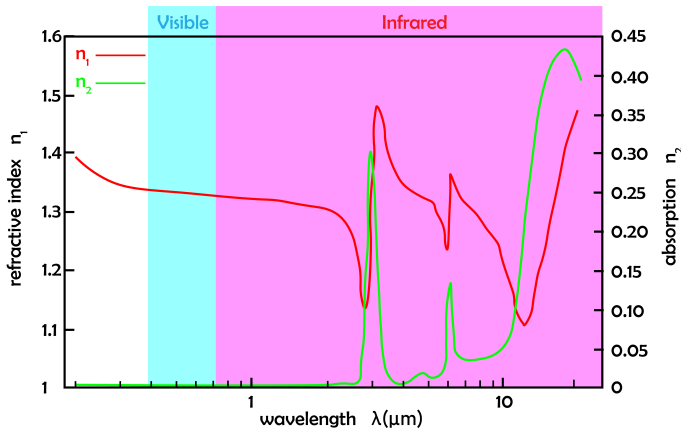


图 10.4: 水的可见-红外色散曲线

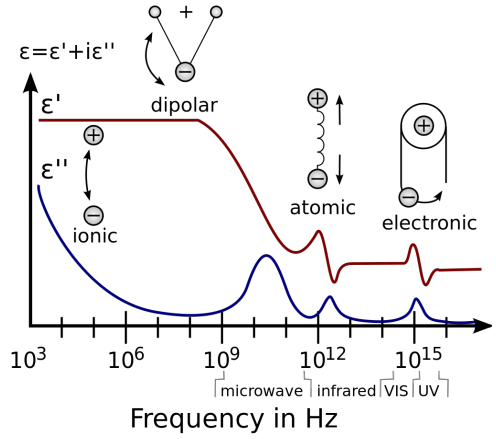


图 10.5: 光与原子作用类型

事实上,在不同的波段,适用于不同的光与物质相互作用的基本模型.微波波段光波长足够长使得晶体的正负离子做大范围的整体相对运动⁶,就是晶格振动.红外则开始使得分子振动,包括转动和振动等不同形式.再往下的可见波段才是电子共振,也包括原子间的能带共振和原子内的能级共振.最后在紫外波段,电子甚至能直接被电离,这就造成了光与物质相互作用问题的复杂性.

但无论哪种相互作用的机制,我们上述推导得到的描述有着特定共振频率的色散与吸收的最终公式是十分普适的.它只有三个待定的参数:共振频率 ω_0 ,半高峰宽 Γ 和反应共振强度的等离子体频率 ω_p .我们接下来要做的,是把不同振子,不同吸收效应带来的结果进行求和:

$$\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 1 + \omega_p^2 \cdot \sum_i \frac{c_i(\omega_i^2 - \omega^2)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \Gamma_i^2 \omega^2}$$

$$\varepsilon_2/\varepsilon_0 = \omega_p^2 \cdot \sum_i \frac{c_i \Gamma_i \omega}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \Gamma_i^2 \omega^2}$$

其中 ω_p 仍然统计各个吸收峰的总强度,而 c_i 系数的和必须为 1 则统计各个吸收峰的相对强度.我们最后计算远离吸收带处的折射率值.忽略各个 Γ_i 后得到:

$$n^2 = 1 + \omega_p^2 \cdot \sum_i \frac{c_i}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

上式就是著名的**塞尔迈耶尔方程**(Selmeyer's equation),如果用波长表示则为:

$$n^2 = 1 + \sum_i a_i \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2}, \quad a_i = \frac{c_i \omega_p^2 \lambda_i^2}{4\pi^2 c^2}$$

上式依然可以做近似,把共振的各个波长 λ_i 从小到大按 i 来排列.不妨设 $\lambda_i \ll \lambda_{i+1}$,而 λ 恰好接近 λ_i ,那么忽略所有 λ_{i+1} 及之后对应的小量项并将 λ_{i-1} 及之前的项直接近似为 a_i :

$$\begin{aligned} n^2 &\approx 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + \frac{a_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \\ &= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_i + \frac{a_i \lambda_i^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \\ &\approx 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_i + \frac{a_i \lambda_i^2}{\lambda^2} \\ &= A_0 + \frac{B_0}{\lambda^2} \end{aligned}$$

