

高二物理竞赛 • 电磁学与近代物理

学而思

目录

第一章 静电学	5
1.1 电荷与电场	5
1.1.1 电磁相互作用与电荷	5
1.1.2 库仑定律	6
1.1.3 电场	6
1.2 两个定律与电势	9
1.2.1 电场的高斯定律	10
1.2.2 电势与电场的环路定律	11
1.2.3 总结	12
1.3 静电能	13
1.3.1 静电势能	13
1.3.2 自能与相互作用能	14
1.3.3 电场能	16
1.4 电荷体系	17
1.4.1 电偶极子	17
1.4.2 电荷密度	20
1.4.3 极化强度 *	21
1.4.4 若干对称带电体系的电场	23
第二章 导体与介质	27
2.1 导体与静电平衡	27
2.1.1 绝缘体与导体	27
2.1.2 导体的特点	28
2.1.3 常见简单体系	32
2.2 电像法	34
2.2.1 半无限大空间的电像法	35
2.2.2 球面外与球面内的电像法	36
2.2.3 立体谐函数 *	38
2.3 电介质	42
2.3.1 微观角度理解极化	42
2.3.2 宏观角度理解极化	45
2.3.3 微观与宏观的联系	49
2.4 再议静电能	50

第三章 稳恒电流	53
3.1 稳恒电流描述与形成	53
3.1.1 德鲁特模型	53
3.1.2 费米气观点 *	54
3.1.3 能带论 *	56
3.1.4 惯性, 阻尼与回复力	58
3.1.5 稳恒电流与形成条件	59
3.2 电路与电路方程	61
3.3 电路分析基础	64
3.3.1 电路的整体结构与拓扑学结论	64
3.3.2 电路问题的求解套路	67
3.4 电路分析方法	69
3.5 半导体	69
第四章 静磁学	71
4.1 电流与磁场	71
4.1.1 磁场地位与电流分布	71
4.1.2 毕奥-萨伐尔定律	73
4.2 两个定律与矢势	75
4.2.1 磁场的环路定律	75
4.2.2 矢势与磁场的高斯定律	77
4.3 电流体系	79
4.3.1 磁偶极子	80
4.3.2 磁化强度	83
4.3.3 若干对称体系的磁场	83
4.4 磁介质与磁能	85
4.4.1 微观角度理解磁化	85
4.4.2 宏观角度理解磁化	86
4.4.3 磁场能量	86
第五章 磁生电	87
5.1 电磁感应	87
5.1.1 动生电动势	87
5.1.2 感生电动势	88
5.2 自感与互感	88
第六章 麦克斯韦方程组	89
6.1 麦克斯韦方程组	89
6.1.1 电生磁	89
6.1.2 麦克斯韦方程组	91
6.1.3 电荷在电磁场中的运动	95
6.2 平面电磁波	96
6.2.1 真空中的电磁波	96
6.2.2 介质中电磁波的传播	97
6.3 电磁场能量与动量	99

6.4	电磁波辐射	99
6.4.1	电磁辐射概论	99
6.4.2	偶极辐射	100
第七章	交流电路	103
7.1	相量表示	103
7.1.1	拟稳条件与交流元件	103
7.1.2	电阻, 电容, 电感特性	103
7.2	常见电路	105
7.2.1	谐振电路	105
7.2.2	滤波电路	105
7.2.3	电报线方程, 再论拟稳条件	105
7.3	变压器	105
7.3.1	磁路定律	105
7.3.2	理想变压器条件	105
7.4	电能传输	105
7.4.1	发电机与电动机: 三相绕组	105
7.4.2	变电站与电线损耗	105
7.4.3	市电规范	105
7.4.4	电源适配器	105
第八章	相对论力学	107
8.1	相对论运动学	107
8.2	相对论动力学	108
8.3	相对论连续物质	110
第九章	光的干涉	113
9.1	标量波理论	113
9.2	分波面干涉	117
9.3	分振幅干涉	118
9.4	偏振干涉	119
9.5	相干性	121
第十章	光的衍射	123
10.1	光栅与波带片	123
10.2	衍射积分公式	124
10.3	波前分析法	124
第十一章	物理光学	125
11.1	经典色散理论	125
11.1.1	复波矢与复折射率	125
11.1.2	经典电子论的解释	128
11.1.3	* 辐射阻尼与散射截面	131

第十二章 量子论	135
12.1 黑体辐射	135
12.2 光粒子性	136
12.3 玻尔原子	137
12.4 物质波与波函数	137

第六章 麦克斯韦方程组

6.1 麦克斯韦方程组

6.1.1 电生磁

磁荷不存在,为电磁学规律带来了充分的简化.但是目前我们发现的三种现象:静止电荷产生电场,稳恒电流产生磁场,变化电流(通过产生变化的磁场)产生涡旋电场,并不是电磁学客观规律的全部.前两章我们已经充分说明,后两种现象其实都是相对性原理的后果:在一个参考系内不变的电荷分布,必将在另一个参考系看来产生电流,稳恒电流也会因为在另一个参考系而随时间变化,从而在一个参考系中纯粹的电场可以在另一个参考系内引发磁场和涡旋电场.电磁学的最后一种现象,由**麦克斯韦**(J. C. Maxwell)在1861提出的,位移电流产生磁场的现象,在某种程度上也由相对性原理引发.我们之后就可以发现这一点.

