

# 高二物理竞赛 • 全部

学而思



# 目录

<b>第一章 序</b>	<b>11</b>
1.1 说在一切前面 . . . . .	11
<b>第二章 运动学</b>	<b>13</b>
2.1 时空与物质 . . . . .	13
2.1.1 时空观, 坐标系 . . . . .	13
2.1.2 物质 . . . . .	15
2.1.3 参考系, 物理规律与其不变性 . . . . .	17
2.2 运动的描述 . . . . .	18
2.2.1 质点的运动 . . . . .	18
2.2.2 刚体的运动 . . . . .	26
2.3 参考系变换 . . . . .	28
2.3.1 点变换 . . . . .	28
2.3.2 刚体变换 . . . . .	30
2.4 运动的牵连 . . . . .	30
2.4.1 接触系 . . . . .	30
2.4.2 纯滚系 . . . . .	31
2.4.3 约束系 . . . . .	31
<b>第三章 动力学</b>	<b>33</b>
3.1 牛顿定律 . . . . .	33
3.1.1 概述 . . . . .	33
3.1.2 牛顿第一定律 . . . . .	34
3.1.3 牛顿第二定律 . . . . .	34
3.1.4 牛顿第三定律 . . . . .	35
3.1.5 质点系与它的牛顿定律 . . . . .	36
3.1.6 非惯性系的处理 . . . . .	38
3.2 动量定律 . . . . .	38
3.2.1 质点的动量 . . . . .	38
3.2.2 质点系的动量 . . . . .	39
3.3 角动量定律 . . . . .	40
3.3.1 质点的角动量 . . . . .	40
3.3.2 质点系的角动量 . . . . .	41
3.4 能量定律 . . . . .	42
3.4.1 质点的动能 . . . . .	42
3.4.2 质点系的动能 . . . . .	42

3.4.3 其它能量形式 . . . . .	43
3.5 位力定律 * . . . . .	46
3.5.1 质点的位力 . . . . .	46
3.5.2 质点系的位力 . . . . .	47
3.6 碰撞问题 . . . . .	48
3.6.1 二质点正碰 . . . . .	48
3.6.2 自由刚体的碰撞 . . . . .	51
3.6.3 多体碰撞 . . . . .	51
<b>第四章 静力学</b>	<b>53</b>
4.1 约束 . . . . .	53
4.1.1 约束分类 . . . . .	53
4.1.2 广义坐标与自由度 . . . . .	56
4.1.3 约束力与广义力 . . . . .	58
4.2 力系化简 . . . . .	61
4.2.1 静力学公理体系 . . . . .	61
4.2.2 力系向一点简化 . . . . .	65
4.3 平衡问题: 矢量力学 . . . . .	67
4.3.1 平衡问题的要素 . . . . .	67
4.3.2 平衡条件与判据 . . . . .	67
4.3.3 亚静定, 静定与超静定 . . . . .	69
4.4 平衡问题: 虚功原理 . . . . .	70
4.4.1 理想约束 . . . . .	70
4.4.2 亚静定问题的虚功原理 . . . . .	71
4.4.3 静定问题的求解 . . . . .	71
4.5 分析力学初步 * . . . . .	72
4.5.1 用广义坐标表示能量 . . . . .	73
4.5.2 拉格朗日方程 . . . . .	75
4.5.3 再论冲击问题 . . . . .	77
4.6 平衡态稳定性 . . . . .	78
4.6.1 一自由度体系 . . . . .	78
4.6.2 多自由度体系 . . . . .	78
<b>第五章 简谐振动</b>	<b>79</b>
5.1 方程与谐振 . . . . .	79
5.1.1 简谐振动的定义 . . . . .	79
5.1.2 简谐振动的性质 . . . . .	79
5.1.3 简谐振动的判定 . . . . .	80
5.1.4 小振动 . . . . .	81
5.2 阻尼振动与受迫振动 . . . . .	82
5.2.1 阻尼振动 . . . . .	82
5.2.2 受迫振动 . . . . .	84
5.3 多自由度小振动 * . . . . .	88
5.3.1 基于线性代数与分析力学的简正坐标求解 . . . . .	90
5.3.2 基于对称性的简正模判定与简正频率求解 . . . . .	94

5.4 非线性摄动 *	100
5.5 格波	100
<b>第六章 万有引力</b>	<b>105</b>
6.1 有心力下质点运动	105
6.1.1 运动的一般特征	105
6.1.2 有心力问题的求解	106
6.2 万有引力下天体运动	109
6.3 二体与潮汐	110
<b>第七章 刚体</b>	<b>111</b>
7.1 刚体的物理描述	111
7.2 平面平行运动	113
7.3 空间刚体运动 *	114
<b>第八章 弹性体</b>	<b>117</b>
8.1 弹性体的物理描述	117
8.2 弹性棒, 弹性绳, 弹性膜与弹性体	121
8.2.1 弹性棒	121
8.2.2 弹性绳	122
8.2.3 弹性膜	123
8.2.4 弹性体 *	124
8.3 弹性波	125
8.3.1 分离变量法	125
8.3.2 变量代换法	126
8.3.3 多维情况	126
8.3.4 再论格波	128
<b>第九章 流体</b>	<b>129</b>
9.1 流体的物理描述	129
9.2 定常流动动力学	132
9.3 黏滞流体动力学	133
9.4 流体中的波	134
9.5 波的色散	134
<b>第九章 相对论</b>	<b>131</b>
9.1 相对论运动学	131
9.2 相对论动力学	132
9.3 相对论连续物质	134
9.4 相对论电磁场	135
<b>第十章 热力学第一定律</b>	<b>137</b>
10.1 热力学第零定律	137
10.2 热力学第一定律	138
10.2.1 准静态与非准静态过程	138
10.2.2 内能	139
10.2.3 功	140

10.2.4 热量 . . . . .	140
10.2.5 耗散 . . . . .	141
10.3 理想气体 . . . . .	142
10.3.1 理想气体的定义 . . . . .	142
10.3.2 理想气体物态方程 . . . . .	143
10.3.3 混合理想气体 . . . . .	145
10.3.4 理想气体的过程 . . . . .	146
10.4 开放系统的理想气体 . . . . .	150
10.4.1 静态平衡问题——重力场中的大气 . . . . .	150
10.4.2 能量守恒——伯努利方程 . . . . .	151
10.4.3 动量守恒——欧拉方程 . . . . .	152
<b>第十一章 热力学第二定律</b>	<b>155</b>
11.1 循环过程 . . . . .	155
11.1.1 热机与热泵 . . . . .	155
11.1.2 热机循环 . . . . .	158
11.2 理想气体的熵 . . . . .	160
11.3 热力学第二定律 . . . . .	162
11.4 熵的计算 . . . . .	165
11.4.1 理想气体的熵 . . . . .	165
11.4.2 固定热容固体熵 . . . . .	166
11.4.3 大热容恒温热库 . . . . .	166
11.4.4 传热熵 . . . . .	166
11.4.5 混合熵 . . . . .	166
11.5 热力学函数与其特性 . . . . .	168
11.5.1 四个热力学函数与四个状态参量 . . . . .	168
11.5.2 若干定理的证明 . . . . .	169
11.5.3 自由能的含义 . . . . .	174
11.5.4 化学势 . . . . .	175
11.6 近平衡态热力学 *	176
11.6.1 线性输运现象 . . . . .	176
11.6.2 传热的熵产生 . . . . .	179
11.6.3 普遍理论与昂萨格倒易关系 . . . . .	179
11.6.4 推证热电耦合的普遍规律 . . . . .	180
<b>第十二章 液体与固体的性质</b>	<b>183</b>
12.1 固体晶格论 . . . . .	183
12.2 固体电子论 *	186
12.3 液体的彻体性质 . . . . .	187
12.3.1 液体性质综述与其微观成因 . . . . .	187
12.3.2 热容 . . . . .	187
12.4 液体的表面性质 . . . . .	188
12.5 极端条件下的其他物态 . . . . .	188

第十三章 相与相变摘要	191
13.1 相平衡	191
13.2 气液相变	191
13.3 连续相变	192
13.4 拓扑相变	192
第十四章 统计物理基础摘要	193
14.1 数学基础	193
14.1.1 概率与独立性	193
14.1.2 随机变量及其数字特征	194
14.1.3 信息熵	195
14.2 统计假设	199
14.3 麦克斯韦分布律	200
14.4 能均分定理	200
14.5 功, 热, 熵	200
14.6 量子与相对论	200
第十五章 光波与光线	201
15.1 界面上的反射与折射	201
15.1.1 光波与光线	201
15.1.2 菲涅尔公式	203
15.2 光线方程	207
15.2.1 光线方程与折射定律	207
15.2.2 光力类比	208
15.3 费马原理	209
第十六章 光学成像	211
16.1 傍轴光成像	211
16.1.1 物与像	211
16.1.2 球对称成像系统与符号法则	212
16.1.3 光具组成像	214
16.2 理想成像系统	215
16.2.1 作图法	216
16.2.2 基点基面性质	217
16.2.3 实例与望远系统	218
16.3 更多讨论 *	220
16.3.1 理想成像本质	220
16.4 非傍轴成像	222
第十七章 光学仪器知识摘要	223
17.1 光度学	223
17.1.1 色视觉	223
17.2 光阑与光瞳	224
17.3 眼睛	224
17.4 显微镜	224
17.5 望远镜	224

17.6 照相机 . . . . .	224
<b>第十八章 静电学</b>	<b>225</b>
18.1 电荷与电场 . . . . .	225
18.1.1 电磁相互作用与电荷 . . . . .	225
18.1.2 库仑定律 . . . . .	226
18.1.3 电场 . . . . .	226
18.2 两个定律与电势 . . . . .	229
18.2.1 电场的高斯定律 . . . . .	230
18.2.2 电势与电场的环路定律 . . . . .	231
18.2.3 总结 . . . . .	232
18.3 静电能 . . . . .	233
18.3.1 静电势能 . . . . .	233
18.3.2 自能与相互作用能 . . . . .	234
18.3.3 电场能 . . . . .	236
18.4 电荷体系 . . . . .	237
18.4.1 电偶极子 . . . . .	237
18.4.2 电荷密度 . . . . .	240
18.4.3 极化强度 . . . . .	241
18.4.4 若干对称带电体系的电场 . . . . .	243
<b>第十九章 导体与介质</b>	<b>247</b>
19.1 导体与静电平衡 . . . . .	247
19.1.1 绝缘体与导体 . . . . .	247
19.1.2 导体的特点 . . . . .	248
19.1.3 常见简单体系 . . . . .	252
19.2 电像法 . . . . .	254
19.2.1 半无限大空间的电像法 . . . . .	254
19.2.2 球面外与球面内的电像法 . . . . .	255
19.3 电介质 . . . . .	257
19.3.1 微观角度理解极化 . . . . .	258
19.3.2 宏观角度理解极化 . . . . .	260
19.3.3 微观与宏观的联系 . . . . .	264
19.4 再议静电能 . . . . .	265
<b>第二十章 稳恒电流</b>	<b>269</b>
20.1 稳恒电流描述与形成 . . . . .	269
20.1.1 德鲁特模型 . . . . .	269
20.1.2 费米气观点 * . . . . .	270
20.1.3 能带论 * . . . . .	272
20.1.4 惯性, 阻尼与回复力 . . . . .	274
20.1.5 稳恒电流与形成条件 . . . . .	275
20.2 电路与电路方程 . . . . .	277
20.3 电路分析基础 . . . . .	280
20.3.1 电路的整体结构与拓扑学结论 . . . . .	280

20.3.2 电路问题的求解套路 . . . . .	283
20.4 电路分析方法 . . . . .	284
20.5 半导体 . . . . .	285
<b>第二十一章 静磁场</b>	<b>287</b>
21.1 电流与磁场 . . . . .	287
21.1.1 磁场地位与电流分布 . . . . .	287
21.1.2 毕奥-萨伐尔定律 . . . . .	288
21.2 两个定律与矢势 . . . . .	288
21.2.1 磁场环路定律 . . . . .	288
21.2.2 矢势与磁场高斯定律 . . . . .	289
21.3 电流体系 . . . . .	289
21.3.1 磁偶极子 . . . . .	289
21.3.2 磁化强度 . . . . .	290
21.3.3 若干对称体系的磁场 . . . . .	290
21.4 磁介质与磁能 . . . . .	291
21.4.1 微观角度理解磁化 . . . . .	291
21.4.2 宏观角度理解磁化 . . . . .	292
21.4.3 磁场能量 . . . . .	292
<b>第二十二章 电磁感应</b>	<b>293</b>
22.1 动生电动势 . . . . .	293
22.2 感生电动势 . . . . .	293
22.3 自感与互感 . . . . .	294
<b>第二十三章 麦克斯韦方程组</b>	<b>295</b>
23.1 麦克斯韦方程组 . . . . .	295
23.1.1 位移电流假说 . . . . .	295
23.1.2 麦克斯韦方程组 . . . . .	297
23.1.3 电荷在电磁场中的运动 . . . . .	301
23.2 平面电磁波 . . . . .	302
23.2.1 真空中的电磁波 . . . . .	302
23.2.2 介质中电磁波的传播 . . . . .	303
23.3 电磁场能量与动量 . . . . .	305
23.4 电磁波辐射 . . . . .	305
23.4.1 电磁辐射概论 . . . . .	305
23.4.2 偶极辐射 . . . . .	306
23.4.3 辐射的相对论变换 . . . . .	307
23.5 电磁学单位制 . . . . .	307
23.5.1 高斯单位制 . . . . .	307
23.5.2 洛伦兹-亥维赛单位制 . . . . .	307
23.5.3 自然单位制 . . . . .	307

第二十四章 交流电路	309
24.1 相量表示	309
24.1.1 拟稳条件与交流元件	309
24.1.2 电阻, 电容, 电感特性	309
24.2 常见电路	311
24.2.1 谐振电路	311
24.2.2 滤波电路	311
24.2.3 电报线方程, 再论拟稳条件	311
24.3 变压器	311
24.3.1 磁路定律	311
24.3.2 理想变压器条件	311
24.4 电能传输	311
24.4.1 发电机与电动机: 三相绕组	311
24.4.2 变电站与电线损耗	311
24.4.3 市电规范	311
24.4.4 电源适配器	311
第二十五章 光的干涉	313
25.1 标量波理论	313
25.2 分波面干涉	317
25.3 分振幅干涉	318
25.4 偏振干涉	319
25.5 相干性	321
第二十六章 光的衍射	323
26.1 光栅与波带片	323
26.2 衍射积分公式	324
26.3 波前分析法	324
第二十七章 物理光学	325
27.1 经典色散理论	325
27.1.1 复波矢与复折射率	325
27.1.2 经典电子论的解释	328
27.1.3 * 辐射阻尼与散射截面	331
第二十八章 量子论	335
28.1 黑体辐射	335
28.2 光粒子性	336
28.3 玻尔原子	337
28.4 物质波与波函数	337
第二十九章 物理学尺度	339
29.1 宇观	339
29.2 宏观	339
29.3 介观	339
29.4 微观原子	339

---

29.5 微观亚原子 . . . . .	339
----------------------	-----



## 第二章 运动学

### 2.1 时空与物质

物理学,从刚开始成为实验性的科学的伽利略时期开始,到近半个世纪年来理论物理学家对额外维度的探讨,都给予了时空(spacetime)最核心的地位.牛顿的理论,分析力学,经典场论,相对论这些理论最基本的图像都是时空与物质(matter)的分立性.时空是装备了一个能体现出物理物理意义的度量(metric)的3+1维对象<sup>1</sup>.而物质是在每个时空点处的某种结构.下面会分别介绍不同物质体系的描述方法.在这之前我们来看看不同的时空观:

#### 2.1.1 时空观,坐标系

牛顿力学理论体系基于伽利略时空观(Galilean spacetime picture),也就是绝对时空观(absolute spacetime picture).在这里空间是三维的平直空间.设想一个人站在该空间的某个空间点,他的胸前,头顶和右手平举的三个方向就是相互垂直的方向.如果以自己的臂长为标准长度,他能够定义空间中每两个点之间的空间间隔.事实上,这个人能够以一种正确的方式为每个空间点定义一个坐标,那么所有三维空间点的集合与任意两个点之间的距离为:

$$A(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) : l^2 = \overline{AB}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

因为空间不同于时间,我们为以上数字赋予特殊的物理含义,也就是加上量纲(dimension).如果两点坐标为(0,0,0)和(1,1,1),那么 $l = \sqrt{3}\text{m}$ ,而不是 $l = \sqrt{3}$ .其单位m一方面表示了这个物理量的属性,另一方面指定了某个实际物理体系确定下来的固有长度大小.现行的(2018年1月1日,下文同)国际单位制对1m的定义如下<sup>2</sup>:

1m是光在1/299792458 s内在真空中行进的距离.

这就是我们的三维平直空间(3-dimensional flat space).注意空间点具有物理实际意义,它可以脱离坐标系而单独存在.事实上坐标系的原点可以建立在空间中的任意点处,朝向也可以是任意方向,两个空间点之间的距离 $l$ 不会依赖于坐标系的选取,但两个点的坐标会因坐标系不同而改变.如果我们选取的坐标系总是下述使得两个相距很近的点之间的微元距离公式成立:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

那么建立的坐标系就是一个笛卡尔坐标系(Cartesian coordinate system),即空间直角坐标系(3D orthogonal coordinate system).但是以空间直角坐标系为基础,我们又经常建立球坐标(spherical coordinate)和柱坐标(cylindrical coordinate)系统.通常取 $x$ 轴为幅轴(azimuth axis),点在 $x-y$ 平面上的投影与原点的连线相对 $x$ 轴转过的角度为 $\varphi$ ,即幅角(azimuth angle).而 $z$ 轴为极轴(polar axis),而点与原点连线与极轴的夹角 $\theta$ 为极角(polar angle).天文观测用球坐标就很方便,它是以描述的空间点到原点之间的距离 $r$ ,也

<sup>1</sup>数学上有一套严格的说法,把这种连续,光滑的四维对象称为伪黎曼流形(pseudo-Riemannian manifold).

<sup>2</sup>一方面,它依赖于狭义相对论的正确性,目前极少理论物理工作者会质疑它.另一方面,应该要先定义下文的1s,再来定义1m.

称矢径(radius), 和两个描述角位置的极角幅角来构成三个坐标  $(r, \theta, \varphi)$  的. 而理论物理里也常用到的柱坐标是以  $(\rho, \varphi, z)$  为描述空间点的坐标,  $\rho$  是空间点到  $z$  轴的距离.

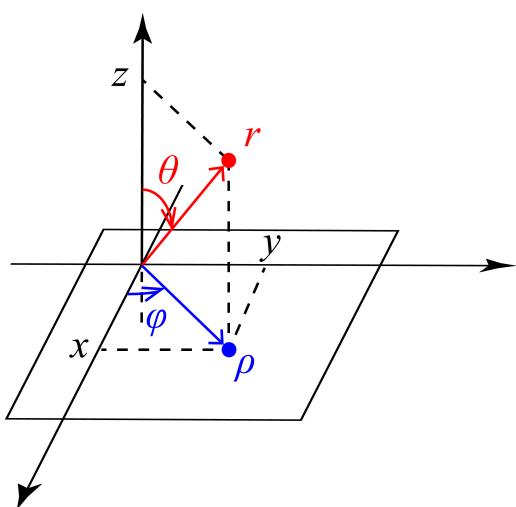


图 2.1: 三种坐标

需要注意, 我们对以上  $\theta, \varphi$  角度定义比较微妙,  $\theta$  一般限制其在  $[0, \pi]$  范围内, 在端点  $\theta = 0, \pi$  处  $\varphi$  的不同取值代表同一个空间点. 但  $\varphi$  的取值我们不加以任何限制, 也就是原则上  $\varphi \in \mathbb{R}$ . 而任意  $\varphi$  相差  $2n\pi$  的坐标实际上代表同一个空间点. 这么做是因为我们最好不要用静态的几何观点去看待角度这一概念. 而是用运动, 变换的观点去看待角度. 作为连续的运动的点的幅角变化也应是连续的, 为了使点绕  $z$  轴一圈后幅角不至于突然改变, 就必须默认每一点的幅角可以有多种取值, 在具体的运动中应该灵活选择其具体取值大小.

之后经常会说到各种对称性, 在本系列教材中我们采取如下说法: **球对称**(spherical symmetric) 仅仅代表某个函数  $f(r, \theta, \varphi)$  与  $\varphi$  无关. 而**柱对称**(cylindrical symmetric) 代表的是  $f(\rho, \varphi, z)$  与  $z$  无关. 与  $\varphi$  和  $\theta$  都无关的

$f(r, \theta, \varphi) = f(r, \forall\theta, \forall\varphi)$  被称为**各向同性**(isotropic). 最后**中心对称**(centrosymmetric) 是一个很弱的对称性, 它仅仅代表函数在**中心反演**(space inversion) 下的对称性:

$$f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$$

绝对时空观中的时间则是一种完全与空间独立的属性. 实际上, 每一个空间点处的人都能感受到时间的流逝. 十分抽象的把这些不同的时刻画在一根时间轴上, 便是一维的时间坐标:

$$A(t) \in \mathbb{R} ; t \in \mathbb{R}$$

而时空又是两个独立的概念. 任意一个坐标点处都有时间轴, 而任意一个时刻都有一个三维空间切片. 事实上, 我们的时空是一个 3+1 维的结构, 合理地选取坐标后, 实际上可以把时空结构写成四维坐标:

$$A(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

而对于任意两个时空点, 存在绝对的时间, 也就是可以找到两个事件的绝对时间差:

$$\tau = |t_2 - t_1|$$

但空间距离却具有相对性. 我们要求在同一时刻的同一空间切片上定义空间的度量:

$$t_1 = t_2 : l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

不同时刻的空间, 被线性地组织在一起, 保证每一刻都平直的空间既不会随时间膨胀收缩, 也不会旋转加速. 这种时空结构被叫做**牛顿-嘉当几何**(Newton-Cartan geometry)<sup>3</sup>.

时间是一个新的量纲, 其国际单位制对 1s 的定义为:

1s 是铯-133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射周期时长的 9192631770 倍.

牛顿-嘉当几何的显著特点是物理量的定义没有所谓的**协变性**(covariance). 固然, 在三维空间坐标框架的旋转下, 任何物理过程中的事件所发生的位置坐标发生旋转变换, 而几乎所有标量(比如质量, 能量)都不

<sup>3</sup>用更为严格的语言来说, 我们需要一个装备了一阶形式“钟” $c_\nu$  和二阶逆半正定对称张量类空间度规  $s^{\mu\nu}$  的四维微分流形  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{M} : s^{\mu\nu} c_\nu = 0$$

变,几乎所有矢量(比如动量,角动量)都按照类似坐标变换的法则发生变换.但是,对于更普遍的一列伽利略变换(Galilean transformation),也就是相对匀速运动的参考系之间的变换,时空坐标的形式却不能简单地推广到能量动量角动量上.

不同于绝对时空观中时间与空间成为相互独立的量纲的特点,狭义相对论改变了对基本物理量的看法.狭义相对论把时空看成为可以相互转化的不可分割的新的3+1维整体,同时性已然破缺.两个时空点之间无法定义绝对的时间间隔.在相对论时空观(relativistic spacetime picture)下,时间和空间可以用同一把尺子去丈量:这是由于光速的不变性:

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

而量出来的长度叫做时空间隔(spacetime interval):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

这赋予时空以截然不同的结构,最关键的一点是,时间的绝对性被取消了,不同事件发生时间先后的比较不总是可行,相对论的有限速度因果律在这里取代了经典观点的时序因果律.我们将在电磁学理论的最后介绍相对论理论.

### 2.1.2 物质

时空是物理过程发生的舞台.那么将物质引入后舞台上所演出的便是事件(event).事件这个物理概念由这样的数学工具来描述:它的第一个要素自然是时空坐标( $r, t$ ),是事件在时空上的外化.第二个要素是事件内禀的属性.它取决于所引入的物质种类,还取决于我们所关心问题的层次.一般用标量,矢量,乃至张量这样的数学工具来描述它.举例,电磁场物质在经典物理中用电场磁场来描述,但在量子力学(quantum mechanics, QM)中这不够了,需要用矢势和标势来描述才是完整的.在更深的量子场论(quantum field theory, QFT)中甚至这也是不够的.还需要量子化为光子才合适.又比如,电子这个很有意思的现象,最简单的模型是质点模型,内禀的属性是质量,动量与能量<sup>4</sup>.然而与电磁场的经典相互作用强度告诉我们还有一项内禀属性叫做电荷量.近代人们惊奇地发现原来电子还固有磁矩,与之相应的电子具有自旋.最后狄拉克等人发展出量子电动力学(quantum electrodynamics, QED),统一地用一个四分量的旋量波函数和它的方程中的若干参数来完整地描述所有发现的电子内禀属性.

经典物理学<sup>5</sup>(classical physics)中涉及到的物质主要有:

#### 1. 质点 (point mass, particle)

不得不承认质点是牛顿力学的根基,一切可观的结论的出发点.质点所对应的事件集合为时空中的一条世界线(world line).每一个时间仅仅有可能只有一个事件发生.实际上质点的运动用运动学方程(kinematic equation)来描述:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

而质量(mass)是质点必要的内禀属性.它将作为参数出现在下一节介绍的动力学方程中.它反应物质受到同样大小的相互作用运动状态改变的难易程度.国际单位制从1889年至2018年末对1kg的定义如下:

1kg是保存在法国巴黎布勒特伊宫的国际计量局实验室的约47立方厘米立式铂铱合金小圆柱的质量.当然,出于实用考虑,也是很多它的官方复制体的质量.

这个定义今已经有一百多年了,历史远长于其他六个国际基本单位.但目前这一古老的定义方式已经被废除,新的定义<sup>6</sup>为:

<sup>4</sup>不要认为动量能量不是内禀的而是由时空运动所决定的,读者可以思考在水中一个气泡的上升,它为体系带来的动量方向如何?

<sup>5</sup>本书的经典物理学指牛顿力学,分析力学,经典电磁学,经典统计力学与狭义相对论的范畴.

<sup>6</sup>一方面,它依赖于狭义相对论和量子力学的正确性,目前极少理论物理工作者会质疑它.另一方面,应该要先定义上文的1s和1m,再来定义1kg.

1kg 被这样定义: 取普朗克常数的固定数值在单位  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  下为  $6.62607015 \times 10^{-34}$ .

长度, 时间和质量为三大力学量纲, 量纲是物理量的属性, 物理量的表示方法为数值加单位, 每个量纲都有自己独特的一套单位, 不同单位间差一个纯数的倍率. 在物理量的加减时量纲必须相同而且结果保持量纲不变. 但不同量纲物理量可以进行乘除而生成新的量纲. 除了简单的加减乘除的以上规则以外, 其他特殊函数必须只能作用在无量纲的纯数上. 这叫做**量纲法则**(dimensional rules).

## 2. 质点系 (particle system)

质点系是对质点的一种自然扩展. 讨论质点的运动时质点受到的相互作用来自何方? 在牛顿力学的框架下必然来自施力物体. 故把受力物体和施力物体都作为简单的质点时, 两个质点就可以作为整个体系讨论, 把相互作用区分为内力与外力而推广之前的结论, 在这个过程中我们能体会到哪些结论是一脉相承的普遍规律而哪些需要重新审视与修改. 从原理上质点系不过是多个质点同时存在的情况而已. 而**经典统计力学**(classical statistic mechanics) 是这种观点的提炼与延伸, 它着眼于一个宏观大分子数的体系的长时间平均下的行为, 理论上常常结合概率论的做法, 对等概率的体系代表点构成的系统做平均. 从中提取统计力学下不平凡的物理量.

## 3. 连续介质 (continuous media)

一方面, 连续介质是从纯粹的理论过渡到实际问题的至关重要一步. 另一方面, 在处理连续介质的问题中形成了场论, 它作为一种与质点截然不同的物理图像形成了自己的一整套理论. 更重要的, 量子场论认为由于不确定原理, 质点与世界线的观点实际上是作为场的传播的一种近似. 也就是说, 场论相比质点的力学更具有兼容性和普适性. 对于简单的连续介质, 内禀的属性由每一个点处的质量密度  $\rho$  和速度  $v$  描述, 这实际上形成了一个标量场和矢量场:

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t) ; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

而动力学方程的列法又强烈依赖于介质内的相互作用. 于是这个大的问题又分出很有代表性的弹性力学和流体力学, 还有介于两者之间的粘弹性塑性模型等等. 还有从热力学平衡态出发考虑的近平衡态统计力学方法.

## 4. 场 (field)

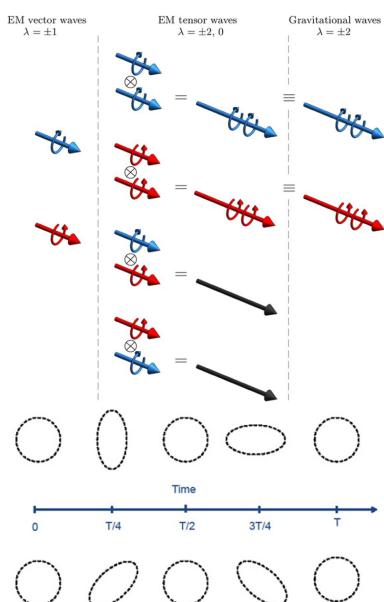


图 2.2: 引力波与电磁波的区别

关于场的理解历史上经历了两个过程. 第一个阶段是正如上面的连续介质的做法, 场是作为某种事先已经被研究的足够清楚的粒子体系与它们之间的相互作用的描述方法与数学工具. 而从牛顿时代开始人们就默认了超距作用的存在, 而场数学工具的第二个作用就是描述电荷之间, 质量之间的超距作用. 但是逐渐人们意识到相互作用传播速度的有限性, 于是场开始变成某种与物质其他耦合的物质而单独存在, 这就是第二阶段, 人们意识到了场本身就是一种物质, 电子与电子之间不能直接相互作用, 电子改变了真空, 稳定地与电磁场相互作用而产生库仑场, 然后在对第二个电子产生相互作用力. 将场作为某种先验地存在于时空中的物质形式进行描述与研究的学科就叫做**场论**(field theory). 有哪些可能的场形式? 场的物理量如何书写? 场与粒子, 场与场之间如何相互作用便是场论的研究内容. 比如说, 动力学所关心的内容, 场的质量本身没有定义, 可以定义的一般是场的定域动量与波矢, 能量与角频率, 平面波的色散关系等等. 的确, 场论最基本的做法是傅里叶分解, 它认为平面波是不受任何相互作用时的场的惯性运

动方式,而任何场的运动,每一时刻都可以分解成一系列平面波的叠加.就好像任何复杂体系的运动本质上都是质点系的运动,而质点的运动每时每刻都可以看出匀速运动那样.

场论根据其描述方法分为标量场论,矢量场论,张量场论和旋量场论等.电磁场论是矢量场论,它用四势矢量  $(\varphi, \mathbf{A})$  来描述.引力场论在广义相对论弱场近似下是张量场论,但传播的引力波和电磁波类似只能有两种偏振,其模式为 + 型和 × 型,这又是不同于电磁波的.在更现代的观点中,场是真空的某种激发,十分类似于一张二维的拉紧的薄膜,没有任何振动时它已经固有能量了,场物质反应为膜的各种振动形式.而一个石子受到外力而压弯了膜,就可以理解为粒子与场之间的相互作用.

### 2.1.3 参考系,物理规律与其不变性

**坐标系**(coordinate system) 是一套用来描述时空点位置的坐标系统,而**参考系**(reference system) 则是下文将引申的一类坐标系的统称.

在伽利略时空观<sup>7</sup>下参考系的定义相对简单.我们只需要任意指定一个观察者,观察者可以在  $3+1$  维的时空中作任意运动,每一个时刻对应一个测量的坐标系统:观察者分别以右手边,胸前和头顶三个方向建立坐标系,坐标系的刻度就是其代表的位置到原点观察者处的空间距离.这样便可以表示任意事件的时空坐标.而且构成一个三维空间直角坐标系.叫做观察者的**固有参考系**(proper reference system).

物理规律的本质是什么?在一个特定的参考系中,我们进行一些物理量的测量,测量得到的值之间在特定的实验条件下会满足特定的关系而不依赖于某些具体的参数,一般都是等式.这样的普遍成立的等式就可以反映某些物理规律.从**动理学**(kinetics) 的角度理解,体系的演化是**状态**(state) 随时间的演化,而体系的状态由一组完备的**态参量**(state variable) 描述,态参量可以包含一些广义坐标  $q_\alpha$  和他们对时间的导数即广义速度  $v_\alpha = \dot{q}_\alpha$ .而以下**决定论**(determinism) 则对物理规律的形式做出了规定:

动理学系统:

已知某时刻  $t = 0$  的初态  $\{q_\alpha(0), \dot{q}_\alpha(0)\}$  后,应能预言任意将来的状态  $\{q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)\}$ .

事实上,不光是将来的状态,在一般经典物理的框架下,过去的状态也是可以被“预言”的.这是因为我们进一步要求动理学系统的规律是以下形式的二阶方程:

$$f_i(\ddot{q}_\alpha, \dot{q}_\alpha, q_\alpha, t) = 0$$

而且广义坐标的个数应该和方程的数目一致,方程是至多二阶的.微分方程的描述在数学上完全导致了体系彻底的决定性,只要知道初始条件便可以往前往后推理所有发生的物理现象<sup>8</sup>.

这一物理学科研究范围内的有关决定性的原理很强大,强大到历史上很多物理学家和哲学家都质疑过它的真实性和适用性.最著名的莫过于拉普拉斯提出的**拉普拉斯妖**(Laplace's demon) 的论点:如果存在一个全知的拉普拉斯妖,能够知道在某一时刻宇宙中所有原子的精确位置与动量,那么任意时刻的状态也能被预言.这种决定论观点总是被拿来与**自由意志论**(free will) 去归谬,如果过去与未来都已经被谱写,那么人类所有的行为的意义和动机也就不能被解释.这直到今天也是科学与哲学未能获得满意的回答的问题.

但是科学的一个目的就是在于能够对未发生的事情进行预言,所以本着对决定论的认可与尊重,我们才能继续我们的科学研究.

除了需要符合决定性原理,物理规律还需要反映出一定的对称性.整个牛顿的**经典力学**(classical mechanics) 体系都要遵从的一个大的对称性,我们可以称之为**伽利略对称性**(Galilean symmetry),也是伽利略时空观的一个重要组成部分.这个对称性的含义如下阐释:

<sup>7</sup>本章仅限讨论非相对论,相对论见后

<sup>8</sup>更有甚者,经典物理也难以解释耗散现象,在忽略耗散时,方程应该还具有平移对称性(不显含  $t$ ) 和时间反演对称性(方程对广义速度是偶函数).此时对将来和对过去的预言在广义速度取相反数时是完全对称的,而且预言只依赖于时间差不依赖于初始时刻.

首先我们重拾“绝对时空观”的说法. 其含义是存在一个特殊的观察者, 它建立的坐标系  $O - xyz$ (对位于原点的观察者来说, 是参考系) 是默认的第一个使得我们以上提出的物理规律成立的坐标系. 自身具有  $3 + 1$  维的结构:

$$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

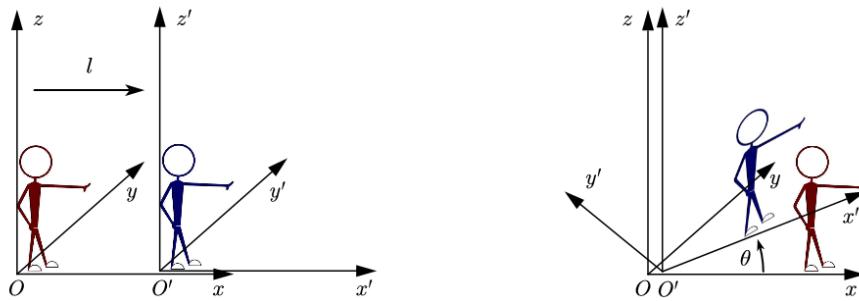


图 2.3: 固定平移与转动

让我们来阐明参考系与坐标系之间的区别. 我们设想另外一个观察者, 它与原观察者保持相对静止. 但是其建立的坐标系  $O' - x'y'z'$  依然可能有很多种可能性: 默认观察者自己为原点, 右手边为  $x$  轴, 胸前为  $y$  轴, 头顶为  $z$  轴. 一种可能性是, 新观察者相对原来的观察者仅仅是做时空平移(translation), 而其轴的方向保持平行.

## 2.2 运动的描述

### 2.2.1 质点的运动

质点的运动是复杂的连续体的运动的基础. 所谓运动(motion) 就是每一个时间都有一个位置. 就是说位置是时间的函数:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

我们使用实数上的矢量空间和矢量来刻画真实的物理学上的二维或三维空间和其中的点. 也即:

$$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \text{ or } \mathbb{R}^3$$

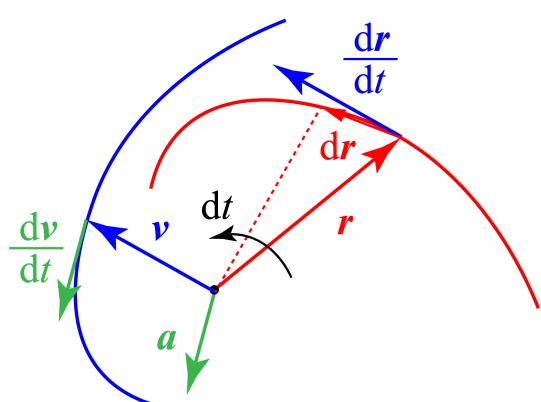


图 2.4: 质点的位置, 速度与加速度

前者对应二维运动, 后者对应三维运动. 我们从中可以发现, 函数是描述运动的数学工具, 对矢量与函数的分析学知识便是运动学和物理学的基础. 而运动学本身是可以看成是数学的一个分支的. 对质点的位置矢量求导数便得到速度矢量, 再求导数或是求二阶导数便是加速度矢量:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)] - [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t)]}{\Delta t^2}$$

正如上图所示, 我们可以把每一个瞬时的速度矢量共起点画出来, 并把端点连做曲线, 此时背景的空间往往叫做速度空间(velocity space), 它的更普遍的对应是动量空间, 这在近代物理的理论值具有重要地位. 引入速度空间后质点的运动便可以等价地在速度空间中进行研究. 比如在均匀重力场中的抛体运动在速度空间中

就是简单的竖直向下的匀速直线运动. 而平方反比力下的天体运动(开普勒问题)实际上在速度空间中可以证明将变为变速偏心圆周运动. 这使得通过速度求加速度就好像通过位置求速度那样方便. 具体求法接下来还得进一步展开.

加速度的导数偶尔也会进入物理研究的视野, 它被叫做**急动度**(jerk). 即:

$$\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}$$

矢量函数概念就是实数到矢量的映射, 但是具体能写出函数形式的例子在物理中却不是那么常见. 比如抛体运动的运动对应的函数, 即**运动方程**(equation of motion)<sup>9</sup>为:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$$

它是牛顿定律下以下微分方程结论的解:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g}$$

但是在一般情况下, 要表示出一个既有大小又有方向的矢量函数, 我们得采用分解的思想, 研究能够完全确定这个矢量值的参数. 通常有以下做法:

### 1. 直角坐标系下的分解

在一个欧几里得空间里的一个参考系中研究问题, 很常见的一种做法是建立直角坐标系来表示一个点的位置. 以更普遍的三维运动为例. 既然物体的位置由坐标  $(x, y, z)$  来表示. 我们就能认为表示运动的任务由三个标量函数  $x(t), y(t), z(t)$  来承担. 其实这与上面介绍的用矢量来表示位置是非常一致的, 因为实际上点的坐标通常也被理解为原点指向这个点的矢量在三个基矢的坐标:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

出于哈密顿(Hamilton)爵士关于把三维空间三个方向基矢视作四元数代数运算的旋转等效的奇妙观点, 我们分别把  $x, y, z$  方向的基矢按照惯例记做  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . 也常常因为它们是单位矢量(长度为 1), 而记做  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . 这样便能把  $\mathbf{r}$  分解出  $x, y, z$  来.

分解以后, 重新合成便能得到需要的物理量. 这其中的意思是: 比如我们为了求一个曲线运动速度或者加速度的  $x$  分量. 也就是求下列表达式:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ \mathbf{a} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\end{aligned}$$

中的分量  $v_x, a_x$ . 其求法非常直接, 便是:

$$v_x = \frac{d}{dt} x(t) \quad , \quad a_x = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

这相当于是说, 求导数和向某固定方向投影是可以交换前后次序的:

$$\mathbf{i} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r} = \frac{d}{dt} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{i} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \frac{d}{dt} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{v})$$

这是当然的, 因为矢量点乘的导数的法则也符合与标量乘积求导数类似的莱布尼茨法则, 而常矢量  $\mathbf{i}$  不随着运动改变. 所以导数只有对  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$  求导的项.

在数学上, 曲线段也经常被描述为是与某实数上区间同胚(homeomorphic)的几何图形, 这其实也就是说, 存在自变量  $t$ , 不失一般性地, 我们让其取值范围为  $(-\infty, +\infty)$ . 而存在一个从这个自变量到三维空间点  $(x, y, z)$  的光滑映射:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

<sup>9</sup>指运动学运动方程, 动力学运动方程就是反映运动的规律的, 能够最终解出来运动学运动方程的微分方程.

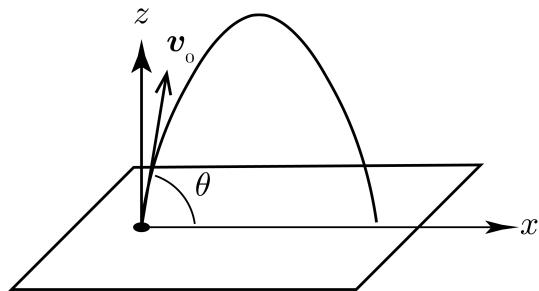


图 2.5: 抛体运动

在数学上看,这其实就是曲线方程:其参数方程的唯一给法.这样的式子就给出了几何学上的光滑曲线的定义.而不同于以往我们对曲线是  $y = f(x)$  的图像的刻板认识.但在这里,我们恰巧发现如果把参数  $t$  理解为时间的话,这恰好就对应到了一个粒子在三维空间中的运动,出于这样的原因,我们把反应了粒子位置随着时间变化的方程称为运动方程.它是**轨迹方程**(function of trajectory) 的一种特殊情况.对于轨迹方程,我们只需要通过符合方程的点  $(x, y, z)$  构成粒子所有运动中经过的位置构成的集合即可.例如,在地面  $z = 0$  出发以仰角  $\varphi$  斜抛一个物体.那就以出发点为原点建立坐标系,竖直向上为  $z$  轴,抛的方向向前为  $x$  轴.那么运动方程为:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \varphi \\ z = v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

但是轨迹方程不仅可以写成以上形式,还可以消去  $t$  得到:

$$z = x \tan \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2} (1 + \tan^2 \varphi)$$

## 2. 平面极坐标系下的分解

如果质点做平面运动,那么我们问题得到了简化.此时往往有些情形下我们关心从原点的观察者出发看质点的运动时,质点离观察者的距离和质点相对观察者方位.故引入**极坐标系**(polar coordinate system) 是自然而然的做法.其步骤为:确定观察者位置为**极点**(pole),引出一条原点出发的射线为**极轴**(polar axis);测量质点位置到极点距离  $r$  为**矢径**(radius);从极点指向质点位置形成矢量矢径  $\mathbf{r}$ ,测量极轴绕极点沿指定的正方向旋转到与矢径重合时旋转的角度  $\theta$  为**极角**(polar angle).描述质点的位置时, $(r, \theta)$  即构成极坐标.

仍然,极坐标可以用来表示质点的唯一位置:只需要给出  $(r, \theta)$  就可以确定位置.所以只要知道函数  $r(t), \theta(t)$  就能够确定其运动,这便是极坐标下的运动方程.同理如果消去  $t$  就能得到另一类轨迹方程.只要物体运动轨迹不经过极点,我们总是取  $r(t), \theta(t)$  为光滑的函数.  $\theta$  的取值为  $(-\infty, +\infty)$  以保证运动的连续性.不过  $\theta$  相差  $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  的所有坐标表示运动过程中的同一位置.