⁶十分类似于热运动的那种形式,区别在于这是外场诱导的有规律的振动,而且正负电荷位移一定反相,对应热振动的特定光学支。

而进一步近似得到:

$$\sqrt{A_0 + \frac{B_0}{\lambda^2}} = \sqrt{A_0} \left(1 + \frac{B_0}{A_0 \lambda^2} \right)^{1/2} = \sqrt{A_0} \left(1 + \frac{B_0}{2A_0 \lambda^2} - \frac{B_0^2}{8A_0^2 \lambda^4} + \cdots \right)$$

一般就总结为如下柯西色散公式(Cauchy dispersion formula):

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

有时为了精度原因再加上四阶项 $+C/\lambda^4$. 而从推导过程中我们发现系数之间的联系:

$$A = \sqrt{1 + \sum_1^i a_i} \quad , \quad B = \frac{a_i \lambda_i^2}{2A}$$

10.1.3 * 辐射阻尼与散射截面

我们此前得到了电荷做加速运动时需要满足的辐射能流和拉莫尔公式:

$$S = \frac{q^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta \quad , \quad P = \frac{q^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

从这个式子中可以看出,在有加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 的情况下,辐射场的动量分布是关于电荷中心对称的. 故虽然会造成电荷的动能损失,但是似乎不造成电荷的动量改变. 但是这一点其实不够准确. 因为偶极辐射本身过程中就包含有取最低阶项的近似成分. 本来可以精确计算的非零发射动量在这个过程中完全有可能被忽略. 而洛伦兹和亚伯拉罕在 1892 年通过将点电荷模型扩大为一个半径很小的球体证明了球体自己产生的辐射场会给自己一个动量的改变. 其中一部分解释为自带场产生的质量对应的跟随电荷运动的动量改变. 另一部分则就对应一个辐射阻尼力(radiation damping force),后人称之为洛伦兹-亚伯拉罕力(Lorentz Abraham force). 后来量子电动力学进一步将其表达式精确化,它为:

$$\mathbf{f} = + \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{r}}$$

这样一个力却不大可能代表电荷与场这样一个无限多自由度⁷系统的全部. 注意到以下量具有时间量纲,我们可以把电荷受到一个外力 \mathbf{F} 并与辐射场相互作用下电荷符合的动力学方程在仅考虑辐射阻尼力的情况下简化为:

$$\tau = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 m c^3}$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + m\tau \ddot{\mathbf{r}}$$

这样一个简化就会招致祸端:若在一维情况下,将受力设置为以下元脉冲函数(unit pulse function):

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t < -0.5) \\ 1 & (-0.5 \leq t \leq 0.5) \\ 0 & (t > 0.5) \end{cases}$$

通过解数值方程 $\tau \ddot{x} - \ddot{x} = -F(t)/m$, 把 $a = \ddot{x}$ 视作待解函数,可得通解:

$$a(t) = \begin{cases} A_1 e^{t/\tau} & (t < -0.5) \\ A_2 e^{t/\tau} + \frac{1}{m} & (-0.5 \leq t \leq 0.5) \\ A_3 e^{t/\tau} & (t > 0.5) \end{cases}$$

⁷ 每一点的场强全都是独立的变量. 类似于一张连续的弹性膜,膜的位移就相当于场的激发.

且三个系数满足使 a 为连续函数的条件:

$$A_1 - A_2 = \frac{e^{0.5/\tau}}{m}, \quad A_3 - A_2 = \frac{e^{-0.5/\tau}}{m}$$

从中可以看出 $A_3 \neq A_1$. 这就导致了一个尴尬的结果: 在 $t < -0.5$, $t > 0.5$ 两段过程中, 至少有一段过程电荷做非匀速直线运动. 通过因果律来分析, 当力尚未作用在电荷上时, 电荷自然没有道理产生加速度. 故应取 $A_1 = 0$. 那么在这个外力作用于电荷一段时间后并撤销后, 这个理论预言电荷已经被一个扰动后的电磁场挟持以致做以下运动:

$$A_3 = -\frac{e^{0.5/\tau} - e^{-0.5/\tau}}{m}$$

$$a = -\frac{e^{0.5/\tau} - e^{-0.5/\tau}}{m} \cdot e^{t/\tau}$$

无疑, 这是荒诞的, 加速度不仅不是零, 甚至还随时间趋近于无穷大, 这种病态的行为显然没有在实际观测中出现过. 其实, 根据这个辐射阻尼力的推导过程中忽略的高阶项需要足够小的要求来看, 我们上面定义的 τ 恰好界定了这个近似可以进行的条件, 那便是我们关心的过程的 \ddot{r} 变化的特征时间 T 需要不大于对电子以上定义的特征时间的量级:

$$T \ll (\sim)\tau = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} = 6.27 \times 10^{-24} \text{s}$$

在知道这个辐射阻尼力的做法的适用条件之后我们再来看一个常见的简单推导方法. 我们注意到辐射阻尼公式与辐射功率拉莫尔公式系数的高度相似性. 不难去思考两者的联系, 实际上:

$$\frac{q^2 \ddot{r}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2 \dot{r} \cdot \ddot{r}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \right) - \frac{q^2 \ddot{r}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cdot \dot{r}$$

可见辐射阻尼力对粒子做负功的功率与拉莫尔辐射功率之间仅仅相差一项. 我们指出在我们研究的电磁波照射到振子的经典色散模型中, 电子做周期性运动, 故这一项的周期积分为零:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2 \dot{r} \cdot \ddot{r}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \right) dt = \left. \frac{q^2 \dot{r} \cdot \ddot{r}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \right|_0^T = 0$$

故如果一个表达式能代表辐射阻尼, 它必然具有上式具有的形式. 而在 $T \ll (\sim)\tau$ 时, 正如我们之前介绍的那样, 这个做法是合理的.

利用特征时间 τ , 在频率 ω 的电磁波下的谐振子的动力学方程, 考虑辐射阻尼时, 就写作:

$$m\ddot{r} - m\tau\ddot{r} + k\mathbf{r} = -e\mathbf{E}$$

这看上去与之前我们给出的谐振子的形式存在出入. 实际上, 在简谐 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ 的情况下, 对时间导数相当于乘以 $i\omega$. 于是上式写为:

$$m\ddot{r} + m\omega^2\tau\dot{r} + k\mathbf{r} = -e\mathbf{E}$$

这就可以看出, 实际上之前的经典色散理论不过是将 $m\omega^2\tau$ 整体取做 γ 而已. 引入辐射阻尼的现象之后我们就可以看出 γ 与角频率潜在的比例关系 $\gamma \propto \omega^2$.

在这个基础上我们解出单电子某维度上做振动的函数:

$$x = Ae^{i\omega t} = -\frac{eE_x/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega^3\tau}$$

通过这个振幅我们除了推导色散, 还可以得到两个十分有意义的结果:

第一个结果是重新去计算电子辐射的功率, 即把外电磁场能量单位时间散射的那部分能量. 根据偶极振荡公式:

$$\overline{P} = \frac{e^2\omega^4|x|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

而入射电磁波,如果就是沿 z 方向传播,沿 x 方向偏振的平面波,则具有平均能流:

$$S = \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \frac{|E_x|^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 c |E_x|^2}{2}$$

用这个功率除以这个能流,我们得到一个面积量纲的物理量.实际上就是相当于电子吸收了这个面积里面的辐射并以散射的形式做了新的辐射发射.这个面积称作**散射截面**(scattering cross section),计算可得:

$$\sigma = \frac{\bar{P}}{S} = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \cdot \frac{1}{\omega^2 \tau^2 + (1 - \omega_0^2/\omega^2)^2}$$

而其中 r_e 就是我们之前提过的**经典电子半径**(classical electron radius).它恰恰是在洛伦兹等人在研究辐射的问题时提出的.故也称**洛伦兹半径**(Lorentz radius):

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$$

我们首先注意一点:由于 τ 是个很短的时间,故能够使得 $\omega\tau \sim 1$ 的角频率对应的光波具有以下的量级:

$$\omega \sim 10^{23} \text{rad/s}, \quad \lambda \sim 12 \text{fm}, \quad E \sim 105 \text{MeV}$$

这实际上是一个极高的频率了,到这个能标,光子对电子的影响已经完全不能忽略光子的量子性,当然也要考虑电子的波动性,康普顿散射和量子电动力学的理论时必要的.而物质形成的体系总是有 $\omega_0\tau \ll 1$,故即使在 $\omega \gg \omega_0$,一般也可以把 $\omega\tau$ 视作小量.那么在这种场合下:

$$\sigma \approx \frac{8}{3} \pi r_e^2$$

这个截面称为**汤姆孙截面**(Thomson cross section).反映了在高频电磁波作用下电子接近自由电子散射电磁波的行为.