一切的源起,在于麦克斯韦对安培环路定律普遍性的质疑.我们不能认为在变化的荷与场的情况下,磁场的安培环路定律具有普适性.它写作:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

为何质疑?考虑一个电容器不断充电的过程,如图所示.我们可以认为在距离电容较远的某点处,取一个垂直于导线的半径足够小的圆盘 S_1 后,边界环路上的磁场与导线上的电流之间符合安培环路定律的关系.但是注意到如果我们选择一个兜状的面 S_2 时,它的边界可以与圆盘边界完全一致.但是由于它把导线和一个极板完全兜住,故这个面上完全没有电流.从而就不能认为这个面和它的边界符合安培环路定律!至少, S_1 和 S_2 绝对不可能同时符合安培环路定律!这是因为,等号左侧这两个面边界上具有同一个磁场的环路积分,但是等号右侧却是不一样的电流通量: S_1 上为导线电流 I 而 S_2 上为零.两个等式是不可能同时成立的.

但是空间中的磁场又的确是客观存在的,而不是虚无缥缈的辅助物理量,我们依然可以通过对带电粒子受到的洛伦兹力的要求来确定空间中某处的磁场值:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

那么如何寻找这种情况下正确反映磁场计算方法的公式?麦克斯韦做到了这一点,而他的做法其实可以被简单的归纳为三点:

逻辑上要求自恰,数学上发展工具,哲学上遵从**吝啬原则**(law of parsimony)¹.

首先第一点,安培环路定律从逻辑上已经不能自恰了,所以必须修改它,一个合理的想法是为它增添一项:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + (?)$$

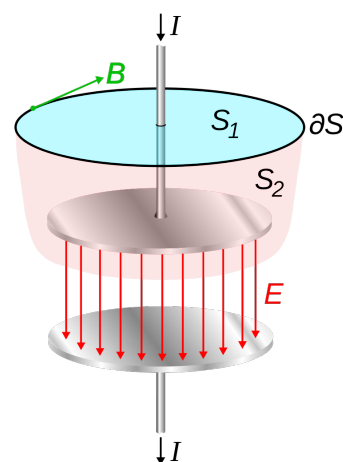


图 6.1: 修正安培环路定律

¹又做奥卡姆剃刀 (Occam's razor): 如无必要,勿增实体.认为基本规律的不同表述之间越简单的描述约能反应基本规律的本质.

增添这一项的目的就是为了能避免如之前电容器充电情况下的矛盾情况的发生. 事实上电容器充电的例子就提供了修改之后的表达式是否正确的试金石.

为了找到这个项, 矢量微分工具就发挥了不可替代的作用. 使用微分形式以上积分等式写作:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + (?)$$

再两边同时取散度, 左边数学上一定变成零, 从而得到添加的项需要符合的条件:

$$\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \nabla \cdot (?) = 0$$

再注意到电荷电流符合连续性方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

从而得到:

$$\nabla \cdot (?) = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

为了实现这一点, 最简单的一种可能性为:

$$(?) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

这是因为电场的散度就会回到电荷:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

但是我们注意到, 使得之前的要求成立的添加项 (?) 不是唯一的, 事实上在刚刚的结果上添加任意一个矢量场的旋度都不改变其散度的值:

$$\nabla \cdot \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{F} \right) = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + 0$$

于是最后一个思想就发挥了作用: 如无必要, 勿增实体. 往往简单而自洽的形式就能反映真实的物理规律. 从而麦克斯韦就利用这样的推理得到了修正的安培环路定律:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

同时麦克斯韦提出了以下视角去解释以上式子背后的物理图像: 我们定义 **位移电流** (displacement current):

$$\mathbf{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

那么我们的工作可以归纳为一句话: 通过引入虚构位移电流, 导致与真实电流的和形成一个没有散度 (即连续) 的电流场:

$$\nabla \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{j}_d) = 0$$

举例来说, 在之前的电容器充电的场合下, 如果忽略电容器的边缘效应, 那么从上方往下通过的电流为 I 时, 电容器上积累的面电荷密度 σ 的增长为:

$$I = \dot{\sigma} S$$

从而电容内部的场强就会随之增长:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \dot{E} = \frac{I}{\varepsilon_0 S}$$