例如,在之前的抛体运动中,如果取  $z$  轴为极轴,那么其极坐标下的运动方程为:

$$\begin{cases} r^2 = (\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2)^2 = \frac{1}{4} g^2 t^4 - g v_0 t^3 \sin \varphi + v_0^2 t^2 \\ \tan \theta = \frac{2 v_0 \cos \varphi}{2 v_0 \sin \varphi - g t} \end{cases}$$

这会有利于我们分析一些问题.例如如果关心以何种倾角抛出一个物体,物体离我们的距离会越来越远?就只需要让  $r$  为关于  $t$  的增函数,除了对  $r$  求导的做法,一种更加明智的做法可能是注意到关系式:

$$\frac{dr}{dt} > 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} r^2 \right) > 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} r^2 \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2) \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{g} t) > 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{g}t) \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t) = \frac{1}{2} g^2 t^2 - \frac{3}{2} g v_0 t \sin \varphi + v_0^2 > 0$$

这就化为求关于  $t$  的二次函数恒大于零的系数条件问题, 结论是初等的: 判别式小于零:

$$\left( \frac{3}{2} g v_0 \sin \varphi \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{2} g^2 \right) (v_0^2) < 0 \Rightarrow \sin \varphi < \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

采用极坐标系描述抛体运动也许是费力而不讨好的. 但是描述其他一些运动又比直角坐标系存在天然的优势. 比如一类经典追击问题的表述如下: 四个平面运动的质点初始组成正方形. 这个环形的结构中每一个质点都向着前一个质点运动发生追击. 其中运动速度矢量具有变化的方向, 即向着前方质点. 但具有不变的速率  $v$ . 确定物体的运动方程和轨迹.

对于这个问题, 预先的关于物体在时间为  $t$  时的位置信息是几乎完全空缺的, 但对于速度矢量我们知道一个信息: 其大小为  $v$ . 如果考虑直角坐标系, 这个条件表示为:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v$$

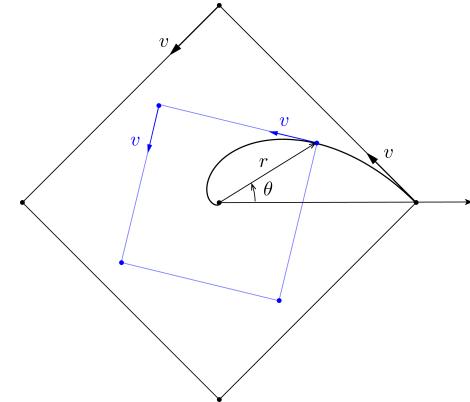


图 2.6: 首尾相追

但是对于位置和速度, 我们还知道一个信息, 就是它们夹钝角而且为  $3\pi/4$ . 用直角坐标系的公式精细化简的话也可以得到:

$$\tan \phi_{\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}} = -1 \Rightarrow \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{x\dot{y} - y\dot{x}} = -1$$

但这就较难求解<sup>10</sup>. 那么如果采用极坐标系会为我们带来何种新的思路呢?

那就是活动标架(moving frame) 的引入. 无论粒子在何处, 粒子的  $\mathbf{r}$  一定是作为  $r$  和  $\theta$  的函数的. 那么可以在粒子所在的点沿两个方向建立局部的  $R - \Theta$  直角坐标系. 这两个方向怎么确定呢? 其实就是基矢的方向:

$$\mathbf{e}_r := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_\theta := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$$

上式中后一个偏导数的模为  $r$  是显然的. 只需要考虑到圆的弧长和半径的关系即可.

局部的标架给我们什么方便? 我们由偏导数和全微分的法则可以描述局部物体的微小位移. 本质上, 这相当于  $dr$  和  $d\theta$  导致的位矢

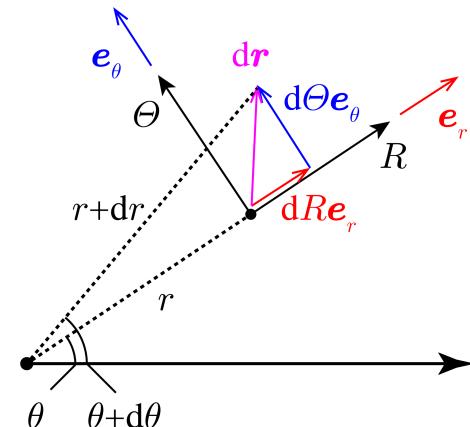


图 2.7: 极坐标系的活动框架

$$d\mathbf{r}_{(dr, d\theta)} = d\mathbf{r}_{(dr, 0)} + d\mathbf{r}_{(0, d\theta)} = dR\mathbf{e}_r + d\theta\mathbf{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_{(dr, d\theta)} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta = dR\mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta \\ &\Rightarrow dR = dr, \quad d\theta = rd\theta \end{aligned}$$

可见在曲线坐标情形下坐标的改变量  $dr, d\theta$  与在对应质点位移方向走过的弧长  $dR, d\theta$  的值一般是不一样的. 它们之前的比值 (弧长/坐标变化) 称作拉梅系数(Lamé coefficient).

既然叫做活动标架法, 那么显然随着粒子的运动, 两个基矢  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  的方向也在不断改变中. 我们用极坐标, 就是把一个物理量  $\mathbf{A}$  分解到粒子运动的瞬时局部坐标系中:

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta$$

<sup>10</sup>有兴趣的读者可以挑战一下.

那么在粒子发生运动后,以上矢量的改变应当由四部分组合而成:

$$d\mathbf{A} = d'\mathbf{A} + \tilde{d}\mathbf{A}$$

$$d'\mathbf{A} := dA_r \mathbf{e}_r + dA_\theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\tilde{d}\mathbf{A} := A_r d\mathbf{e}_r + A_\theta d\mathbf{e}_\theta$$

其中  $d'$  表示相对变化,类似于选取跟随旋转的活动标架而旋转的参考系后,矢量的变化量,故基矢自己的变化是被无视了的.而原来的  $d$  才表示绝对的变化.而  $\tilde{d}$  所带来的变化称作牵连变化或随体变化.它是即使前面的相对变化为零也会带来的,由于标架的“拉拽”导致的旋转带来的改变.事实上很容易证明其中的:

$$d\mathbf{e}_r = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{e}_r = +d\theta \mathbf{e}_\theta$$

$$d\mathbf{e}_\theta = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{e}_\theta = -d\theta \mathbf{e}_r$$

其中  $d\boldsymbol{\theta}$  是方向垂直于纸面向外的,大小即极坐标下物体坐标之角坐标的增量  $d\theta$ .

这就足以给出:

$$(d\mathbf{A})_r = dA_r - A_\theta d\theta$$

$$(d\mathbf{A})_\theta = dA_\theta + A_r d\theta$$

两边再同时除以时间, 我们得到粒子运动过程中一个矢量导数的两个分量与这矢量两个分量的导数之间的关系:

$$(\dot{\mathbf{A}})_r = \dot{A}_r - \dot{\theta} A_\theta$$

$$(\dot{\mathbf{A}})_\theta = \dot{A}_\theta + \dot{\theta} A_r$$

导数的分量不等于分量的导数, 这也是坐标系的弯曲所带来的. 数学上, 这意味算符  $\partial_t$  与算符  $\mathbf{e} \cdot$  的不对易性(non-commutative):

$$\mathbf{e} \cdot (\partial_t \mathbf{A}) \neq \partial_t (\mathbf{e} \cdot \mathbf{A})$$

通过这个原理, 我们可以推理得到:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r + 0 \mathbf{e}_\theta \Rightarrow r_r = r, r_\theta = 0$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow v_r = \dot{r}_r - \dot{\theta} r_\theta = \dot{r}, v_\theta = \dot{r}_\theta + \dot{\theta} r_r = \dot{\theta} r$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} \Rightarrow a_r = \ddot{v}_r - \dot{\theta} v_\theta = \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r, a_\theta = \ddot{v}_\theta + \dot{\theta} v_r = \ddot{\theta} r + 2\dot{\theta} \dot{r}$$

这个操作甚至可以继续下去, 计算急动度等:

$$\mathbf{j} = \dot{\mathbf{a}} \Rightarrow j_r = \ddot{a}_r - \dot{\theta} a_\theta = \ddot{r} - 3\dot{\theta}\ddot{\theta}r - 3\dot{\theta}^2\dot{r}, j_\theta = \ddot{a}_\theta + \dot{\theta} a_r = \ddot{\theta}r + 3\ddot{\theta}\dot{r} + 3\dot{\theta}\ddot{r} - \dot{\theta}^3r$$

...

极坐标下速度, 加速度的公式是非常常用的, 它们是:

$$\mathbf{v} = (\dot{r}, \dot{\theta}r) \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r, \ddot{\theta}r + 2\dot{\theta}\dot{r})$$

故, 在之前的首尾相追问题??中以正方形中心为原点, 以初始位置为极轴方向建立极坐标系. 那么两个条件: 速度大小恒定为  $v$  和位矢速度夹角恒定  $3\pi/4$  表述为:

$$v_r^2 + v_\theta^2 = v^2, \quad \frac{v_\theta}{v_r} = -1$$

相当容易解出来两个分速度的值, 再结合之前的速度公式:

$$\dot{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}v, \quad \dot{\theta}r = \frac{\sqrt{2}}{2}v$$

这样, 便可以轻松解出运动方程来, 结合初始条件, 不妨设初始矢径为  $r_0$ , 幅角为 0:

$$\dot{r} = -\frac{v}{\sqrt{2}}, \quad r = r_0 - \frac{vt}{\sqrt{2}}$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{2}r_0 - vt} \Rightarrow \theta = -\ln\left(1 - \frac{vt}{\sqrt{2}r_0}\right)$$

轨迹方程通过上述方程消参即可. 但也可以通过之前的微分方程相除得到新微分方程求解, 曲线为对数螺旋(logarithmic spiral):

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \Rightarrow r = r_0 e^{-\theta}$$

平面的极坐标系在三维空间的推广为柱坐标系(cylindrical coordinate system) 和球坐标系(spherical coordinate system). 类似公式的核心也与平面极坐标相差无几, 都在于活动标架的基矢微分. 请读者自行推导.

### 3. 自然坐标系下的分解

设想仍然采用活动标架法的思路, 但是, 标架的方向不再由粒子的位置相对事先建立的背景的坐标系的关系而决定. 而是紧密地由粒子运动的性质: 瞬时的速度方向, 轨迹曲线的弯曲方向等决定. 那么我们就得到了特殊的标架: 自然坐标系(natural coordinates).

自然坐标系的建立是派生于粒子运动的轨迹的那条曲线的性质的. 借助牛顿等人创立的微积分与笛卡尔等人创立的解析几何的帮助, 对于光滑曲线曲面的性质的研究构成了古典微分几何(classical differential geometry) 的主要课题.

我们考虑三维空间问题. 对于一条空间曲线. 它总是一些点的集合, 而如果规定某个起始点以后, 每一个点都会有一个  $s$  坐标, 它就是从起始点到这个点的弧长. 而其实我们可以把  $s$  视作一个自变量, 因为  $s$  改变而改变的是不同点的位置  $r$ . 也就是说  $r(s)$  作为  $s$  的函数. 那么这个曲线在某一点处的切矢量就可以被自然地定义为:

$$\tau = \frac{dr}{ds}$$

以上矢量模自然为 1. 因为分子  $dr$  的长度就是分母的  $ds$ . 方向则是在曲线的切线(tangent line) 方向. 切线是这样一种线: 曲线上有一点  $P$ . 如果在  $P$  两侧任取一个点  $Q$  并连接  $PQ$ , 使  $Q$  无限接近  $P$  即  $ds \rightarrow 0$ , 那么  $PQ$  所在的直线的极限就是  $P$  点的切线. 这又引申出第二个概念: 如果在  $P$  所有各取一个点  $Q, R$ . 那么  $PQR$  三点确定的圆也将随着  $Q, R$  同时无限接近于  $P$  而具有极限. 这个圆叫做密切圆或曲率圆(osculating circle). 其所在的平面叫做密切平面(osculating plane). 而圆心  $C$  为曲率中心(center of curvature), 最后, 实际上  $P$  到  $C$  的方向就是法(normal) 方向, 该方向的单位矢量叫做法矢量  $n$ . 而副法矢量  $\tau \times n = \beta$  所决定的方向为副法(binormal) 方向. 这样三个矢量便构成弗雷内框架(Frenet frame) 或称 TNB 框架.

事实上, 如果计算曲线在过程中的转向, 它可以用三个矢量方向的变化来表示. 如果计算三个矢量对  $ds$  的变化率, 一定能写出:

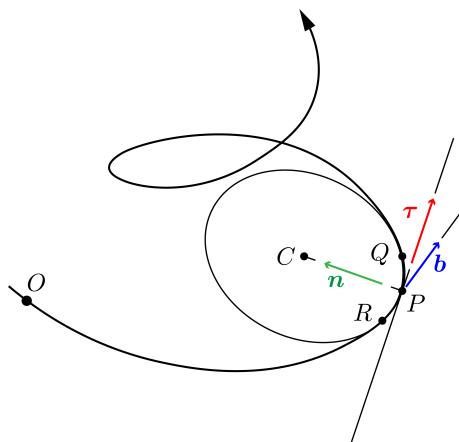


图 2.8: Frenet 框架

$$\frac{d\tau}{ds} = +0\tau + k n + \varepsilon \beta$$

$$\frac{dn}{ds} = -k\tau + 0n + \gamma\beta$$

$$\frac{d\beta}{ds} = -\varepsilon\tau - \gamma n + 0\beta$$

这是因为框架一定要具有正交归一的一套基矢量, 而且这个性质在曲线上任何一点都要成立, 指的是以下六个式子:

$$\tau \cdot \tau = 1, \quad n \cdot n = 1, \quad \beta \cdot \beta = 1$$

$$\tau \cdot n = 0, \quad n \cdot \beta = 0, \quad \beta \cdot \tau = 0$$

对六个式子分别求导数就看出来了, 一个单位矢量自己的导数必然垂直于自身, 从而三个基矢导数在自己上的投影都必须为零. 而两个不同基矢的导数互相在对方方向的投影则会正负相消, 这样才能保证两个矢量始终正交. 就能理解之前的 9 个系数为什么要写成这个形式.

最后我们指出, 系数  $\varepsilon$  应当是 0. 这是因为作为法线方向的定义本身, 它就应当在  $\tau$  的变化量  $d\tau$  所在的方向上. 从而第一个式子不会具有  $\beta$  方向的分量. 综上所述, 我们得到了:

$$\frac{d\tau}{ds} = +k n$$

$$\frac{dn}{ds} = -k\tau + \gamma\beta$$

$$\frac{d\beta}{ds} = -\gamma n$$

这就是弗雷内公式(Frenet formulae). 其中  $k$  称作曲线的曲率(curvature). 它的意义是衡量了曲线方向转动的快慢, 事实上由于曲线切线的无穷小转动角度其实在竖直上恰好会等于无穷小矢量  $d\tau$  的长度, 从而

有:

$$k = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \frac{d\theta}{ds}$$

即, 曲率为: 质点沿曲线走单位长度所转过的角度. 曲率半径实际上是曲率的倒数. 它是曲率圆的半径  $\rho = 1/k$ .

而  $\gamma$  则被称作 **挠率**(torsion). 我们通过弗雷内公式的第三式可以发现, 挠率反映了副法矢量, 或者说被复法矢量作为法平面的密切平面, 绕曲线此时的切线的旋转快慢. 它使得粒子瞬时运动的那个平面在改变着. 下面我们会发现, 实际上挠率对运动学中直到加速度的表达式都是没有任何贡献的.

如何用自然法描述粒子的运动? 事实上这就相当于把粒子运动的路程  $s$  和三个矢量  $\tau, n, \beta$  都表示为时间的函数:

$$s(t), \tau(t), n(t), \beta(t)$$

但事实上, 曲线本身轨迹必须先存在才能让我们事先确定好框架, 而这样一个曲线其实本身由  $r(s)$  给出, 而且满足:

$$\frac{dr}{ds} = \tau, \quad \frac{d^2r}{ds^2} = kn, \quad \frac{d^3r}{ds^3} = -k^2\tau + \frac{dk}{ds}n + k\gamma\beta$$

然后我们唯一要做的就是给出  $s(t)$  函数, 这一定可以帮助我们确定运动的各个量.

事实上, 由于泰勒展开公式, 近似到三阶:

$$\Delta r \simeq \frac{dr}{ds}ds + \frac{1}{2}\frac{d^2r}{ds^2}ds^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3r}{ds^3}ds^3 = (kds - \frac{k^2}{6}ds^3)\tau + (\frac{k}{2}ds^2 + \frac{1}{6}\frac{dk}{ds}ds^3)n + \frac{k\gamma}{6}ds^3\beta$$

如果只保留领头项, 忽略高阶小量. 我们就得到, 在粒子运动的局域坐标系中, 位移  $ds$  长度到达的点三个坐标  $T, N, B$  分别近似为:

$$T = ds, \quad N = \frac{k}{2}ds^2, \quad B = \frac{k\gamma}{6}ds^3$$

仍然考虑之前的三阶近似下的严格  $\Delta r$  与  $ds$  的关系, 这一次代入  $s(t)$  的三阶泰勒展开:

$$ds \simeq \dot{s}dt + \frac{\ddot{s}}{2}dt^2 + \frac{\dddot{s}}{6}dt^3$$

我们整理  $dt$  的各阶项, 最终得到:

$$\Delta r \simeq vdt + \frac{1}{2}adt^2 + \frac{1}{6}jdt^3$$

其中速度与加速度的公式为:

$$v = \dot{s}\tau$$

$$a = \ddot{s}\tau + k\dot{s}^2n$$

速度方向必然沿切向, 大小上就等于  $\dot{s}$ , 即单位时间走过的弧长. 而加速度则有两个分量. 一是由于速率在增减导致的切向加速度, 大小等于  $a_\tau = \ddot{s}$ ; 第二项则是由于曲线的弯曲导致的法向加速度. 它的值为  $a_n = \dot{s}^2/\rho$ .

如果要计算急动度等, 可以从之前的泰勒展示中获得, 其实还可以直接对加速度求导数, 此时表达式会突然产生很多项:

$$j = (\ddot{s} - k^2\dot{s}^3)\tau + (3k\dot{s}\ddot{s} + \dot{k}\dot{s}^3)n + k\gamma\dot{s}^3\beta$$

利用自然坐标下的分解方式, 如果已经知道特定曲线的曲率, 就可以根据质点在曲线上的运动方式来计算运动的加速度. 但是反过来利用运动学公式来确定曲线的曲率半径也不失为一种极其简单的做法. 我们注意到, 利用加速度在垂直于速度方向的那个分量即为  $v^2/\rho$  的结论, 可以得到:

$$\rho = \frac{v^3}{|\mathbf{a} \times \mathbf{v}|}$$

例如,如果已知二维空间中的曲线方程  $y = f(x)$ .那么如果令一质点在曲线上运动且满足  $x = t$ ,  $y = f(t)$ ,那么速度为  $v = (1, f')$ ,加速度为  $a = (0, f'')$ .利用上式可得:

$$\rho = \frac{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''|}$$

再例如.之前的首尾相追问题中,曲线对数螺线写作:

$$r = ae^{k\theta}$$

如何计算曲率半径?我们让粒子在曲线上绕极点做匀速旋转,也就是:

$$\theta = \omega t \quad , \quad r = ae^{k\omega t}$$

那么借助极坐标的加速度公式得:

$$v = (\dot{r}, \dot{\theta}r) = (k\omega ae^{k\omega t}, \omega ae^{k\omega t}) = (k\omega r, \omega r)$$

$$a = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r, \ddot{\theta}r + 2\dot{\theta}\dot{r}) = ((k^2 - 1)\omega^2 ae^{k\omega t}, 2k\omega^2 ae^{k\omega t}) = ((k^2 - 1)\omega^2 r, 2k\omega^2 r)$$

代入之前的曲率公式便可以得到:

$$\rho = \sqrt{1 + k^2 r}$$

## 2.2.2 刚体的运动

关于刚体的运动,它的定义我们其实将在之后的刚体专门的章节又一次做更进一步的探讨.初步我们认为所谓刚体就是这样一种物体:存在一个特殊的参考系(平动或转动)能够使得该物体上每一个点都每时每刻相对静止.但是这样我们又涉及到下一节才讲的参考系的概念.在此我们又不得不早于预期提及.

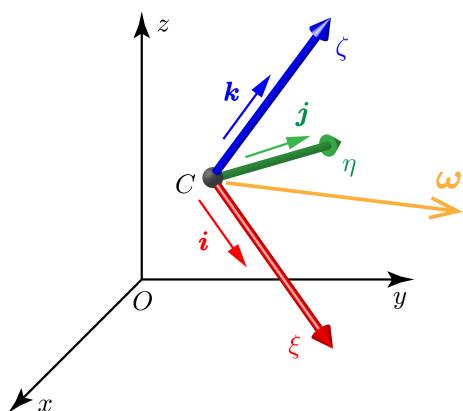


图 2.9: 刚体的本征框架

为此我们换一种更加直观的方式引入这些概念而不是去严格定义刚体与参考系的概念.设想我们有一个正交的刚性框架,即三条射线状坐标轴构成的物体,下称  $\xi, \eta, \zeta$  轴,该框架就会自然造成四个矢量.首先是框架原点  $C$  的位置矢量  $r$ .其次是三坐标轴方向的三个基矢<sup>11</sup>  $i, j, k$ .它们都会随着时间变化,可以用四个导数表征.其中  $v = \dot{r}, a = \ddot{r}$ .但是,对于三个基矢导数有没有更加简单的描述方法呢?如果我们把三个基矢导数就向三个基矢本来的方向分解<sup>12</sup>:

$$\dot{i} = +\omega_{11}i + \omega_{12}j + \omega_{13}k$$

$$\dot{j} = +\omega_{21}i + \omega_{22}j + \omega_{23}k$$

$$\dot{k} = +\omega_{31}i + \omega_{32}j + \omega_{33}k$$

依然,我们注意到出于以下正交归一的结构不会改变,在求导下为零,所以上述表达式中的九个系数反对称:

$$\frac{d}{dt} \begin{cases} 1 = i \cdot i \quad j \cdot j \quad k \cdot k \\ 0 = i \cdot j \quad j \cdot k \quad k \cdot i \end{cases} = 0 \Rightarrow \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$$

<sup>11</sup>原来的基矢方向记做  $e_{x, y, z}$ .

<sup>12</sup>由于字母  $i, j$  上本来就有点,所以在符号上约定遇到要在这两个字母上加点时改为横向  $i, j$ .偶尔也见到反而去掉点的  $i, j$ .出于这样无法表示高阶导数,我们不采用这种模式.

出于某种符号约定与对称的原因, 我们把导数重新写作:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{i}} &= +\omega_3 \mathbf{j} \quad -\omega_2 \mathbf{k} \\ \ddot{\mathbf{j}} &= -\omega_3 \mathbf{i} \quad +\omega_1 \mathbf{k} \\ \dot{\mathbf{k}} &= +\omega_2 \mathbf{i} \quad -\omega_1 \mathbf{j}\end{aligned}$$

这样, 如果我们定义一个矢量:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}$$

就能够造成:

$$\ddot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \ddot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$$

这就是刚体的角速度(angular velocity) 矢量. 用它可以计算刚体中的各种转动的物理量.

具体来说, 什么叫做刚体? 事实上以上三个坐标轴本身就构成了刚体, 或者是某刚体的一部分. 如果有一个空间点每时每刻向杆坐标系的三个坐标面引三垂线, 三个坐标都始终保持常数, 那么就说这个空间点是固连(fixed) 在该坐标系中的. 而如果一个物体上的每一个点都固连带该坐标系中, 那么相对这个坐标系该物体就无法发生形变, 从而这就是一个刚体. 这种情况下, 刚体与坐标系就存在一个相互关系, 这个坐标系是由刚体所对应的固连坐标系, 而坐标系本身又可以视作某种不能变形的刚体.

我们在坐标系中找到固连在坐标系上的两个点, 或者说在刚体上找到固连在刚体上的两个点 (以后不加以区分). 从一个点指向另一个点形成矢量  $\mathbf{R}$ , 由于固连在坐标系中, 这个矢量对坐标系造成的三个分量都是固定的, 也就是  $\mathbf{R} = R_1 \mathbf{i} + R_2 \mathbf{j} + R_3 \mathbf{k}$  中的  $R_1, R_2, R_3$  都是常数. 那么这个矢量跟随坐标系而变化的导数就是:

$$\dot{\mathbf{R}} = R_1 \ddot{\mathbf{i}} + R_2 \ddot{\mathbf{j}} + R_3 \dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\omega} \times (R_1 \mathbf{i} + R_2 \mathbf{j} + R_3 \mathbf{k}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$$

在物理上, 这就是说, 任何固连在转动坐标系中的矢量  $\mathbf{R}$  都将以角速度  $\boldsymbol{\omega}$  跟随坐标系旋转,  $\boldsymbol{\omega}$  的方向就是瞬时转动轴,  $\boldsymbol{\omega}$  的大小就是旋转角速度大小. 注意两点, 一是这个角速度  $\boldsymbol{\omega}$  是全局的, 无论矢量相对坐标系在任何位置, 无论距离最初选取的坐标系中心有多远, 只要固连在坐标系中, 就会以完全一样的角速度矢量  $\boldsymbol{\omega}$  去改变  $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ . 二是这个角速度作用在任何量纲上. 无论是两个空间点之间的那个 (位移) 矢量, 还是速度矢量, 力矢量等等, 任意量纲的矢量  $\mathbf{A}$  只要相对旋转坐标系具有固定的方向, 在地面系中就会跟着坐标系一同旋转而具有导数:

$$\dot{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad \text{for } \mathbf{A} \text{ fixed in frame } C - \xi \eta \zeta$$

以后我们可以脱离坐标系而讨论刚体. 为了研究刚体的运动, 我们只需要在刚体上取一个合适的固连点  $C$  作为中心 (类似于坐标系的原点), 这个点叫做基点(cardinal point). 那么, 不失一般性地, 刚体的运动将用基点  $C$  的位置  $\mathbf{r}(t)$  和角速度  $\boldsymbol{\omega}(t)$  描述. 譬如, 为了求得某一时刻刚体上一点  $P$  的速度. 我们可以找到从  $C$  指向  $P$  的矢量  $\mathbf{R}$ . 那么, 由于  $\mathbf{r}_{OC} + \mathbf{r}_{CP} = \mathbf{r}_{OP}$ . 这就是说:

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_{OP} = \dot{\mathbf{r}}_{OC} + \dot{\mathbf{r}}_{CP} = \mathbf{v}_C + \dot{\mathbf{R}}$$

最后再由之前的用角速度算导数的方法, 得到著名的基点法速度表达式:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$$

即: 刚体上一点速度等于跟随基点平动的速度  $\mathbf{v}_C$  加上绕基点以  $\boldsymbol{\omega}$  转动的速度  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$  的和.

至于加速度, 只需要对上式再求一次导数  $\dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{v}}_C + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}$ :

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_C + \beta \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$$

即: 刚体上一点速度等于跟随基点平动的加速度  $\mathbf{a}_C$  加上绕基点以  $\beta$  转动的角向加速度  $\beta \times \mathbf{R}$ , 最后再加上由于速度  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$  本身也在绕轴以  $\boldsymbol{\omega}$  旋转带来的向轴加速度  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$  的和.

## 2.3 参考系变换

### 2.3.1 点变换

事实上,对旋转坐标系的分析正如对刚体的分析那样,一个旋转坐标系的描述正由两点构成,一是这个参考系原点  $C$  的运动方程.给出它我们就可以求出任意时刻另一个参考原点的速度与加速度:

$$\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C, \quad \mathbf{a}_C = \ddot{\mathbf{r}}_C$$

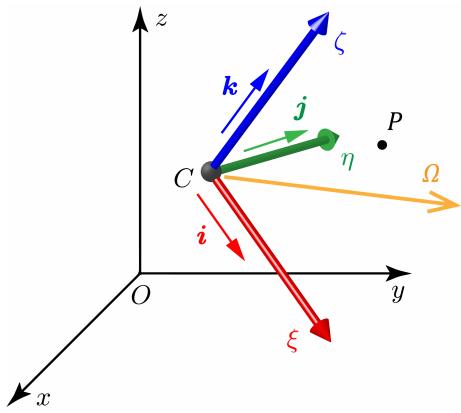


图 2.10: 参考系变换

第二点就是要给出新参考系的旋转角速度  $\omega$ , 角加速度记作  $\beta = \dot{\omega}$ . 通过上一节我们知道, 如果选取固连在新参考系的点  $P$ , 并且把  $CP$  记作  $r'$ . 那么  $P$  点速度加速度(现在记作  $\mathbf{v}_c, \mathbf{a}_c$ )为:

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_C + \omega \times \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{a}_C + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') + \beta \times \mathbf{r}'$$

我们现在研究什么问题呢? 如果我们在  $O-xyz$  系中给出一个质点, 也用  $P$  表示, 的运动方程  $x(t), y(t), z(t)$ . 其实也就给出了在  $C-\xi\eta\zeta$  系中的运动方程  $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$ . 那么把位矢  $OP$  记作  $\mathbf{r}$ ,  $CP$  记作  $\mathbf{r}'$ . 再把  $OC$  记作  $\mathbf{r}_C$ . 于是得到恒等式:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}'$$

但这不代表  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}'$ . 这里我们要注意有一点已经悄悄发生改变了, 那就是导数, 作为一个算符, 变成了一个有多种自由定义余地的概念. 只要想想这一点: 从运动方程求出速度的过程叫做求导<sup>13</sup>, 但是同一个运动方程对应的运动是同一个运动, 但是在不同参考系中依然可以有多个不同的取值. 这就足以说明有多种不同的求导方法. 具体来说, 这里的  $\mathbf{r}'$  可能有三种情况: a. 固连在  $C$  系中, 相对  $C$  系大小方向不变. b. 相对地面系  $O$  系大小方向都不变, 即  $P$  跟随  $C$  相对地面系平移. c. 两者都不是. 那么相应地定义三种导数:

1. 绝对导数: 即平常的  $\frac{d}{dt}$ , 可以简单地用加点来代替. 我们还创造一个新的符号  $D$  来表示求导, 例如对于情形 b, 这个导数就是零. 求导数的方法是: 找到一个矢量在  $O$  系中每时每刻向三个坐标轴方向的投影分量并分别求导最后组合为矢量. 用这个导数能定义  $P$  点在  $O$  系中的速度与加速度:

$$\mathbf{v} = D\mathbf{r} (= \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{a} = D\mathbf{v}$$

2. 相对导数: 这就是要换相对  $C$  系的视角来研究一个矢量的导数了. 我们记作  $D'$ . 例如对于情形 a, 那么相对导数就是零. 求导数的方法是: 找到一个矢量在  $C$  系中每时每刻向三个坐标轴方向的投影分量并分别求导最后组合为矢量. 这也就是说它用来定义相对速度和相对加速度是合适的:

$$\mathbf{v}' = D'\mathbf{r}' = r'_1 \mathbf{i} + r'_2 \mathbf{j} + r'_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{a}' = D'\mathbf{v}' = \ddot{r}_1 \mathbf{i} + \ddot{r}_2 \mathbf{j} + \ddot{r}_3 \mathbf{k}$$

3. 随体导数: 这是矢量由于跟随  $C$  系转动而带来的相对  $O$  系的变化率. 我们记作  $\tilde{D}$ . 例如在情形 a 中,  $\mathbf{r}'$  随体导数就是  $\omega \times \mathbf{r}'$ . 这个算符其实就等价于  $\omega \times$ , 这是因为他就定义为:

$$\tilde{D}\mathbf{A} = A_1 \ddot{\mathbf{i}} + A_2 \ddot{\mathbf{j}} + A_3 \ddot{\mathbf{k}} = A_1 \omega \times \mathbf{i} + A_2 \omega \times \mathbf{j} + A_3 \omega \times \mathbf{k} = \omega \times (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) = \omega \times \mathbf{A}$$

值得注意的是, 这三个导数算符之间有如下关系:

$$D = \tilde{D} + D'$$

<sup>13</sup> 导数就是从运动方程到速度矢量的映射

这很容易证明, 对一个矢量求导数, 一看分量变不变, 而看基矢量本身有没有旋转. 那么就会产生两项. 实际上就是莱布尼茨法则.

于是这才能推理参考系变换的公式. 我们对  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}'$  两边求绝对导数:

$$\mathbf{v} = D\mathbf{r} = Dr_C + Dr' = \mathbf{v}_C + (\tilde{D} + D')\mathbf{r}' = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}'$$

再次对上式两边求绝对导数:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= D\mathbf{v} = D\mathbf{v}_C + D\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times Dr' + D\mathbf{v}' \\ &= \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\tilde{D} + D')\mathbf{r}' + (\tilde{D} + D')\mathbf{v}' \\ &= \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}' \\ &= \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'\end{aligned}$$

这两个公式就是参考系变换下的变换公式:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'$$

如何理解以上的公式? 事实上结构也很简单, 我们把加速度中的最独特的一项单独拿出来叫做柯里奥利加速度(Coriolis acceleration):

$$a'_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

那么以上两公式具有以下结构:

$$\text{绝对} = \text{牵连(+柯氏)} + \text{相对}$$

柯氏即柯里奥利. 相对速度与相对加速度就是  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{a}'$ . 言下之意就是我们定义了所谓的牵连速度(convected velocity) 与牵连加速度(convected acceleration):

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}'$$

细心的读者已经发现了, 这两个式子和本节最开始推导出来的固连在  $C$  系中的点的绝对速度, 加速度公式是一致的. 牵连速度(加速度), 顾名思义, 被转动参考系“带着走”的速度(加速度). 也正是以上规律启发我们总结出以下的动点动系法来理解看似复杂的速度加速度合成公式:

1. 确定定系, 动系, 动点, 定点. 定系往往就是地面系; 动系一般是相对某刚体或人为构造的刚性框架相对静止的参考系<sup>14</sup>; 动点就是选做研究对象的相对两个系一般都有运动的点. 最后, 定点指的是这样的概念: 在研究的一瞬间与动点重合, 但是始终保持与动系固连的特殊参考点.
2. 在定系考虑动点的运动. 算出绝对量. 在动系考虑动点的运动. 算出相对量. 在定系中考虑定点的运动, 它的量就是牵连量.
3. 建立绝对相对牵连之间的等量关系.
4. 唯一要注意的是: 只有当转动系是真转动的  $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ , 而且相对动系动点也是真运动的  $\mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$  时, 我们才有必要在加速度中添加一项柯氏加速度  $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ . 从推导过程来看, 一是即使固连在动系中的速度矢量也会跟随动系转动而带来加速度, 二是动系中的相对位矢产生变化而带来在变化的牵连速度从而产生加速度, 是造成柯氏加速度的两个因素. 这一项不是因为在动系中的某特定位置而造成的, 事实上与  $\mathbf{r}'$  无关, 决定性因素是“相对动系有速度”.

<sup>14</sup>注意, 以下整个过程都可以脱离具体的坐标系而计算, 这就为坐标系的选取(种类是直角坐标系, 极坐标系还是自然坐标系, 方向如何)彻底提供了自由.

最后值得注意,如果  $\omega$  和  $\beta$  恒为零,这也并不少见,那么这样的动系就是平动系(translational frame).此时公式极为简单,没有柯氏加速度,牵连量就是动系原点或任意固连点的量:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}' , \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}'$$

### 2.3.2 刚体变换

刚体的变换是点变换的直接推论.同样地,首先已知动系相对定系具有原点速度  $\mathbf{v}_C$  和加速度  $\mathbf{a}_C$  以及角速度  $\omega$  和加速度  $\beta$ ,又已知定系中刚体基点速度加速度,现在记作  $\mathbf{V}, \mathbf{A}$ .事实上我们还要给出刚体自己的角速度角加速度才算是对刚体的完整描述,它们为  $\Omega, B$ .那么绝对的和相对的各个量之间的关系为:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_C + \omega \times \mathbf{R}' + \mathbf{V}' , \quad \Omega = \omega + \Omega'$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_C + \beta \times \mathbf{R}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{R}') + 2\omega \times \mathbf{V}' + \mathbf{A}' , \quad B = \beta + \omega \times \Omega' + B'$$

证明过程留作练习由读者自己思考.

## 2.4 运动的牵连

最后本节旨在枚举一些在运动学解题中十分常见的初等模型与结论.

### 2.4.1 接触系

两个几何图形具有一个交点是一件非常常见的事情.交点将同时与两个几何图形保持结合关系.动态地看待这个问题,我们可以分别利用两个几何图形自身的运动和交点相对两者的运动合起来写出交点的速度矢量与加速度矢量来,但是作为同一个研究对象两种写法的结果理应相等.这构成了一组方程.

尤其是,在上述“相交系”中我们还有一类十分独特的情形,就是两个几何图形相切.两个平面形刚体如果始终保持相互接触,其轮廓之间就是这样的关系.此时要知道客观地这形除了一种约束:不是让两个刚体做任意运动都可以让两者保持相切的.所以必然存在所谓的约束方程(equation of constraint).而这个方程的列法其实就是基于之前说的接触点的速度的一致性.

让我们看一个例子,它不仅帮助我们理解接触系,还可以帮助我们理解纯滚系.就是经典的在粗糙的地面上做匀速纯滚动的圆盘.首先应当注意到,涉及到所谓的“瞬时接触点”时可能指的是以下三个点之一:

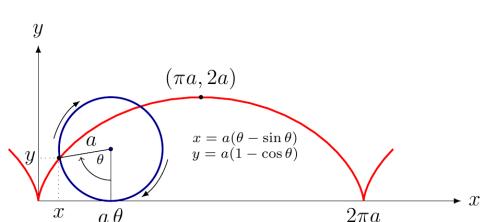


图 2.11: 圆盘在地面上做纯滚动  
鼠做匀速直线运动.

1. 刚体 1 上的定点  $P_1$ . 在这里取盘为刚体 1, 此时这个点是做旋轮线运动的那个点, 此时恰好位于最低位置.
2. 刚体 2 上的定点  $P_2$ . 在这里取地面为刚体 2, 那么这个点就是一个静止的点.
3. 动点  $P_3$ . 就是每时每刻的切点形成的运动对象.在这里我们可以把圆盘变为圆筒, 并且让一只松鼠在圆筒内部跑动以保持在最低位置, 也就是每时每刻的切点.那么松鼠的速度与加速度如何?

我们有什么结论呢?如果把  $P_1$  的瞬时速度在法线方向与切线方向的分速度与加速度写出来,分别是  $v_{1n}, v_{1\tau}, a_{1n}, a_{1\tau}$  并约定法向以向刚体 1 内侧为正,切向可以以切线的任意一个方向为正. $P_2$  同理为  $v_{2n}, v_{2\tau}, a_{2n}, a_{2\tau}$ .那么让我们考虑一下  $P_3$  的速度与加速度.这就不难发现,如果采用动点动系法,就有:

速度:无论相对刚体 1 还是 2, $P_3$  的速度都是牵连加相对.牵连速度就是定点的速度,但相对速度由于点的轨迹就是刚体的轮廓,故方向必然在切线方向.然后由于速度的唯一性,这可以给出:

$$v_{1n} = -v_{2n}$$

加速度:道理是相同的,但需要注意两点,一是相对加速度具有了法线方向的分量.二是如果严格换一个刚体的转动系往往带来柯氏加速度.具体解题时这仍然不失为一种常见的解题思路,但是难以总结现成的美妙,下一小节通过添加纯滚动这一更强的结论我们可以得到相应的方程.但是这个方程肯定是存在且可列式的,毕竟:

以上两个方程构成对接触系的约束的刻画.

### 2.4.2 纯滚系

上面的圆盘在地面上发生的运动实际上还是纯滚动.我们将首先给出纯滚动的定义,再来讨论纯滚动时的更强的附加条件,毕竟纯滚动相比简单的接触系还多一个约束.

事实上考虑相对运动就知道了,接触点在刚体 1 或 2 上相对运动的弧长就是相互滚动过的接触弧长,在两个刚体上应当具有公共值,这便是纯滚动的定义.这就是说:

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_2 = \dot{s} \boldsymbol{\tau}$$

最后再利用  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{1c} + \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_{2c} + \mathbf{v}'_2$ .便得到了附加条件:

$$v_{1\tau} = v_{2\tau}$$

这就是常见的纯滚条件一,也就是说只有当相互接触的两个刚体定点切向速度一致才构成纯滚动.否则就是纯滚动的反面:必有相对滑动,俗称“连滚带滑”.

考虑加速度我们将得出一个不可思议但容易忽视的结论.首先注意到,如果两个刚体角速度分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ,作为平面问题写成统一正方向的标量.而再设两刚体在接触点处轮廓的曲率为  $k_1$  和  $k_2$ .那么由于相对两刚体点在轮廓上的运动造成的单位时间切线方向的转角为:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_1}{ds} \frac{ds}{dt} = k_1 \dot{s}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{d\theta_2}{ds} \frac{ds}{dt} = k_2 \dot{s}$$

而每当点成为切点两切线也会重合成为公切线,那么两个转角的和就是单位时间内两个刚体的相对转角:

$$\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} = |\omega_1 - \omega_2|$$

最后,列出对刚体 1 和 2 牵连 + 柯氏 + 相对应当一致的方程:

$$a_{1n} - 2\omega_1 \dot{s} + k_1 \dot{s}^2 = -(a_{2n} - 2\omega_2 \dot{s} + k_2 \dot{s}^2)$$

整理得到纯滚条件二:

$$a_{1n} + a_{2n} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{k_1 + k_2}$$

这是一个必然大于零的表达式<sup>15</sup>,它意在,两个相接触的点必然后来会分离,这个分离加速度只与两刚体瞬时转动快慢和接触点弯曲程度有关,与平动转动加速度都没有关系.

### 2.4.3 约束系

约束是一种普遍存在且可以普遍讨论而有很广的适用范围的物理现象.本节并非要详细讨论约束,这一点在之后第三章静力学中再加以详细讨论.这里只讨论两个问题:绳系和杆系.

<sup>15</sup>注意  $k$  本身可以小于零,但两个  $k$  的和必然大于零.

对于不可伸长的轻绳模型,如果它也被拉直(因为内部受力不为零又没有外力).那么在运动学层面上就等价于不可伸长的轻杆.设杆长为  $l$ ,把两端点 1 和 2 速度加速度沿平行与杆与垂直与杆方向分解,具有关系:

$$v_{1\perp} - v_{2\perp} = \omega l$$

$$v_{1\parallel} - v_{2\parallel} = 0$$

$$a_{1\perp} - a_{2\perp} = \beta l$$

$$a_{1\parallel} - a_{2\parallel} = -\omega^2 l$$

其中第二个关系就是著名的端点沿杆方向分速度必须是常数.对于绳子,即使绕过了定滑轮,显然沿定滑轮的切向速度也一直不变,因为绳子不可伸长.

最后,如果绳子允许弯曲但不允许伸长,其运动学约束方程该如何列?那就要求绳子上每一点在“局部”沿切向方向没有相对速度,表示为公式就是:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

注意这个条件不可以写为:

$$\frac{dv_\tau}{ds} = \frac{d(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau})}{ds} = 0$$

# 第三章 动力学

## 3.1 牛顿定律

### 3.1.1 概述

中世纪到近代以来物理学的发展,可谓沧海桑田,旧的观点被否定,几十年以后突然又以全新的面貌出现在物理学理论中. 其中,实验中观察到各种令人惊诧的结果,无论物理学所依托的数学形式一变再变,要说亘古不变的主题,恐怕只有自然界的神奇与深邃,和我等凡人难以参透其中奥妙却仍为之孜孜不倦研究的决心. 物理是一门研究自然界存在的运动并提出解释与理解方法的学科. 运动形式多种多样,变化万千,但很多都被我们或多或少地解释,其实总结来看,从古至今我们也仅仅拥有过两类解释:一类由牛顿提出,一类则来自爱因斯坦. 前前后后经历了大概以下发展:

亚里士多德: 天体运行,自由落体是自然 (nature) 的运动; “树欲静而风不止” 是强迫 (violent) 的运动. 但错误地认为“物体越重,下落越快”

伽利略: 辩证地看待亚里士多德的观点,开创性地提出相对性原理,成功论证与形成惯性与常见运动的正确认识.