而在低频下 $\omega \ll \omega_0$,可做近似:

$$\sigma \approx \frac{8}{3} \pi r_e^2 \cdot \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

这个式子后面会介绍,反映了瑞利散射的基本原理.

最后,在 $\omega \approx \omega_0$ 时,截面表达式的分母很接近零.散射截面远大于汤姆孙截面,电子强烈吸收外电磁场能量,并造成大的散射.这称作**共振散射**(resonance scattering).实验上实际上也观察到了这个现象.但是洛伦兹经典色散理论的弱点就在于它是个经典的理论,并不能很好地解释实验中得到的数据,因为它没有构建出理论模型中谐振子的量子本质.

第二个结果,我们来考察一下这个振子在外界电磁场下产生的振动能量:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} k \Re(x)^2 + \frac{1}{2} m \Re(\dot{x})^2 \\ &= \frac{1}{4} m (\omega^2 + \omega_0^2) |x|^2 \\ &= \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m \omega^2} \cdot \frac{\omega^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^6 \tau^2} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 |E_x|^2 \end{aligned}$$

这样也许还不足以引起理论上的价值.但是如果设想一个复杂的电磁波场,它总可以分解为简单的平面波场(参考下一节介绍的傅里叶变换理论).那么该点的瞬时 x 方向电场就可以分解为:

$$E_x(t) = \int_0^\infty [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] d\omega$$

而对于波 $A(\omega) \cos \omega t$ 和 $B(\omega) \sin \omega t$,在谐振子上激发的能量是:

$$K(\omega) = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m \omega^2} \cdot \frac{\omega^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^6 \tau^2} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 [A(\omega)^2 + B(\omega)^2]$$

作为原因,多个谐振电场的叠加产生的结果就是简单的振子的振动的简单叠加,这是因为谐振电场与振子的振动满足的微分方程是线性的.而按照简谐分解的一个数学结果就是,能量也可以直接叠加:

$$\overline{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_x^2(t)} = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\varepsilon_0 A(\omega)^2 \overline{\cos^2 \omega t} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 B(\omega)^2 \overline{\sin^2 \omega t} \right] d\omega = \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{1}{2} \varepsilon_0 [A(\omega)^2 + B(\omega)^2] d\omega$$

从这个角度来看,振子就会因此具有 x 方向的平均能量:

$$\begin{aligned} K_x &= \int K(\omega) d\omega \\ &= \int \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m \omega^2} \cdot \frac{\omega^2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^6 \tau^2} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 [A(\omega)^2 + B(\omega)^2] d\omega \end{aligned}$$

如果考虑一个热力学系统,辐射和谐振子达到了一个温度为 T 的热平衡.那么经典理论认为:每一个振子在一个方向上应当具有平均能量 kT .这一点之后由普朗克发现是错误的.但是如果坚持这个做法,由于电磁辐射的内能密度亦可以根据频率展开:

$$\begin{aligned} u &= \overline{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_x^2(t)} + \overline{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_y^2(t)} + \overline{\frac{1}{2\mu_0} E_z^2(t)} + \overline{\frac{1}{2\mu_0} B_x^2(t)} + \overline{\frac{1}{2} B_y^2(t)} + \overline{\frac{1}{2\mu_0} B_z^2(t)} \\ &= 6 \cdot \overline{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_x^2(t)} \\ &= \int_0^\infty u(\omega) d\omega \end{aligned}$$

这就得到了:

$$u(\omega) = 3 \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 [A(\omega)^2 + B(\omega)^2]$$