从而把电场的导数视作位移电流的话, 造成的总电流就是:

$$I_d = j_d S = \varepsilon_0 \dot{E} S = I$$

从而实际上补充位移电流后电流并没有在电容器极板上中断,这样也就不会造成之前电容器上不同面上电流不同而造成的矛盾情况。

如果认为补充这一项后形成的新安培环路定律具有在任意变化的电磁场下的普适性,我们可以发现,这样的一条规律在数学形式上具有与感生电场规律具有某种“对称性”。尤其是当空间中某处没有通过实际电流时,此时两条规律分别为:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

即,变化的磁场(部分来源于变化的电流分布)会产生电场,变化的电场(部分来源于变化的电荷分布)会产生磁场。

我们曾经解释过第一个式子,它实际上可以解释为动生电动势现象的相对论效应。即在一个参考系中的磁场会在另一个参考系中招致电场:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

而一个参考系中的电场在另一个参考系中招致磁场这样的对称行为,实际上我们在之前静磁学章节中建立毕奥-萨伐尔定律时就已经有介绍过,得到的结果为:

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}$$

这就不难看出两者之间的对称性来。而第一个式子,我们通过一个参考系中的动生电动势与另一个参考系中的感生电动势都与法拉第电磁感应定律相联系的思路,就推出了电场的旋度公式:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \Rightarrow \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

注意到系数 $1/c^2$ 实际上就是 $\mu_0 \varepsilon_0$, 完全仿照这个过程,我们也能得到磁场的环量也将等于电通量的导数,即对应有:

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \Rightarrow \oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

所以至此我们可以总结:电磁学的所有规律,都可以看做唯一一个规律:即库仑定律,在相对论原理下分化出来的丰富变式。

6.1.2 麦克斯韦方程组

将四个规律:电荷产生电场,电流产生磁场,变化的磁场产生电场,变化的电场产生磁场组合到一起,就得到了**麦克斯韦方程**(Maxwell equations),实际上指以下方程组²:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

它完整而全面地描述了场与荷之间的关系。在之前的观点中,我们认为电荷是因,场是结果。这种观点之后将不再适用,这是因为在数学形式上,变化的电场和磁场可以互相产生,之后我们利用这一点能找到完全

²但是其实这四个方程是一个整体,正如电磁场本身应当视作一个整体对待

脱离电荷存在的电磁波解. 而完整的电磁理论实际上只需要再配合电场磁场本身的定义, 即洛伦兹的力公式:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

然而, 同样的一个现象 (电荷与场之间的相互作用) 可以有不同理论来描述. 力学我们就曾经介绍过牛顿经典力学体系和尝试过分析力学的可能性. 静电学和静磁学中, 电场和磁场不仅可以由场强来描述, 我们也研究了由势来描述的可能性. 当时的势与电荷的关系是比较简单的:

$$\varphi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r} dV, \quad \mathbf{A} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}}{r} dV$$

那么能不能为变化的电磁场整体采取一个用势来描述的方法? 至少以上两个式子应当被摒弃, 因为他们只描述了电荷直接产生的电场与电流直接产生的磁场. 而我们知道变化的电荷与电流可以交叉地产生磁场和电场. 事实上之前成立的以下两个描述势与场强之间关系的式子也应当考虑摒弃:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

后一个式子不会招致明显的矛盾, 因为即使在变化电磁场下, 依然有:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

故无需添加新项即可成为恒等式.

矛盾集中体现在第一条上. 两边同时取旋度就能看出其中的不妥之处:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla\varphi$$

其中左侧根据麦克斯韦方程, 它等于磁场的对时间变化率, 它不需要为零. 但是右侧根据数学规律它必然为零. 这就造成了矛盾.

解决这个问题的核心思想, 其实与麦克斯韦发现位移电流的思想完全一致. 我们添加一个项以使得矛盾消除, 以相同的思路推理, 过程留给读者, 可得这个项为:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

这一点本身又并不难理解. 我们知道完整的电磁理论有四个要素, 在最低阶的近似下之前的式子反映了电荷直接产生电场与电流直接产生磁场的要素. 那么我们添加的项实际上反映了变化的电流产生电场的要素: 因为磁矢势由电流产生, 那么它的导数自然反映了变化的电流, 而它构成了电场的第二项.