笛卡尔,惠更斯等: 成功得到大量动力学公式,包括后来的牛顿第二定律,动能的表达式与能量守恒定律,

牛顿开创的相互作用观: 开创性的提出物质间存在相互作用,相互作用是改变物质运动状态的原因. 并很好地把天体的运动归结到互相之间产生的相互作用上. 后人建立了场的理论以后,超距的粒子间相互作用就不再被理论学家们采纳了,而要理解为场与粒子的相互作用,再晚一点,场和粒子都被赋予了波粒二象性,粒子也要被理解为场,但所有场都要被分解为平面波,平面波又要被量子化. 如果没有相互作用,那么这些平面波的运动状态就不会发生改变,只有相互作用才会改变其运动,或传播方向发生偏折 (发生散射),或强度发生改变 (粒子的产生与湮灭). 牛顿的观点是以相互作用 (interaction) 为核心的观点.

拉格朗日,哈密顿等: 将牛顿的结果与观点上升到分析力学 (analytic mechanics) 的高度. 将复杂体系的结构浓缩在统一的一个能量函数或作用量泛函数中. 为后来场论建立和相对论,统计力学,量子力学的发展都提供了理论支持.

马赫: 批判牛顿的过于绝对的时空观. 预言质量分布会对惯性本身产生影响.

爱因斯坦开创的几何观: 仿佛又回到了亚里士多德,不仅仅是无相互作用下的匀速直线运动,一切在万有引力下的天体运动其实也是“自然”的运动. 看上去复杂的曲线运动不过也是沿对被引力所扭曲的弯曲时空几何下的天然“直线”---测地线 (geodesic) 运动而已. 对引力问题提出开创性的解释. 率先描绘了 20 世纪建立的若干理论的物理图像.

天体物理,粒子物理: 爱因斯坦以后的理论研究中很多问题还处于开放状态. 时而采用牛顿的相互作用观,时而采用爱因斯坦的几何观. 是一种两个图像的有机结合.

我们今天说**经典力学**(classical mechanics) 大多数情况即指**牛顿力学**(Newtonian mechanics), 指的是由伽利略最初引领, 笛卡尔, 惠更斯等奠基, 牛顿集大成的一套理论. 它以伽利略的**两种新科学的对话与数学展示**(Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze) 和牛顿的**自然哲学的数学原理**(Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica) 两篇文献为核心. 逻辑上以质点的牛顿三大定律为基础. 不包括后来上升到的分析力学层次, 作为绝对时空观适用伽利略变换, 不兼容相对论.

牛顿定律总结如下:

- 
1. 第一定律: 在惯性系中, 一个质点应静止或匀速直线运动. 除非有外力施加于物体.
  2. 第二定律: 在惯性系中, 质点受力的矢量和  $\mathbf{F}$  等于其质量  $m$  与加速度  $\mathbf{a}$  的乘积.
  3. 第三定律: 一个质点对另一个质点施加作用力时, 另一个质点同时将施加反作用力于第一个质点, 作用力与反作用力等大反向共线.
- 

三个定律之间的联系是很值得讨论的. 对三个基本定律的设置反映了很多物理思想<sup>1</sup>. 分析如下:

### 3.1.2 牛顿第一定律

牛顿第一定律旨在阐述时空的平直性.

也正基于以上这一点, 我们不能仍为牛顿第一定律可以由牛顿第二定律出发推导. 它不是表面上的牛顿第二定律中  $\mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{a} = \mathbf{0}$  的特例. 恰恰相反, 即使从形式上看, 也应当先由牛顿第一定律给出**惯性系**(inertial frame) 的概念才能适用牛顿第二定律. 那么怎样的参考系是惯性系呢? 牛顿第一定律是暗含认可**绝对惯性系**(absolute inertial frame) 的存在性的. 在这样第一个系中牛顿第一定律才可以成立. 这一个系无非就是由某种特殊运动状态的观察者(绝对观察者)建立的三维欧几里得空间坐标系外带一维时间坐标. 而只要质点不受力(力是对相互作用的描述, 只要远离其它所有物质就会使质点成为**孤立**(isolated)的), 就会静止或匀速直线运动, 所谓匀速直线运动是指:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot t$$

其中三个速度  $v_x, v_y, v_z$  都是常数. 但是我们发现, 相对这个系做匀速直线运动的另一个无自转观察者建立的系中, 原来做匀速直线运动的质点现在依然做匀速直线运动. 所以这样的系也叫做**惯性系**, 可以叫做**相对惯性系**. 即: 惯性系就是任何相对绝对惯性系做匀速直线平动的参考系. 而惯性系就是牛顿定律成立的前提条件.

所以牛顿的经典力学体系的第一大特点是承认绝对惯性系的存在性. 实际上承认这一点也几乎等价于承认了时空的平直性. 只不过在众多彼此等价(任何物理实验都不足以判断这些系的不等价性)的系中, 牛顿认为还应当有一个第一性的, “最初”的惯性系.

### 3.1.3 牛顿第二定律

牛顿第二定律是牛顿定律的核心, 旨在描述相互作用对运动的影响.

**相互作用**(interaction) 是牛顿经典力学后经过了几百年发展而浓缩出来的更普遍的概念. 如果没有相互作用, 物质基本的运动模式就是“惯性”的, 如匀速运动的粒子或传播的平面波. 任何使物质偏离这种“惯性”运动的模式的原因就都在相互作用上. 相互作用的模式是多种多样的, 除了牛顿指出的下面仔细讨论的

<sup>1</sup>例如爱因斯坦狭义相对论的两个假设在某种意义上与牛顿第一第二定律的逻辑完全一致. 都是先定义时空背景再阐述物理规律的共性.

情形,光会因为与物质相互作用而产生吸收和散射,两个惰性气体原子靠近时两个电子云也会产生量子的诱导极化而使原子间产生范德瓦耳斯吸引.这些都是广义的相互作用,但是为了描述它们,前者需要借助波来描述光这种物质,后者还需要借助波函数来描述电子云,相互作用更是要依赖于薛定谔方程等来理解.所以经典物理理论有它的适用性,这一点在下面我们需要记住.

这也就是牛顿经典力学体系的第二大特点了:物质的基本模型一律视作质点(mass point)<sup>2</sup>,相互作用的基本模型一律视作力(force),质点具有惯性这一基本属性,用质量(mass)来描述.

从牛顿第二定律  $F = ma$  形式上看,难免会由于数学思维得出“用力来定义质量的多少”或者是“用质量定义力的大小”这样的观点,而进入力与质量循环定义的误区.但实际上谁也没有定义谁.因为正常的物理思维是先要提前定义质量和力:

首先质量是受力物体所固有的属性之一,它具有广延性:如果把质量为  $m_1$  的质点与质量为  $m_2$  的质点复合为一个大质点,其质量变为  $m_1 + m_2$ .可比性:任意两个质点的质量都可以依照在同样大小的力下的行为来比较其质量的比例关系<sup>3</sup>.和固有性:只要质点没有变性,质量就不变,所以在不同参考系去看同一个质点,在运动的不同时刻质量都是严格不变的,也称“质量守恒”,我们将避免这一称呼,因为一般的守恒量只是针对一个参考系中的过程中的各个状态,而换一个系看守恒量往往要变,质量却显然不变,这是其一;另外相对论下质量就不再守恒了,它不普遍,这是其二.

力也是对固有的相互作用的强度做的描述.它也是固有的,应当有一种合理的公式去描述施力物体的状态如何影响施加的力(这个力也与受力物体的状态有关).而且如果换一个参考系考虑,力的强度是不变的.根据力对质点产生的效果,力也应当具有矢量性,不同两个力是可以比较的,很多情况下甚至可以叠加:多个施力物体互不影响各自施加的力,同时作用于同一个受力物体,在生活中这种现象非常常见,不难得出这样的总结.

于是才有了牛顿的著名论断:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

这样一个定律内容是丰富的,它首先是兼容于伽利略相对性原理从而自洽:在另外的惯性系中考察,  $F$  和  $a$  都是不变的.但是又不是兼容于相对性原理的唯一解决方案,狭义相对论,就提供了另一套可能性,在低速极限  $v \ll c$  时狭义相对论的动力学方程表达式和这并无二致;其次质量  $m$  作为系数联系了力(原因)与加速度(结果)这并不是偶然,它也是为了和叠加原理相协调:一份的力作用在一份质点上产生这样的加速度,那么把两份力各自作用在两份质点上那就还是产生同样的加速度.所以力除以质量决定运动学加速度<sup>4</sup>那是天经地义.至于为什么两份力作用在原来的一份质点上会产生加速度加倍的效果,这就是经典力学中的类似于公理性质的存在了.

### 3.1.4 牛顿第三定律

牛顿第三定律是对“相互作用”中的“相互性”的刻画,暗示了动量与角动量守恒.

任何物理理论,如果妄想在短短几条式子中道尽万千世界发展与变化的规律,都是玄学而不是科学.科学的精神是要基于事实,进行总结与归纳,借助数学进行基本的抽象与再创造.所以现实就是,世界的运行本就是复杂的,不可预测的.物理学的发展史也就充满了惊人的转折:每当人们以为在某一个大的领域有简单而清晰的图像共识的时候,总是会有意外发生告诉人们特殊情况下理论不再适用.原则上,没有任何命题能够成为物理学上的公理:它能无条件适用于从宏观到微观的方方面面.

牛顿清楚地意识到了物质与物质之间相互作用的复杂性,是不可能用几个简单的公式写出所有情况下他的理论中两个任意质点之间的作用力的.所以退而求其次,用牛顿第三定律来描述了所有情形下这样的力需要满足的条件.的确合情合理.但是又看牛顿第三定律的提法本身是否合理?

<sup>2</sup>牛顿甚至认为光也适用于质点模型

<sup>3</sup>事实上用碰撞实验可以给出一个更简单的比较质量的方法,让待测质量的质点以一个单位的速度去正碰撞一个以  $x$  个单位速度运动的单位质量的质点,若恰好停下就说明待测质量为  $x$  个单位质量,若没停下就改变  $x$  的值直到停下.

<sup>4</sup>即  $F/m = f(v, a)$

实际上我们先注意到动量守恒和角动量守恒的条件比牛顿第三定律的条件要强(也更本质):我们可以由前者推导出后者.以动量为例,动量是用来描述一个体系的动力学运动趋势的.动量守恒就意味着,如果一个孤立的体系的一部分“平均地”在初始时刻具有向前运动的趋势,比如一部分向前运动而另一部分静止.那么之后就绝对不可能演化为向后运动.或者还可以这么理解:如果看到一个质点在做一个非匀速直线运动:比如忽快忽慢的直线运动,那么显然单独看质点本身动量并不守恒.但是这必然意味着质点不是孤立的,必须和别的体系一同看作一个整体,质点增加或减少的动量必须由体系的另一部分的动量减少或增加来抵消,来满足整体动量守恒的需求.如果体系仅仅由两个质点构成,再把动量的增加或减少的快慢理解为受力(动量定理),我们就有了牛顿第三定律中关于相互作用力等大,反向的部分.

所以动量守恒可以用来“证明”牛顿第三定律中的一对相互作用力.同理角动量守恒则可以用来证明牛顿第三定律中质点间相互作用力共线的部分.最后读者可以验证牛顿第三定律的数学形式为<sup>5</sup>:

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}$$

之所以这么理解是因为,动量守恒和角动量守恒显得更普适.事实上,它们是体系物理规律在空间平移对称性和旋转对称性下具有协变形式的直接推论.这一点是由近代著名的[诺尔特定理](#)(Noether Theorem)这一数学定理精确证明了的.

也正是牛顿第三定律暗示了牛顿经典力学体系的缺点.因为我们无法解释牛顿第三定律的“自然性”,取消牛顿第三定律所构成的体系无非是具有外力的非孤立系(动量不守恒),牛顿第三定律为体系增添的“结构性要求”并没有很好地由理论解释与包含.所以才有了后来建立在对守恒量,尤其是能量进行强调的分析力学理论的提出.

### 3.1.5 质点系与它的牛顿定律

对于复杂体系,牛顿提出一种可能的等效观点,就是把任意这样的体系看做是一种离散的质点系的推广.质点系由质点集合  $\{(m_i, \mathbf{r}_i)\}$ , ( $i = 1, 2 \dots n$ ) 组成.我们只要找到从质点理论到有限质点构成的质点系理论中那些不变的结论,就有理由相信这些结论可以推广到复杂的真实体系.因为真实体系被期待可以用一个足够大数目的质点系来近似.对于复杂的质点系首先需要引入[质心](#)(center of mass, CM) 的概念:

$$\overline{\{(m_i, \mathbf{r}_i)\}} = (m_C, \mathbf{r}_C)$$

我们的做法是:直接把质心理解为一个新的质点,它具有新的质量  $m_C$  和位置  $\mathbf{r}_C$ ,并满足表达式:

$$m_C = \sum_i m_i \quad ; \quad \mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

可以把上式读作:质心的质量等于质点系的总质量,质心的位矢是各个质点位矢关于质量的加权平均.

质心的求法是符合交换律与结合律的.这在质量上是显然的,因为质心质量就是各个质点质量构成的连加式.对于质心位矢,考虑总质量为  $m_1$  的第一个质点系  $(m_{1i}, \mathbf{r}_{1i})$  和总质量为  $m_2$  的第二个质点系  $(m_{2j}, \mathbf{r}_{2j})$  复合而成的整个质点系,如果直接算两个体系质心形成的质心:

$$\frac{m_1 \mathbf{r}_{1C} + m_2 \mathbf{r}_{2C}}{m_1 + m_2} = \frac{\sum_i m_{1i} \cdot \frac{\sum_i m_{1i} \mathbf{r}_{1i}}{\sum_i m_{1i}} + \sum_j m_{2j} \cdot \frac{\sum_j m_{2j} \mathbf{r}_{2j}}{\sum_j m_{2j}}}{\sum_i m_{1i} + \sum_j m_{2j}} = \frac{\sum_k m_k \mathbf{r}_k}{\sum_k m_k}$$

可以发现这就是整个体系的质心.这种方法就是“组合法”,比如求几根棍子的质心,可以把棍子替换为在质心的质点再求.由此还可以引申出“割补法”或者“负质量法”,不过就是把上式反过来理解:如果我们

<sup>5</sup>  $\mathbf{F}_{12}$  表示 1 给 2 的力.

要求第一个体系的质心, 不难验证可以这样求:

$$\mathbf{r}_{1C} = \frac{m\mathbf{r}_C - m_2\mathbf{r}_{2C}}{m - m_2}$$

动态地看待求质心的式子, 还可以发现, 求导以后, 我们得到了质心作为一个在运动的质点, 其速度, 加速度也是可以直接从原质点系来做加权平均的:

$$\mathbf{v}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} ; \quad \mathbf{a}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{\sum_i m_i}$$

为了推导出质点系的类似的牛顿定律, 我们发现牛顿三大定律是缺一不可的. 当然原则上如果没有牛顿第三定律, 我们就把作用在每一个质点  $m_i$  上的合力, 不管施力物体是谁, 记作  ${}^t\mathbf{F}_i$ , “t” for “total”. 原则上我们也可以得到:

$${}^t\mathbf{F} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \quad {}^t\mathbf{F} = \sum_i {}^t\mathbf{F}_i$$

这一点很容易证明, 只需要把每个质点的牛顿定律加起来即可. 但是注意到牛顿第三定律既然正确, 我们就可以做进一步的研究: 把任何质点受力分解为内力(internal force) 和外力(external force):

$${}^t\mathbf{F}_i = {}^{in}\mathbf{F}_i + {}^{ex}\mathbf{F}_i$$

内力指  $i = 1, 2 \dots n$  个质点之间一对一对存在的力, 所以实际上不如写明:

$${}^{in}\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}$$

最后单独的那个真正的外力以后直接简写为  ${}^{ex}\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i$ .

经过这么一番折腾完以后, 我们还是把所有质点的牛顿定律来求和, 但是注意到由于牛顿第三定律关于相互作用力等大反向的部分, 内力相互抵消, 得到:

$$\mathbf{F} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \quad \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

这就是质点系的牛顿第二定律, 相比上面那个也对的直接把每个牛二加起来的表达式, 能引起注意的变化只有一点, 那就是: 不需要考虑内力! 但正是这一点极大地简化了很多实际问题的分析.

值得一提, 我们顺理成章地要考虑另外两个层面的规律, 一是“对质心”, 二是“相对质心”. 前者值的是, 把质心作为一个质点来研究问题. 那么问题也很简单, 利用之前证明过的:

$$\mathbf{a}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow m_C \mathbf{a}_C = \sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

就可以得到:

$$\mathbf{F} = m_C \mathbf{a}_C$$

这就是著名的质心运动定律(motion law of CM). 特殊的, 如果合外力  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . 那么退化到质心守恒: 质心做匀速直线运动或者静止.

最后我们提出质心系的概念. 质心系(frame relative to CM) 指: 原点在质心的平动欧几里得坐标系. 结合我们已经学过的和将来要学的所有内容我们把其性质罗列如下, 请读者能够给出证明的直接证明, 给不出的带着问题往下学习:

- 质心系虽然有非惯性力, 但非惯性力与原力系主矢和为零.
- 质心系虽然有非惯性力, 但非惯性力系对质心的主矩为零.
- 质心系是零动量系.
- 质心系虽然有非惯性力, 但非惯性力在过程中总功和为零.
- 取质心为原点能使质点系二阶矩最小, 故刚体相对所有平行轴中以过质心的轴转动惯量最小.
- 只有取质心才能写出柯尼希定理.

### 3.1.6 非惯性系的处理

虽然牛顿定律只在惯性系中成立.但是如果我们选取一个相对惯性系的转动系,其原点速度加速度为 $v_C$ 与 $a_C$ .而角速度与角加速度分别为 $\omega$ 与 $\beta$ .本来在原来的惯性系中研究一个质点,正确的式子是:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

现在换了参考系以后,将不能仿照上式写出一个依然正确的式子.但是加速度变换总是对的:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'$$

而我们也永远认为力矢量在参考系变化下是大小与方向都不变的:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'$$

代入就足以得到依然正确的,仅仅用新的非惯性系中的各个参量表示的类牛顿定律.我们以后将直接叫做非惯性系中的牛顿定律:

$$\mathbf{F}' + (-m\mathbf{a}_C) + (-m\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}') + [-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] + (-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') = m\mathbf{a}'$$

可以发现,这类似于需要为质点运动虚构一些力,它们全都称作**惯性力**(force of inertial).包括:

- 平动惯性力  $-m\mathbf{a}_C$ ,典型的情况就是平动而非转动的非惯性系中的惯性力.特点是一个恒力,而与质点的运动状态无关.
- 切向惯性力  $-m\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}'$  与惯性离心力  $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ ,典型的情况是绕轴做旋转的参考系.特点是这两个力仅仅依赖于质点的位置,离轴越远力越大,在轴上力就消失了.
- 柯里奥利力  $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ,典型的情况是相对转动系还有运动的情况.特点是给出一个与位置无关,但是正比与速度大小,方向始终垂直于速度方向的力.

如果我们的研究对象是一个刚体而非质点,那么相当于每一个质点上都要受到不同的惯性力.此时如果考虑这些所有力作用在刚体上的等效合力和力矩,那么将是一个非常复杂的情况,尤其是,各个柯里奥利力将对刚体整体造成所谓的“回转力矩”,用这个观点可以解释很多第七章刚体中的现象,感兴趣的读者可以参考相关资料.

## 3.2 动量定律

这四节我们将罗列质点与质点系动力学的核心内容.读者应当具有初等的牛顿理论的基础.这一部分与三个牛顿定律的关系如何?首先它们是牛顿定律的自然延伸,属于并占据经典力学的主要部分.其次这些结论与相关推论适用性很强.比如三个守恒律:动量能量与角动量的守恒几乎是在所有物理理论中普遍的.从内容上看关于质点系的定律自然就包含了单质点的相应特殊情况.而写法总是有三种:相对地面系的,相对质心系的和把质心作为质点的.联系三种写法的是质心系独有的各个柯尼希定理.最后,能量比较特殊我们单独列一小节多加阐述,具体的碰撞问题加一节,最后再补充一个新的位力定律.便构成了一 $3 \times 3$ 条定律为主干的本章的内容.实际上也就是牛顿经典力学的核心部分.

### 3.2.1 质点的动量

质点的**动量**(momentum) 定义为:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

很直接地可以推导出质点的动量定理(law of momentum) 来, 用  $\mathbf{F}$  表示合力:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

证明过程就是把牛顿定律右侧拿来等量代换.

质点动量守恒并不是守恒律最常见的提法. 但是不管怎样, 我们能看出来, 如果在某方向<sup>6</sup>分力为零, 那么该方向分动量导数为零, 从而是一个不变量.

### 3.2.2 质点系的动量

依据上一节的符号约定, 质点系  $\{m_i, \mathbf{r}_i\}$  中第  $i$  个质点的牛顿定律写作:

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} = m_i \mathbf{a}_i$$

所谓质点系的动量定理, 无非就是把上式拿去对每一个质点求和, 然后等号右侧化为动量的形式. 过程中我们发现需要定义:

质点系的总动量:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$

外力矢量和:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

过程中内力全然抵消, 这就导致了最后表达式简单地为:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

接下来就是研究质心的两个层次, 一是把质心作为质点研究等号左侧的“作用” 和等号右侧的“动力学量”; 二是考虑相对质心系的引入惯性力以后的新写法.

如果在地面系中质点系受到一个力  $\mathbf{F}_\alpha$ , 那么把这个力移动到质心上以后, 我们认为这个力是不需要改变的. 但是如果考虑相对质心系, 固然原来的力也是存在且不变, 但是还得考虑惯性力. 那么总的合力推导出来应当是:

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}' = \mathbf{0}$$

后者是因为惯性力的合力  $\sum_i -m_i \mathbf{a}_C = \sum_i -m_i \mathbf{a}_i = -\mathbf{F}$ . 我们发现有:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}'$$

形如上式的式子都可以叫做柯尼希定理(König theorem). 再来看动量, 质心动量就应当是质点系总动量, 而相对质心系动量必然为零:

$$\mathbf{p}_C = \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{0}$$

前者由于质心的定义很容易看出来, 后者一般被叫做: 质心系是零动量系, 两者之和符合:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_C + \mathbf{p}'$$

这就不难看出:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= \frac{d\mathbf{p}_C}{dt} \\ \mathbf{F}' &= \frac{d\mathbf{p}'}{dt} \end{aligned}$$

<sup>6</sup>必须是直角坐标! 比如极坐标下  $F_\theta = 0$  但  $p_\theta$  不守恒,  $L = rp_\theta$  才是对应的守恒量, 个中缘由涉及到分析力学.

最后我们讨论普遍的动量守恒(conservation of momentum).

第一,动量守恒是普遍的,虽然表面上看  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$  一个体系的动量只要外力不为零就会有非零的导数.但是根据动量守恒的精神,一个体系的动量增必然以另一个体系动量的减为代价,也就是需要注意到既然存在外力  $\mathbf{F}$ ,那就需要考虑力作用的相互性.只要把所有施力物体都归入同一个体系使相互作用封闭.那么等号左侧只能是零,那么等号右侧就会有普遍的动量守恒.

第二,有些场合动量不以质点为载体而是以场为载体.动量依然守恒,毕竟我们将认为场给质点的力与“质点给场的力”构成反作用力符合牛顿第三定律.事实上只要可能涉及到超距作用就一定是要用场来处理的,不用场处理可能导致不精确甚至谬误的结果,这是因为牛顿第三定律都不一定适用.只要想想一个质点位置突然改变,由于相互作用传递速度必然有限导致相隔一定距离的第二个质点受力变化将会延迟,就不能使得这个力等于同一时刻的反作用力,那么两质点的动量和就不再守恒.另一种典型的情况是两个电流元之间的磁场安培力也不符合牛顿第三定律,全都是因为有场的动量未计入计算的缘故.所以这些场合,如果牛顿第三定律“近似”适用,我们才说质点系的动量“近似”守恒.严格的动量守恒设计场论的知识,有兴趣的读者可以进行相关学习.

### 3.3 角动量定律

角动量的逻辑与上一节是完全一致的.只不过在牛顿定律的数学处理上要多一步罢了.

#### 3.3.1 质点的角动量

选取一个参考系的原点  $O$  以后便可以写出质点的位矢  $\mathbf{r}$ .那么质点受力对  $O$  的力矩(moment of force, moment, torque) 定义为:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

而为质点则定义一个动力学量也就是角动量(angular momentum):

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

之所以这么做,一种想法是对牛顿定律  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  两侧用  $\mathbf{r}$  叉乘的一种可能的构造思路<sup>7</sup>.这就能给出角动量定律(law of angular momentum):

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

证明过程只消注意到右边莱布尼茨法则出来两项的另一项  $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

角动量定律有一个值得注意的点,那就是矩(moment)的中心的选取的任意性.角动量(动量的矩)和力矩都因为是  $O$  点计算的才具有位矢  $\mathbf{r}$ ,这个点叫做矩心(center of moment).而选取不同的矩心的结果就会产生不一样的定律的表达式形式,它们都是对的.但是解题时何以选取?这个复杂的问题我们下一章再做简要介绍.

另一个点是原则上必须选取不动的点作为矩心.选取动点暗含两层意思,一是,可能需要把每一个粒子对动点的动量理解为相对速度对应的动量.二是,可能在求角动量的导数时要求的是跟随动点的角动量的导数.无论哪一点都将使得相应结论不再正确.当然,如果两种可能的更改都没有发生,即,仅仅是这一时刻对这一点列瞬时的角动量定律,下一时刻换下一个点列.那么这就是构成一个时时刻刻都成立的等式,只有在这种意义下角动量定律才可以原封不动地应用.否则需要重新从牛顿定律出发加以推导.

质点的角动量守恒也不是一个典型的结论.但是有一种典型的情形:就是平面上一个有心力作用下的质点运动是角动量总是守恒的.因为此时  $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{0}$ .

<sup>7</sup>Noether 定理才是严谨的构造思维.

### 3.3.2 质点系的角动量

定义质点系的总角动量:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

外力力矩和(不需要包括内力):

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

每一个质点的牛顿定律,现在我们用每一个质点的位矢做叉乘:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i$$

然后再来求和,注意到牛顿第三定律中的“共线”性  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$  让第二项内力也一对一对抵消了.于是得到质点系的角动量定律:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

同理,考虑把外力移动到质心形成的总力矩和相对质心系的力矩,把从质心出发的各个质点的位矢记作  $\mathbf{r}'_i$ ,就有:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F} , \quad \mathbf{M}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$$

后一个式子隐藏着一个关键信息:质心系中惯性力以质心为矩心时力矩和为零,这可以如下推导:

$$\sum_i \mathbf{r}'_i \times (-m_i \mathbf{a}_C) = - \left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{a}_C = -\mathbf{0} \times \mathbf{a}_C$$

而质心的角动量与相对质心的总角动量为:

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_C \times m_C \mathbf{v}_C , \quad \mathbf{L}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$$

注意后一式中由于换系,相对质心速度应当为  $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C$ .如此定义以后依然可以符合柯尼希定理:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_C + \mathbf{M}'$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + \mathbf{L}'$$

对于后者我们简略写出证明过程:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_i (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i) \\ &= \mathbf{r}_C \times \left( \sum_i m_i \right) \mathbf{v}_C + \left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times \left( \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \right) + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \mathbf{L}_C + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{L}' \end{aligned}$$

于是也就有质心的角动量定律和相对质心的角动量定律:

$$\mathbf{M}_C = \frac{d\mathbf{L}_C}{dt}$$

$$\mathbf{M}' = \frac{d\mathbf{L}'}{dt}$$

容易看出角动量守恒(conservation of angular momentum)也是普遍的.而场的角动量也是可能涉及超距作用时需要考虑的因素.

## 3.4 能量定律

能量的情况就有一些不一样了. 在动能定理的层面上逻辑相似, 但是内力不再可以忽略, 而且动能往往不守恒, 即使守恒也不普遍, 能量普遍地需要守恒, 但这又不能在经典力学框架下加以证明. 纯属特殊情况下的特殊结论或是一种令人信服的归纳假设.

### 3.4.1 质点的动能

力作用在质点上对质点做功(work) 的功率(power) 定义为:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

一个具体的过程才可以说做功, 它等于功率的时间积分, 也可以按照力点乘位移来做积分:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

质点的动能(kinetic energy) 则定义为:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

这么定义的出发点也可以是从  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  出发, 两变同时点乘  $\mathbf{v}$  得到所谓的动能定律(law of kinetic energy):

$$P = \frac{dT}{dt}$$

证明过程只需要注意到  $d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = d(v^2) = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 2v dv$  为恒等式.

质点动能守恒也不是一个典型的结论. 如果质点受的合力始终垂直于质点速度, 那么便有动能守恒. 比如把质点约束在一个光滑的椭球面上做惯性运动, 或者是让电荷在一个任意的不随时间变化的磁场中运动都属于这种情况, 动能是不变量.

### 3.4.2 质点系的动能

定义质点系的总动能:

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

但是, 单独求外力的功率和是没有用的, 因为内力也有它的功率, 且不为零. 所以我们写出整个体系的总作用力的功率:

$$P = \sum_i P_i + \sum_{\{ij\}} P_{\{ij\}} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{\{ij\}} (\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i)$$

顾名思义, 求和  $\sum_{\{ij\}}$  意为对每一对力涉及的后面的向进行求和. 每一项必然涉及到两个质点, 选取好

每一对质点以后就可以写出项来而不在乎选取的顺序. 故如果共有  $n$  个质点的话一共最多会有  $\frac{n(n-1)}{2}$  对, 事实上既然  $ij$  交换要求项本身又不会变, 总是有:

$$\sum_{\{ij\}} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1}$$

这样对每一个质点的牛顿定律点乘质点的速度:

$$\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

同理, 求和可得质点系的动能定律:

$$P = \frac{dT}{dt}$$

同理,考虑外力移动到质心后对质心运动做功的功率和相对质心系的系统所有力的功率和:

$$P_C = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_C , \quad P' = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}'_i + \sum_{\{ij\}} (\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}'_j + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i)'$$

这里也隐藏着两点,一是作用在质心上的力又只需要考虑外力了,因为内力的和本来就是零.二是质心系中的惯性力又因为做功总是零而不需要写在第二个式子中了,也就是:

$$\sum_i (-m_i \mathbf{a}_C) \cdot \mathbf{v}'_i = - \left( \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \right) \cdot \mathbf{a}_C = -\mathbf{0} \cdot \mathbf{a}_C$$

而质心的动能和相对质心的总动能为:

$$T_C = \frac{1}{2} m_C v_C^2 , \quad T' = \sum_i \frac{1}{2} m_i v'_i^2$$

如此定义以后将符合柯尼希定理:

$$P = P_C + P'$$

$$T = T_C + T'$$

证明过程请读者自己完成.同时,也有对质心的动能定律和相对质心的动能定律:

$$P_C = \frac{dT_C}{dt}$$

$$P' = \frac{dT'}{dt}$$

导致能量与角动量和动量不同的原因是,动能守恒绝对不是什么普遍结论,不仅不普遍而且还很罕见.能量才是普遍守恒的.我们细细比较其中区别:

### 3.4.3 其它能量形式

从表面上看,很容易观察出来,即使整个质点系已经囊括了全部的施力物体了,相互作用是封闭的,也就是每一个质点上都没有外力只有内力:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

此时依然总功率可以不等于零:

$$P = \sum_{\{ij\}} P_{\{ij\}} = \frac{dT}{dt} \neq 0$$

从而还和动量,角动量那样的守恒律已经成为了妄谈.

从实质上看,我们对于动量定律角动量定律还有一种说法:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} , \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

力,带来动量的转移;力矩,带来角动量的转移.但是同样的说法换到做功上就不合适了:的确,下式成立:

$$P = \frac{dT}{dt}$$

但是功率不能认为是动能的转移.的确,功率是能量的转移;也的确,功率就是单位时间变成的动能.但是它不一定来自动能.只需要设想两个带正电的小球相互排斥而获得速度,那么显然把其间的力视作相互作用力时,两小球的动能并不是互相转移的关系,而是都因为力做功而获得动能,这个动能来自下面要讲的势能,或者场的能量.

所以能量守恒这一论调,不像另外两个守恒律,至少是不能从牛顿定律中单独推导.但是只要上升到分析力学立刻就可以发现能量守恒是完整体系相互作用不显含时间(稳定体系)的结果.在经典层面上通过补充下面三个独立而正确的说法便可以使得能量守恒可以被证明出来.

## 保守力

保守力意为由势能函数描述的力. 势能函数是至关重要的概念, 为了确定一个体系的运动, 原则上只需要给出势能函数和初始状态便可以完全求解了. 复杂的体系之所以复杂, 一是粒子数大, 二是初始状态随机. 但是各式各样的整体行为, 往往就蕴藏在任意两个粒子的相互作用的形式中. 而这个相互作用我们相信它总是保守的.

就是说, 存在二体相互作用函数, 也就是**势能**(potential energy) 函数  $V$ , 如果两个粒子分别在  $\mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$ . 势能应当只与位置有关 (与速度加速度无关), 也不能含有时间:

$$V = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

而势能决定作用力:

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 V, \quad \mathbf{F}_{21} = -\nabla_1 V$$

如果能够找到这样的势能函数, 那么就把这样的力叫做**保守力**(conservative force).

如何理解以上的形式? 它的等价的写法是:

$$F_{12x} = -\frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad F_{12y} = -\frac{\partial V}{\partial y_2}, \quad F_{12z} = -\frac{\partial V}{\partial z_2}$$

$$F_{21x} = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad F_{21y} = -\frac{\partial V}{\partial y_1}, \quad F_{21z} = -\frac{\partial V}{\partial z_1}$$

$$dV = V(\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_2 - \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_1$$

那么首先这就提出了一个要求, 由于相互作用力总是应当满足牛顿第三定律的, 而且体系应当也具有对称性, 那么势能函数必然只取决于两个质点的相对位矢, 且与两个质点的相对位矢的方向没有关系, 只能和其大小有关系, 也就是说:

$$V = V(R), \quad R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

这自然就可以计算出:

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{dV}{dR} \mathbf{e}_{12}, \quad \mathbf{F}_{21} = -\frac{dV}{dR} \mathbf{e}_{21}$$

其中  $\mathbf{e}_{12}$  和  $\mathbf{e}_{21}$  分别代表 1 指向 2 和 2 指向 1 的单位矢量.

第二点是, 在任一个元过程中, 这一对相互作用内力做的功的和, 一方面由于动能定律等于转化为 1 和 2 的总动能  $dT$ , 另一方面还等于势能的减少:

$$\mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_1 = -dV$$

这就造成了能量函数  $H = T + V$  的守恒:

$$dT = -dV \Rightarrow H|_{t=0} = H|_{t=0} = E$$

在更多情况下, 我们让施力物体静止在固定点, 但是施力物体亦是一个质点系而非质点, 研究单个质点作为受力物体的运动. 那么显然此时质点符合  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . 但是质点依然受到所的合力还是一个保守力, 只需要把它与各个施力物体的势能函数相加, 整体作为这个质点位矢的一元函数即可:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$$

总之, 原则上可以用势能函数描述的力就是保守力. 虽然从中文还是英文的名字来看, 似乎暗示了只要能量守恒就应当视作保守力, 但这是不恰当的. 例如一个不随时间变化的磁场中一个电荷的运动, 显然动能不随时间变化是个常数, 但这绝对不意味着体系的势能函数为  $V(\mathbf{r}) = 0$  或常数. 的确, 这样能够使得“能量函数” $H = T + V$  守恒到一个常数  $E = T|_{t=0}$ , 但是这样的势能函数不能用来刻画磁场给质点的力:

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \neq -\nabla V$$

所以这个力不能用势能来描述,从而并不是保守力<sup>8</sup>.

### 约束力

从微观相互作用到宏观发生了很复杂的变化.但是很多情况下体系依然存在一个势函数.例如单摆的动能和势能就可以写为:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgl(1 - \cos \theta)$$

$$H(\theta, \dot{\theta}) = T + V$$

显然,这里用的不再是摆球的位矢  $\mathbf{r}$  作为势能的坐标.而是换成了  $\theta$  这样的广义坐标(generalized coordinates),对应的广义力  $-\frac{\partial V}{\partial \theta}$  实际上是一个力矩,把广义力乘广义坐标的微分实际上就是释放的势能.我们发现小球受到的力是重力和绳子的拉力,这个势能函数实际上就是只考虑了重力势能.为什么可以这么做?这是因为绳子的拉力就是一个十分典型的约束力.从守恒律的角度来看,它不会影响其他力造成的动能和势能和的守恒.这一点也十分自然,因为这样的绳只的确没有任何机制能够存储能量.

这也就是说,对约束力(constraint force)的要求主要就体现在它不能做功上.显然,上一例中的绳子拉力并不对摆球做功.容易验证,光滑的面接触,不可伸长的轻绳轻杆连接的两个物体,其约束力对约束的单个物体多整个体系做的总功总会是零.它们都是典型的约束力.更详细的讨论见下一章.我们最后以一个例子来看待对约束力的要求.

如果一个体系的两个广义坐标  $q_1, q_2$  对应的物体之间有一个约束  $F(q_1, q_2) = 0$ ,如两个用长为  $l$  的不可伸长的轻杆连接的质点的  $x$  坐标就必须满足:

$$F(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 - [l^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2] = 0$$

那么在任何过程中两个坐标的变化量  $dq_1$  和  $dq_2$  就必须满足:

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2} dq_2 = 0$$

同时作为约束力,对两个物体做功的和必须为零:

$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 = 0$$

这就给出了约束力的条件.约束力应当具有形式:

$$Q_1 = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_1}, Q_2 = \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial q_2} \quad \text{s.t.} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

两个  $\lambda$  就代表了约束力的强度.这个式子的一种最简单情况是,同一个不可伸长的轻杆对两侧两质点的作用力必然是等大反向的.总之,不做总功就是约束力的核心特性.

### 耗散力

从微观到宏观,一个很重要的不同就是对内能(inner energy)的忽视.设想一个静止的小球,用力一掷小球便飞走.在静止时小球内部依然有大量运动的粒子.就纵使设想小球是一个质点系.考虑到内部的势能,加上其总动能便是此时的内能  $U$ :

$$U = V + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

<sup>8</sup>其实在分析力学中如果引入磁矢势  $\mathbf{A}$  那么这个力可以作为  $U = -q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$  的负梯度,这中含有速度的势能叫做广义势函数.但是即使可以定义势函数,习惯上依然不把这个力叫做保守力.因为可以验证此时动能与这个势能的和又不再守恒了.

我们还要求这样的质点系不能具有动量,也就是目前就在这个质点系的质心系(其实是瞬时与质心共速的惯性系)中,才能认为这个小球是“静止”的:

$$\mathbf{0} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$

但是如果小球如果以速度  $\mathbf{u}$  被抛出去,当作质点  $m = \sum_i m_i$  其动量和动能自然是:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}, T = \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2, \quad T = \frac{p^2}{2m}$$

即,动能是由于动量而产生的能量.这种说法是贴切的.因为柯尼希定理足以告诉我们,作为质点的动量就是抛出小球作为质点系的总动量  $\sum_i m_i(\mathbf{v}_i + \mathbf{u}_i) = m\mathbf{u}$ .而抛出小球的总能量,势能部分是不变的,再把动能部分用柯尼希定理:

$$H = V + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 = U + T$$

从而动能是由于运动而具有的能量这一点就不言而喻了.如果速度  $u = 0$  那么体系就只有内能.

正是基于这一点,我们考虑一个宏观“质点”系的能量时,“质点”并不是完全理想的模型,仅仅是足够小的质点系的一种“打包”.那么体系的总的的能量就可以由“质点”的动能,“质点”间相互作用的势能,以及“质点”的内能三部分协同构成.前两部分是宏观的能量,习惯上还是合称为“机械能”.后一部分则是微观形式的能量.而耗散力是这样一种力,在认可微观过程总是能量守恒的前提下,就只剩下能量转移的方向了.根据热力学第二定律,自发进行的过程具有普遍的特性:总是趋向于宏观形式的能量减少,无规则热运动形式的能量增加.那么耗散力(dissipative force)就是期间起到搬运能量作用的那个力.也就是说,对于质点系耗散力总是做负功,使得体系动能减少而转变为内能(也称发热):

$$|W| = -W = \Delta U$$

而体系动能增加还是减少还依赖于两点,一是势能的释放可能会补偿由于耗散减少的动能.二是,我们一直默认体系封闭没有外力.但是如果有外力,外力做功也会使得体系的动能发生改变.

综上所述,对一个宏观的质点系,往往其能量转化与守恒写为以下这个形式:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i - \sum_{\{ij\}} ({}^d\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_j + {}^d\mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i) = \frac{d}{dt}(T + V)$$

左侧第一项就是外力做功输入的能量的功率.第二项是内力中的耗散力(已用左上角标  $d$  表示了耗散)向内能转化的能量的功率.右边就是因为这两个原因而增加的机械能的功率.这就是普遍形式的功能原理(work-energy principle).它仅仅是换着法子写了动能定律而已.但是这种写法是为了用能量守恒(conservation of energy)的角度看问题.

## 3.5 位力定律 \*

位力定律从来都在动力学理论的大框架的边缘.主要原因可能是因为并不对应任何有意义的守恒律.但在有的场合却能够发挥奇效.

### 3.5.1 质点的位力

不同于力矩,位力(virial),顾名思义就是位矢点乘力,而不是叉乘:

$$\mathcal{V} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$$

而我们也为质点运动新定义一个动力学量,也把角动量的叉积变为点积,叫做“G”:

$$G = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$$

可以发现  $G$  本身是  $I = \frac{1}{2}mr^2$  的导数:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mr \cdot r \right) = r \cdot mv$$

但是仿照角动量定理写的以下式子并不成立:

$$\mathcal{V} = \frac{dG}{dt}$$

事实上:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{d^2}{dt^2} (r \cdot r) = \frac{1}{2}m(r \cdot \ddot{r} + 2\dot{r} \cdot \dot{r} + \ddot{r} \cdot r) = r \cdot m\mathbf{a} + 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = \mathcal{V} + 2T$$

或者说,位力为粒子的“ $G$ ”的变化率与瞬时动能两倍的差,这构成位力定律(law of virial):

$$\mathcal{V} = \frac{dG}{dt} - 2T$$

有什么场合作用呢?一个典型的场合就是爱因斯坦对布朗运动的研究.我们建立一个这样的模型不妨设想花粉粒子受到一个随时间随机变化的力  $\mathbf{f}(t)$ .一个可以通过给一个恒力测出定向漂移运动而测出来的,正比于速度大小的阻尼力  $-\gamma v$ .这也就是说位力为:

$$\mathcal{V} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{f}(t) - \gamma \mathbf{v}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(t) - \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} r^2$$

带入位力定律并在很长的一段时间  $\tau$  内对两边进行积分:

$$\int_0^\tau \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(t) dt - \frac{\gamma}{2} r^2 \Big|_0^\tau = G \Big|_0^\tau - 2 \int_0^\tau T dt$$

最后如果再在两边同时处以趋于无限大的  $\tau$ .这对于第一项和第四项这就相当于对积分的内容求过程中的平均,前者显然为零,因为  $\mathbf{f}(t)$  只依赖于时间且完全随机,平均值就是零.后者需要注意到动能是恒大于零的,不管如何取平均总不会为零,事实上热学上考虑这应当等于花粉与容器中的分子构成热力学平衡时的平均动能  $\frac{3}{2}kT$ .从而不除  $\tau$  这一项就应该写为  $-3kT\tau$ .第三项的  $G$  也总是有限的,除以无限长的  $\tau$  自然趋于零.最后第二项不妨让初始时刻的  $r(0) = 0$ .最后得到:

$$r^2(\tau) = \frac{6kT}{\gamma} \tau$$

这就和三维扩散方程  $r^2(t) = 3x^2(t) = 6Dt$  不谋而合.我们发现描述分子力涨落导致无规行走的扩散系数  $D$  与描述耗散的阻尼系数  $\gamma$  之间具有如下的爱因斯坦-斯莫卢霍夫斯基关系(Einstein-Smoluchowski relation):

$$D = \frac{kT}{\gamma}$$

这个式子是更普遍的涨落-耗散定律(law of fluctuation-dissipation)的原型.这个定律有力说明了耗散力的本质与热力学涨落的统一性.