从而之前的积分就可用 $u(\omega)$ 表示.但是又由于 τ 很小,故仅在 $\omega \sim \omega_0$ 附近近似:

$$\begin{aligned} K_x &= \int \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m \omega^2} \cdot \frac{\omega^2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^6 \tau^2} \cdot \frac{u(\omega)}{3} d\omega \\ &= \int \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m \omega_0^2} \cdot \frac{2\omega_0^4}{4\omega_0^4(\omega - \omega_0)^2 + \omega_0^6 \tau^2} \cdot \frac{u(\omega_0)}{3} d\omega \\ &= \frac{e^2 u(\omega_0)}{12\varepsilon_0 m \omega_0^2} \cdot \int \frac{dx}{x^2 + \omega_0^2 \tau^2 / 4} \\ &= \frac{e^2 u(\omega_0)}{12\varepsilon_0 m \omega_0^2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} \\ &= kT \end{aligned}$$

代入 τ 的表达式,这就得到了:

$$u(\omega_0) = \frac{3kT\omega_0^3}{2\pi^2 c^3}$$

这就是辐射与振子热力学平衡的理论基础,从此建立的理论可以导出著名的瑞利-金斯公式,从而招致了著名的紫外灾难.普朗克提出了辐射的量子理论成功地解决了这个问题.参见下一章.

第十一章 量子论

11.1 黑体辐射

- 黑体辐射的性质:

- 总辐射强度:

$$J = \sigma T^4 = \frac{1}{4}uc$$

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4) = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}$$

- 辐射频域谱: 普朗克公式:

$$J(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$$

- 辐射空间谱: 郎伯定律:

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{J}{\pi} \cos \theta$$

- 非黑体满足基尔霍夫定律: 某角频率 ω 下发射率 $e(\omega)$ 与吸收率 $a(\omega)$ 必然相等. 发射率是

$$\frac{dE}{dS dt} = \int E(\omega) d\omega$$

$$e(\omega) = E(\omega)/J(\omega)$$

故基尔霍夫定律发现:

$$e(\omega) = a(\omega)$$

11.2 光粒子性

- 光子概念:

$$E = \hbar \omega \quad , \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

- 用于解释普朗克公式: 玻色-爱因斯坦统计.

- 用于解释光电效应:

$$E_k = h\nu - W \geq eU \rightarrow I$$

11.3 玻尔原子

- **精细结构常数**(fine structure constant):

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

- 半经典假设: 忽略电子的波动性, 认为仍然有轨道运动, 且为圆周运动, 符合牛顿力学:

$$m \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$$

- 量子化假设: 角动量是量子化的, 或者作用量量子化:

$$mv_n \cdot 2\pi r_n = nh$$

- 定态跃迁假设: 基态 $n = 1$ 是能量最低的稳定态, 其他态与基态彼此之间都有可能发生转变, 转变是瞬间发生的, 伴随着一个光子的吸收或发射, 且需要能量守恒:

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

$$h\nu = E_n - E_m$$

- 玻尔理论的解:

$$r_n = n^2 a_0$$

$$v_n = \frac{\alpha c}{n}$$

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{\alpha^2 mc^2}{2n^2}$$

其中 E_0 为第一电离能, 氢原子为 13.6eV. 而 a_0 为玻尔半径, 它与另外两个特征长度: 电子康普顿波长:

$$\lambda_e = \frac{h}{mc}$$

经典电子半径:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$

符合;

$$\alpha = \frac{\lambda_e/2\pi}{a_0} = \frac{a_0}{r_e}$$

11.4 物质波与波函数

- 匀速运动的粒子对应一个平面波;

$$\psi = Ae^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

且符合德布罗意关系:

$$E = \hbar\omega$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

- 对这个波的诠释: 模方表示粒子在某空间点被探测到的概率分布函数:

$$f(\mathbf{r}) = |\psi|^2$$

$$\int f(\mathbf{r}) dV = 1$$

- 测不准原理: 平面波情况下粒子位置是不确定的, 但是动量却唯一. 任意一个波函数可以分解为不同概率的平面波的叠加, 那么某方向上位置和动量的两个不确定度 (标准差) 满足:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