而变化的电荷产生磁场, 它不会在新的场与势的关系式中体现, 这是因为这样的改变直接同时改变了 \mathbf{B} 和 \mathbf{A} 的值. 前者通过位移电流, 后者之后介绍. 从而使得 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 依然成立. 从而我们总结出任意情况下描述电磁场的标势和矢势需要符合的关系:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

但是, 接下来我们会引入一个惊人的不确定性: 其中的端倪在静电静磁学中其实已经出现苗头: 电势, 具有一个整体常数的不确定性, 这是因为电势的零点选取其实本质上是任意的, 以下变换后产生的标量场依然可以作为电势:

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + C$$

只有进一步规定无穷远处的电势为零才能回到之前点电荷积分的电势公式:

$$\varphi(\infty) = 0$$

而静磁场的情况则更具有戏剧性: 我们之前通过电流元直接积分产生的磁矢势其实符合以下性质:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

当然以上两个结果都还要求势不随时间改变,比如:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

如果仅仅希望能通过磁矢势的旋度计算磁场 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$,即使进一步要求 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, \mathbf{A} 的取法其实也不唯一. 可以证明,如果找到所谓的三维调和函数,即在全空间满足以下规律的标量场:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

常数就属于调和函数,除此之外我们还能举出很多的例子:

$$\phi = x, x^2 - y^2, xy, x^2 + y^2 - 2z^2, e^x \sin y, \dots$$

那么任意找一个调和函数梯度形成的矢量场:

$$\mathbf{F} = \nabla \phi$$

那么不难看出这个场就会符合:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

从而以下对磁矢势的变换就可以在不改变对磁矢势的要求下,造成同一个磁场:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \& \quad \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

我们从其中归纳出两个概念. 一是我们要求电势和矢势根据具体问题不同选取不同的条件,上面过程中出现的各种要求就有:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\varphi(\infty) = 0$$

这些称作**规范条件**(gauge condition). 或者简单称作**规范**.

但是,即使存在规范条件,例如静磁场下要求 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$,或者进一步放宽干脆没有任何规范条件的限制,我们发现电势和矢势其实不是位移确定的,同样的一个电磁场,在下式成立的条件下:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

势 φ , \mathbf{A} 存在不同的取法,普遍来说,存在以下**规范变换**(gauge transformation):

$$\varphi' = \varphi + \phi, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{F}$$

它能使得在特定规范下虽然描述场的势改变,但是它不反映场的真实改变. 即同一个场对应多种相差规范变换的势的取法. 这种现象称作**非物理自由度**(nonphysical dof.). 它深刻反映了标势矢势不能直接反映可测量的物理量的实质,正似我们在经典力学中一贯强调的势能的道理: 其本身绝对大小没有可测量的意义,可以测量的是其在过程中的变化,它才有实际物理意义. 但是,对于标势矢势的哪一部分具有实际的物理意义还有待之后进行考察. 选取更多的规范可以消除势的不确定性,这种操作称作**规范固定**(gauge fixing).

这就不难理解在普遍的电磁场方程中,同样也存在着标势和矢势的不确定性. 更有甚者,正如电场强度和磁场强度是描述同一个电磁场的两个侧面,那么标势和矢势也是描述同一个电磁场的两个侧面,两者的不确定性甚至是互相联系的. 如果没有任何实现假定的规范条件,我们发现选取任意的随时间变换的标量场做变换:

$$\forall \phi = \phi(\mathbf{r}, t)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \phi$$

可以发现它不改变通过之前式子计算的电场和磁场的强度. 从而这是一个非常普遍的规范变换.

而对于普遍的电磁理论, 它也是囊括静电学和静磁学的普遍情况的. 可以想见, 在不同的规范条件下就会产生不同的势. 例如对于静电学, 之前我们通过标势来描述电场, 这一点就不是必然的. 如果选取所谓的外尔规范 (Weyl gauge):

$$\varphi = 0$$

那么电场就必须全权由矢势 \mathbf{A} 来描述, 但这一点也毫无难度, 只需要取:

$$\mathbf{A} = - \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \mathbf{e}_r}{r^3} dV \cdot t$$

这就足以使得:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \mathbf{e}_r}{r^3} dV, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

事实上, 外尔规范是在研究磁现象占主导地位时常采用的规范, 此时电磁场整体都单由矢势 \mathbf{A} 来描述, 电场可以形象地视作由矢势变化产生的“感生电场”. 而在电现象占主导地位时, 更常采用库仑规范 (Coulomb gauge):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

可以证明这样做带来的好处是标势的计算变得很简单: 只需要把电磁场和势之间的关系代入麦克斯韦方程, 我们得到两个恒等式和以下两个联系势和电荷电流的复杂关系式:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

代入规范条件, 首当其冲地我们发现: 第一个式子变成了:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

这和静电学中的公式一致. 从而电势可以完全按照静电学的方式来计算, 它产生一个静电场. 而矢势则用来计算电荷分布变化带来的附加磁场和更高阶的感生电场.