### 3.5.2 质点系的位力

同理,把位力定律进行多质点的求和,完全类似于角动量定律的情况,但是又类似动能定律推导内力没能抵消,我们得到:

$$\mathcal{V} = \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i + \sum_{\{ij\}} (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_{ji}) = \frac{dG}{dt} - 2T$$

其中“ $G$ ”自然指质点系的“ $G$ ”的和,动能  $T$  也是总的动量.第二项中求和的每一项由于牛顿第三定律,可以进一步化简为:

$$\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{F}_{ij}$$

一般,上面这个式子用来处理稳定的,束缚态的体系之间的量的平均值.在这个意义上,等好右侧的  $\frac{dG}{dt}$  就平均为零.实际上  $G$  作为  $I$  的导数本身就已经平均为零呢.例如我们可以利用这个式子来证明理想气体的物态方程,此时就几乎有:

$$I = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 = \int \frac{1}{2} \rho r^2 dV = \text{Const.}$$

毕竟宏观气体的热平衡下密度分布是几乎均匀的.而最后一项,作为平动动能的平均就应当是:

$$T = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} \nu R T$$

最后左侧第二项的内力在理想气体中也认为不存在.就只剩下体系受到的外力项了.而外力实际上就是在气体容器上气体压强对容器压力的反作用力:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = \oint \mathbf{r} \cdot (-p d\mathbf{S})$$

其中  $p$  又是个常数.最后这个积分可以从散度定理出发证明,或者注意到  $\frac{1}{3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$  就是从原点出发连接面元  $S$  构成的各个圆锥的体积.这给出了:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = -3pV$$

最后代入以上结论就得到了:

$$pV = \nu R T$$

这就是用位力定理得到理想气体物态方程的简单思路.历史上著名的昂内斯方程(Onnes equation),就是用位力展开给出了有内部相互作用时的物态方程的形式:

$$p = RT \left( \frac{1}{v} + \frac{B_2}{v^2} + \frac{B_3}{v^3} + \dots \right)$$

其中  $v$  为摩尔体积.而  $B_2, B_3 \dots$  称为第二,第三……位力系数<sup>9</sup>.可以用经典的位力定理来推证这个式子,但其实统计物理采取的相互作用图像才是对这个式子的最佳诠释.

## 3.6 碰撞问题

本小节不讨论连续体与可能带来的动量传输问题.仅仅限于质点,刚体及在理想约束下发生的碰撞过程的讨论.

### 3.6.1 二质点正碰

**碰撞**(collision),表面上看很复杂,理论上它被抽象一个持续时间无限短,作用力无限大的理想过程.却总是要伴随或者不伴随着能量损失.这是因为它所对应的实际发生的过程总是一个复杂的多体问题:它涉及到物质的弹性,往下涉及晶格的结构,往上涉及材料的特性.但是和你的模型总是让问题变得简单,这使得我们可以从现象出发建立唯象理论.

一维问题中,质量为  $m_1$  的质点以速度  $v_1$  取碰撞一个质量为  $m_2$  的速度为  $v_2$  的质点.关心的是碰撞后的末速度  $v'_1, v'_2$ .传统的观点似乎总是以守恒律为重:我们不出意外地列出:

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2} m_1 v^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v^2_2$$

<sup>9</sup> 已经默认第一位力系数  $B_1 = 1$

似乎这样就能求出一个结果来. 但这个讨论是非常不完全的. 首先结论并不对. 事实上碰撞的结果本就是不确定的, 其变化的范围一般从完全非弹性(completely inelastic) 到弹性(elastic) 的都有可能, 必须得取决于碰撞物材料的弹性. 以上仅仅是一个弹性碰撞的解. 其次方法也不妥, 这是因为用守恒律固然方便, 但这就等于忽视了相互作用发生的细节. 碰撞的过程彻底变成了一个“黑箱子”, 失掉了很多本来可以获得的结论.

所以对于碰撞的过程, 最佳选择是设出过程中相互作用的冲量来. 但是相比把力设出来, 设出冲量是否就意味着没有公式来计算过程中碰撞力对两个物体做的功? 我们先指出, 碰撞过程的做功本身也是一个有歧义的概念. 设想一个人站在光滑的水平地面上, 具有初速度向墙撞去, 但是推了一把墙使得自己停了下来, 那么墙对人的力是否做功? 这个问题回答“是”和“否”都是有道理的, 因为表述的物理概念不同: 如果是考虑把人视作质点系, 那么墙对人的力作用在手掌上, 力作用过程中手掌始终与墙面接触而没有做功, 这就给出了“否”的结果, 还能说明人减少的动能实际上最终并不会传递给墙面, 就好像其逆过程: 人推墙把自己推开人获得的动能也应当来自于人自身生物能而不是墙面. 但是如果把人视作质点, 那这就是一个人与墙之间的完全非弹性碰撞, 根据动能定理墙对人做的功, 实际上, 是对人质心做的功, 就等于人获得的质心动能. 这样也可以给出“是”的结果.

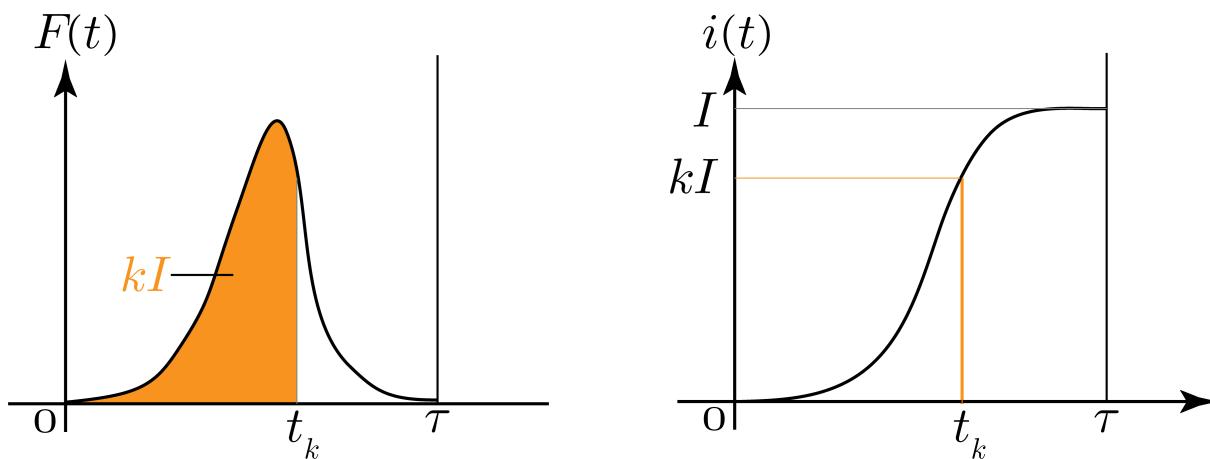


图 3.1: 力与累积的冲量

虽然这个问题倒是也分析地清, 但这足以告诉我们, 选取一个简单清晰的模型的必要性. 为此我们进一步设出碰撞过程中两质点之间持续作用的力  $F(t)$ , 它从 0 时刻开始产生到  $\tau$  时刻作用结束. 但是, 并不是只有两质点直接接触才发生作用力, 事实上我们可以人为把这两个力加在相距较远的两个质点上, 用这样的模型去等效本来可能复杂的碰撞过程.

我们再把过程中累积的冲量定义为一个函数:

$$i(t) = \int_0^t F(t') dt'$$

并且把最终造成的总作用冲量记作  $I$ :

$$I = \int_0^\tau F(t') dt'$$

那就必然有一个时刻冲量累积到  $kI$ , 可以把这个时刻记作  $t_k$ , 即:

$$i(t_k) = kI$$

事实上由于  $i$  是严格单调的增函数, 就存在反函数  $i^{-1}$ , 那么这个时间就是:

$$t_k = i^{-1}(kI)$$

有  $i^{-1}(0) = 0$ ,  $i^{-1}(I) = \tau$ . 这样就足够我们去计算过程中相互作用力的做功了. 由于是真实碰撞的模拟, 那么必然  $v_1 \geq v_2$  碰撞才可以发生. 当冲量累积到  $i$  时, 两个质点的速度分别为:

$$u_1 = v_1 - \frac{i}{m_1}$$

$$u_2 = v_2 + \frac{i}{m_2}$$

这说明过程 1 速度不断减小, 2 速度不断增加. 现在就足够写出力对 1 和 2 做功的功率了. 分别为:

$$P_1 = -Fu_1 = -\frac{di}{dt} \left( v_1 - \frac{i}{m_1} \right)$$

$$P_2 = Fu_2 = \frac{di}{dt} \left( v_2 + \frac{i}{m_2} \right)$$

最后如果把功率对时间积分, 我们发现积分自动以  $i$  为自变量了:

$$W_1 = \int_0^\tau P_1(t) dt = - \int_0^I \left( v_1 - \frac{i}{m_1} \right) di$$

$$W_2 = \int_0^\tau P_2(t) dt = \int_0^I \left( v_2 + \frac{i}{m_2} \right) di$$

线性函数的积分, 就等于函数值初末值的平均值乘以积分区间的长度, 这就给出了一个冲量乘速度形式的功, 碰撞过程中相互作用力对质点 1 和质点 2 的功应当是:

$$W_1 = -\frac{1}{2} I(v_1 + v'_1)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} I(v_2 + v'_2)$$

这并不是任何让人意外的结论, 如果带入动量定理  $I = m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$  就能发现这两个功无非就是末动能减初动能, 其实就是反映了动能定律. 不过注意到表达式推导过程中对动量定律的应用我们发现这个表达式倒不是纯粹的任意情况下都通用的功的定义. 在使用动量定律前的这个功的积分:

$$W = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{I}$$

倒是的确通用的.

如果定义碰前接触速度  $v = v_1 - v_2$ , 碰后分离速度  $v' = v'_2 - v'_1$ . 我们可以发现:

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2} I(v' - v)$$

又定义恢复系数  $e = v'/v$ . 碰撞就因此分为四类:

1. 完全非弹性碰撞,  $I$  最小的情况, 作为一个实际的碰撞过程分离速度必然也至少为零  $v'_2 \geq v'_1$ , 否则 1 仍然在接近 2 力就不可能会消失. 所以  $I$  最小就是让碰撞后共速, 这样  $e = 0$  就是完全非弹性碰撞的决定  $I$  大小的条件.

2. 完全弹性碰撞. 考虑碰撞过程的能量转化, 显然, 如果  $W_1 + W_2$  不等于零, 前后的总动能就不会是不变量. 但是如果要求碰前碰后动能不变, 这就构成了完全弹性碰撞, 简称弹性碰撞. 此时, 除了可以列动能不变来求解  $I$ , 我们发现这等价于  $v = v'$ , 也就是接触速度等于分离速度. 以后我们将总是认为弹性碰撞的等价对应条件是  $e = 1$ .

3. 非弹性碰撞 (不完全的). 这是最符合实际情况的一类碰撞. 这种碰撞中  $0 < e < 1$ . 也就是  $v' < v$  的情况. 功  $W_1 + W_2$  是小于零的, 说明碰撞过程动能有损失, 能量去向是显而易见的: 变成了两个碰撞的物体的内能, 这里的内能可能就是热学上的内能, 也可以是视作弹性体时虽然整体动量为零但局部有弹性波而产生的宏观动能与势能. 这种情况之所以普遍是因为, 碰前往往整个物体没有这样的弹性波, 能量处于最低的状态, 碰后这个能量总是会大于零. 故能量总是有损失的.

4. 超弹性碰撞. 也就是  $e > 1$ . 碰撞后分离速度大于接触速度. 因碰撞而获得动能. 这样的过程也并不少见, 炸弹的爆炸, 或者刚刚的人推墙使人动起来都是这种情形. 特点是别的能量会释放出来转化为动能. 前提需要注意不能违背动量守恒.

### 3.6.2 自由刚体的碰撞

如果把两个质点的碰撞换为两个自由刚体相碰撞, 这里我们只考虑平面情况, 那么同理碰撞会产生一个冲量  $\mathbf{I}$ . 但是这个冲量却有两种可能性, 如果是光滑的刚体, 那么碰撞的冲量必然沿法线  $n$  方向. 但是如果粗糙的刚体, 那么还可以有沿切线方向的分量. 不管何种情况我们来证明两个恒成立的结论:

一是, 1 对 2 做的功或 2 对 1 做的功总是满足:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}')$$

这里  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{v}'$  指的便是力的作用点, 即固连在刚体上的点的速度. 证明这个定理思路类似于之前的做法. 我们可以为过程中的冲量累计选取一个变量  $k(t)$ . 当  $k = 0$  时碰撞刚刚开始, 而  $k = 1$  时碰撞就结束了. 变量取  $k$  时作用的冲量为:

$$\mathbf{i}(t) = k(t)\mathbf{I}$$

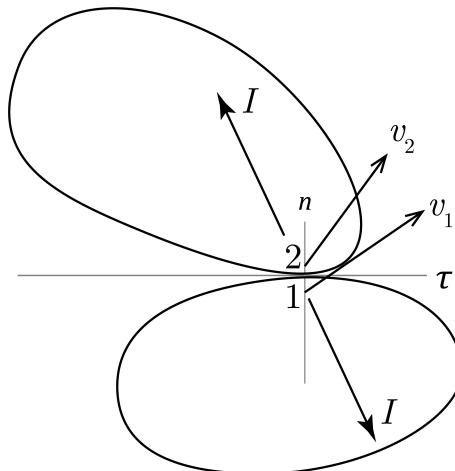


图 3.2: 两刚体碰撞

那么由于冲量对刚体质心速度和刚体旋转角速度的影响都是线性的, 而且碰撞点速度也将线性依赖于这些值. 从而积累到变量  $k$  时, 点具有速度:

$$\mathbf{u} = k\mathbf{v}' + (1 - k)\mathbf{v}$$

于是利用做功的积分式:

$$W = \int_0^\tau \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dt = \int_0^1 \mathbf{u} \cdot d\mathbf{i} = \int_0^1 [k\mathbf{v}' + (1 - k)\mathbf{v}] \cdot \mathbf{I} dk = \frac{1}{2} \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}')$$

二是, 不损失机械能的条件是, 或者更特殊地, 在无摩擦的碰撞中弹性碰撞的条件是, 接触点形成的沿冲量方向的接触分速度等于该方向的分离分速度. 这个证明也是简单的. 只需要把点乘式后面的速度分解在冲量方向并把两个功相加为零即可. 也就是我们有广义的  $e = 1$  与动能不变作为弹性碰撞的等价条件.

### 3.6.3 多体碰撞

如果碰撞是多体的往往有两种不同的处理思路: 一是屡次碰撞的思路, 最典型的碰撞就是牛顿摆情况, 小球与多个连续放置的小球的碰撞如果视作屡次的弹性碰撞就能解释体系形成周期性运动的原因. 因为两个质量相等的小球的碰撞总是简单的交换速度. 此时我们注意到碰撞结束后, 最左侧的两球之间从接触速度的  $v$  变成了 0, 而最右侧的两小球却从 0 变成了  $v$ :

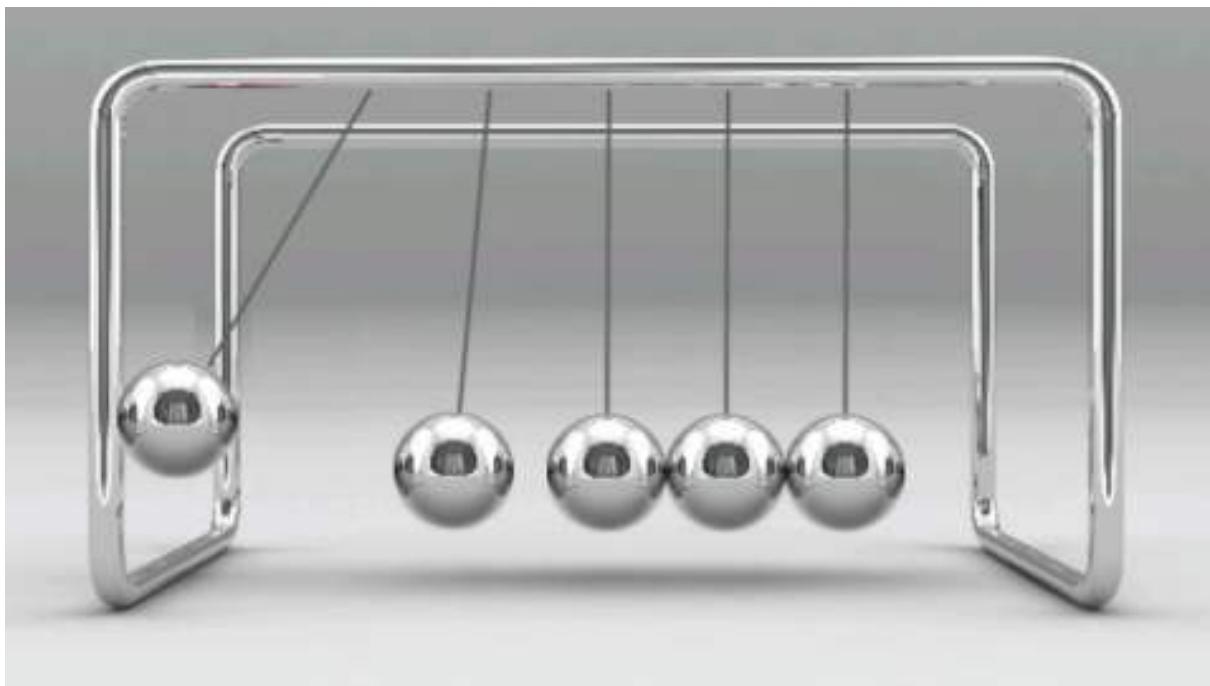


图 3.3: 牛顿摆

但是如果把最右边的小球要撞击的四个小球视作一个带约束的整体,显然既然四个小球必须作为一个整体运动,它们之间的相互作用冲量是不会做功的.同样的道理也适用于任何带约束的多体碰撞场合,虽然碰撞涉及多个物体,但是真正具有接触速度的只有一个碰撞点,那么作为约束其它点处不可能产生分离速度.从而动能不损失的条件依然是在撞击的点处法向接触速度等于分离速度.

不难理解,实际的多体碰撞总是介于两种极端情形之间的.如果是无限多个无限小的球无限密排,这就变成了一个连续的弹性介质中的波动的解的问题,波的传播速度和碰撞速度之间的大小关系就成为了一个具有决定性意义的因素.容易分析,思路一适用与撞击速度很快四个小球还来不及达到平衡的情况.而思路二适用于波的传播速度非常快,任何冲量作用在四个小球上都相当于在推动四个球构成的整体的情况.

# 第四章 静力学

以运动学和动力学理论为基础,时不时地,我们发现一些典型的现象,包括:

- 不管体系多么复杂,能量函数对其行为似乎起决定性的作用.
- 似乎总是能够从不同的体系中抽象出它的一个特征数字:自由度.
- 约束越多样体系约复杂,它的未知约束力越来越多,但是多到一定程度体系只剩下一个自由度了反而用能量守恒就能够解答大多数问题.

这些现象无疑是紧密联系的,值得研究的.事实上我们要做的就是以之前的所有动力学定律为依据进一步展开讨论.再从头开始建立新的理论:先讨论运动的描述,再单独研究力的特性.最后合到一起,看看这能让我们得到什么.

新理论,新思想,新图像.在本章节的学习过程中,如果感到疑惑,大抵都是复杂的数学推导掩盖了背后的物理目的.希望读者先记住两点:一是,我们要做的是把以前对质点,刚体和对质点系列的选取自然坐标(大抵是直角坐标)而列的部分定理修改为改用广义坐标来描述,过程中的所有步骤都是为这个目的来服务的.二是,本着“能量函数的形式”就决定“体系的一切结构与演化”的观点,我们就能找到一个明确的方向.无论是从结果上还是从细节上,我们将会多次参考这种想法.

## 4.1 约束

所谓**约束**(constraint)就是对运动的限制.有时,物体发生直接的接触,或是一个物体在另一个物体表面滑动或是滚动,这种情况约束实际上就发生了;有时,约束通过往往是轻质<sup>1</sup>的绳,直杆或曲杆,套筒,无摩擦的铰链等等去连接两个乃至多个物体,这样那些物体之间实际上也存在约束,偶尔我们也会把连接它们的机构直接叫做约束.

之所以把它们叫做约束,是因为它们产生了两个共同的结果,一是**约束方程**(equation of constraint),二是**约束力**(force of constraint).根据前者的运动学效果<sup>2</sup>,我们把与约束分为以下类别:

### 4.1.1 约束分类

无论是挂在天花板下的小球,还是“鹰击长空,鱼翔浅底”,都给我们以**单边约束**(unilateral constraint)的图像.

<sup>1</sup>后面就能理解,这样才不会占用新的广义坐标,因为它不带来任何能量

<sup>2</sup>根据后者的动力学效果还可以分为理想和非理想约束,见后面小节平衡问题:虚功原理

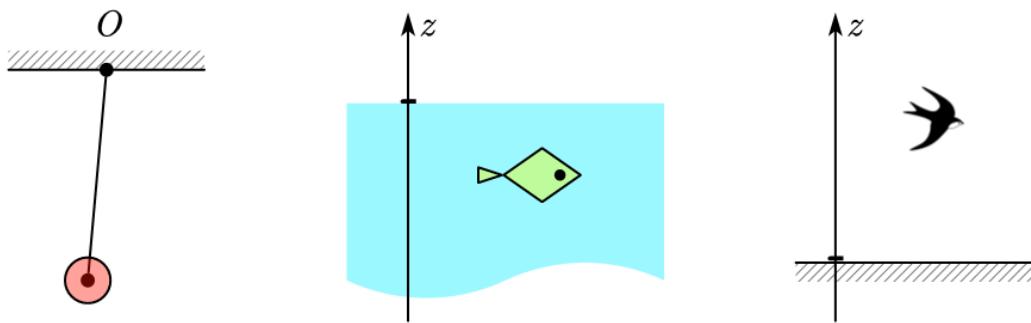


图 4.1: 可解约束

其中, 小球的位置符合  $x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2$ , 鱼的位置符合  $z \leq 0$ , 鸟则是  $z \geq 0$ .

更简单的例子还包括两个物体表面发生接触(滑动或滚动)的情况. 此时两物可能会脱离接触, 比如在半球面顶点上滑下来的质点. 这些所有约束的典型特点, 从约束方程上看都是一个单边不等式:

$$F \geq 0 \quad \text{or} \quad F \leq 0$$

如果不等式取等号, 那么可以认为对物体运动的限制客观存在, 从而会相伴相生约束力. 但是如果运动到不等号成立了, 比如上面三种情形中, 绳子松弛了, 鱼没有在表面游鸟也没有在地面走, 那么其实原则上也不存在任何对运动的限制. 称作约束被“解除”了. 所以单边约束也可以称作可解约束. 显然为了简单起见, 我们可以把这一类问题分解为严格符合约束和没有约束两种情形来等效. 这实际上构成了不可解的**双边约束**(bilateral constraint) 模型.

所谓双边约束就是把之前的单边的约束的不等式进行等式化, 比如  $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$  就对应着把可弯曲的轻绳替换为了不可弯曲的轻杆. 而后两个问题就变成了  $z = 0$ , 即不能让物体陷入也不能让物体脱离的平面约束.

故, 针对这一类分类模式, 双边约束显然才是“有效”的部分. 故本书以后所有约束都指双边的.

继续根据约束的不同特点分类, 我们就产生了两种可行的依据与分法:

一是, 根据约束的可积性来分为**完整约束**(holonomic constraint) 和**非完整约束**(nonholonomic constraint).

我们发现, 一个体系的运动由若干**广义坐标**(general coordinates) 和它们的导数—**广义速度**(general velocity) 来描述. 比如一个转盘就可以由转角  $\varphi$  来描述其处在的几何位置<sup>3</sup>, 而角速度  $\dot{\varphi}$  来描述转动快慢. 从而约束, 作为对运动的限制, 也就是应当关于这些量的方程.

但是无可辩驳的是, 在约束发生时这一类方程, 至少在最初被确定下来的形式下分为两大类, 一是不含广义速度的**几何约束**(geometric constraint), 二是含广义速度的**微分约束**(differential constraint).

举三个例子:

A. 一个圆盘状的冰球本来由盘心的  $(x, y, z)$  和盘面方向, 即垂直盘面的单位法向量  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  构成其广义坐标, 后面的描述方法用到了方向余弦. 即使盘并没有被地面约束, 三个方向余弦也要满足:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

现在盘到了地面(光滑冰面)上, 更是要满足:

$$z = 0 \quad , \quad \alpha = \beta = \frac{\varphi}{2} \quad , \quad \gamma = 0$$

这些都是几何约束.

<sup>3</sup>注意,  $\varphi$  与  $\varphi + 2\pi$  描述的位置在几何上没有区别, 仅仅是在运动的不同过程中发生, 一般认为达到后一个位置就是回到了初始位置(运动经历一个周期).

B. 一个半径为  $R$  的轮子沿  $x$  方向单纯地在地面做纯滚动. 本来在没有地面之前, 轮子由水平竖直坐标  $(x, z)$  以及自转角  $\varphi$  描述. 但是, 在有了地面做约束以后, 就需要满足接触条件和纯滚条件 (第一章学过):

$$z = 0 \quad , \quad \dot{x} = R\dot{\varphi}$$

第一个约束是几何约束, 第二个便是微分约束.

C. 考虑一个踩着独轮车在地面上运动的小丑, 并忽略运动的一些细节, 认为小丑仅仅由其水平面上坐标  $(x, y)$  和面朝方向  $\theta$  描述. 且要求轮子在地面上做纯滚动, 轮子滚动方向就是小丑面朝方向. 描述轮子还需已知自转角  $\varphi$ , 轮子半径依然为  $R$ . 这些就是描述这个体系的所有广义坐标. 那么客观地看这里有两个限制关系:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad , \quad \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R\dot{\varphi}$$

两个都是实打实的微分约束.

之所以称作微分约束, 往往是因为这些约束一般都可以对广义速度齐次化, 尤其是可以一次齐次化, B 中的例子已经是关于广义速度  $\dot{x}, \dot{\varphi}$  的一次线性组合等式了, C 的例子也可以化为:

$$\dot{x} = R \cos \theta \dot{\varphi} \quad , \quad \dot{y} = R \sin \theta \dot{\varphi}$$

这样我们就可以在等号左右同时乘以  $dt$ , 写成对各个变量变化微元之间的“约束”或“限制”:

$$\text{Case B : } dx = R d\varphi$$

图 4.2: 独轮车

$$\text{Case C : } dx = R \cos \theta d\varphi \quad ; \quad dy = R \sin \theta d\varphi$$

这样就避免了广义速度的引入, 依然是广义坐标之间的制约关系, 只不过各个量不全是坐标本身, 还含有当下状态到下一个状态间坐标的微分.

那么约束的完整性也以上两种约束是什么关系? 我们需要注意, 在 B 中的那个约束其实是可以积分的. 约束方程的成立就意味着:

$$x - R\varphi = x(0) - R\varphi(0) = \text{Const.}$$

这样岂不就退化为几何约束了吗? 的确, 像这样的微分约束与一个几何约束“等效”. 从而我们把几何约束和可以用微分约束等效出来的几何约束一同称作完整约束. 如果一个体系内所有约束都是完整约束, 那么这样的体系称作**完整体系**(holonomic system). 后面我们就会发现, 分析力学中的很多主要结论都有体系必须是完整体系的要求.

反之, C 就不是一个完整体系了, 因为体系含有不可积分的微分约束. 任何看出这一点来的? 设想通过某种积分的方式我们得到了体系的一个几何约束:

$$F(x, y, \theta, \varphi) = 0$$

这蕴含的结果马上就会招致一个矛盾. 对于几何约束, 例如在 B 中的后一个化为的  $x - R\varphi = \text{Const.}$ , 总是有经历一个复杂的过程如果  $x$  复原了,  $\varphi$  也会随之复原. 这里也一样, 如果假定以上几何约束存在,  $F$  至少“真正”含有  $(x, y, \theta, \varphi)$  四个变量之一, 不妨设是  $\varphi$ <sup>4</sup>. 那么如果在一个过程中  $x, y, \theta$  均复原, 那么前后都满足约束方程的话  $\varphi$  一般就只有有限个解, 更特殊地, 必然要求也回到初态发生复原. 然而, 联系一下实际的物理情景便可以明白, 小丑完全有能力让自己的位置回到初始位置, 面朝方向也归位, 同时轮子转过一个任意大小的角度的: 只需要沿着半径或大或小的圆周转圈即可. 从这一点上我们就可以发现这样的约束是不可能积分化为几何约束的非完整约束.



<sup>4</sup>其它可能性请读者自己琢磨.

进一步观察我们还能发现,在 C 问题中  $(x, y, \theta, \varphi)$  四个变量具有某种“全局独立性”,我们总是有办法把任意的两个  $(x_1, y_1, \theta_1, \varphi_1), (x_2, y_2, \theta_2, \varphi_2)$  作为初末态用过程进行连接.但是我们决不要因此而认为这几个变量之间因此就彼此独立不会相互制约,因为约束方程客观存在,也就是说,考虑任一个状态下一时刻发生的位移  $(dx, dy, d\theta, d\varphi)$ ,它们在“局域”看来并不具有独立性而是有相关性.这种局部处处成立(locally holds everywhere) 但全局不生效(globally invalid) 的行为是出于较深刻的拓扑学和分析学的原因<sup>5</sup>.需要加以留心.

第二种分类方式则更加清晰明了.它取决于约束方程本身含不含时.例如在之前的绳端系球,以及在上面的 C 中的一约束方程中:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 ; \quad dx = R \cos \theta d\varphi$$

它们都是不含时间的.从而称为稳定约束(scleronic constraints)<sup>6</sup>.但是它们对应着还存在类似的,非稳定约束(rheonomic constraints)<sup>7</sup>的版本,一种可能的情况如下:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (l + vt)^2 ; \quad dx = (R + vt) \cos \theta d\varphi$$

它们就表示绳子还在不断变长或者轮子半径在不断膨胀的新的问题.

与之前的完整非完整体系造成区别不同,也许在牛顿的力学体系中处理一个非完整约束体系和非稳定约束体系的难度是相当的:都要进行细致的受力分析,能量守恒不成立或者虽然成立但用处不大.但是在分析力学中,一个体系即使约束非稳定也是与稳定约束一样适用于大多数结论的.分析力学的方法在求解非稳定但完整的理想约束体系中是一大利器.

### 4.1.2 广义坐标与自由度

拥有了约束的观点,便很好理解广义坐标之间的独立性的概念.自由度(DOF, degree of freedom)也正是基于这一点而产生.它的定义是:考虑所有约束条件都成立的前提下,体系可以独立改变的坐标微分个数.

一般来说,在三维空间中(以下所有结论在二维或高维空间中都得重新讨论),在把一个体系的所有存在的约束都完全解除之后,体系可能由质点,线状刚体或者非线状刚体组成.那么直接地我们给出或者规定:质点的自由度为 3,非线状刚体的自由度为 6,线状刚体的自由度为 5.这一点待会就可以验证.而一个体系若包含  $a$  个质点,  $b$  个线状刚体,  $c$  个非线状刚体.而如果约束的引入为体系带来了  $r$  个独立的约束方程(几何约束或微分约束),显然根据自由度的定义,体系独立变化的广义坐标的数目降为:

$$s = 3a + 5b + 6c \longrightarrow f = s - r$$

这个  $f$  就是最终的自由度的个数.

质点的自由度为 3 自然是最好理解的.无论是用直角坐标,球坐标还是柱坐标,互相独立的坐标个数都是 3.而它们之间又不存在任何制约关系.

如果我们把两个质点用一个刚性棍连接,就会带来一个距离不变的约束.体系自由度变为:

$$f = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

这实际上就是线状刚体的自由度数.因为只要确定好线状刚体上的两个点的 6 个坐标,那么实际上就构成了对刚体的完整描述:每一个质元的位置都可以简单找到.而这六个坐标又有一个约束关系,从而自由度为 5.

但是非线状刚体就更复杂.既然非线状必然能够在刚体上找到三个不共面的固连点.只要确定好这三个点的 9 个坐标就能确定整个刚体的位形.但是这三个点之间两两距离不变,存在三个独立的约束方程,所以自由度数变为:

$$f = 9 - 3 = 6$$

<sup>5</sup>位形-微分流形上约束对应的矢量场间具有不为零的李导数.

<sup>6</sup>来自希腊语“坚硬”: σκλεός

<sup>7</sup>来自希腊语“流动”: φέω

为什么线状刚体不能作为非线状刚体的特例而也具有相同的 6 自由度呢? 比如一个陀螺, 作为一个刚体分析一般为认为它有三个平动自由度和三个转动自由度. 如果陀螺做定点转动, 它的三个转动自由度就被简单地隔离了出来: 它们是自转, 进动和章动. 但是我们不能指望一根线状刚体来自转: 自转进行一个角度, 对应的状态却实际上与之前的状态没有本质区别. 更重要地是反映在能量上, 自转既没有带来动能, 也没有带来势能的改变, 从而自转角根本就是一个冗余的内禀自由度(intrinsic DOF), 不会参与问题的讨论过程中.

从而以上论断也将基于一个基本事实: 质点和线状刚体是真正理想的, 现实模型: 小球, 细棍更精细的模型当然是 6 自由度的刚体, 甚至更高自由度的质点系, 连续体模型.

清楚了体系的基本组成部分的原始自由度数. 我们再把视野转向常见的约束上来.

要注意, 约束的个数这样一种说法的歧义性. 有时候我们发现体系有  $r$  个独立的约束方程, 从而说体系存在  $r$  个约束. 但是有时候我们指的是有几个机构在制约着物体的运动. 两者是有区别的, 我们保留前者的称呼, 后者的个数叫做约束物的个数.

Case1. 如果用一个面来限制质点的运动, 那么约束的个数是 1. 如果质点是一颗珠子被穿在一条空间曲线上, 那么尽管约束物只有一个, 但存在两个约束. 这是因为平面和曲线方程分别是:

$$\text{Surface : } F(x, y, z) = 0 \quad ; \quad \text{Curve : } \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

这也正构成了两种情况下的约束方程.

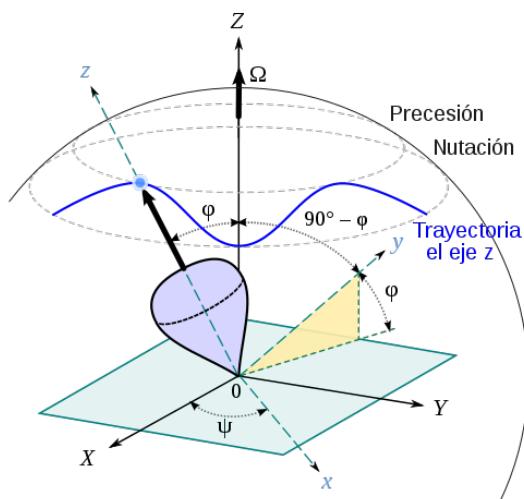


图 4.3: 刚体的三自由度转动

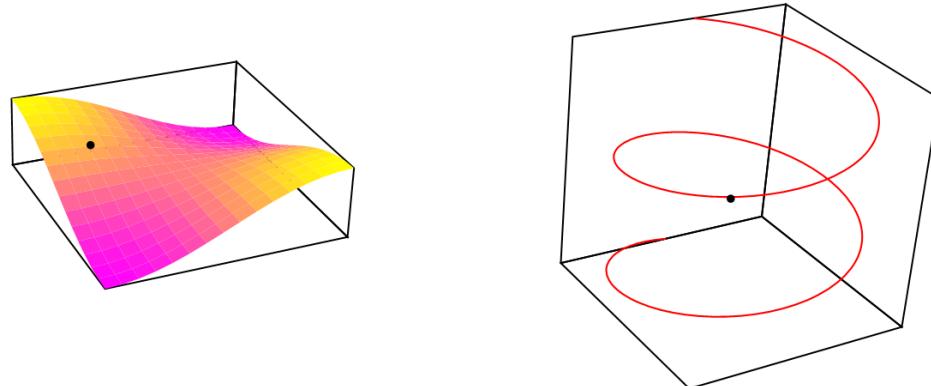


图 4.4: 面约束和线约束

Case2. 但是如果面和线是绝对粗糙的, 那么质点就动弹不得. 这样带来的约束个数, 显然两种情况都有三个.

Case3. 用绳子和杆子的两端连接两个物体, 对应的约束个数显然是 1. 就是说那两个点之间的距离为一个常数.

Case4. 如果绳子还绕过了滑轮, 那么原则上每一段绳带来一个约束减少一个自由度. 例如坐标为  $(x_1, y_1, z_1)$  的质点连接的绳(长  $l$ ) 绕过坐标为  $(x_2, y_2, z_2)$  的滑轮(视作质点) 与坐标为  $(x_3, y_3, z_3)$  的质点连接, 约束

方程就是:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2} = l$$

Case5. 而不同于用两段绳分别连接 12 和 23, 这样就会带来两个约束. 区别在于前者的一段绳两个部分可以交换绳长, 但是后者的两段绳则不能交换绳长.

Case6. 最后还有铰链模型. 如果仅仅是两个物体用铰链连接, 那么结论是显然的: 如果是平面问题, 那么约束个数为 2. 如果是空间问题, 那么约束个数为 3. 约束方程就是被连接的两个点具有完全一致的所有坐标.

Case7. 但如果是  $n$  个物体同时连接与一个铰链上, 那么我们只需要把第 1 个物体和第 2 个物体连接, 再把第 2 个物体和第 3 个物体连接... 最终把第  $n-1$  个物体同第  $n$  个物体连接即可, 一共进行了  $n-1$  次独立的连接, 故约束个数为  $2(n-1)$ (平面问题) 或  $3(n-1)$ (空间问题).

引入自由度的概念, 一个重要的原因是为了更好地描述体系的运动. 现在我们先看更复杂的情况: 如果体系是非完整体系, 那么事情比较难办: 不妨设  $r$  个独立约束中应当有  $h$  个完整约束和  $k$  个不完整的约束. 那么应当给予保留  $f' = s - h$  个广义坐标. 体系的运动过程中, 这  $f'$  个广义坐标并不能完全相互决定, 记作  $q_1, q_2 \dots q_{f'}$ . 但是体系任意状态的描述都只需要确定这  $f'$  个广义坐标的值和导数. 比如, 任何一个质点的  $x$  坐标, 还有速度的  $x$  分量就必然可以用之前的量来表示. 而还应当存在  $k$  个微分约束:

$$x = x(q_i, t) \quad , \quad \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$f_j(q_i, dq_i, dt) = 0$$

$$i = 1, 2 \dots f' \quad , \quad j = 1, 2 \dots k$$

但是如果是完整体系, 问题就简单了, 自由度的个数  $f$  就会是体系独立的坐标的个数. 从而如果广义坐标是  $q_1, q_2 \dots q_f$ , 它们之间就不存在约束关系了, 体系的一切量, 原来如果由类似于  $x, \dot{x}$  这样的量来表示, 现在就直接是:

$$x = x(q_i, t) \quad , \quad \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (i = 1, 2 \dots f)$$

尤其是稳定的完整约束体系. 那么由于约束方程不含  $t$ , 那么上式就更是简化为:

$$x = x(q_i) \quad , \quad \dot{x} = \sum_i \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (i = 1, 2 \dots f)$$

### 4.1.3 约束力与广义力

为了简单起见, 我们把刚体也当作多个通过约束固连在一起的质点构成的系统. 这样体系便只含有以下要素: 质点, 外力, 约束, 质点间的内力, 约束力(也是内力).

正过来看, 任何一个约束都可以限制到若干质点. 从而同时对这几个物体的运动提出单个的制约关系(自由度减 1).

但是另一方面, 每一个质点又同时可能受到若干个约束物的共同限制, 每一个约束物就会对该质点施加一个或多个约束方程来把这个质点的运动和其他质点运动联系起来.

在牛顿力学情况下, 我们总是喜欢分析那个质点受到的约束物给它的力的具体特征. 这种力就叫做约束力.

约束力的最核心特征, 就在于它是被动力(passive force). 直接看是找不到这么一个力的大小与方向的. 约束力的具体值, 是两个因素共同作用的结果: 一方面就是约束本身的性质: 是光滑的还是粗糙的? 是要耗散还是甚至可以输出能量? 但是更重要的是, 约束力必然受到具体运动情况和体系动力学结构的影响. 这

一点很好理解: 因为如果把某个约束解除, 那么体系之后的运动就不一定遵从约束方程. 那么解除约束之前的体系就正是因为约束给出来的力影响了其运动而导致其运动“回归正轨”.

基于这一点, 就不难判断, 质点受到“必要”约束力的个数, 就是质点坐标参与约束方程的个数.

比如, 被穿在光滑曲线上的质点受到的约束力必然是两个, 再比如, 平面问题中, 两个用光滑铰链连接的物体会在两个方向上产生约束力, 而如果是  $n$  个物体铰接在一起, 那么期间我们如果设出  $2(n - 1)$  个约束力就意味着个数设对了.

显然, 如果是粗糙的曲线上有一个滑动的质点, 曲线给质点的力应当有两个支持力和一个滑动摩擦力, 也就是说应当是三个, 而不是约束给出的两个. 再比如, 将一条长  $l$  的轻绳子绕过三个光滑滑轮组成一个闭合的圈. 那么明显每个物体与之相关的约束方程只有一个. 但是约束力似乎也得有两个拉力.

这两种情况也得分开讨论. 第二种情况下, 两个拉力总是相等, 从而三个质点的受力都指向三个角平分线的交点: 内心. 这个约束给三个质点的力其实应当认为是两个力的合力. 它只有沿内心与质点连线方向的分量, 没有垂直方向的, 可以算作一个约束力而不是两个. 但是前者的确应当算作三个约束力. 这是因为滑动摩擦力分量明显不是“必要的”. 它独立于之前的两个支持力. 也不同于之前两个支持力.

其中具体道理还得见后面虚功原理一节的关于理想约束的推导. 我们指出, 在上一章讨论约束力功的时候我们提出的约束力公式, 在这里可以直接推广. 实际上就能得到我们一直在说的“必要”约束力. 在一般情况下, 如果某约束对一质点的  $x$  坐标产生了限制:

$$f(x, \dots) = 0$$

那么与之相伴而生的作用在质点上的约束力就必然有一项  $x$  分量:

$$F_x = \lambda_f \frac{\partial f}{\partial x}$$

如果还含  $y$  那  $y$  方向自然也会产生一个约束力, 公式是一样的. 如果含有其他质点坐标时就换那个质点的坐标来求片导数. 注意由同一个约束方程产生的所有的约束力都共用同一个  $\lambda_f$ .

对于理想约束这就是全部的约束力和它要符合的形式, 非理想约束则可能产生各种各样的其它形式的约束力.

还有一个重要概念需要先一步加以介绍. 如果我们考虑任何一个作用在实际体系的某质点上的力  $\mathbf{F}$ , 该质点坐标为  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . 我们引入一个新的概念. 这个力产生的在每一个广义坐标  $q_i$  上的广义力  $Q_i$ : 其定义也相当简单, 就是要使得下面连等式成立:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i Q_i dq_i$$

这是希望用广义力对广义位移来做功来代替以往的矢量力对质点做功的一成不变的做法. 我们默认体系都是稳定约束, 那么其实该质点的任意位移, 简单地可以用广义坐标上的位移来表示:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_i) \Rightarrow d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i$$

代入之前的要求就发现, 广义力的算法为:

$$Q_i = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$$

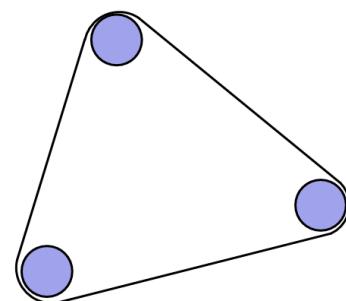


图 4.5: 三物体一约束

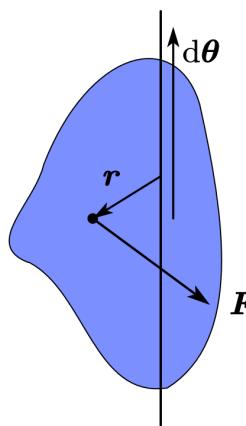


图 4.6: 力矩作为广义力

看两则应用:

一是刚体可做定轴转动,那么当刚体产生  $d\theta = d\theta e$  的转动时,作用在  $r$  的力  $F$  的作用点的实际位移为:

$$dr = d\theta \times r$$

那么力的实际做功为:

$$\begin{aligned} dW &= F \cdot dr \\ &= F \cdot (d\theta \times r) \\ &= (r \times F) \cdot d\theta \\ &= M \cdot ed\theta \\ &= Q_\theta d\theta \end{aligned}$$

这也就是说,沿轴方向的力矩  $M \cdot e$  就是与角位移  $d\theta$  伴随的广义力  $Q_\theta$ .