第十二章 相对论

12.1 相对论运动学

- 光速不变原理: 时空的结构为平直时空: $ds^2 = c^2 dt^2 - dx_i^2$: 物质运动的“舞台”.
- 相对性原理: 物理规律的协变性:

$$\text{Sca.} = \text{Sca.}, \quad \text{Vec.} = \text{Vec.}, \quad \text{Vec.} \cdot \text{Vec.} = \text{Sca.} \quad \text{etc.}$$

- **四-标量**(four-scalar) 与 **四-矢量**(four-vector) 的定义: 类比三维空间标量矢量, 但按闵可夫斯基空间处理.
- 洛伦兹变换的定义: 保度规的变换. 物理上是不同共原点惯性参考者建立的参考系.
- 洛伦兹群:

$$\text{SO}(3, 1) = \langle R_x, R_y, R_z, B_x, B_y, B_z \rangle$$

其中 B_x 为 x 方向的**推促**(boost):

$$\begin{bmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- 经典物理没有协变性, 但电磁学与相对论理论具有协变性. 意为所有物理定律都由协变的对象构成, 这主要包括标量, 矢量, 张量, 旋量四类. 四-矢量尤其常见:

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

出于方便, 四-矢量也被简记为 $A_\mu = (A_0, A_i) = (A_0, \mathbf{A})$. 而 $A_i = (A_1, A_2, A_3)$ 是三维矢量的简记. 四-矢量与四-矢量可以算**伪内积**(pseudo-inner-product):

$$A_\mu B^\mu = A_0 B_0 - A_i B_i$$

伪内积将得到四-标量. 即参考系变换下不变的量.

- 洛伦兹变换下任意四-矢量具有不变量 $A_\mu A^\mu = A_0^2 - \mathbf{A}^2$, 对于类时四-矢量这将大于零, 即 $A_\mu A^\mu = A_{\text{proper}}^2$, 事实上以速度 $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{A}}{A_0}c$ 做洛伦兹变换, 可以把空间分量变为零. 这叫做**本征参考系**(proper reference system). 得到本征四-矢量 $A'_\mu = (A_{\text{proper}}, \mathbf{0})$.

- 三个基本图像:

- 尺缩: $L = L_0/\gamma$.
- 钟慢: $t = \gamma t_0$.
- 同时相对性: $\tau = -\beta \frac{x}{c}$.

只要是真的尺子, 真的钟, 就永远不可能错! 没有真的尺子和钟就去构造.

- 相对论质点运动:

具有四-标量: 间隔 $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$, 本征时 $dt_0 = ds/c$, 下四-速度的不变模长 $v_\mu v^\mu = c^2$.

具有四-矢量: 四-位移 $dx_\mu = (cdt, d\mathbf{r})$, 四-速度 $v_\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$, 四-加速度见下节.

- 速度变换公式:

$$\gamma' = \frac{1 - \frac{uv_x}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \gamma$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_{y,z} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} v_{y,z}$$

- 光行差公式: 可以用速度变换推导, 也可以之后用流变换推导:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\cos \theta'}$$

- 相对论下讨论刚体? 模型存在缺陷: 隧道佯谬, 转盘佯谬. 故整个刚体运动学都没有必要建立.

12.2 相对论动力学

- 动量-能量构成四矢量的必要性: 守恒律需要被保留且协变.

- 四-动量:

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), p_\mu p^\mu c^2 = E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4, \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} c^2}{E}$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- 普遍的过程的守恒律:

$$\sum_i p_{i,\mu} = \sum_j p_{j,\mu}$$

- 四-力与四-加速度:

$$a_\mu = \frac{dv_\mu}{dt_0} = \left(\gamma \frac{d\gamma}{dt} c, \gamma \frac{d\gamma \mathbf{v}}{dt} \right), \frac{d\mathbf{v}}{dt} := \mathbf{a}$$

$$F_\mu = \frac{dp_\mu}{dt_0} = \left(\gamma \frac{dE}{cdt}, \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) := \left(\gamma \frac{W}{c}, \gamma \mathbf{F} \right)$$

- 推论一: $F_\mu = a_\mu$. 但三维矢量之间不会直接符合 Newton-like 的动力学方程.
- 推论而: $F_\mu v^\mu = 0$. 这个三维继续可以得到:

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p}, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dE$$