但是, 除了静电或静磁现象占主导地位的两种情况, 我们之后研究的最多的是第三种情况: 那便是辐射占主导地位的情形. 此时无论是电荷密度或是电流密度, 要么其量级远远达不到辐射场对应的大小, 要么就是在一个周期内平均值为零从而净效应很弱. 在这一类情况下, 使用的最多的是所谓的洛伦茨规范³ (Lorenz gauge). 写作:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

这个神奇的条件使得之前描述势和电荷之间的关系变得非常简单, 背后原因在于可以证明这个条件也是唯一的在相对论变换下不同参考系内形式一致的规范条件. 在这个规范下:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

这实际上构成了带非齐次项的波动方程. 一般称作达朗贝尔方程 (d'Alembert equations).

由于其最为简洁而普遍的形式. 我们之后的讨论都将以洛伦茨规范为默认规范, 并在以上达朗贝尔方程和关于荷与场强的麦克斯韦方程, 以及用势计算场强的关系式基础上展开讨论.

³这里的洛伦茨 (L. V. Lorenz) 不同于洛伦兹 (H. A. Lorentz), 前者为丹麦物理学家, 后者为荷兰物理学家

6.1.3 电荷在电磁场中的运动

在静磁学中我们简要介绍了磁矢势对于电荷与磁场相互作用的物理意义. 电势为引入场的试探电荷带来相互作用的电势能. 而磁矢势的改变似乎会改变试探电荷的某类动量. 通过之前的讨论, 我们发现电势和矢势其实内部具有非物理的自由度, 从而并不总是为试探电荷带来可以直接观测的物理量, 之前的电势带来电势能的情况, 其实仅仅是特殊情况下成立的结论, 并不具有普适性.

但是电势对应电势能的推导思路是依然可以借鉴的: 我们考虑了洛伦兹力的功, 并把电磁场用势来表示, 依然这么做给出:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} \\ &= q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \\ &= q\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

我们考虑两个关系, 其一为:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi$$

其背后的道理我们在力学中阐释过: 第一项为电荷运动过程中达到的点具有的电势的全导数, 它由不考虑电荷位移时电势随时间的局域导数和不考虑电势本身随时间改变而仅考虑随电荷位移导致的电势改变的随体导数项合成.

第二个关系为:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}$$

背后的道理为: 当我们考虑 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ 整体作为时空 \mathbf{r}, t 的函数时, \mathbf{v} 被我们视作了外来的参变量而不是时空的函数, 从而能够从偏导数符号中提出.

通过这两点, 我们得到了:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -q \frac{d}{dt} \varphi + q \frac{\partial}{\partial t} (\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

而左侧应当是电荷动能 T 的变化率. 那么这就给出了:

$$\frac{d}{dt}(T + q\varphi) = \frac{\partial}{\partial t} q(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

事实上, 单纯从洛伦兹力公式出发:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

考虑到等号左侧为粒子动量 \mathbf{p} 的变化率, 我们也可以通过推导 (静磁场那一章我们推导过没有电场的对应结果) 给出以下式子:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} + q\mathbf{A}) = -\nabla q(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

这两个结论引出了三组物理概念:

一是隶属于能量的概念: T 为动能, $q\varphi$ 现在可称作电磁势能. 而其和 $H = T + q\varphi$ 应当称作广义能量.

二是隶属于动量的概念: \mathbf{p} 为动量, $q\mathbf{A}$ 就是我们新发现的一个物理效应, 事实上磁矢势的物理意义可以理解为与位置有关的存储于场中的粒子的动量, 称作电磁势动量. 而机械动量 \mathbf{p} 与势动量 $q\mathbf{A}$ 的和 $\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$, 称作广义动量.

事实上大家已经发现, 这种称呼其实就是来源于分析力学中的相应理论架构, 事实上电磁场中的电荷运动这一个实例我们之前分析力学正是以它举过例子, 读者可以对照着理解. 故其实我们还可以把 $H = T + q\varphi$ 称作**哈密顿量**(hamiltonian), 而 $\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$ 称作**正则动量**(cannonical momentum).

最后还有一个概念, 它出现于之前两个等式的右侧, 它也是一种势能函数, 但是并不对应真实能量, 而是出现在电荷运动的拉格朗日量中作为势能函数. 这个项称作**广义势**:

$$V = q(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

其表达式中反常地出现了粒子的速度, 是一种速度势.

以往出现的守恒律与对称性现在就在这两个表达式中体现的淋漓尽致:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\nabla V$$

举例来说: 静电场中带电粒子的运动, 粒子总能量守恒; 静磁场中带电粒子的运动, 粒子干脆动能都不改变. 这都是源于广义势不随时间改变 (时间平移对称性导致能量守恒). 而在静磁场问题中还经常出现某方向动量与某个关于位置的函数的和守恒的情况, 究其本质是因为合理选取规范后, 磁矢势 \mathbf{A} 和电势 φ 都与某个位置坐标无关 (空间平移对称性导致动量守恒).