再来看看在牛顿力学体系中比较基础的滑轮组问题.如果两个自由度分别取为:一. 2,3 挂着的动滑轮的下降与 1 上升的高度  $x$ ;二. 相对动滑轮,2 的上升与 3 的下降高度  $y$ .那么 1,2,3 的向下位移就分别为:

$$s_1 = -x, \quad s_2 = x - y, \quad s_3 = x + y$$

这样,三个重力在这两个自由度上累积的广义力就是:

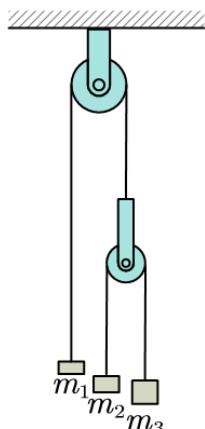


图 4.7: 滑轮组

$$Q_x = -m_1 g + (m_2 + m_3)g$$

$$Q_y = (m_3 - m_2)g$$

这有什么用?实际上我们计算动能还可以得到“广义质量”:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1 \dot{s}_1^2 + m_2 \dot{s}_2^2 + m_3 \dot{s}_3^2) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{y}^2 + (m_3 - m_2)\dot{x}\dot{y} \end{aligned}$$

由于产生了交叉项,我们再进行一次换元:

$$z = y + \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2}x$$

$$Q_x dx + Q_y dy = \left( Q_x - \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2} Q_y \right) dx + Q_y dz = Q'_x dx + Q'_z dz$$

从而动能和广义力变为:

$$T = \frac{1}{2} \left( m_1 + \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3} \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \dot{z}^2$$

$$Q'_x = \left( \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3} - m_1 \right) g, \quad Q'_z = (m_3 - m_2)g$$

这就完全与两个质点独立地受到两个恒力的动能与广义力的“结构”一致了.从而两个自由度的坐标二阶导数为:

$$\ddot{x} = \frac{\frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3} - m_1}{\frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3} + m_1} g, \quad \ddot{z} = \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2} g$$

从而最开始的广义坐标  $y$ :

$$\ddot{y} = \ddot{z} - \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2} \ddot{x} = \frac{2m_1 \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2}}{\frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3} + m_1} g$$

本题用广义力方法求解的关键好处在于：本来作为矢量都同向的重力，在转化为广义力时可以因为体系结构不同而带上正负号，以适应最后的结果。

其实，广义力乘广义位移等于做功的现象我们并不少见，不管是热学中的  $dW = -pdV$ ，还是电路问题中的  $dW = UdQ$ ，抑或是电磁介质问题中的  $dW = EdP$ ， $dW = HdM$  等等公式。全都归于统一的广义力乘广义位移这样的形式上。

## 4.2 力系化简

静力学中大量涉及到由质点、刚体和简单约束构成的问题。本节正是要针对这一类问题形成行之有效的强大工具。我们建立在之前的理论基础上，重新构建静力学过程中适用的新逻辑体系。

### 4.2.1 静力学公理体系

质点也好，刚体也好，其平衡都是较为简单讨论的。在某一个状态下，我们用**力系**(force system) 来描述它们的受力状态。比如刚体上受到的力系为  $\mathfrak{F}$ 。一种简单的理解是，力系应当是一个场。在刚体的每一个点上都存在该点的受力情况。质点则只需要描述自己那点上的受力情况就行。而这个场，应当是一个矢量场：

$$\text{公理一} : \quad \mathfrak{F} : \mathbf{f}(r) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

如果  $f_x, f_y, f_z$  是连续函数，那么这样的力系实际运用中叫做**分布力系**(distributed force system)。 $\mathbf{f}$  其实在量纲和概念上为外力的力密度。但是想到质点受力的描述，我们立马发现所有力都必须集中于一个点，仿佛与分布力系略有区别：

$$\mathfrak{F} : \{\cdots(r, \mathbf{F}_i) \cdots\}$$

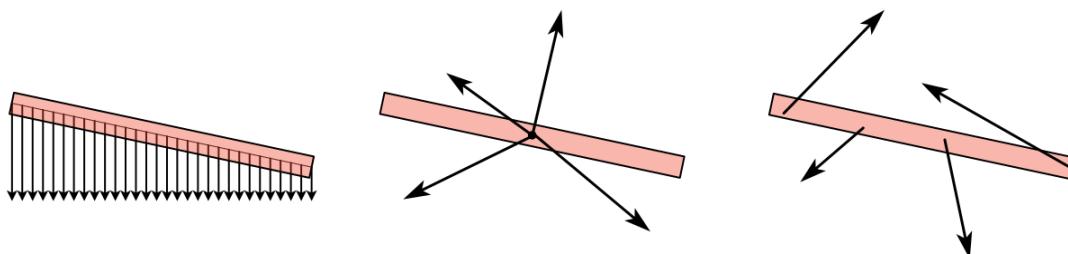


图 4.8: 分布力系, 共点力系与空间力系

其中  $r$  是质点的位矢。这样的力系可以叫做**共点力系**(concurrent force system)。事实上，我们也可以让刚体上若干点受到离散的作用力，这才是我们常说的**空间力系**(spacial force system)：

$$\mathfrak{F} : \{\cdots(r_i, \mathbf{F}_i) \cdots\}$$

但其实两者是统一的。统一的关键是要引入一种广义函数：**德尔塔函数**(delta function)。即：

$$\mathfrak{F}_1 : \{\cdots(r_i, \mathbf{F}_i) \cdots\} = \mathfrak{F}_2 : \sum_i \mathbf{F}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

德尔塔函数的定义是这样的，如果让自变量为  $\Delta$ ，那么：

$$\delta(\Delta) = \begin{cases} 0 & (\Delta \neq 0) \\ +\infty & (\Delta = 0) \end{cases}, \quad \int_D \delta(\Delta) d\Delta = \begin{cases} 0 & (\mathbf{0} \in D) \\ 1 & (\mathbf{0} \notin D) \end{cases}$$

统一为分布力系将有利于统一运算:如果是力个数可数的离散的空间力系,可以考虑两个力系的集合并:

$$\{\cdots(\mathbf{r}_{1i}, \mathbf{F}_{1i})\cdots\} \cup \{\cdots(\mathbf{r}_{2j}, \mathbf{F}_{2j})\cdots\} = \{\cdots(\mathbf{r}_{1i}, \mathbf{F}_{1i})\cdots(\mathbf{r}_{2j}, \mathbf{F}_{2j})\cdots\}$$

但是如果力共点了又应当去求矢量和.也就是说,本来共点力系的力就是一个三维空间中的线性代数,它们理所当然地定义了加法和数乘:

$$\text{Addition: } \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$$

$$\text{Multiplication: } \lambda \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$$

现在就可以发现.第一,把共点力系的加法(力的叠加),现在就可以自然地推广到分布力系的加法来(数乘也同理).只需要逐点把每点处的两个力密度矢量加在一起就是合力系.例如,如果两个力系分别为 $\mathfrak{F}_1: \mathbf{f}_1(\mathbf{r})$ 和 $\mathfrak{F}_2: \mathbf{f}_2(\mathbf{r})$ ,那么:

$$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 : \mathbf{f}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{f}_2(\mathbf{r})$$

$$\lambda \mathfrak{F}_1 : \lambda \mathbf{f}_1(\mathbf{r})$$

这样就不需要分离散力系的并与共点力系的和来阐述物理上的“叠加”,它们本质上就是力密度分布函数的和.线性代数中一切应当符合的“泛性质”它也应当符合.其零元素就称作零力系(null force system):

$$\mathbf{o} : \mathbf{o}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

静力学自成一套的理论核心,是虽然质点平衡时一定意味着合力系为零力系.但是在一个刚体平衡的时候,它依然可以对应在不同点受到不同力的一个力系.事实上,即使不平衡,两个不同的力系其“效果”也可以是相同的.以往的力学告诉我们,效果其实是指产生的加速度或角加速度等运动学响应.但是,在公理化静力学的过程中,我们不需要关心“效果”一词的具体含义,而是抽象的定义一种新的关系:

这就是两个力系的等效(equivalence),如果两个力系 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{G}$ 等效,就记作 $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{G}$ .其实数学上有一对对应的概念为等价关系(equivalence relation),它需要满足以下三个条件,在物理观点下看是显然的:

- 反身性(reflexive property):  $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}$
- 对称性(symmetric property):  $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{G} \Leftrightarrow \mathfrak{G} \equiv \mathfrak{F}$
- 传递性(transitive property):  $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{G}, \mathfrak{G} \equiv \mathfrak{H} \Rightarrow \mathfrak{F} \equiv \mathfrak{H}$

但是还有一点十分必要,这样一个等价关系必须还得是同余(congruence)的.即,它必须保持代数关系不变.这就构成了静力学第二公理:

$$\text{公理二: } \mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{F}_2, \mathfrak{G}_1 \equiv \mathfrak{G}_2 \Rightarrow \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{G}_1 \equiv \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{G}_2, \lambda \mathfrak{F}_1 \equiv \lambda \mathfrak{F}_2$$

这两个公理赋予力系这一个代数系统以极其规则而且性质丰富的结构.例如,我们可以定义平衡力系(equilibrium force system)的概念:如果 $\mathfrak{K} \equiv \mathbf{o}$ ,即等效于零力系的力系就是平衡力系.那么显然任何一个力系上增减平衡力系的结果都会得到等效的力系:

$$\mathfrak{K} \equiv \mathbf{o} \Rightarrow \mathfrak{F} + \mathfrak{K} \equiv \mathfrak{F}$$

那么就可以把所有平衡力系全部都找到,构成一个平衡力系的集合,称作平衡核(kernal of equilibrium):

$$K = \{\mathfrak{K} | \mathfrak{K} \equiv \mathbf{o}\}$$

那么两个力系等效的充要条件就是其差在平衡核内,就是说如果把一个力系中的力完全做反向操作后两者就可以平衡:

$$\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{G} \Leftrightarrow \mathfrak{F} - \mathfrak{G} \equiv \mathbf{o} \Leftrightarrow \mathfrak{F} - \mathfrak{G} \in K$$

最后就可以定义力系的等效类:所有与力系  $\mathfrak{F}$  等效的力系也构成了一个集合,记作  $[\mathfrak{F}]$ .也就是说上面的平衡核其实都是  $[\mathfrak{o}]$ .那么这个类的结构其实就是:

$$[\mathfrak{F}] = \{\mathfrak{F} + \mathfrak{K} | \mathfrak{K} \in K\}$$

这样就把所有可能的力系的集合分解为一个一个的等效类,每一个集合内部的每个力系彼此之间完全等效,而平衡核是它们之中所有平衡力系构成的“核心”等效类.不同的类之间就不存在等效关系.每一个等效类内部的差其实都是一些平衡力系.两个不同的等效类中的力系差依然是一个非平衡的力系.

所以这样就把最终问题直接等效为最后一个细节:那就是平衡核究竟有多大?怎样的力系是平衡力系,属于平衡核?

这个问题的答案其实简单:那便是找到最基础的平衡力系,它是平衡核的生成元(generating element).这就是静力学的第三公理:任意二力构成的,等大反向共线的力系全构成平衡力系,它是二力平衡的充分且必要条件:

$$\text{公理三: } \{(r_1, F_1), (r_2, F_2)\} \in K \Leftrightarrow F_1 + F_2 = \mathbf{0}, F_1//F_2//(r_2 - r_1)$$

这个定理又忽然把我们从分布力系的问题拉回了特殊的空间力系分析的问题,它们都实用且简单.但是从特殊到普遍,从二力平衡条件开始,一步一步去探究力系是否是平衡力系的判据,乃至找到所有可能的平衡力系的过程可是非常细致与漫长.后面我们会一个推论一个推论地来完成这个过程.在这里我们先尚且指出另外两个通常也被认为是静力学公理的性质,成为我们接下来一些推理的出发点.

当我们分析一个含约束的质点,刚体构成的系统时,它们不仅受到外力,还要受约束力(作为内力).那么以前的牛顿第三定律就可以完全被静力学化也成为公理:如果约束发生在两个物体的两点 1 和 2 之间,位置分别为  $r_1$  和  $r_2$ .那么 1 给 2 的力  $F_{12}$  和 2 给 1 的力  $F_{21}$  就要符合:

$$\text{公理四: } F_{12} + F_{21} = \mathbf{0}, F_{12}//F_{21//(r_2 - r_1)}$$

这样是否就能解决任何静力学平衡问题呢?对一个刚体而言这就够了.其力系是平衡力系自然就是平衡条件.然而对复杂体系的事实是:约束力作为被动力往往也要作为待求的量进入平衡方程.在约束力确定之前自然不能知道是否能平衡.那么如何评价含未知约束力时的平衡问题呢?我们规定:

**公理五:** 系统平衡充要条件是,存在一种约束力取值,考虑约束力后每一个部分单独平衡.

它还有一个常见推论:由于考虑每一个部分的力系的时候是平衡力系,那么把这些力系进行叠加也是平衡力系,再考虑到成对存在的内力符合公理四,再由公理三,公理四的条件恰好让这些内力构成平衡力系.故扣除掉以后,剩下的外力力系自然也必须是平衡力系,也就是说如果设想整个体系等效为一个大刚体,那么外力就是它受到的所有力,此时就能得出为了平衡,外力就必须构成平衡力系的条件,因此,这个推论得名**刚化原理**(principle of solidification).这是原来体系平衡的必要条件.

**刚化原理:** 系统平衡必要条件是外力  $\mathfrak{F} \equiv \mathbf{0}$

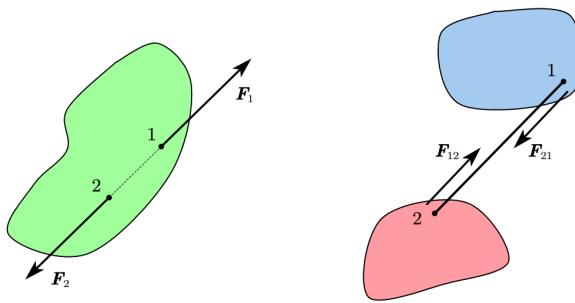


图 4.9: 第三公理和第四公理

有了这些公理的基础, 我们就可以获得十分强大的一些推论 (证明过程略), 它们都是我们进行力系化简的关键工具:

推论一: 力是滑移矢量:  $(r_1, \mathbf{F}) \equiv (r_2, \mathbf{F}) \Leftrightarrow \mathbf{F} / \parallel (r_2 - r_1)$

从而, 描述一个刚体上力的效果时. 只有力的作用线是关键的. 将一个力沿作用线滑移不改变力的作用效果.

如果把两个力系进行“叠加”, 可以称作“合成”. 把共点力系做矢量和也可以称作“合成”但是如果出现一个完整的力系恰好等效于一个单力构成的力系的情况, 则称这个单力为力系的合力(join force).

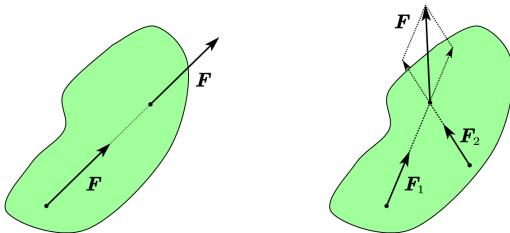
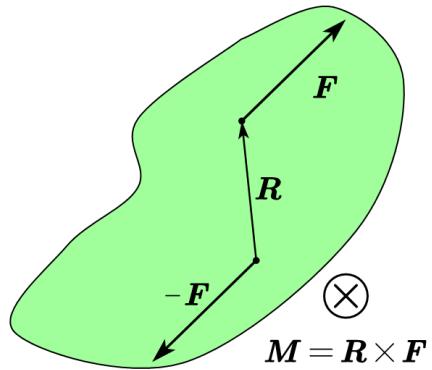


图 4.10: 滑移与合力

上一个推论的直接结果是: 可以在平面力系的情形下合成任意两个非平行力, 即非平行力求合力:

推论二: 非平行力求合力: 如果两个力作用线交于一点, 那么可以滑移到该点来做矢量合成求合力.



为了求解力的非滑移的平移如何等效的问题. 我们需要开始引入矩的概念. 如果一个单力力系保持大小方向不变但作用在另一个点上, 那么两个力系做差的同余类便是一个力偶(force couple). 最典型的情形下, 力偶由两个力构成:

$$\mathfrak{M} = \{(r_1, \mathbf{F}), (r_2, -\mathbf{F})\}$$

力偶的特征由力偶矩(moment of couple) 来描述. 它被定义为:

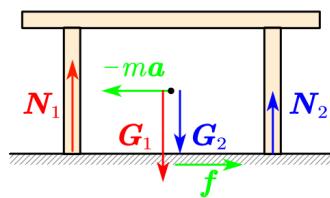
$$\mathbf{M} = (r_1 - r_2) \times \mathbf{F}$$

图 4.11: 力偶

可以分解为力偶的力系称作力偶系(system of couples). 例如如图, 在加速运动的车厢中静止的桌子的受力就构成功力偶系. 我们把重力分解为前后脚的支持力之和, 并分别与两个支持力构成功偶. 摩擦力则与惯性力构成功偶.



这样一个力偶系的平衡条件是显而易见的. 事实上, 对力偶系的分析中, 力偶本身是一种非定位的元素. 只需要两个力构成的单力偶系的力偶矩一致, 它们就是等效的. 所以力偶系的描述方法为:



$$\mathfrak{M} = \{M_1, M_2 \dots M_n\}$$

每一个力偶都不需要具体指定是由哪两个力组成, 位置在哪儿. 也正因为如此, 力偶系描述时这些力矩都不需要支配任何作用点. 力偶系的化简更是简单: 直接对力偶做矢量和便是等效的.

图 4.12: 桌子受力分析

$$\{M_1, M_2 \dots M_n\} \equiv \{M = \sum_i M_i\}$$

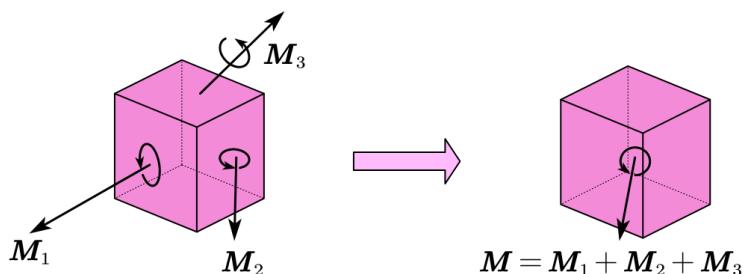


图 4.13: 力偶系合力

我们也把最后那个合力矩  $M$  称为力偶系的合力. 现在我们可以写出共点力系和力偶系的平衡充要条件:

**推论三：** 共点力系与力偶系平衡条件：元素的矢量和为零, 即合力  $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$  或  $\sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{0}$ .

最后, 为了研究普遍的力系化简的方法, 利用力偶工具我们可以不限于滑移, 而是实现力的平移. 我们指出在之后的过程中至关重要的力的平移定理:

**推论四：** 力的平移定理 :  $(\mathbf{r}, \mathbf{F}) \equiv \{(\mathbf{r} + \mathbf{R}, \mathbf{F}), \mathbf{M} = -\mathbf{R} \times \mathbf{F}\}$

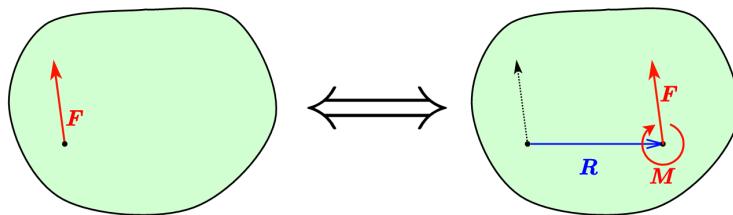


图 4.14: 力平移定理

即力平移以后的效果与原来的效果的区别可以被一个力偶等效.

如果力系简单, 那么其平衡条件也是简单的. 二力平衡条件就是等大, 反向, 共线. 而三力平衡条件也相对简单实用, 就是三力汇交, 力三角两个条件.

**推论五：** 三力平衡条件 : 三力作用线三线共点, 且三力首尾相连构成闭合三角形.

利用三力汇交可以把简单力系的平衡条件完全变成几何上的边角关系. 而“力三角”的矢量三角形在很多具体的例子中也恰好与位形空间中的三角形相似, 以提供一种完全几何化的解题思路.

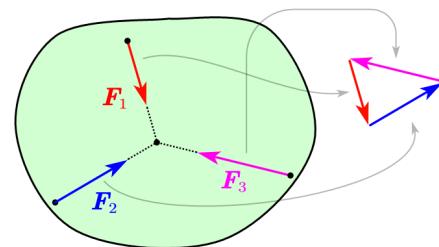


图 4.15: 三力汇交力三角

## 4.2.2 力系向一点简化

利用强大的力平移定理, 我们就可以实现力系向一点的简化. 对于任意一个空间力系, 在空间中取一点作为简化中心. 那么就以这个点作为原点来写出每个力的作用点, 力系被描述为:

$$\mathfrak{F} = \{\cdots (\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i) \cdots\}$$

但是又根据力平移定理:

$$(\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i) \equiv \{(\mathbf{0}, \mathbf{F}_i), \mathbf{M}_i\} , \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

故力系简化为:

$$\mathfrak{F} \equiv \{\cdots (\mathbf{0}, \mathbf{F}_i) \cdots \mathbf{M}_i \cdots\}$$

再由共点力系求合力与力偶系求合力的方法:

$$\{\cdots (\mathbf{0}, \mathbf{F}_i) \cdots\} \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{F})$$

$$\{\cdots \mathbf{M}_i \cdots\} \equiv \mathbf{M}$$

这个和称作力系对简化中心的主矢(principal vector) 与主矩(principal moment):

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i ; \quad \mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

其实,这样的结果可以推广到十分普遍的分布力系上来:

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} dV ; \quad \mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV$$

力系平衡的充要条件,是对任何一点主矢和主矩同时为零.也就是说有无数个彼此等价的条件.这些条件彼此之间有什么关系?这一点需要我们考察对不同点作简化的结果.事实上,如果力系对原点简化结果为:

$$\mathfrak{F} \equiv \{(\mathbf{0}, \mathbf{F}), \mathbf{M}\}$$

那么换成位矢为  $\mathbf{R}$  的一点,简化结果一定为:

$$\mathfrak{F} \equiv \{(\mathbf{R}, \mathbf{F}), \mathbf{M} - \mathbf{R} \times \mathbf{F}\}$$

也就是说,主矢是不会变的,只有主矩会变.从而主矢的不等于零是本质的,无法改变的.但是主矩的不等于零确是条件的.最后考虑若的确  $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ ,但当  $\mathbf{R}$  任取时,主矩上多出来的项  $-\mathbf{R} \times \mathbf{F}$  具有两个性质:一是必须与  $\mathbf{F}$  垂直,二是在与  $\mathbf{F}$  垂直的平面上可以取到任意值.我们还可以总结出平面力系与空间力系的最终简化结果:

**平面力系的最终简化结果分类:**

- 平衡力系:  $\mathfrak{F} \equiv \mathbf{0}$
- 单力:  $\mathfrak{F} \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{F})$
- 单力偶:  $\mathfrak{F} \equiv \mathbf{M}$

**空间力系的最终简化结果分类:**

- 平衡力系:  $\mathfrak{F} \equiv \mathbf{0}$
- 单力:  $\mathfrak{F} \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{F})$
- 单力偶:  $\mathfrak{F} \equiv \mathbf{M}$
- 力螺旋:  $\mathfrak{F} \equiv \{(\mathbf{r}, \mathbf{F}), \mathbf{M}\}$  且  $\mathbf{F} // \mathbf{M}$

## 4.3 平衡问题: 矢量力学

### 4.3.1 平衡问题的要素

在一个典型的平衡问题中, 作为已知量未知量的可能要素如下所示. 本节枚举中如果某要素只能为已知则标蓝, 如果只能为未知(即待求解的量) 则标红. 都可以则标紫.

- **体系的结构:** 所有平衡问题中, 体系的结构都是完全独立于其它量的已知未知提法的. 它在确定其它量的已知未知前就已经被完全确定是已知的. 它的内容包括: 约束个数, 约束方程形式, 约束力个数与写法, 自由度个数, 平衡方程个数, 平衡方程写法.
- **约束力:** 约束力从来不会在平衡问题中先行给出, 它永远是待求解的, 正因为如此我们称呼它们为被动力. 其它所有力都与它们对立, 称为主动力.
- **主动力:** 只要不是约束给出的力, 原则上都视为主动力. 但是不是所有主动力, 在一个典型的平衡问题中都会事先给出. 有些力, 比如重力, 总是已知. 但是, 比如一些问题问法就是求某外力等于多少时体系可以平衡; 有些题目中出现弹簧的弹力, 但是弹簧的伸长本身又是未知待求解的; 动摩擦力, 作为主动力, 它依赖于未知的支持力; 还有的题目干脆把约束解除, 用未知的主动力代替原来也未知的约束力. 这些情况下主动力也会变成未知力.
- **位形变量.** 很明确地, 一个平衡问题分为两大类. 一类问题 (由于自由度为零或负) 中每一个几何参量都在问题提出的事后都完全已知. 但是另一类问题 (自由度大于零) 中, 即使是平衡时的几何参量也是实现未知的, 需要通过平衡条件加以求解. 这里只指出这一种现象, 如何分类见之后小节: 负静定, 静定与超静定.

### 4.3.2 平衡条件与判据

平衡方程, 顾名思义, 就是平衡时各个已知量, 未知量之间要满足的具体数学方程. 平衡方程可以分为三类:

1. 平衡条件, 具体列法见下. 它可以同时包含位形变量, 主动力和约束力三类已知未知量.
2. 约束方程, 即以前讨论过的几何上的约束关系. 它只包含位形变量一类未知量.
3. 主动力的结构性方程, 有一些未知的主动力实际上是由一定的结构导致的, 弹簧上的力和动摩擦力就是典型的例子, 它们都有一些计算公式. 这样的方程也可以同时包含位形变量, 主动力和约束力三类已知未知量.

第一类方程, 也就是平衡条件(condition of equilibrium) 无疑是平衡问题中最丰富的一类方程. 具体问题中它却往往有很多种列法, 并造成或简单或复杂的求解过程. 这些条件中最基础的一类就是单个质点和刚体的平衡条件. 它们分别为:

A. 质点沿  $l$  方向的力平衡条件: 质点上的主动力与被动力构成共点力系  $\{\dots \mathbf{F}_i \dots\}$ , 任意选取某方向  $l$  的单位矢量  $e_l$  以后有:

$$\sum_i e_l \cdot \mathbf{F}_i = 0$$

B. 刚体沿  $l$  方向的力平衡条件: 刚体受到主动力和被动力构成空间力系  $\{\dots (\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i) \dots\}$ , 任意选取某方向  $l$  的单位矢量  $e_l$  作为投影方向, 平衡条件为:

$$\sum_i e_l \cdot \mathbf{F}_i = 0$$

C. 刚体绕  $\mathbf{R}$  点沿  $l$  方向的力矩平衡条件: 刚体受到主动力和被动力构成空间力系  $\{\cdots(\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i)\cdots\}$ , 任意选取位矢为  $\mathbf{R}$  的点作为矩心, 任意选取某方向  $l$  的单位矢量  $e_l$  作为投影方向, 平衡条件为:

$$\sum_i e_l \cdot [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{F}_i] = 0$$

在三类平衡条件中, 对一个具体的问题, 由于  $l$  方向与  $\mathbf{R}$  点选取的任意性, 平衡条件的列法都是无穷无尽的, 但这不一定意味着这些所有方程都是独立(independent)的, 也就是说往往只列出少数几个就能充分地包含每一种列法的正确性. 还有就是也不是所有列法在解决问题上都是同等简易的, 比如为了使得某个未知力不出现在方程中以减少未知数和方程的个数, 一方面利用整体法(integral method)来消灭内力, 一方面在列力平衡条件时选取垂直于力的方向作为投影方向, 一方面列力矩平衡条件时选取力作用线上的点作为矩心.

以上三类方程还都属于隔离法(isolation method)的平衡条件. 事实上根据刚化原理, 我们还可以把若干质点刚体看作整体, 把作为内力的约束力忽略, 列出整体法的平衡条件. 容易理解这些平衡条件全都是隔离法平衡条件的组合, 并不独立于隔离法的平衡条件.

于是一个重要的问题便浮现了出来, 如何找到所有可能的平衡条件中, 最少的, 相互独立的, 又能充分蕴含一切平衡条件的“核心平衡条件”? 这些固定的平衡条件构成的组被称作平衡判据(criterion of equilibrium). 对这个问题的研究给出以下结果:

### I. 平面力系:

#### A. 质点的平衡判据

$$\begin{cases} \sum_i e_{l_1} \cdot \mathbf{F}_i = 0 \\ \sum_i e_{l_2} \cdot \mathbf{F}_i = 0 \end{cases} \quad (e_{l_1} \neq \pm e_{l_2}, \text{ 即两方向不平行})$$

#### B. 刚体的平衡判据

$$\begin{cases} \sum_i e_{l_1} \cdot \mathbf{F}_i = 0 \\ \sum_i e_{l_2} \cdot \mathbf{F}_i = 0 \end{cases} \quad (e_{l_1} \neq \pm e_{l_2}, \text{ 即两方向不平行})$$

$$\begin{cases} \sum_i e_l \cdot \mathbf{F}_i = 0 \\ \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_1) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (e_l \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \neq 0, \text{ 即矩心连线不能垂直于力投影方向}) \\ \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_2) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_1) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \\ \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_2) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (\text{三矩心不共线}) \\ \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_3) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \end{cases}$$

## II. 空间力系: A. 质点的平衡判据

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i e_{l_1} \cdot \mathbf{F}_i = 0 \\ \sum_i e_{l_2} \cdot \mathbf{F}_i = 0 \quad (\text{三投影方向不共面}) \\ \sum_i e_{l_3} \cdot \mathbf{F}_i = 0 \end{array} \right.$$

B. 刚体<sup>9</sup>的平衡判据

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i e_{l_1} \cdot \mathbf{F}_i = 0 \\ \sum_i e_{l_2} \cdot \mathbf{F}_i = 0 \\ \sum_i e_{l_3} \cdot \mathbf{F}_i = 0 \\ \sum_i e_{l_4} \cdot [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_1) \times \mathbf{F}_i] = 0 \\ \sum_i e_{l_5} \cdot [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_2) \times \mathbf{F}_i] = 0 \\ \sum_i e_{l_6} \cdot [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_3) \times \mathbf{F}_i] = 0 \\ \dots \end{array} \right. \quad (\text{三力投影方向, 三力矩投影方向都不共面})$$

<sup>10</sup>

我们发现, 质点和刚体的平衡判据的方程个数都是严格等于无约束情况下各自的自由度数的: 平面问题质点是 2 而刚体是 3, 空间问题质点是 3 而刚体是 6. 线状刚体, 其力系也会具有共轴的特征, 读者可以证明, 此时空间问题中无论如何书写独立的方程数也将退化为 5.

平衡问题复杂, 多变. 牛顿矢量力学情况下有没有万全的求解套路呢? 对于一部分问题是有的, 这给出了:

## 4.3.3 亚静定, 静定与超静定

单独考虑约束方程与位形变量之间的关系是任何平衡问题的分类过程中首当其冲的. 参考之前对自由度与约束的讨论. 一个体系若包含  $a$  个质点,  $b$  个线状刚体,  $c$  个非线状刚体, 没有任何约束前自由度为  $s = 3a + 5b + 6c$ . 至此我们已经知道了一点, 完全利用隔离法, 可以列的平衡方程就是所有物体的平衡判据组合在一起, 一共也是  $s = 3a + 5b + 6c$  个方程.

这时候就开始分为三种典型的情形:

1. 体系具有  $r < s$  个约束. 首先, 增添  $r$  个约束方程, 那么体系剩余自由度为  $f = s - r$ , 这就是说凭约束方程不足以解出平衡时的位形变量. 称作**亚静定问题**(hypo-statically-determinate problem). 其次, 此时待解未知数至少有  $f$  个剩余独立位形变量, 和  $r$  个约束带来的约束力. 但如果所有主动力已知, 那么, 刚刚好就能够用  $s$  个平衡方程求解出所有未知数来. 如果  $f$  个独立的位形变量作为已知量由问题

<sup>9</sup>本条均指非线状刚体.

<sup>10</sup>还有 2 力 +4 力矩, 1 力 +5 力矩, 6 力矩三类平衡判据, 在此略去.

事先给定,那么方程多而未知数少,就有可能发生无解的情况,这实际上就代表着体系无法平衡,自由度开始演化,问题就从静力学问题转变为了动力学问题,也就是可能发生“不静”的情况.

2. 体系恰好具有  $r = s$  个约束.那么,不同于上一种情况,平衡时的位形变量就可以被完全确定下来.就是说体系处于绝对的“静”的状态.称作**静定问题**(statically-determinate problem).其次,  $s$  个约束带来的约束力,**在已知所有主动力的前提下**,恰好可以用  $s$  个平衡方程求解  $s$  个约束力.这就是“定”的来源.
3. 体系具有  $r > s$  个约束.那么约束方程显然是随自治但冗余(不独立)的.相同于上一种情况的是,体系没有自由度了,处于绝对的“静”的状态.称作**超静定问题**(hyper-statically-determinate problem).这是因为,不同于上一种情况的是,体系将存在  $r$  个未知约束力,已经超过可列的所有平衡方程的个数  $s$  了.这会导致约束力不确定,存在多解的情况.此时体系平衡是一定可以实现的.毕竟体系平衡定义为任意一组解能导致各部分即可.但是由于多解性,它其实是“不定”.所以这一类问题又被称作**静不定问题**(statically-indeterminate problem).

静不定问题常见于带静摩擦的平衡问题中,此时支持力和静摩擦力都是约束力,带来的约束较多.摩擦力由于解不唯一往往有一个范围,那么范围中的最小静摩擦力小于接触点的临界静摩擦力就成为了必要的平衡条件.实际解题过程中往往还结合摩擦角,摩擦锥等几何化方法进行求解,在此不再赘述.

## 4.4 平衡问题: 虚功原理

在一个平衡问题中,如果想对它进行分析力学化,那么需要对体系进行较简单的抽象.

我们考虑一个包含  $a$  个质点,  $b$  个线状刚体,  $c$  个非线状刚体的体系,初始自由度为  $s = 3a + 5b + 6c$ .加上  $r$  个约束.那么自由度和广义坐标的个数都是  $f = s - r$ ,不妨设广义坐标为  $q_1, q_2 \dots q_n$ .再施加若干主动力.这些主动力要么作用于质点上,要么作用于刚体的某点上.而约束将能给出:任意一个点的坐标都可以用  $f$  个广义坐标来表述:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_i, t) \quad i = 1, 2 \dots f$$

反过来理解,约束方程本身又是对那些点的坐标,进行限制,也就是说下面  $r$  个约束方程也能反映约束:

$$f_j(x_k, y_k, z_k, t) = 0 \quad j = 1, 2 \dots r$$

现在既然是静力学,我们就多提一点要求:以上两组方程都不能随时间变化:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_i) \quad ; \quad f_j(x_k, y_k, z_k) = 0$$

这样我们就可以引入**虚位移**(virtual displacement)这一概念的初等理解方式.它就是指在平衡位置附近假想的位移(坐标改变),发生位移了以后不一定还能平衡,这很显然.但是这个位移决不能破坏约束.即:

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad ; \quad \sum_k \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \delta z_k \right) = 0$$

另一个要求,彻底决定了约束力的性质,让平衡问题成为分析力学中非常简单的一类问题.就是关于约束必须是理想约束的要求:

### 4.4.1 理想约束

定义方法一:如果约束力总是可以通过约束方程来如此计算,那么约束就是理想约束:

$$R_{kx} = \lambda \frac{\partial f_j}{\partial x_k}, \quad R_{ky} = \lambda \frac{\partial f_j}{\partial y_k}, \quad R_{kz} = \lambda \frac{\partial f_j}{\partial z_k}$$

定义方法二: 如果约束力永远不做虚功, 那么约束就是理想约束:

$$\forall \delta \mathbf{r}_k, \sum_k \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

结合对  $\delta \mathbf{r}_k$  需要满足的约束方程来看, 以上两种定义方法的等价性是不言自明的.

值得注意的是, 根据之前引入的广义力的说法, 如果把作用在各个质点和刚体上的点上的约束力来求对各个广义坐标的广义力:

$$Q_{Ri} = \sum_k \mathbf{R}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}$$

又根据理想约束的定义, 其虚功为零, 但具有这样的算法:

$$\delta W_R = 0 = \sum_k \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_k \mathbf{R}_k \cdot \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_i \left( \sum_k \mathbf{R}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_i Q_{Ri} \delta q_i$$

由于对任意虚位移  $\forall \delta q_i$  上式都成立, 这就得到了:

$$Q_{Ri} = 0$$

所以理想约束的约束力只会作为内力而存在, 其在每一个广义坐标上都没有任何广义力以影响这个自由度的运动. 广义坐标的选取本身就是一个隐藏内部约束效果的结果.

#### 4.4.2 亚静定问题的虚功原理

上述讨论的情形实际上就是亚静定问题. 现在的平衡问题平衡条件就可以得到一个更简单的阐述. 既然无论质点还是刚体上, 考虑了主动力和约束力以后其合力都是零. 那么在发生一个虚位移时, 所有这些力做的总功都必然是零:

$$\delta W + \delta W_R = 0$$

既然现在是虚位移, 约束力的虚功一定是零, 那么主动力的虚功必然也有:

$$\delta W = 0$$

这其实就已经构成平衡条件了. 而它就是**虚功原理**(principle of virtual work): 一个理想约束系平衡时, 主动力的虚功和必然是零.

而如果找到主动力在每一个自由度上的广义力, 上式还可以被表述地更加具体:

$$Q_i = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = 0$$

与矢量力学做比较, 对于亚静定问题, 矢量力学用  $s$  个平衡条件求解出  $r$  个约束你和  $f$  个位形变量. 但是分析力学, 直接用以上  $f$  个广义力为零的方程求解出  $f$  个位形变量, 即广义坐标的平衡位置的值来. 对问题的简化可见一斑.

#### 4.4.3 静定问题的求解

对于静定问题以上方法也完全具有求解各个约束力的过程. 如果要求解某一个约束上的约束力, 那么就解除这一个约束, 新的体系就成为一个亚静定的体系了. 此时把原来根据约束方程确定的约束力(未知大小)换成主动力, 如果一共解除了  $f$  个约束, 就会出现  $f$  个未知的主动力, 新的体系的广义坐标其实反倒是继承了原来静定问题的广义坐标值, 是已知的, 无需求解的. 从而依然是未知的  $f$  个主动力在  $f$  个自由度上的广义力为零:

$$Q_i = 0$$

就能够通过  $f$  个方程求解出原来的  $f$  个约束力来.

## 4.5 分析力学初步 \*

经过上一节对虚功原理的探讨, 我们察觉到了分析力学理论建立的最基本条件: 约束必须是理想的. 但是与矢量力学方便处理的情况不同的是, 理想的约束不一定是稳定的, 此时分析力学照样也能够处理.

这就是说, 与上一节相同, 考虑一个包含  $a$  个质点,  $b$  个线状刚体,  $c$  个非线状刚体的体系, 初始自由度为  $s = 3a + 5b + 6c$ . 加上  $r$  个约束. 那么自由度和广义坐标的个数都是  $f = s - r$ , 不妨设广义坐标为  $q_1, q_2 \dots q_n$ . 再施加若干主动力. 这些主动力要么作用于质点上, 要么作用于刚体的某点上. 而约束将能给出两组不同表述的方程:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_i, t) \quad i = 1, 2 \dots f$$

$$f_j(x_k, y_k, z_k, t) = 0 \quad j = 1, 2 \dots r$$

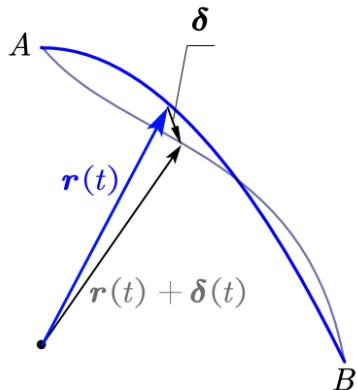


图 4.16: 实位移与虚位移

不同点在于, 现在根本不需要以上方程不含  $t$ , 下面的过程都是照推无误的. 现在对于这样的非稳定约束, 我们依然希望这样的约束不做虚功, 不过此时的虚位移该如何表述?

在任何一个实际发生的动力学过程中, 确定每个广义坐标的值就确定了在某一时刻的体系的位形, 确定每个广义坐标随着时间的演化实际上就确定了一个具体的过程. 而每一个质点在这样的具体的过程发生实际位移就是**实位移**(real displacement). 它们应该满足:

$$d\mathbf{r}_k = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} dt$$

$$\sum_k \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f_j}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial f_j}{\partial z_k} dz_k \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0$$

那虚位移又以何种形式存在? 回忆光学中的费马原理<sup>11</sup>我们就可以找到答案: 比如一个粒子做平抛运动从  $A$  到达  $B$ . 那么蓝色的轨迹就是粒子的实位移  $\mathbf{r}(t)$ , 但是如果我们设想一条并不符合动力学规律, 仅仅符合运动学约束的灰色轨迹, 其运动方程为  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\delta}(t)$ , 那么这一条新的运动相对原来的运动的偏移就是虚位移  $\boldsymbol{\delta}(t)$ . 对应到之前的情形, 就是说在同一时间, 约束的方程对原来正确的符合动力学规律的运动和虚位移以后的运动是同样成立的:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_i, t), \quad f_j(x_k, y_k, z_k, t) = 0$$

$$\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k(q'_i, t), \quad f_j(x'_k, y'_k, z'_k, t) = 0$$

用下式减上式, 就得到了:

$$\delta\mathbf{r}_k = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \sum_k \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \delta z_k \right) = 0$$

这和  $t$  作为常数的稳定约束对运动的限制才是一致了. 下一步, 自然时要求约束力不能做虚功, 注意, 理想的却不确定的约束情形中, 约束力是可以做实功的, 从而体系能量一般都不会守恒. 总之, 所谓理想约束, 依然指的是:

$$R_{kx} = \lambda \frac{\partial f_j}{\partial x_k}, \quad R_{ky} = \lambda \frac{\partial f_j}{\partial y_k}, \quad R_{kz} = \lambda \frac{\partial f_j}{\partial z_k}$$

$$\forall \delta\mathbf{r}_k, \delta W_R = \sum_k \mathbf{R}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k = 0$$

最后只需解决主动力如何描述, 最终重要的其实是主动力造成的广义力. 也就是说我们计算以下量并以此描述所有主动力造成的“效果”:

$$Q_i = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}$$

<sup>11</sup>它与分析力学的理论是同源的.

### 4.5.1 用广义坐标表示能量

一个体系最终会具有的能量,主要包括动能和势能. 我们分别来研究两者:

动能

一个体系如果还包含刚体,那么其实总动能应当体现为:

$$T = \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2 + \sum_l \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbb{I}_l \cdot \boldsymbol{\omega}_l$$

这里不可避免地需要使用到以后引入的刚体的惯量张量  $\mathbb{I}_l$  的概念. 为了简化问题,我们可以考虑把刚体也抽象为带约束的质点系,那么只需要写出:

$$T = \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2$$

就注意表达任意复杂体系的动能函数. 现在我们来进行广义坐标化. 利用上一小节给出的:

$$d\mathbf{r}_k = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} dt$$

等号两侧同时除  $dt$ , 得到质点速度的广义坐标表达法:

$$\mathbf{v}_k = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}$$

带回动能表达式, 我们得到:

$$T = \sum_i \sum_k \frac{1}{2} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i \sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \dot{q}_i + \sum_k \frac{1}{2} m_k \left( \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right)^2$$

这就是说, 动能可以分解广义速度  $\dot{q}_i$  的二次齐次项  $T_2$ , 一次齐次项  $T_1$ , 和随时间变的常数项  $T_0$  的和:

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = \sum_i \sum_j A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad A_{ij} = \frac{1}{2} \sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}$$

$$T_1 = \sum_i B_i \dot{q}_i, \quad B_i = \sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}$$

$$T_0 = C, \quad C = \frac{1}{2} \sum_k m_k \left( \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right)^2$$

如果体系包含的约束全都是稳定约束,那么一切关于  $t$  的偏导数消失, 动能就只剩下二次齐次项了, 即  $T = T_2$ .