- 单方向受力时, 在该方向的推促下力不变.
- 本征加速度与本征力: 它本意指的是四-速度的本征系中的四-加速度与四-力, 不过神奇的是恰好让两者的时间分量变为零 (类空, 与类时的四-速度正交), 空间分量为 $\mathbf{a}_0, \mathbf{F}_0$:

$$\mathbf{F}_0 = m\mathbf{a}_0$$

$$a_\mu a^\mu = -a_0^2$$

- 沿平行于本征加速度与本征力方向施以推促:

$$F = F_0, \quad a = a_0/\gamma^3$$

- 沿垂直于本征加速度与本征力方向施以推促:

$$F = F_0/\gamma, \quad a = a_0/\gamma^2$$

- 快度(rapidity): $\beta = \text{th}\vartheta, \gamma = \text{ch}\vartheta$.
- 自然坐标下的相对论性牛顿定律:

$$F_\tau = \gamma^3 m a_\tau$$

$$F_n = \gamma m a_n$$

- 相对论关于碰撞的新理解:

情形	经典	相对论
弹性	无耗散, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}, E' = E$	粒子守恒, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}, E' = E$
非弹性	有耗散, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}, E$ 不可列	粒子变性, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}, E' = E$

只有一个例外: 光子的散射若频率不变, 叫做弹性散射. 如经典的瑞利散射, 米氏散射; 但如果频率变了, 叫做非弹性散射, 如拉曼散射, 康普顿散射.

- 相对论碰撞根据具体情形一般有以下大的分类: 弹性的散射, 非弹性的散射, 粒子反应.
- 质点系的动量-能量也将构成一个四-矢量, 即:

$$(E, \mathbf{p}) = \sum_i (E_i, \mathbf{p}_i)$$

那么这个四-矢量的本征系速度:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E}$$

称作动量中心系(center-of-momentum frame), 以代替经典物理的质心系. 简称动心系. 顾名思义, 此系中质点系总动量为零; 而总能量:

$$E_0^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

m_0 为动心系中的总动质量, 以后称作质点系的等效静质量. 这个式子可以解释一部分的质量起源问题.

- 一个等效静质量 m_0 的质点系若选取相对动心系以 \mathbf{v} 运动的参考系, 动量与能量为:

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E = \sum_i E_i = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- 放能反应: $\sum_i m_i > \sum_j m_j$. 则无论取哪个系, 静能转化为动能的量都相等. 定义为反应能 Q :

$$Q = \left(\sum_i m_i - \sum_j m_j \right) c^2$$

- 吸能反应: $\sum_i m_i < \sum_j m_j$. 则具有阈能. **仅在动心系中**, 反应发生的最小动能 (阈能) 的值为:

$$Q = \left(\sum_j m_j - \sum_i m_i \right) c^2$$

12.3 相对论连续物质

- 若有一守恒荷 Q 作为四-标量, 则其空间分布与流动构成一个密度场 ρ, \mathbf{j} :

$$dQ = \rho dV$$

$$dQ = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} dt$$

- 那么 $(\rho c, \mathbf{j})$ 是一个四-矢量且符合洛伦兹变换, 如 x 方向的推促:

$$\begin{bmatrix} \rho' c \\ j'_x \\ j'_y \\ j'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho c \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{bmatrix}$$

- 若有一平面波场, 其必要的一个要素为相位, 它随着时空分布必然写作:

$$\varphi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

ω 称作角频率, \mathbf{k} 为波矢.

- 那么由于相位为四-标量, 且可以写作以下形式, 故 $k_\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ 为四-矢量, 称作四-波矢:

$$\varphi = k_\mu x^\mu$$

如 x 方向的推促:

$$\begin{bmatrix} \omega'/c \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$$

- 可以从上式出发得到光行差公式, 同时也能得到多普勒效应公式. 在前提 $\omega/k = c$ (四-波矢类光) 时:

$$\omega' = \omega \cdot \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}$$

- 将三维的力密度和功率密度:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV}$$

$$p = \frac{dP}{dV}$$

合并可以得到四-力密度 $f_\mu = (p/c, \mathbf{f})$.

12.4 相对论电磁场

相对论场变换公式:

$$\begin{aligned} E'_{//} &= E_{//} \quad , \quad B'_{//} = B_{//} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$