6.2 平面电磁波

6.2.1 真空中的电磁波

自由空间中的麦克斯韦方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

也可以用势来描述, 此时达朗贝尔方程直接变成波动方程:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

注意背后要求洛伦茨规范成立:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

十分使得注意的是, 以上所有的方程, 作为齐次方程, 是具有非零解的. 最典型的解为平面波解:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\varphi = 0$$

$$\frac{E_0}{B_0} = c, \quad \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{k}$$

$$\mathbf{E}_0 = -i\omega \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{B}_0 = -i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0$$

$$\omega/k = c$$

6.2.2 介质中电磁波的传播

注意在介质中,不能再仿照真空中的电磁波传播公式而写出齐次的麦克斯韦方程.这是因为介质内部完全可以存在电荷和电流,从而计算电场磁场的散度旋度时必然需要考虑到他们.但是我们此前研究过的电介质和磁介质的理论告诉我们,通过引入电位移 \mathbf{D} 和磁场强度 \mathbf{H} ,可以有效地规避掉由介质产生的电荷和电流造成的电场散度和磁场旋度,即:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

对于第二式可能需要更多的说明:我们知道如果在静磁学磁介质问题中,如果把总电流密度 \mathbf{j} 分解为磁化电流密度 \mathbf{j}_M 和自由电流密度 \mathbf{j}_f ,那么磁场旋度公式写作:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 \mathbf{j}_M + \mu_0 \mathbf{j}_f$$

以往的做法是将磁化电流归因于磁化强度的不均匀性 $\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}$,并进一步定义 $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$,这样就给出:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f$$

但是现在作为自由介质 $\mathbf{j}_f = 0$.然而又由于是变化的电磁场,故磁场旋度需要增添电场变化带来的项.还有一点需要引起注意:极化强度 \mathbf{P} 的变化也会带来一个极化电流密度 \mathbf{j}_P ,它应当为:

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

对比极化电荷密度 $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 与极化电荷的连续性方程就不难理解这个式子.另外引人注目的一点是,这个电流与极化强度的关系完全类似与位移电流与电场强度的关系.如果做求和就会变成电位移的导数,这正是麦克斯韦当初把电场强度的导数称作“位移电流”的原因.

现在修改之后的磁场旋度写作:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}_M + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

最后两项十分恰好地凑出了电位移 \mathbf{D} .从而整理就得到了介质中修正的齐次磁场旋度公式.

在普遍的介质中的麦克斯韦方程就写作:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

在这里介质兼具电与磁的特性,这表现在以下两个用于描述介质的结构方程上:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

其中 ε, μ 称作介质的电容率和磁导率.它们,超出我们以往的认知的是,往往是复数⁴.这一方面来自于微观极化和磁化机理上的弛豫,我们之后物理光学还将进一步研究这个问题,还有一方面来自于一个非常直接的原因:我们综合了不导电的电介质和磁介质,却忽视了介质本身完全可能导电的情况.对于导电性能较

⁴非各向同性介质中甚至抽象为复张量

差的情形,比如漏电的介质,考虑传导电流 \mathbf{j}_c 实际上就是自由电流,那么磁场旋度的方程还需要被进一步修改为:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

如果是考虑单一频率的电磁波,那么对时间求导的操作必然转变为乘 $i\omega$. 如果介质电导率为 σ ,那么可以把等号右侧进行以下变形:

$$\mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + i\omega \varepsilon \mathbf{E} = i\omega \left(\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} = i\omega \mathbf{D}' = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t}$$

这样就通过定义复电容率(complex permittivity):

$$\varepsilon' = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega}$$

实现了把传导电流也吸收进了电位移中,造成了形式上的统一. 代价是电容率和相关的所有物理量都需要理解为复数.

这样的做法对于漏电绝缘介质是完全适用的. 但是对于导电性能非常好的导体介质中电磁波的传播,最好是单独建立新的处理方法. 有兴趣的读者可以阅读其他相关书籍. 我们指出,我们统一用复数描述不同情况下介质中电磁波传播的做法,从之后的结果上来看是符合事实的.

把介质的两个结构方程代入介质的齐次麦克斯韦方程,就得到了均匀介质中一般形式的麦克斯韦方程,习惯上总是以 \mathbf{E} , \mathbf{H} 作为变量:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

这两个方程具有高度的对称性,其解也与真空中的解相似,只有两点发生了改变,一是传播速度变为:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

这一点建立在 ε , μ 都是实数的基础上. 如果出现复数的情形,那么上式一般写作:

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu}\omega$$

即此时将出现复波矢的情况. 意味着电磁波在介质中的传播伴随着耗散与衰减.