我们再定义两个量,一个是与广义坐标  $q_i$  相伴相生的那些广义速度,广义加速度,广义力同系列的最后一个量: **广义动量**(general momentum). 它的定义始终为:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

也就是把实际的动能看作  $\dot{q}_i$  的至多二次多项式,而把下面的偏导数定义为与第  $i$  广义坐标  $q_i$  共轭的广义动量:

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_i \sum_j A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i B_i \dot{q}_i + C \right) = 2 \sum_j A_{ij} \dot{q}_j + B_i$$

第二个量,在数学上称作勒让德变换(Legendre transform),我们定义一个动能的变式:

$$U = \sum_i p_i \dot{q}_i - T$$

很容易验证,在以上三项分解法下,这个变式的动能其实为:

$$U = T_2 - T_0$$

广义动量和变式动能的意义何在?至少从定义上考虑, $p_i dq_i$  将会是动能的实际改变中的一项,完整的写法为:

$$dT = \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

三项中第二项就是  $p_i d\dot{q}_i$ . 而外力做功中的对应项为  $Q_i dq_i$ , 虽然两者不存在直接的等量关系,但是它们至少是同量纲的. 现在即使让两者相等也得不到任何有意思的结果. 这是因为这个动能函数还需要修正. 如果考虑变式动能  $U$ ,根据定义,有:

$$dU = - \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

乍一看这样的做法找不到经典力学中的对应,其实不然:经典力学中根本就不会有非稳定约束,从而  $T = U = T_2$ . 所以在更普遍的情况下,用  $U$  在某些场合代替原来的  $T$  也是可以理解的. 最关键是,如果设想让外力在  $q_i$  上做功转化为上式第二个求和项中对应项(注意下式是错误的结论,仅仅是一种在特殊情况下成立的设想):

$$Q_i dq_i = \dot{q}_i dp_i = \frac{dq_i dp_i}{dt} = \dot{p}_i dq_i \Rightarrow Q_i = \dot{p}_i$$

这就是说,广义力的效果其实就是在改变对应自由度上的广义动量.这个说法后面却可以说明是对的,虽然上式不对,它漏项了.

## 势能

之前,我们简单地把体系中质点和刚体的受力二分为约束力(即被动力)和主动力.现在我们要重新观察众多种类的主动力中,保守力的可能性.有时候,体系内部的部分之间具有势能,带来非约束力的内力.有时候体系受到的外力也可以由势能来描述.多个势能函数直接求和,自然可以同时产生多个对应的保守力.从而我们定义,如果体系的所有主动力都有对应的势能,即都是保守力,那么体系称作**保守**(conserved)的.也就是说,主动力全都由势能函数  $V(\mathbf{r}_k)$  描述:

$$\mathbf{F}_k = - \frac{\partial V}{\partial x_k} \mathbf{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y_k} \mathbf{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z_k} \mathbf{e}_z = - \nabla_k V$$

但是旋即便发现,如果用广义坐标表示  $\mathbf{r}_k$  并最终表示势能,在约束为非稳定约束情形下,势能将变成显含时间的形式  $V(q_i, t)$ .所以我们从一开时就默认最初势能也可以含有  $t$ ,即  $V(\mathbf{r}_k, t)$ .对应的例子比如,在质量变化的太阳  $M(t)$  外距离为  $r$  的地球  $m$  的势能,就是:

$$V(\mathbf{r}, t) = - \frac{GM(t)m}{r}$$

势能,以后都要理解为势能函数,作为一个数它不一定与动能的和守恒,但是上面这个势能至少可以告诉我们,地球的受力就是这个函数的负梯度:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = - \nabla V = - \frac{GM(t)m}{r^2} \mathbf{e}_r$$

故现在,我们直接总结,保守体系的主动力部分,由势能函数  $V(q_i, t)$  来描述.十分容易验证的一点是,此时主动动力在广义坐标上的广义力,也恰好可以通过负偏导数来计算:

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

但是一定要注意,由于势能本身就在随时间变化,故主动力做的实功并不会等于势能的降低,而是有:

$$-\mathrm{d}V = \sum_i Q_i \mathrm{d}q_i - \frac{\partial V}{\partial t} \mathrm{d}t$$

反倒是在虚位移情形下,有

$$-\delta V = \sum_i Q_i \delta q_i$$

### 4.5.2 拉格朗日方程

至此,一个由广义坐标描述的,反映广义力是如何改变广义动量的严谨正确的最终方程就呼之欲出,只差临门一脚了. 我们先不做任何体系上的主动力是否保守的假设,在一个十分普遍的问题中,每一个自由度  $q_i$  上的广义力为  $Q_i$ . 最初我们只能知道每一个质点都符合牛顿定律:

$$\mathbf{R}_k + \mathbf{F}_k = m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$$

如何从这个定律抽象到广义坐标呢? 核心的问题是要解决  $\ddot{\mathbf{r}}_k$  的广义坐标化. 为了将求导的阶数降低, 我们构造真实路径  $\mathbf{r}_k(t)$  周围的虚位移以后的路径  $\mathbf{r}_k(t) + \delta \mathbf{r}_k(t)$ . 一如既往地, 虚位移要符合约束条件. 而在牛顿定律两侧点乘虚位移, 再来求和计算虚功和相伴产生的项:

$$\sum_k \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k$$

第一项是约束力的虚功, 由于是理想约束所以等于零. 第二项才是真正的主动力虚功, 用广义力和广义位移表示为  $Q_i \delta q_i$  的求和. 第三项就是尚未算过的, 这样处理也恰好提供了去除二阶导数的便利, 从而方便广义坐标化:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k &= \sum_i \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \\ \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) - \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \\ \sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k &= \sum_i \left[ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) - \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right] \delta q_i \end{aligned}$$

现在我们暂时把动能写作:

$$T = \sum_k \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2$$

而其中  $\dot{\mathbf{r}}_k$  视作  $q_i, \dot{q}_i$  函数, 有下列结论成立:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial q_i} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} \\ \dot{\mathbf{r}}_k &= \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial q_i} &= \sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial q_i} \end{aligned}$$

后两式带入前两式并对比之前待化简的项, 发现:

$$\sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_i \left[ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i$$

所以原来的牛顿定律, 最后就变为:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

这就是著名的**拉格朗日方程**(Lagrange equation) 的原型. 也可以写成:

$$Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} = \dot{p}_i$$

所以产生第  $i$  自由度上广义动量变化的原因除了广义力, 还有一个动能本身对该自由度变化偏导数的因子. 可以称做“几何力”, 它的原因在于广义坐标与广义速度之间的耦合.

一个典型的例子比如在平面极坐标中研究粒子的运动, 以矢径  $r$  和极角  $\theta$  为两自由度. 矢量力学给出粒子受力  $F_r, F_\theta$ . 但是粒子广义力为:

$$Q_r = F_r, \quad Q_\theta = rF_\theta$$

写出动能:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

从而两个广义动量:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

后者即角动量. 注意到在半径方向还有几何力:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = m\dot{\theta}^2r$$

故拉格朗日方程, 就变为:

$$F_r + m\dot{\theta}^2r = \frac{d}{dt}(m\dot{r}), \quad rF_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})$$

这与矢量力学给出了同样的结果.

在体系为保守体系时, 拉格朗日方程还可以获得一种更普遍的形式. 只需要注意到势能函数, 由于不能含有广义速度, 与广义力之间符合以下关系:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

这样就得到了:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_i} = 0$$

一件令人震惊的事情就发生了: 动能势能不是做和, 而是做差, 以函数的形式组合为了一个矢量力学中从未见过的新函数  $L = T - V$ . 它就是著名的**拉格朗日量**(Lagrangian). 于是我们就遇到了标准的拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

对于  $f$  自由度系统拉格朗日方程也恰恰是  $f$  个, 恰好能把问题解决.

在以上过程中, 我们对势能的性质放松到了可以含有时间. 这一步可以进一步放松. 在有的场合下, 拉格朗日量也是由两项构成, 一项是常规意义上的动能, 但是另一项势能也是含有速度的. 这种势能函数叫做**广义势能**(general potential energy). 一种典型的情形是带点粒子在电磁场中运动的情形, 此时动能势能为:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$$V = q(\varphi + \dot{r} \cdot \mathbf{A})$$

其中  $\varphi$  是往往与电场对应的标势,  $\mathbf{A}$  则是往往与磁场对应的矢势. 在这样的场合下, 广义力的计算也要以下式为准:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

容易得到, 最终粒子的拉格朗日方程, 化简以后就是:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q \left[ -\nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$$

故只要把电场, 磁场视作:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

就能给出正确的洛伦兹力公式和牛顿定律. 以往在经典力学中与势能毫无关联的磁场力, 分析力学下也是广义势能的结果.

最后我们来探讨守恒量的问题. 用动能减势能这个操作固然不会得到什么守恒量, 经典力学告诉我们保守系统守恒量应当是两者加起来, 但是它导致了拉格朗日方程, 以它为基础, 我们能先后得到两个可能的守恒量.

一是在可能含有广义势的普遍情况下, 广义动量被重新定义为:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

直接从拉格朗日方程可以看出, 如果有

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

也就是拉格朗日量中不显含某个坐标  $q_i$ , 这样的坐标称作**循环坐标**(cyclic coordinate), 那么这个自由度上的广义动量就不会随着时间改变. 也就是“坐标平移不变导致动量守恒”.

二是, 我们还记得之前引入过变式动能  $U$ , 那么其实  $U + V$  才是对应经典力学中的总能量. 或者, 更普遍的, 对任意拉格朗日量, 定义**哈密顿量**(Hamiltonian):

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

那么直接计算其对时间导数就可以得到:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

从而如果拉格朗日量中不显含时间  $t^{12}$ . 那么哈密顿量就会守恒. 也就是“时间平移不变导致能量守恒”.

### 4.5.3 再论冲击问题

利用拉格朗日方程也可以求解碰撞问题. 其实就是考虑拉格朗日方程的积分形式:

$$p'_i - p_i = \int \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right) dt$$

其中  $p_i, p'_i$  就是碰前碰后的广义动量, 考虑到实际碰撞过程中几何力其实都是一些仅仅取决于广义坐标和广义速度的函数, 过程中最多突变, 但不会无限大, 所以在极短时间内积分是趋于零的, 而广义力积分给出了广义冲量  $I_i$ , 它也正是各个主动力冲量 (一般也就一个)  $\mathbf{I}_k$  计算的结果:

$$I_i = \sum_k \mathbf{I}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}$$

<sup>12</sup>即使约束不稳定这也有可能发生.

## 4.6 平衡态稳定性

4.6.1 一自由度体系

4.6.2 多自由度体系

# 第五章 简谐振动

## 5.1 方程与谐振

### 5.1.1 简谐振动的定义

振动是最常见的物理现象. 而振动中的最简单 (simple) 而和谐 (harmonic) 者谓之简谐振动 (simple harmonic oscillation). 对谐振子 (harmonic oscillator) 的学习与研究是会贯彻整个物理理论不同层次内容的始终的. 现在是经典力学, 以后会上升到场论, 量子力学与量子场论的高度.

简谐振动是指一个物理量  $Q$  随时间围绕其平衡位置做上下的波动. 其形式符合:

$$Q = Q_0 + \Delta Q \cos(\omega t + \varphi)$$

我们经常会有用复数表示振动的习惯, 其做法是在三角函数  $\cos$  与其宗量 (argument)  $\phi = \omega t + \varphi$  构成的项后添加一个虚的  $i \sin \phi$  项, 于是新的写法变成:

$$\tilde{Q}(t) = Q_0 + \Delta Q e^{i(\omega t + \varphi)} ; Q = \Re(\tilde{Q})$$

又或者:

$$\tilde{Q}(t) = Q_0 + \Delta \tilde{Q} e^{i\omega t} ; \Delta \tilde{Q} = \Delta Q e^{i\varphi}$$

以上各个常量中,  $Q_0$  是平衡位置,  $\Delta Q$  叫振幅 (amplitude), 宗量  $\omega t + \varphi$  叫做相位 (phase),  $\omega$  叫角频率 (angular frequency),  $\varphi$  叫初相位.  $\tilde{Q}$  为复化的复物理量, 而  $\Delta \tilde{Q}$  叫做复振幅 (complex amplitude).

复数表示最大的一个好处就在于很方便计算物理量的线性组合与导数. 事实上, 如果合理选取  $Q_0 = 0$ :

$$\dot{Q} = -\omega \Delta Q \sin \phi ; \dot{\tilde{Q}} = i\omega \tilde{Q} \Rightarrow \dot{Q} = \Re(\dot{\tilde{Q}})$$

$$\ddot{Q} = -\omega^2 \Delta Q \cos \phi ; \ddot{\tilde{Q}} = -\omega^2 \tilde{Q} \Rightarrow \ddot{Q} = \Re(\ddot{\tilde{Q}})$$

### 5.1.2 简谐振动的性质

以一个质点水平坐标  $x$  围绕  $x = 0$  左右做谐振为例. 其运动方程写作<sup>1</sup>:

$$x = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

那么其速度与加速度为:

$$v = i\omega A e^{i(\omega t + \varphi)}, a = -\omega^2 A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

我们发现在运动过程中的任意一个时刻, 加速度都是指向平衡位置的, 与偏离平衡位置的位移是成正比的:

$$a = -\omega^2 x$$

<sup>1</sup> 以后我们对物理量和物理量的复化只在必要的时候加以区分, 看到复数只需要认为省写了取实部这一例常操作罢了.

而任意一个时刻既然  $x$  是余弦函数,  $v$  是正弦函数, 它们就满足其绝对值大小的“此消彼长”关系<sup>2</sup>:

$$v^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$$

相位是很重要的物理概念, 相(phase), 状态也, 相位则是一个可以用来表示状态的数. 反过来, 我们可以根据物体在一个时刻的状态反过来确定这个时刻的相位. 如果位移是  $x$  而振幅为  $A$ , 则:

$$\phi = \arcsin \frac{x}{A}, \arcsin \frac{x}{A} \in \left\{ \arcsin \frac{x}{A} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \arcsin \frac{x}{A} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

同理如果已知速度  $v$  和速度振幅(velocity amplitude)  $\omega A$ , 那么相位为:

$$\phi = \arccos \frac{v}{\omega A}, \arccos \frac{v}{\omega A} \in \left\{ \arccos \frac{v}{\omega A} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\arccos \frac{v}{\omega A} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

相位的取法上具有多值性. 但是相位随时间的变化我们约定必须是连续的, 事实上它随时间线性增加. 也就是说如果前一个状态下相位为  $\phi_1$ , 后一个状态下相位为  $\phi_2$ , 那么这两个状态间历时:

$$\Delta t = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\omega}$$

### 5.1.3 简谐振动的判定

事实上以上的两个关系都可以成为体系做简谐振动的判据, 它们为:

- 线性回复判据: 如果一个随时间演化的变量的二阶导数正比于变量本身, 且符号相反, 可以判断变量做简谐振动:

$$\ddot{q} = -\omega^2 q \Rightarrow q = A \cos(\omega t + \varphi)$$

- 此消彼长判据: 如果一个随时间演化的变量的一阶导数与自己的正系数平方和为动力学守恒量(一般就是能量). 可以判断变量做简谐振动:

$$\dot{q}^2 + \omega^2 q^2 = \omega^2 A^2 \Rightarrow q = A \cos(\omega t + \varphi)$$

证明如下:

线性回复  $\Rightarrow$  此消彼长:

首先进行代换:

$$\ddot{q} = \frac{d}{dt}(\dot{q}) = \frac{dq}{dt} \frac{d}{dq}(\dot{q}) = \frac{\dot{q}d\dot{q}}{dq}$$

将上式代入  $\ddot{q} = -\omega^2 q$ :

$$\dot{q}d\dot{q} + \omega^2 \cdot q dq = d\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2\right) = 0 \Rightarrow \dot{q}^2 + \omega^2 q^2 = C$$

令  $A = \sqrt{C/\omega^2}$  即得到此消彼长判据.

此消彼长  $\Rightarrow$  简谐振动:

考虑  $\dot{q}$  的正根即可, 负根结果也是简谐振动:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{dq}{dt} = \omega \sqrt{A^2 - q^2} \\ \Rightarrow \quad \frac{dq}{\sqrt{A^2 - q^2}} &= \omega dt \end{aligned}$$

两边同时积分, 积分常数写到右侧记作  $\varphi$ , 得到:

$$-\arccos \frac{q}{A} = \omega t + \varphi \Rightarrow q = A \cos(\omega t + \varphi)$$

<sup>2</sup>注意到这里(往下)要避免使用复数, 因为一个复数的实部平方不会等于其平方的实部  $v^2 \neq \Re(\tilde{v}^2)$

### 5.1.4 小振动

值得注意的是,很多情况下体系的运动并不是严格的简谐振动.十分常见的一种情况是**小振动**(small oscillation).事实上,如果我们研究体系为完整而稳定的一自由度体系,广义坐标为 $q$ ,而且势能函数 $V(q)$ 存在一个极小值:

$$V'(q_0) = 0, \quad V''(q_0) > 0$$

那么根据上一章的阐述,这个 $q_0$ 就是体系的稳定平衡位置.那么,任何偏离这个平衡位置的系统运动只要偏离的值足够小,即做坐标变换 $\delta = q - q_0$ 为无穷小量,那么就一定为简谐振动.这是因为势能可以由泰勒展开为:

$$V = \frac{1}{2}V''(q_0)\delta^2 + \frac{1}{3!}V'''(q_0)\delta^3 + \dots$$

只要 $\delta$ 足够小,三阶项就必然远小于二阶项.从而可以只保留第一项.同理这也适用于动能,它必然正比于 $\delta$ 的平方,系数则与平衡位置有关:

$$T = \frac{1}{2}M(q_0)\dot{\delta}^2$$

从而这个体系的能量函数(哈密顿量)就被近似为了:

$$H = T + V = \frac{1}{2}M(q_0)\dot{\delta}^2 + \frac{1}{2}V''(q_0)\delta^2$$

这就直接符合了“此消彼长”判据.从而小振动的角频率为:

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(q_0)}{M(q_0)}}$$

例如,在典型的单摆问题中,取摆线与竖直方向的夹角 $\theta$ 为广义坐标.摆球的重力势能以平衡位置为原点表示为:

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$$

而动能为:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow M(\theta) = ml^2$$

从而只需要带入以上公式,就得到:

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(0)}{M(0)}} = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

这是因为事先看出来了稳定平衡点为 $\theta = 0$ .简单的小振动问题的思路都大抵如此.第一步是写出能量函数来,它决定体系的所有可能的动力学演化.第二步要找到稳定平衡位置,往往一样地是通过势能函数的增减凹凸性来判断,往往也要结合体系的对称性来观察.最后便是在平衡位置处把动能势能都近似为简单的平方项.唯一需要补充的是,除了利用二阶导数来计算这一个平方项,对常见函数写泰勒展开式也是十分常见的思路.

单摆问题的周期从而就是:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

但是一定要注意这个振动仅仅对小振动成立.例如在摆角为 $10^\circ = 0.087\text{rad}$ 时会有约 $2\%$ 的误差.如何计算这个误差?之后的非线性振动将讨论这个问题.

## 5.2 阻尼振动与受迫振动

### 5.2.1 阻尼振动

阻尼振动, 狹义地是指普通的弹簧型谐振子, 但是让振子运动的空间充满介质而产生湿摩擦 (流体摩擦). 从而产生一个正比于速度的阻尼的情形. 其牛顿定律为:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

这里的  $\gamma$  即**阻尼系数**(damping coefficient). 习惯上把  $m/\gamma$  称作**弛豫时间**(relaxation time). 最后还定义**衰减参数**(attenuation parameter) 或**损耗参数**(loss parameter) 为:

$$\beta = \frac{\gamma}{2m}$$

而无阻尼情况下的**固有频率**(natural frequency), 这里是角频率, 为:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

这样原来的方程又被重新写为:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

我们定义广义的**阻尼振动**(damped oscillation), 只需要一个运动的任意自由度  $q$ , 符合或者可以近似为以上式子形式的动力学方程, 那么这个自由度上的运动就是一个阻尼振动. 所有的阻尼振动只有两个常数特征, 一个是固有角频率, 一个是损耗的大小.

阻尼振动的求解需要分为三种情况. 我们统一猜解:

$$x = A e^{i\omega t}$$

带入原方程以后发现  $\omega$  需要满足:

$$\omega^2 - 2i\beta\omega - \omega_0^2 = 0$$

从而:

- **欠阻尼**(underdamped)

常见的小阻尼情况, 此时  $0 < \beta < \omega_0$ . 通过对以上方程求解得到两个含有正虚部的关于虚轴对称的根:

$$\omega_{1,2} = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

这样就得到了原阻尼振动方程的通解:

$$x = e^{-\beta t} [A \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t) + B \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t)] = C e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi)$$

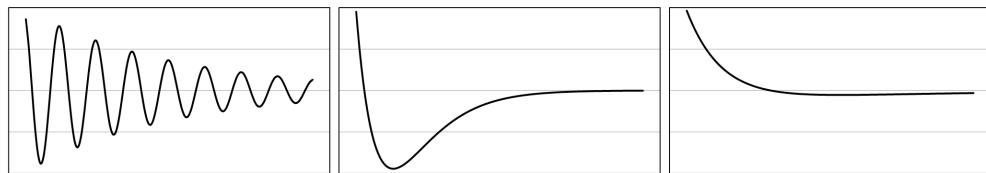


图 5.1: 欠阻尼, 临界阻尼与过阻尼

- **过阻尼**(overdamped)

此时  $\beta > \omega_0$ . 从而振动和回复力被极大地抑制了. 主要是一个在大阻力和初速度下缓慢回到平衡位置的运动. 以上方程两根此时为两个正虚根:

$$\omega_{1,2} = i(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})$$

这样就得到了原阻尼振动方程的通解:

$$x = e^{-\beta t} [Ae^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t}] = Ce^{-\beta t} \cosh(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t + \varphi)^3$$

- **临界阻尼**(critical damped)

这对应  $\beta = \omega_0$  的特殊情况. 可以通过微分方程的理论, 或者采用求  $\beta \rightarrow \omega_0$  极限的方式得到此时的运动方程. 它为:

$$x = e^{-\beta t}(A + Bt)$$

临界阻尼在实际生活中的应用为: 它是较快能够让振子回到平衡位置的理想阻尼大小. 这一点不难理解, 不难看出, 欠阻尼情况的振幅随时间的衰减方式为  $e^{-\beta t}$ , 也就是适当增大  $\beta$  有利于振幅尽快衰减. 但是, 过阻尼时, 长时间后位移与时间的关系为

$$x \sim e^{-\beta t} \cosh(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t) \sim e^{-\beta t} e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} \sim e^{-\frac{\omega_0^2 t}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}}$$

这就不再难发现, 此时增加  $\beta$  只会使得  $t$  前的衰减系数变小而不利于尽快衰减其位移. 从而, 无论是欠阻尼还是过阻尼, 临界阻尼是它们能够尽快回到平衡位置的极限. 此时原来的固有频率对应的周期就是它回到平衡位置的特征时间.

对于欠阻尼情况, 尤其是衰减因子  $\beta \ll \omega_0$  的小阻尼情况, 还有一些重要的性质值得挖掘. 下面都默认是这样的前提:

从之前的运动方程解不难看出来, 我们可以把小阻尼情况下的运动方程看作是一个振幅不断随着时间衰减的简谐振动. 其振幅衰减函数和阻尼化角频率为:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx \omega_0$$

要讨论其衰减的原因, 还有一种新的角度, 便是考虑其能量. 当振幅为  $A$  时, 其动能, 势能的和为:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

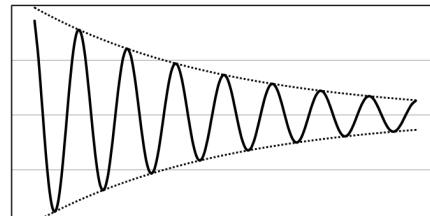


图 5.2: 小阻尼下的振幅衰减

现在它不是守恒的, 仅仅是在少数几个周期里面“近似”守恒. 但是我们可以考虑求它在一个周期内的平均:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m\omega_d^2 A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m \frac{\omega_0^2 + \omega_d^2}{2} A^2 \approx \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$$

现在我们计算单位时间减少的能量的平均值. 它其实就是阻尼造成的负功功率的平均值:

$$\bar{P} = \bar{\gamma}v \cdot \bar{v} = \frac{1}{2}\gamma\omega_d^2 A^2 \approx \frac{1}{2}\gamma\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cdot 2\beta$$

<sup>3</sup>也有可能是  $\sinh$

通过损耗功率等于能量的负导数,也可以得到振幅随着时间衰减的具体结果.我们现在关心一个重要的量,它实际上是反应振子振动单位时间所减少的能量占由于以  $\omega_0$  振动导致的总能量转化速率的比例,我们把上式换一种写法:

$$\bar{P} = \frac{\omega_0 \bar{E}}{Q}$$

以上引入的  $Q$  就是著名的**品质因数**(quality factor). 它越大,表示损耗越低,振子的阻尼就越小,就越接近“谐振”. 实际上它算法为:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

品质因数经常与另一个因子一起提出,两者是简单的倒数关系,更精确地,我们定义:

$$\sin \delta = \frac{1}{2Q} = \frac{\beta}{\omega_0}$$

$\delta$  被称作**损耗角**(loss angle). 一定要注意这两个概念是普遍的. 谐振子模型是很多实际问题的抽象,它们作为谐振子都有自己的品质因数或损耗角,用以描述过程的一些共性,而且,不光可以用能量的损失的共性来定义品质因数和损耗角,还有很多重要的方式. 详情见后.

现在我们来考虑简谐振动的**相图**(phase diagram). 在动力学中,这总是指把单个过程的运动,画成以其广义坐标和广义速度(或动量)为坐标轴的**相空间**(phase space)中的曲线形成的图像. 阻尼振动的代表性解为:

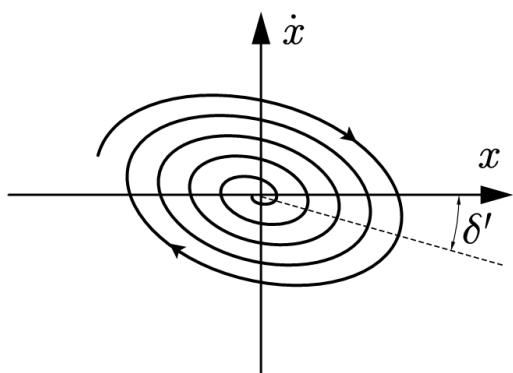


图 5.3: 阻尼振动的相图

$$x = Ae^{-\beta t} e^{i\omega_d t}$$

在这个解下,其速度为:

$$\dot{x} = (i\omega_d - \beta)Ae^{-\beta t} e^{i\omega_d t}$$

两个量都在随时间衰减. 从而在相图上就体现为一随着时间不断向着原点靠近的螺旋线. 如果没有阻尼,那么标准简谐振动的相轨迹就是正椭圆:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 A^2} = 1$$

但是,有阻尼时除了是螺旋式的椭圆,它还不是“正”的. 事实上,如果去除衰减因子,即将  $x$  和  $\dot{x}$  乘以一个  $e^{\beta t}$  以抵消其衰减:

$$X = xe^{\beta t} = Ae^{i\omega_d t}, \quad V = \dot{x}e^{\beta t} = i(\omega_d + i\beta)Ae^{i\omega_d t}$$

两者之间也不是恰好相差相位  $\pi/2$ ,而是有一个额外相位差:

$$\delta = \arctan \frac{\beta}{\omega_d} = \arcsin \frac{\beta}{\omega_0}$$

可以发现这个相位差就是损耗角. 也就是说,损耗角的另一种理解方式是位置与速度振动过程中的相位夹角. 作为结果,其相图中的椭圆也要倾斜一个角度  $\delta'$ . 可以证明,损耗角越大,这个倾斜角度也会越大.

## 5.2.2 受迫振动

如果在谐振子上施加一个周期性的策动外力. 我们总是研究基本的简谐式的外力<sup>4</sup>:

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad \text{i.e.} \quad F(t) = F_0 \cos \omega t$$

<sup>4</sup>傅里叶分析理论告诉我们,任何函数都可以分解为无穷多助三角函数的线性组合. 故对于线性系统原则上就可以用叠加原理处理任意任意强迫力的运动求解:只要我们把简谐强迫力找到解法.

这个运动就称作受迫振动(driven oscillation). 这样子原来的方程就变为:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

很明显, 可以猜一个谐振解. 它是上述微分方程的特解(稳态解). 通解还需要加上上一部分讨论的阻尼振动解(齐次方程的解是暂态解). 注意其振动频率应当是策动力的频率  $\omega$  而不是体系的固有频率  $\omega_0$ :

$$x = A e^{i\omega t} \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega)A = \frac{F_0}{m}$$

故, 复振幅的解法也是相当地直接:

$$A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}$$

作为复振幅, 上  $A$  表达式其实同时包含了两个因素, 一个是振幅, 一个是相位. 现在我们分离它们:

$$A = |A| e^{i\varphi}$$

$$|A| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\varphi = -\arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{or} \quad \varphi = -\left(\pi - \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

这就构成了两个关于  $\omega$  的函数. 这也是实验上我们特别关心的两个函数, 它们反映在稳态受迫振动的时候, 一定外力下振子产生的振幅与相位究竟是怎样取决于策动力的角频率的. 这就是著名的幅频特性(amplitude-frequency characteristic) 和相频特性(phase-frequency characteristic). 利用之前定义的品质因数  $Q$ , 再命  $x = \omega/\omega_0$ . 整理得:

$$|A| = \frac{QF_0/m\omega_0^2}{\sqrt{Q^2(1-x^2)^2 + x^2}}$$

$$\varphi = -\arccos \frac{Q(1-x^2)}{\sqrt{Q^2(1-x^2)^2 + x^2}}$$

我们依然只考虑小阻尼情况. 此时  $Q$  较大. 比如图5.4所示,  $Q = 5, 10, 20$  等.

那么受迫振动又被分为三种情形:

- 低频区为弹性控制区.

在  $\omega \ll \omega_0$  时,  $m\ddot{x}, \gamma\dot{x}, kx$  三项中最后一项最大, 主要是弹簧的弹性力与策动力去平衡. 从而体现出以下计算结果:

$$|A| \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

$$\varphi \approx 0$$

也就是策动力与位移几乎同相, 振子有充分的时间去实现平衡.

- 高频区为惯性控制区.

在  $\omega \gg \omega_0$  时,  $m\ddot{x}, \gamma\dot{x}, kx$  三项中第一项最大, 主要是高速变化的策动力去直接产生振子加速度. 从而体现出以下计算结果:

$$|A| \approx \frac{F_0}{mx^2\omega_0^2} = \frac{F_0}{mw^2}$$

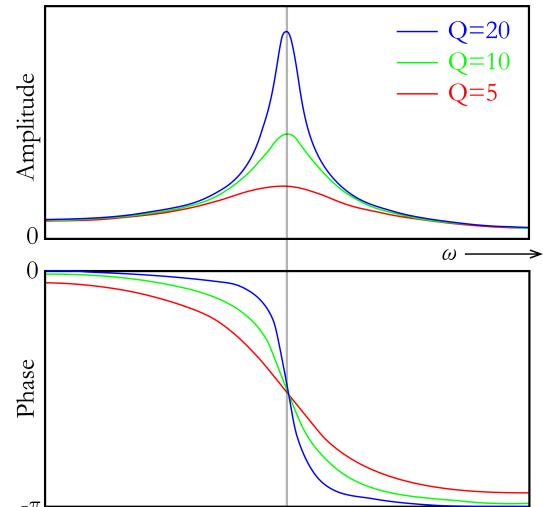


图 5.4: 幅频, 相频特性

$$\varphi \approx -\pi$$

也就是策动力与位移几乎反相(亦反向).振子“随波逐流”,弹性力和阻尼力没有时间跟上策动力的节奏.

- 中频区为共振区.

在  $\omega$  在  $\omega_0$  附近,即量级接近时.三个项  $m\ddot{x}$ ,  $\gamma\dot{x}$ ,  $kx$  也量级相当.如果把结果画成图5.4.可以发现十分典型的现象是,振幅在某频率处取到了极值.而相位差(绝对值)在某频率处从小于  $\pi/2$  增加到大于  $\pi/2$ .

**共振**(resonance) 是谐振子系统中十分典型的现象.一个共振发生的时候有两个量是值得关注的:

第一个值得关注的共振参数,是共振的峰的位置.即**共振频率**(resonance frequency).但是这个因素又被分为位移共振和速度共振,即位移振幅  $|A|$  最大或者速度振幅最大的角频率值.或者可以证明,等价的是,**振幅共振**(amplitude resonance) 和**相位共振**(phase resonance).前者指的是响应  $x$  最大的点:

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \approx 1 \Rightarrow \omega \approx \omega_0$$

后者则指响应和策动力完全相位差为  $\pi/2$  的情况:

$$x^2 = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0$$

可见两个共振在小阻尼情况下几乎是重合的.在振幅共振的情况下,振幅最终为:

$$|A| = Q \cdot \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot \sqrt{\frac{4Q^2}{4Q^2 - 1}} \approx Q \cdot \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

如果以这个角频率的外力  $F_0$  直接作用在自由的质点上,或者是考虑让一个没有阻尼的振子进行固有振动并使弹簧给振子的力就是  $F_0$ .我们发现振子振幅应当是  $F_0/m\omega_0^2$ .这就是说共振时振幅成为了这个振幅的  $Q$  倍.说明了如果让体系从静止开始,自某一时刻开始受到周期性的外力而产生振动,如果频率接近固有频率,体系会十分反常的振幅越来越大,直到振幅是自由振幅的  $Q$  倍.这也是品质因数的第二种理解方式:共振的放大倍数.

在看相位共振时的策动力-相位差为  $\pi/2$  的现象.这说明了什么?这说明策动力与速度完全就是同相的.带入  $x = 1$  容易计算此时位移振幅为  $|A| = QF_0/m\omega_0^2$ ,等效地可以写成  $F_0 = m\omega_0^2|A|/Q$ .那么速度振幅就是  $\omega_0|A|$ .从而策动力对速度单位时间做的功就是:

$$W = \overline{F(t)\dot{x}(t)} = \frac{1}{2}F_0\omega_0|A| = \frac{1}{2}m\omega_0^3|A|^2/Q$$

这与上一部分得到了相似的结果.因为振动的能量其实就是:

$$\bar{E} = \frac{1}{2}m\omega_0^2|A|^2$$

也就是说品质因数反映了耗散的能量与总能量(动能势能互相转换)的比例:

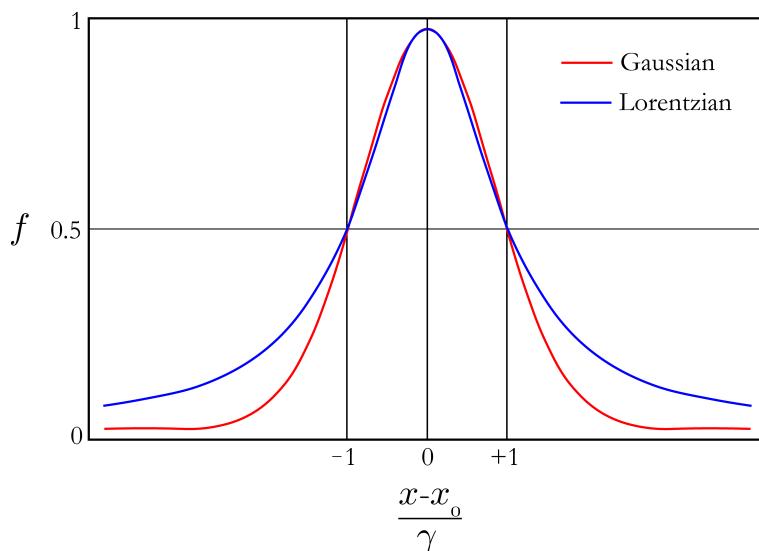
$$Q = \frac{\omega_0 \bar{E}}{W}$$

第二个值得关注的共振参数,是共振的峰的宽度.谐振子模型给出的幅频曲线,与著名的**柯西分布**(Cauchy distribution) 对应的函数曲线有密切联系,柯西分布又常常因为在理论物理学中的广泛使用而称作**洛伦兹型**(lorentzian shape)<sup>5</sup>.所谓柯西分布最初来自概率分布模型,它是指以下分布函数:

$$\text{pdf.}^6 = \frac{1}{\pi[\gamma^2 + (x - x_0)^2]}$$

<sup>5</sup>比如谱线的形状,即线型,就常被视作洛伦兹线型.

<sup>6</sup>probability distribution function,即概率分布函数的缩写.

图 5.5: 高斯型和洛伦兹型<sup>7</sup>

这样一个分布函数是需要有归一化的要求的:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{pdf. } dx = 1$$

但是现在的幅频特性, 明显与洛伦兹型是有出入的. 第一是, 我们需要把因变量修改为  $I = |A|^2$  而不是  $|A|$ . 这代表振动的强度而不是振幅. 第二是, 不同于柯西分布的分母为二次函数, 这里的分母却作为了  $x$  的四次函数. 是  $\omega$  的四次函数. 虽然  $I(\omega)$  与柯西分布有别, 而且也不归一化. 但是却体现出类似的性质. 它们都是有一个峰, 并在峰两侧按照较慢的多项式的方式衰减 (而不是像高斯型那样指数衰减). 而且我们都用半高峰宽(FWHM, full width at half maximum) 来描述峰的宽度. 它被定义为函数值, 或者代表的强度减少为峰值的一半对应的两点之间的区间宽度. 对于标准的洛伦兹型, 容易发现半高峰宽就是:

$$\text{FWHM} = 2\gamma$$

谐振子的幅频曲线的半高峰宽就更加难算. 我们此时会采取一个近似技巧, 不难验证其正确性. 注意到在洛伦兹型中取到半高的点处分母中的两项是相等的, 于是有理由相信在  $I(x)$  函数情况下, 直接让分母两项相等就也近似是在半高点处:

$$\begin{aligned} I(x) &= I_0 \Big/ \left[ (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right] \Rightarrow I_{\max} \approx I_0 \\ I &= \frac{I_{\max}}{2} \Rightarrow 1 - x^2 \approx \pm \frac{x}{Q} \end{aligned}$$

这就可以确定, 取到半高的点  $x_+, x_-$  为:

$$x_+ = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q} ; \quad x_- = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q} \Rightarrow x_+ - x_- = \frac{1}{Q}$$

而  $\omega_+ = x_+ \omega_0$ ,  $\omega_- = x_- \omega_0$ . 从而半高峰宽就是:

$$\text{FWHM} = \Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{\omega_0}{Q}$$

我们又发现了品质因数的一种常见定义方式, 它被定义为谱线的锐度(sharpness), 即峰处角频率与半高峰宽的比值:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

<sup>7</sup>高斯型是指高斯分布:

$$\text{pdf.} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

### 5.3 多自由度小振动 \*

多自由度小振动,首先得是一个多自由度平衡问题.在上一章带约束的完整系统的静力学平衡的基础上.如果体系还存在  $f$  个自由度,与之对应的有  $f$  个广义坐标  $q_i$ .那么我们指出过,体系的平衡条件为:

$$Q_i = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = 0$$

但是在绝大多数情况下,我们处理的是保守体系的问题.所以这种场合下又有势能函数  $V(q_i)$ .广义力也能从势能中得到:

$$Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

这完全就能得到保守体系的平衡条件:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

又是在绝大多数情况下,势能函数是性质非常好的函数<sup>8</sup>.从而可以在平衡位置附近泰勒展开.把平衡位置记作  $q_{i0}$ ,而偏离平衡位置的位移为  $\delta_i$ ,平衡位置处势能记作  $V_0 = V(q_{i0})$ ,由于平衡位置一阶导数为零,故:

$$V(q_{i0} + \delta_i) = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_{i0}} \delta_i \delta_j + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} \left. \frac{\partial^3 V}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \right|_{q_{i0}} \delta_i \delta_j \delta_k + \dots$$

在忽略三阶小量(不会成为领头项,条件下面再讨论)的前提下,再通过去掉常数  $V_0$ ,不影响势能的效果.我们发现势能实际上就成为了一个二次型:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_{i0}} \delta_i \delta_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \delta_i \delta_j$$

而动能,由于在平衡位置附近小范围内做小的运动,当然也是一个关于广义速度的二次型,系数为常数  $T_{ij}$ :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\delta}_i \dot{\delta}_j$$

关于系数  $T_{ij}$ ,  $V_{ij}$ .一个要求是它们必须对称:

$$T_{ij} = T_{ji} ; \quad V_{ij} = V_{ji}$$

其中的道理非常简单,例如只有两个广义坐标的变化  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ .那么  $V_{12} = a \neq V_{21} = b$  所决定的势能二次型与  $V_{12} = V_{21} = (a+b)/2$  决定的二次型根本就是同一个:

$$V_{12} = a \neq V_{21} = b : V = \frac{1}{2} V_{11} \delta_1^2 + \frac{1}{2} V_{22} \delta_2^2 + \frac{1}{2} a \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{2} b \delta_2 \delta_1 = \frac{1}{2} V_{11} \delta_1^2 + \frac{1}{2} V_{22} \delta_2^2 + \frac{1}{2} (a+b) \delta_1 \delta_2$$

$$V_{12} = V_{21} = \frac{a+b}{2} : V = \frac{1}{2} V_{11} \delta_1^2 + \frac{1}{2} V_{22} \delta_2^2 + \frac{1}{2} \frac{a+b}{2} \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{2} \frac{a+b}{2} \delta_2 \delta_1 = \frac{1}{2} V_{11} \delta_1^2 + \frac{1}{2} V_{22} \delta_2^2 + \frac{1}{2} (a+b) \delta_1 \delta_2$$

反过来,如果给一个二次型,我们也总可以把系数写成对称的形式,比如在动能中,毕竟偏导数本身也是可交换次序的:

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\delta}_i \partial \dot{\delta}_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\delta}_j \partial \dot{\delta}_i} = T_{ji}$$

<sup>8</sup>数学上叫做光滑函数.

举两个例子. 在耦合摆(coupled pendulum) 问题5.6中, 分开看是相同的两个单摆, 但却因为弹簧而发生弱的耦合, 设想弹簧原长为  $x$  为摆间距, 这样就使得两单摆按原来的位置平衡时, 弹簧也没有作用力. 但只要一发生运动就彼此影响, 设两摆球距离  $x' = \sqrt{(x + l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2 + (l \cos \theta_2 - l \cos \theta_1)^2}$ . 这样作为整体体系动能和势能为:

$$T_{\text{cp}} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2$$

$$V_{\text{cp}} = mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}k(x' - x)^2$$

再引入描述耦合强度的参量  $\varepsilon = kl/mg$ , 小量近似以后, 动能, 势能被近似为二次型:

$$T_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \cdot ml^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot ml^2 \cdot \dot{\theta}_2^2$$

$$V_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \varepsilon)mgl \cdot \theta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot (1 + \varepsilon)mgl \cdot \theta_2^2 - \varepsilon mgl \cdot \theta_1 \theta_2$$

而在双摆(double pendulum) 问题5.7中, 两个摆直接悬挂在一起. 也会彼此影响. 体系动能和势能为:

$$T_{\text{dp}} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$V_{\text{dp}} = mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2)$$

小量近似以后, 动能, 势能被近似为二次型:

$$T_{\text{dp}} = \frac{1}{2} \cdot 2ml^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot ml^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + ml^2 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$V_{\text{dp}} = \frac{1}{2} \cdot 2mgl \cdot \theta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot mgl \cdot \theta_2^2$$

如果把  $T_{ij}$  和  $V_{ij}$  写成矩阵, 那么对应的矩阵叫做惯性矩阵(inertial matrix) 和弹性矩阵(elastic matrix):

$$[T_{ij}]_{\text{cp}} = ml^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [V_{ij}]_{\text{cp}} = mgl \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 + \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$[T_{ij}]_{\text{dp}} = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [V_{ij}]_{\text{dp}} = mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而我们可以发现这两个问题的重大区别在于, 前一个问题动能规整, 势能却具有交叉项. 后一个问题势能规整, 动能却具有交叉项.

当我们遇到一个这样普遍的小振动问题时, 该如何得到其运动的特征. 有两种常见的做法: 一是通过换元来实现动能势能的简化, 这种方法需要较深厚的数学基础, 又最好通过拉格朗日方程来理解一些过程. 我们下面也写出具体的过程, 有兴趣的读者可以做进一步研究; 但也有第二种简易的方法来求解一些直接的量. 我们也在详细讨论的方法之后加上去:

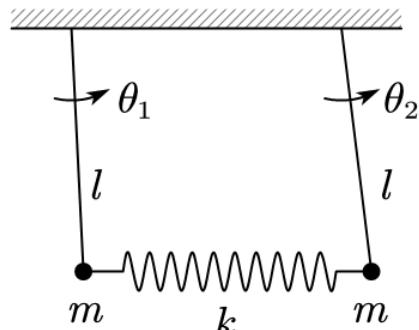


图 5.6: 耦合摆

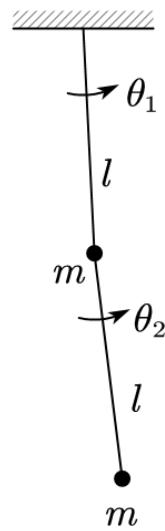


图 5.7: 双摆

### 5.3.1 基于线性代数与分析力学的简正坐标求解

对一个任意的二次型进行配方并不是难事. 例如  $F(x_1, x_2 \dots)$  是一个二次型, 那么它必然可以写作:

$$F(x_1, x_2 \dots) = \frac{1}{2}f_{11}x_1^2 + x_1(f_{12}x_2 + f_{13}x_3 + \dots) + (\frac{1}{2}f_{22}x_2^2 + \dots)$$

即  $x_1$  自己的项, 和别的变量“耦合”的项以及与  $x_1$  无关的项. 那么做变量代换:

$$x'_1 = x_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}}x_2 + \frac{f_{13}}{f_{11}}x_3 + \dots$$

便可以把“耦合”项配方到  $x_1$  自己的项内, 上式变成:

$$F(x_1, x_2 \dots) = \frac{1}{2}f_{11}x'^2_1 + F'(x_2, x_3 \dots)$$

之后只要继续对  $F'$  配方, 每次可以得到一个完全平方的项, 余项则是剩下的变量的二次型, 变量数至少减一. 这样就可以实现任意二次型的完全配方. 用这个方法可以选择动能或者势能进行化简. 最终形式, 由上讨论, 只包含平方项, 没有交叉项. 由于这样对应的矩阵是对角矩阵. 我们把这样的配方过程称作**对角化**(diagonalization):

$$T = \sum_i \frac{1}{2}T_i \dot{\delta}_i^2 \quad ; \quad V = \sum_i \frac{1}{2}V_i \delta_i^2$$

注意这里动能和势能的对角化是分开来进行的. 对应的系数  $T_i$  叫做**惯性系数**(inertial coefficient), 而  $V_i$  叫做**弹性系数**(elastic coefficient). 同时我们对这些系数必然有以下期待:

- 动能的对角化结果:

- 非退化正定二次型: 所有  $T_i > 0$ .
- 退化正定二次型: 个别  $T_i = 0$ .
- 不可能出现某个  $T_i < 0$ .

- 势能的对角化结果:

- 非退化正定二次型: 所有  $V_i > 0$ .
- 可以负的二次型: 存在  $V_i < 0$ .
- 退化的二次型: 所有  $V_i \geq 0$  且也存在  $V_i = 0$ .

说明:

动能不可以出现负的惯性系数, 是因为在所有情况下动能都必须大于零. 但是在有的情况下惯性系数可以为零, 即, 即使广义速度不为零, 造成的动能为零, 称作**退化**(degenerate) 的情况. 这要么说明体系存在没有动力学效果的冗余自由度. 例如无限细的杆的自转角就是这样的例子. 去掉这个广义坐标也不影响能量的表达式. 要么说明这个自由度上的动能是一个高阶小量. 只是在目前平衡位置, 系数“偶然”地等于了零, 只要偏离这个位置去振动就会产生一定的动能, 抑或我们在实际问题中需要考虑更高阶泰勒展开产生的广义速度的高次项. 后面这种情况一般就与简谐振动无关了. 再次不予考虑. 故我们此后做假设: **所有小振动问题, 动能必须是非退化正定的.**

势能就更加复杂. 势能相对平衡位置本来就可正可负. 那么上面我们分为三种情况其实就包括了所有情况. 有一点是非常突出的, 如果沿某方向偏离平衡位置时, 势能降低了, 那么原平衡位置就一定是**非稳定平衡**(unstable equilibrium). 在仅仅考虑二次型的情况下, 一旦出现一个负的弹性系数这就成为了必然. 但是即使一个负的弹性系数都没有, 也不能因此就下断言原位置是稳定的. 因为还有二次型**退化**的情况. 它发生在某些弹性系数为零时, 此时高阶泰勒展开项如果是负的, 它依然可以不稳定, 普遍情况得考察多个领头

项.但是,有一点很好判断:就是如果所有弹性系数为正,那么原来的位置就一定是**稳定平衡**(stable equilibrium).因为此时任意的偏离平衡位置都使得势能升高.也只有稳定平衡才能作为小振动问题求解的先决条件.故我们此后做假设:**所有小振动问题,势能必须是非退化正定的.**

但是虽然单独对动能或势能对角化简单,但是两者却不会同时对角化.例如在双摆问题中,对于动能:

$$T_{dp} = \frac{1}{2} \cdot 2ml^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot ml^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + ml^2 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = \frac{1}{2} \cdot 2ml^2 \cdot \left( \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{ml^2}{2} \cdot \dot{\theta}_2^2$$

但是如果做换元  $\vartheta_1 = \theta_1 + \theta_2/2$ ,  $\vartheta_2 = \theta_2$ , 动能倒是没有交叉项了,但原来好好的势能又产生交叉项了:

$$V_{dp} = \frac{1}{2} \cdot 2mgl \cdot \vartheta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}mgl \cdot \vartheta_2^2 - mgl \cdot \vartheta_1 \vartheta_2$$

所以,我们这里要追求的其实是**同时对角化**(simultaneous diagonalization) 的技巧.为了进一步研究,我们先来抽象对角化的过程.根据矩阵理论,任何一个坐标变换,其实是一个线性变换:

$$[q'_i] = [A_{ij}][q_j]$$

这个式子是以下两种写法的缩略形式:

$$q'_i = \sum_j A_{ij} q_j \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ \vdots \\ q'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

它的逆变换:求出  $[A_{ij}]$  的逆矩阵  $[B]_{ij}$ , 就可以用新坐标表示旧坐标:

$$[q_i] = [B_{ij}][q'_j]$$

而动能,势能都可以用矩阵来表示<sup>9</sup>:

$$T = \frac{1}{2}{}^t[\dot{q}_i][T_{ij}][\dot{q}_j] \quad ; \quad V = \frac{1}{2}{}^t[q_i][V_{ij}][q_j]$$

这样只要把之前的变换代入这两个二次型,就得到了变换之后的二次型:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}{}^t[\dot{q}'_i]^t[B_{ij}][T_{jk}][B_{kl}][\dot{q}'_l] = \frac{1}{2}{}^t[\dot{q}'_i][T'_{il}][\dot{q}'_l] \\ V &= \frac{1}{2}{}^t[q'_i]^t[B_{ij}][V_{jk}][B_{kl}][q'_l] = \frac{1}{2}{}^t[q'_i][V'_{il}][q'_l] \end{aligned}$$

这说明其实在坐标变换以后,惯性和弹性矩阵是按照右乘一个矩阵,再左乘它的转置来进行的.这种对矩阵的变换数学上叫做**合同变换**(congruent transformation):

$$[T'_{il}] = {}^t[B_{ij}][T_{jk}][B_{kl}] \quad ; \quad [V'_{il}] = {}^t[B_{ij}][V_{jk}][B_{kl}]$$

要把  $[T]$  和  $[V]$  同时对角化,其实问题的诀窍是求解**本征值问题**(eigenvalue problem):

$$([V_{ij}] + \lambda[T_{ij}])[x_j] = [0]$$

即,确定是否存在常数  $\lambda^{10}$  和非零向量  $[x_j]$  使得两个矩阵组合以后恰好作为系数使得这个向量作为以上方程的解.乍一看这似乎很抽象.其实这背后的物理意义可以做这样的理解:既然是小振动,就有可能找到一些简单的运动模式,此时所有坐标上都是做不同振幅的简谐振动,即:

$$[q_i] = [x_i] \cos \omega t$$

<sup>9</sup>用  ${}^t[q_i]$  表示转置,即把列向量写作行向量.

<sup>10</sup>后面会知道一定非零.

如何写出这种情况下的动力学方程?一种完全严谨的做法就是利用上一章讨论的拉格朗日方程:

$$L = T - V = \frac{1}{2}[\dot{q}_i][T_{ij}][\dot{q}_j] - \frac{1}{2}[\dot{q}_i][V_{ij}][q_j]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow [T_{ij}][\ddot{q}_j] = -[V_{ij}][q_j]$$

将简谐振动解带入,就得到了:

$$([V_{ij}] - \omega^2[T_{ij}])[x_j] = [0]$$

从而原来的本征值问题中的  $\lambda$  代表的含义就是振动角频率平方  $\omega^2$ .那么这个本征值问题又如何求解?首先,上式中方程组存在解且非零的条件为系数行列式为零:

$$\det([V_{ij}] - \lambda[T_{ij}]) = 0$$

这就构成了关于  $\lambda$  的  $n$  次方程,他就一定有  $n$  个根,不过可以有重根.把这  $n$  个根带入,我们就可以把对应的  $n$  个本征向量<sup>11</sup>  $[x_j]$  找到,这仅仅是个体力活:求解至多  $n$  次  $n$  元线性方程组.一旦求解完毕,我们就找到了  $n$  个  $\lambda$  和  $n$  个  $[x_j]$ ,可以记作:

$$([V_{ij}] - \lambda_k[T_{ij}])[B_{j,k}] = [0]$$

最后还需证明一点,就是这  $k = 1, 2 \cdots n$  个本征值对应的本征向量不仅是独立的,而且还是正交(orthogonal)的.注意这里的正交是指:

$$k \neq k' \Rightarrow {}^t[B_{i,k}][T_{ij}][B_{j,k'}] = 0$$

这个正交性足以说明独立性,毕竟如果  $[B_{i,k}]$  与  $[B_{i,k'}]$  不独立,那么前者(非零)就是后者(非零)的常数(非零)倍,以上  ${}^t[B_{i,k}][T_{ij}][B_{j,k'}]$  就会变成常数乘以后者产生的动能,显然是非零的.所以一旦上式为零,两个矢量正交就足以说明它们不会同向.

证明正交性的依据还是它们的定义.首先我们发现,如果任意两个矢量恰好成为不同本征值下的本征向量:

$$([V_{ij}] - \lambda_1[T_{ij}])[x_{j,1}] = [0], ([V_{ij}] - \lambda_2[T_{ij}])[x_{j,2}] = [0], \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

构造式子  ${}^t[x_{i,1}][V_{ij}][x_{j,2}]$ .一方面先计算前面的向量乘弹性矩阵,一方面也可以先算后面的向量乘弹性矩阵:

$$\begin{aligned} {}^t[x_{i,1}][V_{ij}] &= \lambda_1 {}^t[x_{i,1}][T_{ij}], \quad [V_{ij}][x_{j,2}] = \lambda_2[T_{ij}][x_{j,2}] \\ \Rightarrow {}^t[x_{i,1}][V_{ij}][x_{j,2}] &= \lambda_1 {}^t[x_{i,1}][T_{ij}][x_{j,2}] = \lambda_2 {}^t[x_{i,1}][T_{ij}][x_{j,2}] \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow [x_{i,1}][T_{ij}][x_{j,2}] &= 0 \end{aligned}$$

这实际上是证明了,由  $n$  个本征向量  $[B_{i,k}]$  形成的空间根据不同的本征值彼此正交,即使在某个本征值下有多个本征向量,总可以在它们线性组合形成的空间中选取相互正交的向量作为本征向量.这样我们就得到了一组特殊的本征向量,它们符合:

$${}^t[B_{i,k}][T_{ij}][B_{j,k}] = 0 \quad \text{if } k \neq k'$$

而当  $k = k'$  时上述值一定大于零,这些结果,后面就可以看到,其实就是惯性系数:

$${}^t[B_{i,k}][T_{ij}][B_{j,k}] = T_k$$

现在我们直接把这  $n$  个  $n$  行的列向量横向按顺序并置构成矩阵:

$$[B_{ij}] = [[B_{i,1}], [B_{i,2}] \cdots [B_{i,n}]]$$

<sup>11</sup>注意本征向量的存在性,非重根是显然的,但是如果有个  $s$  重根,是否也有  $s$  组独立的解向量?这不是显然的,需要证明,在次略去.一般线性代数的教材上都会有证明方法,不过一般会默认是  $[T_{ij}]$  为单位矩阵的简单情况,其实这不影响证明过程.

这样以上关系其实就表示为了:

$${}^t[B_{ij}][T_{jk}][B_{kl}] = \text{Diag}(T_i)$$

其中  $\text{Diag}(T_i)$  表示由  $T_i$  作为元素的对角矩阵. 同理我们如果考察弹性矩阵, 也有:

$${}^t[B_{i,k}][V_{ij}][B_{j,k'}] = 0 \quad \text{if } k \neq k'$$

$${}^t[B_{i,k}][V_{ij}][B_{j,k}] = \lambda_k T_k = \omega_k^2 T_k = V_k$$

同理用矩阵表示:

$${}^t[B_{ij}][V_{jk}][B_{kl}] = \text{Diag}(V_i)$$

这样我们之前的愿望就实现了, 即动能矩阵与势能矩阵的同时对角化.

让我们来对双摆体系利用上述套路来求解: 首先是对应的本征值问题的系数行列式为零:

$$\begin{aligned} [V]_{ij} &= mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [T]_{ij} = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \det([V_{ij}] - \lambda[T_{ij}]) = 0 &\Rightarrow \det \begin{bmatrix} 2g/l - 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & g/l - \lambda \end{bmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow 2(g/l - \lambda)^2 = \lambda^2 \end{aligned}$$

从而得到特征值:

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\frac{g}{l} ; \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}$$

带入本征值问题, 分两个本征值来求解本征向量:

$$\begin{aligned} ([V_{ij}] - \lambda_k[T_{ij}])[B_{j,k}] &= 0, \quad k = 1, 2 \\ \begin{bmatrix} 2(\sqrt{2}-1) & -(2-\sqrt{2}) \\ -(2-\sqrt{2}) & \sqrt{2}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2(\sqrt{2}+1) & -(2+\sqrt{2}) \\ -(2+\sqrt{2}) & -(\sqrt{2}+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这就给出了一个坐标变换矩阵:

$$[B_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

其逆矩阵:

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

这就是给出了如下的坐标变换:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2}\theta_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\theta_2 \\ \varphi_2 = \frac{1}{2}\theta_1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\theta_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \\ \theta_2 = \sqrt{2}\varphi_1 - \sqrt{2}\varphi_2 \end{cases}$$

代入便知, 初始的动能和势能分别变为:

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2ml^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot ml^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + ml^2 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 , \quad V = \frac{1}{2} \cdot 2mgl \cdot \theta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot mgl \cdot \theta_2^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \cdot 2(2 + \sqrt{2})ml^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2(2 - \sqrt{2})ml^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 , \quad V = \frac{1}{2} \cdot 4mgl \cdot \varphi_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 4mgl \cdot \varphi_2^2$$

这就可以看作两个独立的振子, 完成了解耦(decouple). 各自的角频率为:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4mgl}{2(2 + \sqrt{2})ml^2}} , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{4mgl}{2(2 - \sqrt{2})ml^2}}$$

与之前本征值确定的角频率是一样的.

现在我们来对这个结果产生的物理意义进行解释. 通过坐标变换, 我们发现动能势能形式变得简单了, 所以新的坐标  $q'_i$  称作简正坐标(normal coordinates). 对应的频率  $\omega_i$  称作简正频率(normal frequencies):

$$\omega_i = \sqrt{\frac{V_i}{T_i}} \quad \text{or} \quad V_i = T_i \omega_i^2$$

于是我们产生了一个疑问, 为什么只要动能势能的形式变得简单, 就可以判定体系可以等效为独立的谐振子的组合? 其实它简单地来自于拉格朗日方程:

$$L = T - V = \sum_i \frac{1}{2} T_i (\dot{q}'_i)^2 - \omega_i^2 q'^2_i$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_i} = \frac{\partial L}{\partial q'_i} \Rightarrow \ddot{q}'_i = -\omega_i^2 q'_i$$

这就足以给出其解为简谐振动:

$$q'_i = C_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

再回到体系的初始广义坐标, 它就会等于这些各自做不同频率振动的简正坐标的组合, 从而体现出非常复杂的非简谐运动特性<sup>12</sup>. 具体各个广义坐标的振幅和初相位如何, 由体系的初始条件决定. 但是可以想象, 存在一些简单的振动模式, 它的初始条件决定了, 最后只有一个简正坐标  $q'_k$  在做振动, 其他的坐标振幅为零. 那么最后原来的坐标也会具有单一的频率  $\omega_k$ , 从而每一处运动都是简谐振动, 其实它们为:

$$[q_i] = [B_{ij}] [q'_j] = [B_{i,k}] \cdot C_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

所以我们要把体系以统一的频率, 所有地方都做简谐振动的这种振动模式称作简正模(normal mode). “简正”这个词语三次出现在相关术语中, 它可以浅显地被理解为“简单”+“正确”. 也可以更精确地被理解为“简谐”+“正交”. 毕竟在中文语境下, 简谐本意就是“简单”+“和谐”, 而“正确”的“正”本身也含有方向的意味. 英文语境下的“normal”也恰好有着异曲同工之妙.

### 5.3.2 基于对称性的简正模判定与简正频率求解

如何规避掉较难的数学和分析力学知识? 用简单而优雅的方式快速确定一个多自由度简谐振动的绝大多数特征? 我们可以采用与对称性结合的方式来求解其运动的微分方程.

就比如对于具有更好的对称性的耦合摆问题. 我们不去追求用能量函数来解决问题, 这样势必涉及到分析力学方法. 而是独立地去推导两个质点的牛顿定律. 很容易给出它们为:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -\omega_0^2(1 + \varepsilon)\theta_1 + \omega_0^2\varepsilon\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 = +\omega_0^2\varepsilon\theta_1 - \omega_0^2(1 + \varepsilon)\theta_2 \end{cases}$$

<sup>12</sup>要知道傅里叶理论可以证明, 用不同频率的简谐振动组合可以无限接近任意光滑函数.

其中  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . 至于这个方程的求解, 猜一个本征模解是常规操作:

$$\begin{cases} \theta_1 = A_1 e^{i\omega t} \\ \theta_2 = A_2 e^{i\omega t} \end{cases}$$

但是在猜解之后, 我们不一定要通过带入原方程, 命系数行列式为零, 再次带入本征频率来求解方程的曲折方程来求解振幅  $A_1$  和  $A_2$  的比. 在本题中有一点是显然的. 就是体系具有鲜明的左右对称性. 这使得我们猜想: 是不是在一种本征模式下, 左右两个物体的位移完全相等. 而另一个模式下, 两个物体的位移完全相反?

这的确发生了. 在经典物理情况下, 这其实就对应了质心的左右振动和相对质心的二体在弹性内力下的振动. 一般把两个物体位移相等的模式称作**对称模式**(symmetric mode), 而位移相反的模式称作**反对称模式**(antisymmetric mode). 即:

$$\begin{cases} \theta_{1S} = A e^{i\omega_S t} \\ \theta_{2S} = A e^{i\omega_S t} \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta_{1A} = A e^{i\omega_A t} \\ \theta_{2A} = -A e^{i\omega_A t} \end{cases}$$

代入原来的方程就可以看出来: 对称模式给出了:

$$-\omega_S^2 A = -\omega_0^2(1 + \varepsilon)A + \omega_0^2 \varepsilon A \Rightarrow \omega_S = \omega_0$$

$$-\omega_A^2 A = -\omega_0^2(1 + \varepsilon)A - \omega_0^2 \varepsilon A \Rightarrow \omega_A = \omega_0 \sqrt{1 + 2\varepsilon}$$

可以发现, 问题的关键在于如何看出振动模式下各个振幅之间的比例关系. 这个问题似乎取决于问题具体的对称性. 那么, 何谓对称性? 它又是怎样决定体系的振动解的. 我们对一个更复杂的问题来做进一步研究:

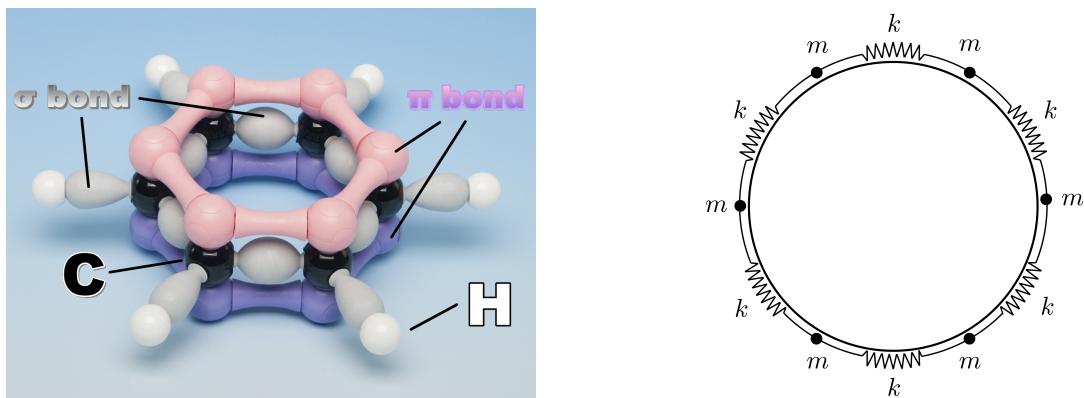


图 5.8: 苯: 6 原子环问题

对于苯分子的振动光谱问题主要的部分就可以做如下简化: 碳原子和氢原子作为一个整体来研究. 设他们是在一个刚性圆环上的质量为  $m$  的质点. 而彼此之间的相互作用简化为只有相邻的原子才有, 为劲度系数为  $k$  的线性弹簧. 体系还要求在一个平面上, 甚至一个圆环上作一维运动. 那么这个体系的能量和动力学方程为:

$$T = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2, \quad V = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} m (x_{i+1} - x_i)^2$$

$$m \ddot{x}_i = -2kx_i + kx_{i+1} + kx_{i-1}, \quad i = 1, 2 \dots 6$$

在上式中我们约定  $x_0 = x_6$ ,  $x_1 = x_7$ . 那么这个微分方程必然存在某种解.

我们讨论第一个问题:什么叫做对称性?表面上看上去,苯分子似乎具有三种对称性:一是绕竖直轴旋转  $60^\circ$  的六重轴对称性:

$$C_6 : \quad x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_3, x_3 \rightarrow x_4, x_4 \rightarrow x_5, x_5 \rightarrow x_6, x_6 \rightarrow x_1$$

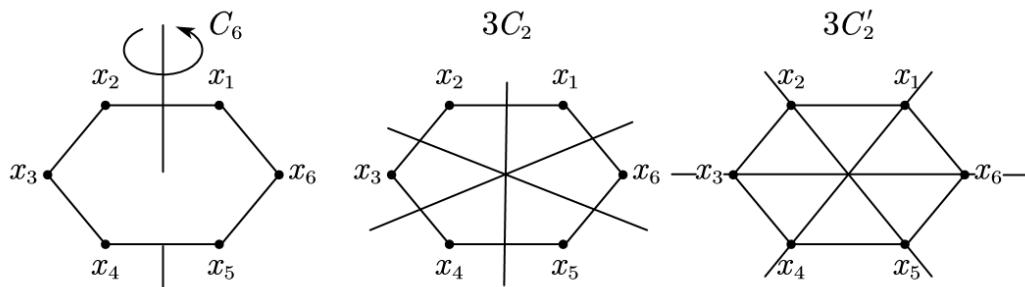


图 5.9: 6 原子环对称性

第二种是以六边形对边连线中点构成的二重轴. 绕它们转  $180^\circ$  后体系才会复原, 典型的代表性元素:

$$C_2 : \quad x_1 \leftrightarrow -x_2, x_3 \leftrightarrow -x_6, x_4 \leftrightarrow -x_5$$

第三种是六边形的对角线作为二重轴. 典型的代表元素:

$$C'_2 : \quad x_1 \leftrightarrow -x_5, x_2 \leftrightarrow -x_4, x_3 \leftrightarrow -x_3, x_6 \leftrightarrow -x_6$$

对称性永远都是指在某一种变换下, 体系的某一些量具有不变的特性. 那么我们发现, 体系的能量函数就具有这样的特性. 以上无论哪一个变换, 在交换了各个  $x$  的角标以后, 能量函数的表达式却恰好回到原来的表达式. 但是对于一些不属于这个体系的对称性操作, 比如单个  $x_1 \leftrightarrow x_2$ . 能量的表达式就变了. 所以我们说体系的能量函数具有对称性.

但是体系的形状是不会具有对称性的. 之前的示意图完全是静止状态下的苯分子<sup>13</sup>. 但是我们现在就是要考虑它的振动. 作为能量函数的结果, 其振动解是否一定具有对称的形式? 答案显然是否定的, 因为体系的运动由动力学方程和初始条件来决定. 即使动力学方程是对称的, 只要其初始条件具有不对称性, 其解就至少有一些时刻不再对称. 这就是说, 对称性的原因不一定产生对称的结果. 这种现象就是一种广义上的对称性破缺(symmetry breaking) 现象.

但是, 我们指出: 如果把对称性操作理解为算符(operator), 它作用在一组现成的解上可以得到一种不同的运动. 例如典型的  $C_6$  对称性操作, 它把每一个原子的运动状态转移到了它的下一个原子上. 那么我们就可以找到体系演化规律和某个对称性算符的共同本征模式. 这就是说, 存在一些振动模式, 它即是某个本征频率  $\omega$  下的模式, 又恰好在某个对称性操作下 (例如  $C_6$ ) 产生的运动和原来仅仅相差一个常数, 这个常数称作本征值(eigenvalue):

$$C[x_i] = \lambda[x_i]$$

原因是简单的: 首先如果找到了体系的一个  $\omega$  下的本征模式, 那么直接用这个对称性作用在这个模式下任意次, 显然得到的新的运动全都是原来的动力学方程的解, 就连频率也不会改变, 它们就全都是对应到同一个本征频率下的本征模式, 称作简并(degenerate) 在一个频率上的模式. 那么可以考虑得到的所有模式的组合, 由于对称性操作连续作用有限次以后必然回到初始状态. 故模式数必然有限. 这样就一定可以找到合适的状态.

<sup>13</sup>基态体系的对称性会完全等于能量函数的对称性, 这一点也是可以被证明的.

例如,对于  $C_6$ ,初始状态如果是  $[x_i]_1$ ,那么至多连续作用  $C_6$  五次,第六次就回到初始状态了:

$$[x_i]_2 = C_6[x_i]_1, [x_i]_3 = C_6^2[x_i]_1, [x_i]_4 = C_6^3[x_i]_1, [x_i]_5 = C_6^4[x_i]_1, [x_i]_6 = C_6^5[x_i]_1$$

$$[x_i]_1 = C_6^6[x_i]_1$$

这样我们就可以构造出以下的共同本征函数:

$$[x_i]_{(0)} = [x_i]_1 + [x_i]_2 + \cdots + [x_i]_6 \Rightarrow C_6[x_i]_{(0)} = 1 \cdot [x_i]_{(0)}$$

$$[x_i]_{(1)} = [x_i]_1 \cdot (w^1)^1 + [x_i]_2 \cdot (w^1)^2 + \cdots + [x_i]_6 \cdot (w^1)^6 \Rightarrow C_6[x_i]_{(1)} = w^{-1} \cdot [x_i]_{(1)}$$

$$[x_i]_{(2)} = [x_i]_1 \cdot (w^2)^1 + [x_i]_2 \cdot (w^2)^2 + \cdots + [x_i]_6 \cdot (w^2)^6 \Rightarrow C_6[x_i]_{(2)} = w^{-2} \cdot [x_i]_{(2)}$$

...

$$[x_i]_{(5)} = [x_i]_1 \cdot (w^5)^1 + [x_i]_2 \cdot (w^5)^2 + \cdots + [x_i]_6 \cdot (w^5)^6 \Rightarrow C_6[x_i]_{(5)} = w^{-5} \cdot [x_i]_{(5)}$$

而  $w^6 = 1$ ,  $w = e^{i\pi/3}$  是六次单位根.把某个本征频率下的所有本征模式拿出来,对应的  $C_6$  算符的本征值也只可能在以上六种值:六次单位根的若干幂次中选取.

同理,如果考虑  $C_2$  或者  $C'_2$  对称性,它们的本征值则更少,作为二次单位根仅仅只有 1 或 -1 两种可能性.

接下来我们可以先分析单态(singlet).假设某一个角频率下仅仅只有一重简并,即只有一个本征模式.那么这个模式自己就必须同时成为  $C_6$ ,  $C_2$ ,  $C'_2$  三者的本征态.对于后两者有四种可能性:

$$C_2[x_i] = \pm [x_i] \quad , \quad C'_2[x_i] = \pm [x_i]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ -x_6 \\ -x_5 \\ -x_4 \\ -x_3 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -x_5 \\ -x_4 \\ -x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \\ -x_6 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

如果两个本征值分别是 +1 和 -1.那么对应的模式为:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = x_1[+, -, +, -, +, -]$$

这样的模式恰好也是  $C_6$  本征值为 +1 的模式.对应的运动为三个相间的原子编组,另外三个也编组,两组原子反向运动的振动模式.用  $C_2$  和  $C'_2$  的本征值正负来标示这种模式,代入原来的动力学方程,得到:

$$-m\omega_{+-}^2 A = -2kA - kA - kA \Rightarrow \omega_{+-} = \sqrt{\frac{4k}{m}}$$

再来考虑两个本征值都是 -1 的情况,这样恰好有:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = x_1[+, +, +, +, +, +]$$

也就是所有原子都沿相同方向作相同运动.对应  $C_6$  本征值为 +1.显然这样的运动就是整体作匀速旋转的运动:

$$\omega_{--} = 0$$

但是另外两种情况略有不同. 首先是两个本征值都是 +1 的情况. 此时得到:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = x_1[+, -, 0, +, -, 0]$$

抑或是两个本征值分别为 -1 和 +1 的状态. 得到:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = x_1[+, +, 0, -, -, 0]$$

我们发现, 这些运动直接并不是  $C_6$  的本征态. 但是这些运动有它存在的合理性. 事实上画图就会发现这些运动都是可以符合动力学规律的:

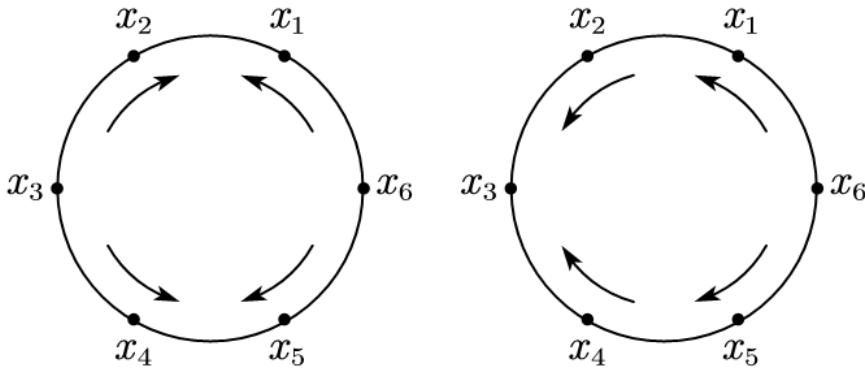


图 5.10: 二重简并的振动模式

每种模式的  $x_1$  的振动就能代表  $x_1, x_2, x_4, x_5$  四个质点的振动. 而  $x_3, x_6$  在这两种模式下都是静止的. 对于第一种模式, 对  $x_1$  列牛顿定律:

$$\begin{aligned} -m\omega_{++}^2 A &= -2kA - kA \Rightarrow \omega_{++} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \\ -m\omega_{-+}^2 A &= -2kA + kA \Rightarrow \omega_{-+} = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

正因为这些运动合理, 但又不是  $C_6$  的本征态, 所以其实它们根本就不像最初假设的那样, 是两个本征频率  $\omega_{++}, \omega_{-+}$  下的单态, 而是各存在二重简并. 显然我们把  $C_6$  作用在这两个态上各一次就是与它简并在同一个频率上的另一个独立振动模式, 如果设  $x_1 = Ae^{i\omega t}$ :

$$[x_i]_{++} = [+, -, 0, +, -, 0]Ae^{i\omega_{++}t} \Rightarrow C_6[x_i]_{++} = [0, +, -, 0, +, -]Ae^{i\omega_{++}t}$$

$$[x_i]_{-+} = [+, +, 0, -, -, 0]Ae^{i\omega_{-+}t} \Rightarrow C_6[x_i]_{-+} = [0, +, +, 0, -, -]Ae^{i\omega_{-+}t}$$

恰好, 作用两次是徒劳的. 两次旋转以后的运动可以用前两次的运动组合形成:

$$C_6^2[x_i]_{++} = -[x_i]_{++} - C_6[x_i]_{++} : [-, 0, +, -, 0, +] = -[+, -, 0, +, -, 0] - [0, +, -, 0, +, -]$$

$$C_6^2[x_i]_{-+} = -[x_i]_{-+} - C_6[x_i]_{-+} : [-, 0, +, +, 0, -] = -[+, +, 0, -, -, 0] - [0, +, +, 0, -, -]$$

从而我们就完整地找到了体系的六个本征模式:

$$\omega_{--} = 0 : [x_i]_{--} = [+, +, +, +, +, +]vt$$

$$\omega_{-+} = \sqrt{\frac{k}{m}} : [x_i]_{-+} = [+, +, 0, -, -, 0]Ae^{i\omega_{-+}t}, C_6[x_i]_{-+} = [0, +, +, 0, -, -]Ae^{i\omega_{-+}t}$$

$$\omega_{++} = \sqrt{\frac{3k}{m}} : [x_i]_{++} = [+, -, 0, +, -, 0]Ae^{i\omega_{++}t}, C_6[x_i]_{++} = [0, +, -, 0, +, -]Ae^{i\omega_{++}t}$$

$$\omega_{+-} = \sqrt{\frac{4k}{m}} \quad : \quad [x_i]_{+-} = [+,-,+,-,+,-] A e^{i\omega_{+-} t}$$

事实上我们只看到了问题的一个局部. 关于复杂体系小振动背后的对称性分析是一个内容非常丰富的专题. 它涉及到关于对称性的群论(group theory) 和对于振动在对称性操作下演化的群表示论(group representation theory). 它在原子分子物理, 固体物理, 乃至粒子物理中都有着非常广泛的应用.

对于苯分子的振动模式我们也做了过多的简化, 下面的表是较完整地考虑碳原子和氢原子间共 12 个原子, 在三维空间中各做三自由度运动而形成的共  $36 - 6 = 30$  个振动模式. 减 6 是因为有 6 个自由度是整体的平动和转动而不是振动. 根据对称性, 一共有 20 种振动模式. 其中有 10 种为二重简并. 分子的振动光谱一般在红外线波段:

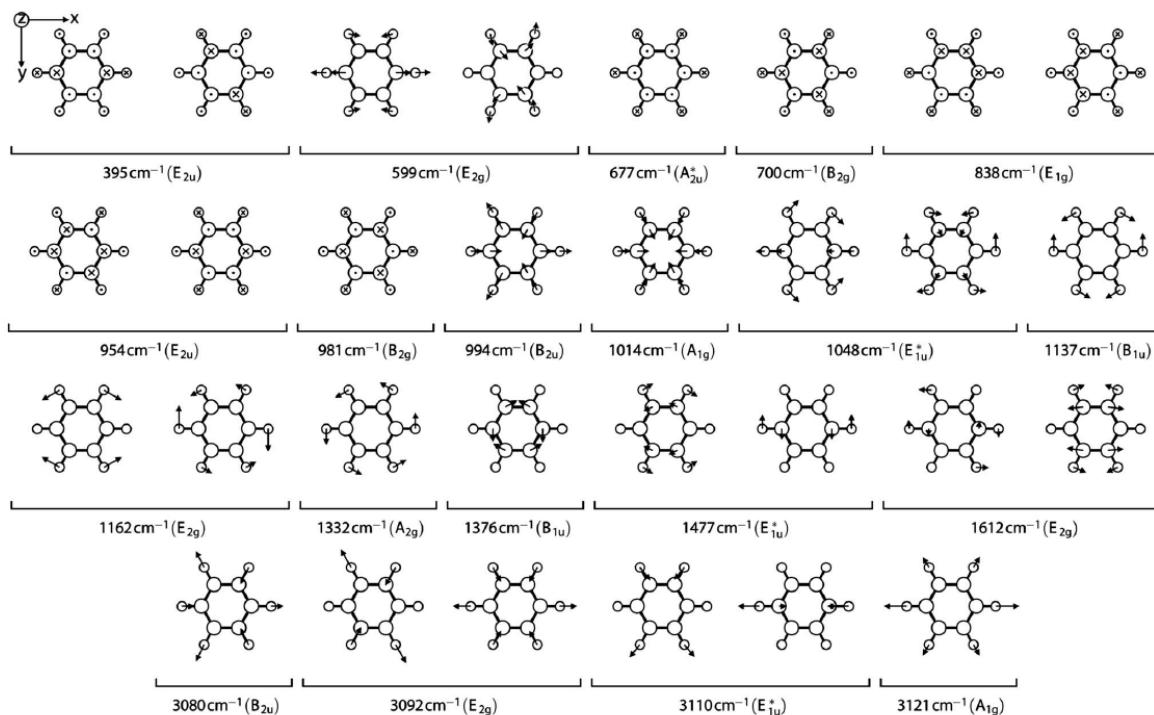


图 5.11: 苯分子的完整振动模式

利用原子间作用力的经验函数就可以得到各个本征角频率  $\omega$ . 而由量子力学中的原理, 振动的能量实际上是量子化的:

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

苯分子的吸收光谱和发射光谱中对于相邻两个能级能量差的光子就会有共振吸收的现象:

$$\Delta E = h\nu = \hbar\omega$$

可见其实就是当电磁波的频率恰好与振动频率吻合时发生共振吸收:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

## 5.4 非线性摄动 \*

## 5.5 格波

让我们考虑两个十分经典的**固体物体**(solid state physics) 问题: 声音的本质是什么? 固体热运动的本质是什么? 我们可能会得到一个惊人的答案: 两者的本质, 都是晶格的振动.

固体, 一般是晶体, 它的描述方法, 也需要照顾到电子的行为, 也需要照顾余下的原子实---它占据着主要的质量与动能---的运动形式. 如果把目光仅仅放在原子实上, 认为原子实是在格点的平衡位置附近做小振动. 而这个运动的动力学成因, 必然是来自于初始条件和原子之间可以类比为弹簧的线性作用力. 这样去思考问题的话, 也许具体的计算还是困难的, 但至少我们会有以下三个结论:

一: 这个运动一定是牵一发而动全身的. 一个原子的振动会带动其它原子的振动, 一个地方的振动会带动另一个地方的振动, 这其实就是固体可以传热和传声的原理. 而且不出意外的, 一般传热性能越好的固体, 声速也就越快. 天然材料中金刚石就是在两个方面都具有卓越性能的典型: 它的声速高达  $12000\text{m/s}$ , 在元素单质方面仅仅次于在自然界不以单质形式存在的金属铍 ( $13000\text{m/s}$ ), 是铁的两倍多. 而热导率则是达到了惊人的  $2000\text{W/m}\cdot\text{K}$ , 为金属中导热性能优异的银的约五倍.

二: 有规则的这种运动形成了声波. 也就是宏观问题中看似连续的声波, 在微观看来其实就是一个个分离的原子在因为弹性力而做多自由度的小振动, 而不再具有连续性. 这种运动就叫做**格波**(lattice wave).

三: 无限不规则的声波进行叠加就形成了热运动. 基于这一点, 我们其实不应该把热运动分解为每一个原子各做一个独立简谐振动, 这样的统计方法是不能给出正确的关于固体的热学结果的, 因为这些简谐振动根本就不“独立”. 从爱因斯坦时代开始, 把热运动分解为真正声波的叠加, 并且对声波的能量进行量子化, 称作**声子**(phonon), 这才真正能开始解释关于固体的热容等等初步的实验结果.

这一节我们暂时无法得出这些深刻结果的计算过程. 但至少, 我们可以尝试在完全经典的情况下对两个简化问题给出完整的动力学求解方法.

第一个问题就是**一维原子链**(1D atomic chain) 问题. 把质量为  $m$  的物块和劲度系数为  $k$  的弹簧无限串接形成下图所示的体系.

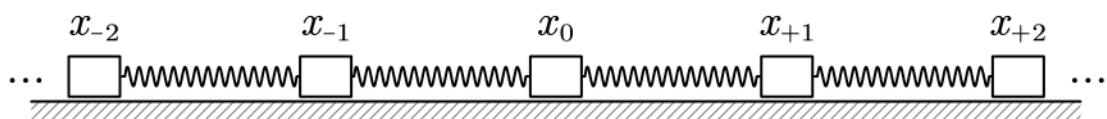


图 5.12: 一维原子链

这样的体系的动力学方程写作:

$$m\ddot{x}_i = -2kx_i + kx_{i+1} + kx_{i-1}$$

这样一个方程的求解其实非常类似于之前的对称性分析法. 这里体系的对称性为平移一个单元. 那我们就设想体系的状态为平移算符的本征态, 即每一个物块的振动都恰好是其前一个(左边的那个, 指标比它小一的那个)的  $\lambda$  倍. 只不过这里的  $\lambda$  其实是一个相位因子  $e^{i\varphi}$  罢了. 那么我们猜一个本征频率为  $\omega$ , 在平移算符下本征值为  $\lambda$  的解, 显然  $\omega$  就会是  $\lambda$  的函数:

$$x_i = \lambda^i A e^{i\omega t}$$

代入原方程, 命  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  就可以得到:

$$\frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2} = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}$$

若  $\lambda$  为实数, 不管是  $|\lambda| > 1$  还是  $|\lambda| < 1$  都不是我们希望得到的结果, 这样在  $i \rightarrow +\infty$  和  $i \rightarrow -\infty$  两个方向一个振幅指数衰减, 一个指数爆炸. 那么根据因果律和能量守恒可以判断, 指数爆炸那一侧是受到外力开始起振的那一侧, 这个波根本就不能在原子链上传播, 而是传着传着振幅就衰减掉了. 此时等号左侧是一个绝对值大于 1 的实数. 故我们发现当  $\omega \geq 2\omega_0$  时对应的波无法在一维原子链上传播. 这个频率  $\omega_c = 2\omega_0$  就叫做截止频率(cut-off frequency). 恰好为截止频率时,  $\lambda = -1$ , 也就是这样的波虽然可以形成, 但任何相邻两个原子振动方向彻底反向, 它其实是一种“驻波”, 原则上也没有在传播.

那么就只剩下  $\omega \leq \omega_c$  的波可以在一维原子链上传播. 把  $\lambda$  写成  $e^{i\varphi}$ . 我们得到:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \Rightarrow \omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|$$

相邻两个原子的相位差应当是一个  $\varphi \in (-\pi, \pi)$  内的数. 这是因为如果  $A$  比  $B$  相位大一个  $\pi + \delta$ , 那么也可以解释为  $A$  比  $B$  相位小一个  $\pi - \delta$ . 所以如果是截止频率的临界情况, 我们也只能说相邻的原子反相, 至于谁比谁大也是无从判断的, 这是格波的特性.