第二点就是电场磁场振幅强度的比例. 真空中这个比为 c , 现在由以下等式描述:

$$\varepsilon E_0^2 = \mu H_0^2$$

对于所谓良导体(good conductor)的情况,电导率 σ 特别大,以至于使得复电容率 ε' 中反倒是与电导率成正比的虚部远大于反应介电的实部. 那么电磁波在良导体中的传播就存在严重的衰减. 此时有两个结论:

第一是对电磁场比值的公式,取 $\varepsilon' \rightarrow \infty$, 就能发现:

$$E_0 \rightarrow 0$$

即良导体中类似于静电平衡情况下的导体,内部电场是非常微弱的. 磁场相对电场虽然很大,但是也需要迅速沿传播方向衰减.

第二是 k 的公式有以下渐进关系:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \sim k \propto \sqrt{\frac{1}{\omega}} \cdot \omega = \sqrt{\omega}$$

即随着频率升高,传播与衰减的特征距离 λ 将越来越小. 这意味着高频交流电路中电流仅仅集中于导线表面薄薄的一层,会减小导线的有效截面积而增大线路损耗. 这个现象称作趋肤效应(skin effect).

6.3 电磁场能量与动量

真空中电磁场的能量密度为:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

能流密度,即著名的坡印亭矢量(Poynting vector)为:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

而动量密度与能流密度紧密联系:

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$$

6.4 电磁波辐射

6.4.1 电磁辐射概论

麦克斯韦方程实际上描述了两类现象:

一类我们已经通过之前所有章节逐一学习.表面上看包括静止的电荷产生电场,稳恒的电流产生磁场,变化的电荷分布与电流分布产生感应的磁场和电场四类.但是其实无非都是第一类由库仑定律描述的基本规律在相对论变换下的衍生物.在这一大类现象中,场始终都是电荷的附庸,基本的逻辑是先有荷,再有场.空间分布上,场源电荷对远方的场的支配量级服从平方反比律.

通过本章的推理我们逐渐看到第二类截然不同的图像存在的可能性.它诞生于同一个麦克斯韦方程,但是故事不再由电荷主演,主角阵容中新增了一颗闪亮的明星:辐射场(radiation field).平面波实际上就是形形色色辐射场中最单纯的一种.显然,它可以独立于电荷而存在.但是依然,电荷也愿意主动参与进麦克斯韦方程搭建的舞台中,与辐射场这样的强势主角又将擦出怎样的火花?简单来说,我们将得到以下两个新的现象:

电荷发出辐射,电荷吸收辐射.

拼借电荷吸收辐射的可能性,第二类电磁现象也与第一类现象区分开来.更何况电荷激发辐射场的空间分布也区别于第一类现象,在辐射情形下,远方的场是一次反比的.这一点之后就能发现.

最后我们针对电荷发出辐射与吸收辐射的条件进行推理:静止的点电荷产生静电场,匀速运动的点电荷产生一个静电场的相对论变换,这是毫无疑问的事实.在这些场合下没有辐射场的产生.

所以,显然电荷做加速运动是电荷激发辐射场的必要条件.

实际上,电荷做加速运动其实即使就是电荷激发辐射场的充要条件,我们之后就能给出电荷辐射场与辐射功率与其加速度的直接联系.

那么如何看待电荷吸收辐射的过程?

事实上这个过程可以看做电荷发射辐射的时间反演.麦克斯韦方程具有明确的时间反演对称性,只需要命 $t \rightarrow -t$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$, $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$.其他量不改变就可以看出这一点.辐射作为麦克斯韦方程的解,其时间反演解自然也是合理的.但需要注意先后发生的两件事总是存在因果的区别,故时间反演后,因果关系需要重新解释,两个物理现象需要理解为不具有相通性⁵的独立现象.我们可以举一个电荷吸收辐射的例子:考虑电子的经典模型:将一个平面电磁波照射到真空中的自由电子上,那么电子就会在周期性的电场力(速度不大时磁场力可忽略)作用下做简谐振动,那么根据下一小节的内容我们将知道,电子会以一定功率向四面八方产生辐射场.那么根据能量守恒,电子必然是从原来入射的平面波中吸收了能量,即平面波在一个周期内对电子做净的正功.这种先吸收再辐射的行为就称作散射(scattering),而以上经典的处理方法构成托马斯散射模型(Thomas scattering model).而散射的总功率,对应了原来平面波面积为 σ 范围内通过的功率.这个面

⁵例如,不能通过洛伦兹变换来颠倒因果.

积称作**散射截面**(scattering cross section). 经典理论计算结果为:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

其中 r_e 就是由洛伦兹提出的**经典电子半径**(classical electron radius):

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$$

6.4.2 偶极辐射

通过点电荷产生的电势公式, 我们知道, 数学上以德尔塔函数作为泊松方程的非齐次项的解为一次反比势:

$$\nabla^2 \varphi = -\delta(\mathbf{r}) \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi r}$$

数学上容易猜想并证明, 如果将方程替换为达朗贝尔方程, 而如果将非齐次项以 ω 的角频率产生振荡, 那么这个新的方程的解应当变为球面波:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \Rightarrow \varphi = \frac{e^{i(\omega t \pm kr)}}{4\pi r}, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

对于两个可能的解, + 数学上表示内行球面波, - 数学上表示外行球面波. 两个解在时间反演下对称. 目前我们在因果性上是考虑电荷体系的自发辐射, 故考虑负号的外行波解.

现在考虑一个这样的体系: 两个无限小的导体球用长为 l 的导线连接, 第一个球位于 $x = \frac{l}{2}$ 处, 第二个导体球位于 $x = -\frac{l}{2}$ 处. 由于两个球发生了 LC 振荡, 第一个球上电荷量为 $q_+ = q \cos \omega t$, 第二个球上电荷量为 $q_- = -q \cos \omega t$. 那么导线上的电流为 $I = -\omega q \sin \omega t$. 如果换成复数记法, 把实际值看做复数的实部, 则:

$$q_+ = q e^{i\omega t}, \quad q_- = -q e^{i\omega t}, \quad I = i\omega q e^{i\omega t}$$

定义从第二个球指向第一个球的矢量为 \mathbf{l} . 那么此时标势和矢势符合的达朗贝尔方程就写作:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2}\right) e^{i\omega t} + \frac{q}{\epsilon_0} \delta\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2}\right) e^{i\omega t}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -i\mu_0 \omega q \mathbf{l} \delta(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$$

那么标势和矢势的解就根据之前的数学结论得到:

$$\varphi = e^{i\omega t} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{l}}{2}|}}{|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{l}}{2}|} - e^{i\omega t} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}+\frac{\mathbf{l}}{2}|}}{|\mathbf{r}+\frac{\mathbf{l}}{2}|}$$

$$\mathbf{A} = e^{i\omega t} \cdot \frac{i\mu_0 \omega q \mathbf{l}}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}$$

这样的解称作**推迟势**(retarded potential) 解. 而对于电势可以进一步在足够远 $r \gg l$ 处进行小量近似, 我们不再考虑两项分母的区别, 这只会带来类似于电偶极子远方的电势那样的平方反比的高阶小量. 而主要关注分子的差:

$$\begin{aligned} e^{-ik|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{l}}{2}|} - e^{-ik|\mathbf{r}+\frac{\mathbf{l}}{2}|} &\approx \frac{d e^{-ikr}}{dr} \cdot \left(\left| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2} \right| - \left| \mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2} \right| \right) \\ &\approx ikl \cos \theta e^{-ikr} \end{aligned}$$

其中 θ 为 \mathbf{r} 方向与 \mathbf{l} 的夹角. 则在以 \mathbf{l} 方向为极轴的球坐标下, 写出近似后的标势与矢势:

$$\varphi = e^{i(\omega t - kr)} \cdot \frac{ikql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$A_r = e^{i(\omega t - kr)} \cdot \frac{i\mu_0 \omega ql \cos \theta}{4\pi r}, \quad A_\theta = -e^{i(\omega t - kr)} \cdot \frac{i\mu_0 \omega ql \sin \theta}{4\pi r}$$

最后再由势与场之间的关系:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

忽略超过一阶反比于半径的项, 就最终得到了电磁场的表达式:

$$\mathbf{E} = E_\theta \mathbf{e}_\theta, \quad E_\theta = -\frac{\omega^2 q l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} e^{i(\omega t - kr)}$$

$$\mathbf{B} = B_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad B_\varphi = -\frac{\omega^2 q l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} e^{i(\omega t - kr)} = \frac{E_\theta}{c}$$

从而取实部, 计算瞬时能流密度为:

$$S = \frac{\omega^4 q^2 l^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \cos^2(\omega t - kr)$$

在一个周期内的平均辐射能流为:

$$\bar{S} = \frac{\omega^4 q^2 l^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2}$$

最后计算全立体角内的总辐射功率:

$$P = \int_0^\pi \bar{S} \cdot 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\omega^4 q^2 l^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

考虑到辐射等价于由两个电荷量恒定, 但在 $\pm l/2$ 范围内做简谐振动, 加速度振幅为 $a = \omega^2 l/2$ 的电荷共同贡献. 那么每一个电荷加速度幅值 a 对应的辐射幅值为:

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

这就是著名的拉莫尔公式(Larmor formula).