对于上式我们更喜欢写为色散关系(dispersion relation)的形式. 就是说把自变量改为波矢(wave vector). 设相邻原子距离为  $l$ , 那么产生的相位差  $\varphi$  可以由波矢来产生:

$$Kl = \varphi, \quad K \in \left( -\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{l} \right)$$

上面这个  $K$  应当处于的空间称作布里渊区(Brillouin zone). 它告诉我们, 在一维原子链上传播的格波在频率和波矢上都是受限的. 其函数图像和表达式如图 5.13.

色散曲线上每一个点都代表一种能够在一维原子链上传播的振动模式:

$$x_i = A e^{i(\omega t + iKl)}$$

此时两个极限是值得关注的:

一是, 在短波极限: 波长最短就是当  $Kl = \pi$  时, 此时波长  $\Lambda = 2\pi/K = 2l$  时, 向左和向右延伸的色散曲线到达最高点  $\Gamma$ . 但尤其要注意两个  $\Gamma$  点实质上就是同一个点, 对应完全相同的状态. 可以想想把第一布里渊区卷做一个圆柱, 让两个  $\Gamma$  点重合. 对应的相邻原子彼此反相的“驻波”形式. 也就是说如果让  $K > 0$  的右行波的  $K$  持续增加以跨越  $\Gamma$  点, 波就演化为左行波了. 一个中缘由在于  $K$  的正负指称的速度其实是相速度(phase velocity), 但在判断波的传播方向时, 其实群速度(group velocity)才是更加合理的选择. 它被定义为:

$$v_g = \frac{d\omega}{dK}$$

其中的原理我们将在流体的相关波动章节中简介.

二是, 在长波极限:  $\Lambda \gg l$ . 此时  $Kl$  时一个小量, 可以对  $\sin$  使用近似, 物理上代表相邻两个原子几乎是以相同的方式运动, 微观波变成了宏观的波:

$$\omega = \omega_0 Kl$$

这就给出了波的传播速度:

$$v = \frac{\omega}{K} = \omega_0 l = \sqrt{\frac{k}{m}} l$$

这个结果与宏观波速公式  $v = \sqrt{E/\rho}$  是完全一致的. 且看之后弹性体章节的分析.

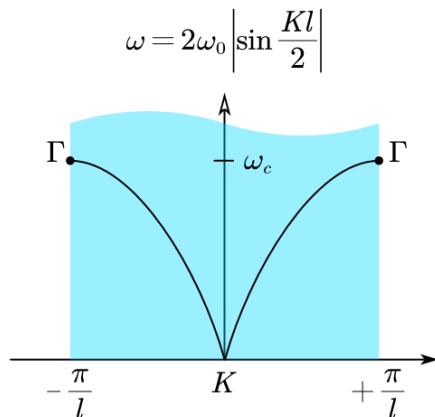


图 5.13: 色散关系

最后我们还看看双原子链(diatomic chain)与以上单原子链(monoatomic chain)产生的并不平凡的区别. 双原子链就意味着虽然其平移周期还是  $l$ , 但每一个单元内部出现了两个待求解的坐标. 我们让两个原子质量分别为  $M, m$ , 弹簧劲度系数依然为  $k$ :

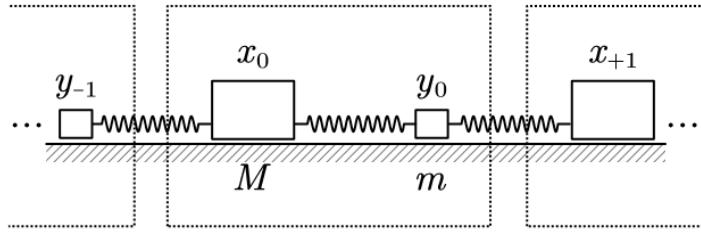


图 5.14: 双原子链

那么对应的动力学方程写作:

$$M\ddot{x}_i = -2kx_i + ky_i + ky_{i-1}$$

$$m\ddot{y}_i = -2ky_i + kx_i + kx_{i+1}$$

由于有单原子链的经验. 我们让  $\omega_0 = \sqrt{k/2M}$ <sup>14</sup>, 而  $m = \beta M$ . 并直接设解为:

$$x_i = A e^{i(\omega t + iKl)}, \quad y_i = B e^{i(\omega t + iKl)}$$

其中  $A$  和  $B$  是复振幅可以差一个相位. 那么这就给出:

$$(4\omega_0^2 - \omega^2)A + -2\omega_0^2(1 + e^{-iKl})B = 0$$

$$-2\omega_0^2(1 + e^{iKl})A + (4\omega_0^2 - \beta\omega^2)B = 0$$

这个方程组  $A, B$  的解不为零的条件就是:

$$(4\omega_0^2 - \omega^2)(4\omega_0^2 - \beta\omega^2) = 4\omega_0^4(1 + e^{iKl})(1 + e^{-iKl}) = 16\omega_0^4 \cos^2 \frac{Kl}{2}$$

在  $\beta$  是个小量的情况下, 我们可以近似地求解这个方程. 在任意  $K$  下这个方程与单原子链不同, 它  $\omega^2$  总是有两个解. 第一个解发生在  $\omega$  与  $\omega_0$  量级相当的情况下, 此时  $4\omega_0^2 - \beta\omega^2 \approx 4\omega_0^2$ . 近似可以得到:

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{Kl}{2} \right|$$

可以发现这个解与只含  $M$  的单原子链的结果并没有什么区别. 所以其实是这种模式下, 主要的动力学效果由  $M$  承担,  $m$  则几乎平衡在两侧的  $M$  中间. 两个相邻的  $M$  之间的两段弹簧几乎就是直接串联在一起, 同时伸长同时缩短, 感受不到很轻的  $m$  的影响.

而另外一个解则发生在  $\omega \gg \omega_0$  的极端情况下, 此时  $4\omega_0^2 - \omega^2$  本是一个绝对值很大的负数, 它  $\approx -\omega^2$ . 但是与另一个因子  $4\omega_0^2 - \beta\omega^2$  相乘时又回到正的  $\omega_0^4$  量级的等式右侧了. 从而乘的因子其实很接近零:

$$4\omega_0^2 - \beta\omega^2 \approx 0 \Rightarrow \omega \approx \frac{2\omega_0}{\sqrt{\beta}}$$

为了更精确地找到这个频率与  $K$  的函数关系, 我们把原方程的  $4\omega_0^2 - \omega^2$  项除到等号右边, 并近似:

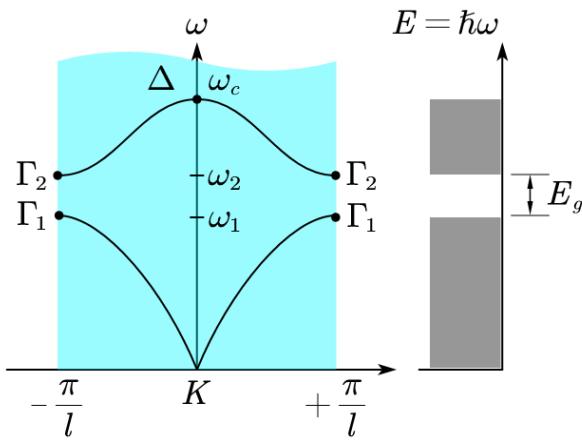
$$\omega \approx \frac{2\omega_0}{\sqrt{\beta}} \cdot \sqrt{1 + \beta \cos^2 \frac{Kl}{2}}$$

<sup>14</sup>即先忽视  $m$  的存在让弹簧直接串联.

这样的两组解看似近似,但是其实在特征点处的性质和坐标又是完全准确的. 特征点就是指波矢为零  $K = 0$  和波矢为  $\pm\pi/l$  的布里渊区中心和边界上的点. 我们把两组  $\omega(K)$  关系画成色散曲线如图5.15. 对应的特殊点  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta$  对应的特殊频率为:

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{2M}}, \quad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$\omega_c = 2\sqrt{\frac{k}{2\mu}} (\mu = \frac{Mm}{M+m})$$



现在终于可以发现, 多出来的第二组解, 对应了在原来的色散曲线上方又多出来一支. 这一支在  $\Delta$  的行为具有代表性: 即使  $K = 0$ , 即相邻两个单元之间完全没有相位差. 但是依然有很大的角频率. 也就是这个振动并没有传播, 而从角频率的表达式来看, 其实就是每一个单元内部两个物体在弹性力作用下做二体小振动. 而从  $\Gamma_2$  到  $\Delta$  点这样一段色散曲线对应的各个波动模式下, 十分显著的一点就是轻的原子一定要主动振动起来而且与相邻的重原子根接近反相而不是同相. 最边缘的  $\Gamma_2$  点则只有轻的原子在振动. 这样的模式的频率, 其实与上一节讨论过的分子振动频率相当, 就在光的红外线频段, 故把这样的一支振动模式称作色散曲线的光学支(optical branch).

所以原来单原子链的保留支, 特点是从  $\omega = 0, K = 0$  延续到布里渊区边缘的  $\Gamma_1$ , 就相应的被称作声学支(acoustic branch). 因为在长波极限  $K \rightarrow 0$  下, 这个模式的轻重原子之间是没有相位差的, 而不是像光学支那样反相, 这样就相当于宏观地看整个原子链在较大范围内做宏观平移. 形成的波就是常规意义上的声波. 在声学支模式下, 轻的原子跟随重的原子而运动, 相邻轻重原子更加接近同相而不是反相. 而极限点  $\Gamma_1$  对应的情况是只有重原子在振动, 轻原子全部静止了.

最后我们指出, 简单的计算产生的结果中还蕴含着意义非凡的一个物理图像. 那就是能带(energy band)结构的产生. 在这里我们着眼的是晶格上的波动, 色散曲线上每一个点都代表一种可能的波动模式, 其振幅, 在经典物理中, 由初始条件决定, 且是可以连续变化的. 但是量子理论预言, 这个能量实则在低能量时量子化:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

从而色散曲线的这一副图, 实际上也代表量子化的振动的元激发(elementary excitation)的能量单位与  $K$  的关系图. 更有甚者, 如果我们不是去考虑晶格振动的动能加势能的元激发, 而是去考虑在晶格间运动的电子, 它的能量也会产生非常类似的但更复杂的能带结构<sup>15</sup>, 毕竟电子在其中的描述也应当使用物质波, 它具有波矢  $K$  和相应的能量  $E(K)$ . 而为什么这个  $E(K)$  的函数也会产生类似的行为, 这一点可以纯粹从电子满足的薛定谔方程(Schrödinger equation) 和对称性分析出发得到. 在介质中的电子的波矢  $K$  其实也是受限的. 而同一个  $K$  对应的能量也可以有多个, 分别在不同分支的色散曲线上. 故我们把每一条色散曲线对应的可取能量区间叫做允带(allowed band). 而允带之间没有对应状态的能量区间叫做禁带(forbidden band). 两个相邻的允带之间的禁带宽度就是带隙(band gap).

这样一种全新的看待振动的能量, 电子的能量的理论就是能带论. 尤其是把电子视作物质波, 利用量子力学完整地计算固体中的电子的运动, 从而非常好地解释了历史上残留的金属电导率, 热导率相关的疑问并很好地带动半导体物理学的成熟的理论, 以它的主要缔造者: 瑞士-美国物理学家布洛赫命名为布洛赫理论(Bloch theory).

能带结构是一种介于自由电子(free electron) 和紧束缚电子(tight-binding electron) 之间的存在形式. 在真空中的自由电子满足:

$$E = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$$

<sup>15</sup>会往上产生更多能带.

其能量完全可以连续的改变.但是在束缚态上,如氢原子外的电子,简单地由玻尔模型,电子的能量被量子化为能级结构:

$$E = -\frac{me^4}{8n^2\varepsilon_0^2h^2} = -\frac{13.6\text{eV}}{n^2}$$

那么在金属中的电子,微观上自由:可以脱离金属原子的束缚而传导,但宏观上,本质又是被束缚的:被所有原子核共同产生的吸引力束缚在金属内部.所以就体现出一种折衷:紧束缚的能级展开为能带,具有一定的能量连续变化的范围.但是能带与能带之间依然是分立的,没有像真空那样连成一片.

# 第六章 万有引力

## 6.1 有心力下质点运动

天体运动中起到核心作用的相互作用力都是**有心力**(central force),事实上不光是天体运动,任意两个可以近似为质点的物体之间的相互作用力,根据牛顿第三定律的要求,其受力方向都必须沿着两个物体的连线方向.那么我们只要做两个要求,这就构成了一个有心力问题:

一是,这个力必须是保守力,即,它必须由势能生成:

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) : \quad \mathbf{F}_1 = -\nabla_1 V, ; \mathbf{F}_2 = -\nabla_2 V$$

根据我们之前的说法,根据对称性或牛顿第三定律,这个势能其实就是两个质点连线距离  $R$  的函数  $V(R)$ .而以 1 为中心向 2 引  $\mathbf{R}$  矢量,则:

$$\mathbf{F}_2 = -V'(R)\mathbf{e}_R = F(R)\mathbf{e}_R$$

二是,中心物体 1 必须不动或者是近似不动. 1 不动是指有外力作用在 1 上以维持其静止.但 2 上不应该有这样的外力,而仅仅是在 1 对 2 产生的  $\mathbf{F}_2$  作用下做运动. 1 近似不动是比如考虑太阳系这种典型情况,太阳虽然受到多个行星对它的万有引力,但是由于自己质量过重从而近似是不动的. 即使是地球月亮构成的二体问题,地球和月亮并不一定能认为都不动,我们也有相应的转化为有心力问题的方法,见后. 最后当然,也有一些更简单的情况,2 受到一些更复杂的体系对它的力构成了有心力  $F(R)$ ,比如弹性绳对绳端质点的拉力.

在有心力场中运动的物体,其基本的牛顿定律可以写作:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F(r)\mathbf{e}_r$$

可以把这个方程作为一切讨论的起点. 或者进一步,我们先发现:

### 6.1.1 运动的一般特征

首先,有心力场中运动的质点必然在一个平面上运动.这一点既可以通过初始条件判断  $\mathbf{r}_0$  和  $\mathbf{v}_0$  的平面就是运动平面.也可以通过下面的角动量守恒来发现这一点.正是这样,在运动平面上建议极坐标是方便的,用极坐标写出的牛顿定律分量式为:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) &= F(r) \\ m(\ddot{\theta}r - 2\dot{\theta}\dot{r}) &= 0 \end{cases}$$

除了牛顿定律以外,还有两个可以变通使用的结论: 角动量和能量都是守恒的:

角动量守恒的原因是有心力对力心没有力矩. 角动量的方向垂直于运动平面. 极坐标下大小写为:

$$L = m\dot{\theta}r^2 = \text{Const.}$$

而习惯上通常把质量  $m$  省略后的量单独提出来, 它实际上是面积速度的两倍:

$$\dot{\theta}r^2 = h = 2 \frac{dA}{dt}$$

也就是说, 面积速度不变是有心力问题的普遍特征, 这也是开普勒第二定律的一种推广形式.

第二个守恒量是哈密顿量:

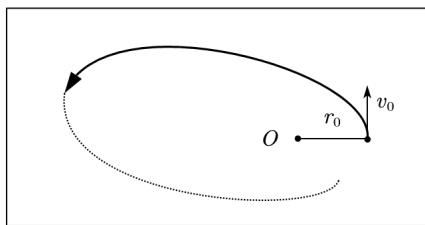
$$H = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) + V(r) = \text{Const.}$$

守恒到的值直接叫做能量  $E$ . 通常我们喜欢把这个式子移项写作:

$$\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2 = \frac{2[E - V(r)]}{m}$$

### 6.1.2 有心力问题的求解

有心力问题的求解可以指一定初始条件下, 轨迹方程  $r(\theta)$  的求解. 也可能需要进一步求出运动方程  $r(t)$  和  $\theta(t)$  的具体形式来. 通常还有两种常见的提法:



一是定态问题(stationary state problem) 的求解: 例如直接从距离力心  $r_0$  给一个垂直半径方向的速度  $v_0$ . 求解之后的运动. 不难理解, 只有引力(attraction) 才能形成束缚的态, 斥力(repulsion) 就不行. 而要想这个态在动力学上是“稳定”的, 后面就知道还需要这个力符合一定的条件. 这一个问题在微观上也存在对应的量子力学版本.

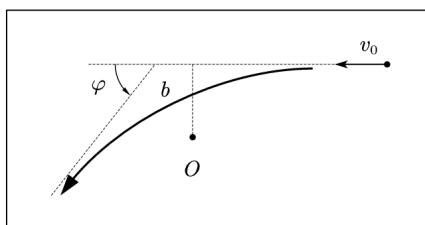


图 6.1: 定态问题与散射问题

二是散射问题(scattering problem) 的求解: 粒子从无穷远出发以一定的初速度  $v_0$  和瞄准距离(impact parameter) $b$  入射, 经过一个有心力影响后轨迹发生偏移. 求解过程中, 尤其是散射末态的粒子状态. 由于轨迹必然存在对称性, 出射过程基本上就是入射过程在另一个角度处的时间反演. 所以经典物理中关注的量主要是散射角  $\varphi$  的大小, 它被定义为散射前后运动方向的夹角. 不难看出, 不管是引力还是斥力都会造成散射. 但是散射问题对有心力也存在一个要求, 它在无穷远处必然对粒子没有影响, 即, 不管是势能还是力都要衰减到零. 这个要求实际上叫做短程力(short-ranged force). 但它的严格定义和个别性质也需要上升到量子力学的散射问题才能解释清楚. 比如万有引力其实就不属于短程力而是长程力(long-ranged force), 而超过平方的幂次反比例都是短程的. 尽管前者的散射问题也经常被拿来讨论. 散射问题不仅存在量子力学版本, 引力场下的光线偏转问题也是一个非常经典的广义相对论问题.

而目前求解经典的有心力问题通常有两种思路:

#### 1. 有效势能法

利用两个守恒量, 实际上就等于把原来的二阶微分方程求解的问题转化为了一阶微分方程的问题. 然后再利用角动量守恒式子把  $\dot{\theta}$  用  $r$  来表示并代入能量守恒. 我们得到:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{mh^2}{2r^2} = E - V_{\text{eff}}(r)$$

第一点是, 问题立马变成了一个一维动力学问题. 第二点是, 这个问题等价于一个粒子  $m$  在一维势能场  $V_{\text{eff}}(r)$  中做运动的问题. 正是因为这个原因, 我们把  $V_{\text{eff}}(r)$  称作有心力问题的**有效势能**(effective potential):

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$$

利用这种方法,物理意义上最显著的一点就是可以方便我们考察定态的存在性和动力学稳定性.显然,在一维运动中,仅有当在  $r \in (0, +\infty)$  下存在“山谷”,即一阶导数等于零,二阶导数大于零的点才有可能造成稳定的振动,它就是我们要寻找的束缚态.而这一点强烈依赖于势能的具体形式.考察引入的“离心势能”项的导数,我们发现:

$$V_{\text{cf}} = +\frac{mh^2}{2r^2} \Rightarrow V'_{\text{cf}} = -\frac{mh^2}{r^3}, V''_{\text{cf}} = +\frac{3mh^2}{r^4}$$

故这是一个倾向于往外推质点的力,而本身具有让质点稳定的因素.那么为了使得存在  $V'_{\text{eff}} = 0$  和  $V''_{\text{eff}} > 0$  的点,就要求  $V' > 0$  必然成立,即必须是引力.且  $V''$  虽然可以小于零但不能太小.

我们考察幂次的引力  $F = -kr^n$ ,那么它对应的势能为<sup>1</sup>:

$$V = \frac{kr^{n+1}}{n+1} (n \neq -1), \quad V' = kr^n, \quad V'' = nkr^{n-1}$$

结合平衡条件可以发现存在平衡点:

$$V' + V'_{\text{cf}} = 0 \Rightarrow R = \left( \frac{mh^2}{k} \right)^{\frac{1}{n+3}}$$

那么在这个点处的稳定性就取决于二阶导数:

$$V''|_{r=R} = \frac{mh^2}{R^4} (3+n)$$

由于除非  $h = 0$ ,即纯径向运动,系数必然是大于零的.故分为两类情况:

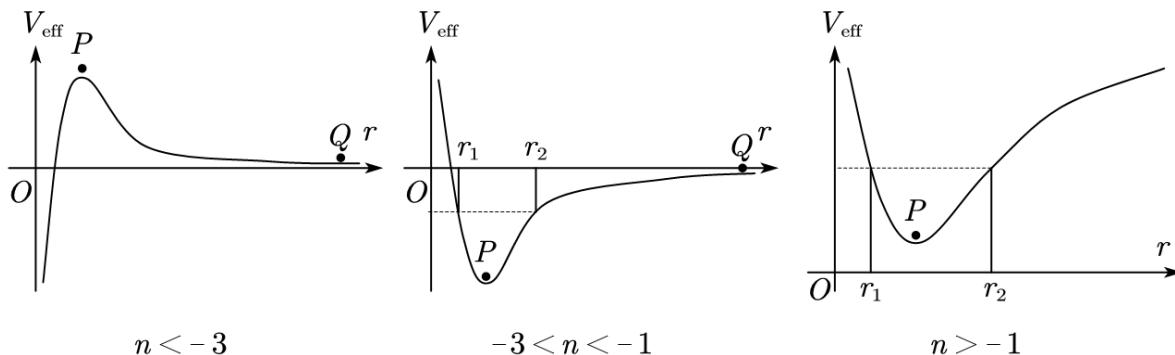


图 6.2: 三类幂律力

一是,  $n \leq -3$ , 即超过三次以上反比的力场,这样的力场不可能造成稳定的动力学运动.其势能函数图像如图6.2左.平衡是可以造成的,此时径向上始终保持  $r = R$ ,即停留在图中的  $P$  点.角向上  $\dot{\theta} = h/R^2$ ,其实就是在做匀速圆周运动.但是这个圆周运动动力学不稳定,一旦存在径向上微扰,要么轨道无限向力心坍缩,要么向无穷远转移而失去力心的束缚. $n = -3$  的特殊情况值得引起关注.此时,如果  $h = \sqrt{k/m}$ ,那么势能恒等于零,对应大量不稳定的匀速圆周运动.而如果  $h > \sqrt{k/m}$  或  $h < \sqrt{k/m}$ ,两者势能都是单调的不存在束缚态的可能性,前者会无限远离力心后者将无限接近力心.总之,  $n < -3$  都是不稳定的情况.

二是,  $n > -3$  下的所有力场都是稳定的.也就包括常见的平方反比例场.图6.2的中,右图都是这种情况.  $P$  点具有稳定性.从而束缚态其实是指在  $P$  点左右的振动和对应的角向运动的合成.

对束缚态和散射态的求解能给出哪些共同的结论?首先让我们计算束缚态下  $r_1$  到  $r_2$  间振动的周期,也就是径向运动的动力学周期.这个问题和  $r(t)$  的求解方法是共同的.只需要对之前的能量守恒式移项后积分:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2[E - V(r)]}{m} - \frac{h^2}{r^2}}$$

<sup>1</sup> $n = -1$  时,  $V = k \ln r$

$$T = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

其中  $r_1$  为过程中最靠近力心的点, 通称近心点(pericenter), 而  $r_2$  则为远心点(apocenter). 它们都是以上积分分母恰好为零的点, 使得该积分成为一个标准的瑕积分. 在  $r_2$  不是无穷大的情况下, 该积分总是有限的.

我们还可以计算在近心点和远心点运动过程中质点转过的角度. 这一点只需要找到角度的导数:

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

并与之前的半径导数来做比:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{h}{r^2 \sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

这就能得到角度:

$$\Delta\theta = \int_{r_1}^{r_2} \frac{h dr}{r^2 \sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

最后考虑散射问题的普遍结论. 首先, 幂律形式的力显然如果  $n \geq -1$ , 这样的力对应的势能在无穷远处并不是 0. 将造成无穷远处具有一定初动能的物体来到近处时具有无穷大动能的发散问题. 故我们讨论的范围局限在  $n < -1$  的幂律力, 引力斥力皆可. 十分类似地, 如果计算从无穷远来到无穷远去发生的位矢的转角, 为:

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{h dr}{r^2 \sqrt{\frac{2[E-V(r)]}{m} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

再进一步注意到由初始条件确定的的守恒量各为:

$$h = v_0 b \quad ; \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2$$

代入化简, 我们要计算的偏转角  $\varphi = \pi - \Delta\theta$  就成为了:

$$\varphi = \pi - 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{v_0 b dr}{r \sqrt{v_0^2(r^2 - b^2) - 2r^2 V/m}}$$

当  $n \geq -1$  时偏转角的积分不会存在发散的问题. 永远是一个有限值.

## 2. 比耐方程法

另一种思路执着于求解二阶形式的方程, 但是通过变形转化为轨迹方程. 具体来说, 半径的一阶导数被我们化为:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}$$

而二阶导数就能继续化为:

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\theta}(\dot{r}) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \cdot \frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{h^2}{r^4} \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2h^2}{r^5} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

这样还不足以使得问题简化. 因为如果代入径向的牛顿定律, 得到的结果:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} - r - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4 F(r)}{mh^2}$$

还不见得是一个如何简单的方程. 比耐方程(Binet equation) 的不平凡之处在于它对半径进行了反演. 就是考虑一个倒数变换:

$$u = \frac{1}{r}$$

它可以把之前的运动轨迹的内侧翻到外侧去. 那么如果依然保持  $\theta$  自变量不变, 轨迹的新导数为:

$$r = \frac{1}{u} , \quad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} , \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = -\frac{1}{u^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{2}{u^3} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2$$

代入之前的轨迹微分方程, 发现方程简单地变成了:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F(\frac{1}{u})}{mh^2u^2}$$

这个简单的方程就可以帮我们快速解决一部分有心力问题的基础轨迹.

## 6.2 万有引力下天体运动

万有引力即以下**平方反比力**(inverse-square force):

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$$

任何平方反比力下的运动性质都是类似的. 我们以引力为正. 事实上经典物理喜欢用  $k^2 = GM$  来指称中心力心产生力场的强度, 称作**高斯常数**(Gauss constant). 我们这里用  $k = GM$  来表示引力的强度. 这样  $k < 0$  就表示斥力. 而其它平方反比力, 比如库仑力也就归为同一种:

$$F(r) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{km}{r^2} \Rightarrow k = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 m}$$

于是, 在平方反比有心力下质点的运动问题, 就构成了经典力学历史上第一个用来解决的里程碑式的大问题, 它和它后来的各种变式, 统称为**开普勒问题**(Kepler problem).

为了以最快速度得到它的解, 我们直接使用比耐方程, 将力的函数用  $u$  表示并代入:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{h^2}$$

这就已经得到它的解了, 在合适的极坐标初始角度下写作:

$$u = \frac{k}{h^2}(1 + e \cos \theta)$$

其中  $e$  是根据初始条件确定的常数. 再倒过来便是:

$$r = \frac{h^2/k}{1 + e \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

不管  $e, p$  的正负和取值情况, 这都表示一条圆锥曲线方程. 可能是椭圆, 抛物线, 双曲线三者之一. 我们还因此得到了一个恒等式  $p = h^2/k$ .

比耐方程固然简单. 但是它对我们解决一个天体运动的含初始条件的具体问题帮助不大. 为了得到一种行之有效的方法, 我们重新回到有效势能的方法. 现在我们代入势能函数:

$$V = -\frac{km}{r}$$

得到用  $\dot{r}$  和  $\dot{\theta}$  做除法得到的微分方程:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{h}{r^2 \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2k}{r} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

配方, 这便是:

$$\frac{d\left(\frac{k}{h^2} - \frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{mh^2} + \frac{k^2}{h^4} - \left(\frac{k}{h^2} - \frac{1}{r}\right)^2}} = d\theta$$

同理通过积分和合适的极坐标初始角:

$$r = \frac{\frac{h^2}{k}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2h^2E}{k^2m}} \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

这个公式就完整透漏了其轨迹参量  $p, e$  与运动学积分不变量  $h$  和  $E$  的关系. 它们是:

$$p = \frac{h^2}{k}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2h^2E}{k^2m}}$$

通常这两个式子不喜欢这么些. 我们通过圆锥曲线长轴  $A$  的定义:

$$p = |1 - e^2|A$$

改写以上两个式子, 化简得到:

$$h = \sqrt{kp}, \quad E = \pm \frac{km}{2A}$$

这两个公式十分地重要, 它们直接联系了运动积分  $h, E$  和轨道参量  $p, A$ . 通常, 通过初始条件就可以直接计算运动积分, 代入公式就可以完全确定轨道大体性质, 再根据几何关系就可以找到初始时刻在轨道上的具体位置. 最后就只需要对我们感兴趣的过程量或者状态量进行计算即可. 比如, 对于闭合的椭圆轨道, 其能量必然小于零. 那么上式中取负号以后我们可以计算一个周期需要的时间与轨道参量之间的关系:

$$T = \frac{\pi AB}{h/2} = \frac{2\pi AB}{\sqrt{kp}} = \frac{2\pi AB}{\sqrt{kB^2/A}} = 2\pi \sqrt{\frac{A^3}{k}}$$

### 6.3 二体与潮汐

# 第七章 刚体

## 7.1 刚体的物理描述

近代以前人们意识到了物质世界的连续性(continuum), 同时针锋相对地也提出了原子论(atomism). 原子最简单的模型就是质点, 而调和物质连续性与原子学说的中间模型就是刚体(rigid body) 模型. 刚体是不允许形变发生的系统. 由牛顿力学对质点的讨论推广到质点系的讨论, 使我们也很容易将相关结论进一步推广到刚体.

由于刚体上一点受力, 则整体同时运动起来, 这个模型与相对论力学体系是不兼容的. 具体来说, 相互作用必须以有限的速度传播, 否则就违背了因果律. 刚体不符合因果律这一时空的固有结构. 在很多相对论情境下将招致矛盾的结果.

刚体的物理学量是哪一些呢? 必要的内禀的属性是其质量的分布. 某一默认时刻  $t_0$  刚体占据了空间区域  $\Omega_0$ , 由大量体积微元  $dV$ (记做  $d^3\mathbf{R}_0$ ) 组成, 则刚体的总质量为:

$$m = \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{R}_0) d^3\mathbf{R}_0 = \int dm$$

随着刚体的运动, 原来在  $\mathbf{R}_0$  处的体积元现在在  $t$  时刻位于  $\mathbf{r}$  处, 整个刚体的运动由一个多元映射来定义:

$$f : \mathbf{R}_0, t \longrightarrow \mathbf{r}(\mathbf{R}_0, t)$$

刚体的刚性的要求, 使得这个映射必须保持体积元的不变性:

$$f : d^3\mathbf{R}_0 \in \Omega_0 \longrightarrow d^3\mathbf{r} \in \Omega ; \quad d^3\mathbf{R}_0 = d^3\mathbf{r} = dV$$

而且所有这个体积元内的所有内禀属性, 这里包括密度都不能变. 所以质量元  $dm$  也是不变的. 从而刚体具有不变的总质量. 马上就会发现, 质量几何(mass geometry) 对刚体的动力学来说也十分重要. 质量几何研究质量对特定原点  $O$  的各级矩(moment). 其中零级矩即为质量:

$${}^0M = m = \int_{\Omega} dm$$

一级矩是个矢量, 它定义了刚体的质心(center of mass) 的位置:

$${}^1M_i = mr_{Ci} = \int_{\Omega} r_i dm$$

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm}$$

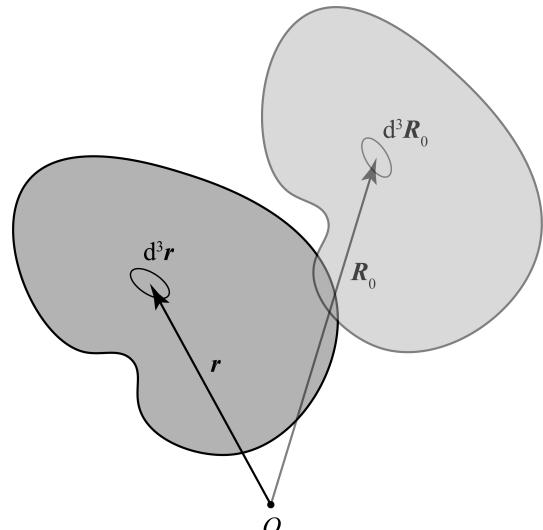


图 7.1: 刚体的描述

二级矩则是一个张量,它的九个分量代表**惯量积**(product of inertia):

$${}^2 M_{ij} = \int_{\Omega} r_i r_j dm$$

这些矩和原点的选取有关,随着刚体的运动也会不断变化,这三阶矩的信息对刚体动力学来说就是充分的了,通过后面的动力学可以发现,刚体的运动完全依赖于外力和这三阶矩.如果要研究广义相对论里的引力波辐射问题,更高阶的矩才变得重要起来.

刚体的运动可以被我们更精确地描述,在  $t_0$  时刻建立固定在刚体上,沿  $x, y, z$  三方向的单位矢量  $e_1, e_2, e_3$ ,那么刚体的运动同时也把三个矢量旋转到新的三个方向:

$$f: e_i \longrightarrow \varepsilon_i$$

这三个矢量仍然要互相垂直,且长度为一.这在数学上导致了可以通过这三个矢量的导数定义**角速度**(angular velocity) 矢量的结果:

$$\dot{\varepsilon}_i = \omega \times \varepsilon_i$$

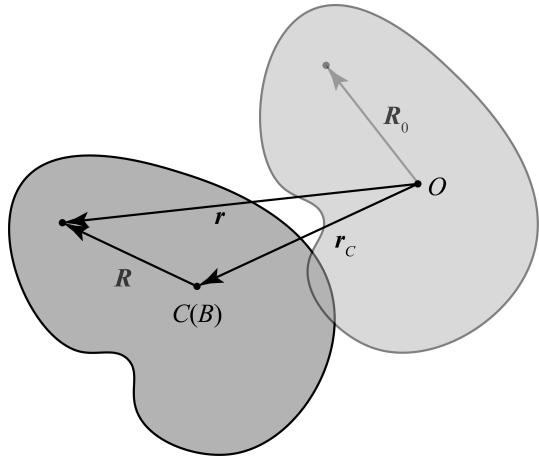


图 7.2: 基点法

十分类似于旋转参考系的变换的运动学,刚体的运动实际上就是有一个唯一的旋转参考系固连在刚体上,以后称作**刚体系**(reference system of rigid body),要研究的刚体上各个点速度实际上就是刚体系中定点的运动.于是习惯上我们采用**基点法**(method of base point) 来计算刚体上任意点的运动学量.定义**基点**(base point) 为  $t_0$  时刻  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$  的点  $B$ ,之后的位矢为  $\mathbf{r}_B$ ,对应的基点速度加速度为  $\mathbf{v}_B, \mathbf{a}_B$ ,而刚提上待研究的点相对基点的位矢为  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_B = \mathbf{R}$ ,那么该点的速度加速度即为:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{R}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_B + \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) + \dot{\omega} \times \mathbf{R}$$

出于力学的考虑,基点  $B$  一般就取做质心  $C$ .作用在刚体上  $\mathbf{r}$  处的力  $\mathbf{F}$  固然对原点会有力矩  $\mathbf{M}$ ,但是为了研究使刚体自身转动的效应,考虑到这个力同时也会使得质心运动起来,故我们重视这个力相对质心的力矩  $\mathbf{M}_C$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

刚体受到一个力系  $\mathbf{F}_i$  的作用,那么以下六个定理则来自于之前的动力学理论:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad ; \quad \sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_C \\ \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C^2 + E_{kr} \right) \quad ; \quad \sum_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C) \cdot \mathbf{F}_i = \frac{dE_{kr}}{dt} \\ \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_C \times m\mathbf{v}_C + \mathbf{L}_r) \quad ; \quad \sum_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{L}_r}{dt} \end{aligned}$$

前两个式子实际上几乎没有区别,因为刚体的总动量其实就是质心动量  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$ .后面几个式子则涉及到相对(平动)质心系的能量与角动量.它们与质量二级矩有着密切的联系,我们在第三讲7.3阐明.现在我们写出相对质心系能量角动量的定义:

$$E_{kr} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\omega \times \mathbf{R})^2 dm$$

$$\mathbf{L}_r = \int_{\Omega} \mathbf{R} \times (\omega \times \mathbf{R}) dm$$

## 7.2 平面平行运动

一个底面磨平的物体贴在平坦的地面上运动给人以平面平行运动(plane-parallel motion)的概念. 其他的一些物体运动特征也相似于它: 黑板刷在黑板上的运动, 车轮在直行时的滚动... 它们的特征是: 刚体任何一个体积元都在一个特定的平面上运动, 而这些平面又彼此平行. 对于这样的运动基点法只需要给出质心  $C$  的位矢  $\mathbf{r}_C$  和对  $t_0$  时刻刚体转过的角度  $\theta$  即可. 自由度就只有 3 个. 角速度与角加速度即可用角度的导数来给出  $\omega = \dot{\theta}$ ,  $\beta = \ddot{\theta}$ . 一般来说, 在垂直于这些平面方向要么由于动力学对称性不需要也不存在任何作用力. 要么这些力作为约束平面对物体的约束力而不在我考虑范围内. 所以我们对一些物理对象做如下修改:

- 所有参考点改成垂直平面过该点的参考轴. 并约定其正方向为垂直纸面向外. 这样的轴方向为  $z$  方向, 而运动平面的方向为  $x - y$  平面.
- 与之对应地, 刚体绕轴的转动, 产生的角速度方向以逆时针为正. 这样角速度方向与约定的正方向一致. 以后在处理的时候, 往往被作为标量而处理.
- 关于转动惯量(rotational inertia): 现在就可以把质元到转动轴---不妨把它设为  $x = y = 0$  的轴---的距离用来计算其二级矩, 对应的概念就叫做对这根轴的转动惯量:

$$I = \int \rho^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = M_{xx} + M_{yy}$$

正如上式所示, 它是 9 个惯量积中的特定 2 个的和.

- 轴的三种可能性: 一是空间中的定轴, 一是刚体上的固连轴, 还有可能是在空间中或是相对刚体都不静止的动轴. 后面就会发现, 定轴用角动量定律; 固连轴几乎都取过质心的轴, 有转动定律; 而动轴也有瞬时转动轴的特例, 可以证明有瞬时转动轴定律存在. 无论哪种情况, 转动惯量如上一点定义. 这样在定轴和瞬时转动轴情况下, 它有可能变成一个随时间变化的值  $I(t)$
- 动能的计算: 动能的定义不需要做任何修正. 而且概念本身也并不依赖与轴的选取. 只是, 其计算方法变得简单, 而且有两种算法:

- 如果是瞬时转动轴, 那么动能直接是:

$$T(t) = \frac{1}{2} I(t) \omega^2(t)$$

- 如果是定轴或过质心的轴, 事实上任何对定轴  $O$  计算刚体动能最终都必须由柯尼希定律转化为两项: 一项是质心  $C$  的轨道运动(orbital motion) 动能, 和相对质心的自旋运动(spin motion) 带来的动能. 这也是唯一正确的分解方式: 质心  $C$  换成其它相对刚体固定的点都是错的. 而刚体相对质心的转动惯量就不会是变化的了, 记作  $I_C$ . 从而两个动能可以表示为:

$$T_C = \frac{1}{2} m v_C^2(t), \quad T_S = \frac{1}{2} I_C \omega^2(t), \quad T = T_C + T_S$$

- 角动量的计算: 角动量的定义就需要做修正了. 我们仅仅选取角动量的  $z$  分量, 这是因为要么刚体是薄的, 对平面上的点角动量本来就只有  $z$  分量, 要么刚体虽然有  $x - y$  平面上的角动量但其动力学效果是产生一些约束它在  $x - y$  平面上运动的我们不感兴趣的约束力. 所以角动量也和角速度一样可以被视作标量, 对任何点  $P$  的角动量  $J$  可以被定义为<sup>1</sup>:

$$J_P = \mathbf{e}_z \cdot \int \boldsymbol{\rho}_P \times \mathbf{v} dm$$

式中,  $\boldsymbol{\rho}_P$  是从  $P$  轴垂直地指向每一个质元  $dm$  的矢径. 根据  $P$  点不同的选取方法, 有以下几种计算方法:

<sup>1</sup>注意即使  $P$  在动,  $\mathbf{v}$  也没有必要改为  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_P$ .

- 如果是瞬时转动轴,这种情况我们只在较少情况下使用.那么对它的角动量直接是:

$$J(t) = I(t)\omega(t)$$

- 如果是定轴,刚体角动量也必须由柯尼希定律转化为两项:一项是质心  $C$  的轨道角动量(orbital angular momentum) $L$ , 和相对质心的自旋角动量(spin angular momentum) $S$ . 这也是唯一正确的分解方式: 质心  $C$  换成其它相对刚体固定的点都是错的. 刚体对质心的转动惯量  $I_C$  是常数. 从而两者可以表示为:

$$L = \mathbf{e}_z \cdot [m\mathbf{r}_C(t) \times \mathbf{v}_C(t)] , \quad S = I_C\omega(t) , \quad J = L + S$$

- 其它动轴.除非变换参考系,否则一般极少被考虑.

平面平行运动的刚体的自由度为 3, 所以只需要 3 个方程就足以求解其运动,这三个方程通常取做质心运动定律和绕质心的转动定律(rotation law):

$$\sum_i F_{xi} = ma_{Cx}$$

$$\sum_i F_{xi} = ma_{Cx}$$

$$\sum_i M_i = I_C\beta$$

### 7.3 空间刚体运动 \*

我们来定义空间刚体的转动惯量,首当其冲的一点是,沿不同方向的轴的转动惯量是不一样的. 那么我们改变一下定义. 把转动惯量视作从角速度到角动量的一个映射,为了简洁,把映射直接写成一个点乘,后面就知道其合理性:

$$\mathbf{I} : \quad \boldsymbol{\omega} \rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

那么这个映射一定是线性的.这是因为如果角速度为  $\boldsymbol{\omega} = \lambda_1\boldsymbol{\omega}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\omega}_2$ . 那么根据第一节给出的角动量计算方法:

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm$$

得到  $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda_1\mathbf{I}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \lambda_2\mathbf{I}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2$

那么它就一定可以写作一个矩阵:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

背后具有这样的原理:如果我们让角速度为  $(1, 0, 0)$ , 把此时角动量计算出来写作  $(I_x, I_{xy}, I_{xz})$ . 同理如果角速度为  $(0, 1, 0)$  时的角动量为  $I_{yx}, I_y, I_{yz}$ , 角速度为  $(0, 0, 1)$  时的角动量为  $I_{zx}, I_{zy}, I_z$ . 那么任意角速度情况都可以视作以上三种情况的线性叠加:

$$(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \omega_x(1, 0, 0) + \omega_y(0, 1, 0) + \omega_z(0, 0, 1)$$

所以相应的角动量也是直接叠加的:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} : \begin{cases} L_x = I_x\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y = I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z \end{cases}$$

那么把上式写成一个矩阵的形式是再合适不过的了:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

所以是不是说在这个意义下刚体的转动惯量  $\mathbf{I}$  就是一个矩阵? 这依然有不妥的地方. 因为如果换一个坐标系, 这个矩阵就会变化, 但是从角速度到角动量的映射是不会发生变化的. 我们有一种更严谨的定义方法, 是把转动惯量形式上写成如下的张量(tensor) 形式:

$$\mathbf{I} = I_x e_x e_x + I_y e_y e_y + I_z e_z e_z + I_{xy} e_x e_y + I_{xz} e_x e_z + I_{yx} e_y e_x + I_{yz} e_y e_z + I_{zx} e_z e_x = I_{zy} e_z e_y$$

其中  $e_i e_j$  是一种新定义的并矢(dyadic) 运算的结果, 这种运算把两个矢量自由地并在一起, 满足按照分量的分配律, 但是不满足交换律, 即形成的并矢, 即一个张量的九个基, 对称的两个基是不被认为相等的:

$$e_i e_j \neq e_j e_i$$

张量因为代表了物理量之间的映射而具有了物理意义. 但是如果觉得这一层意义不够明显, 我们可以把张量代表的映射表示出来, 这一步是通过张量与矢量的点乘操作体现出来的. 事实上我们定义这个点乘一样地符合分配律, 而基之间的点乘符合:

$$(e_i e_j) \cdot e_k = e_i (e_j \cdot e_k)$$

即如果  $j = k$  则就是  $e_i$ , 如果不等于, 那就是零. 这就不难验证, 的确能把之前的矩阵式, 按照张量的方式理解为:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

最后, 如果把之前的角动量定义式按照三重矢积公式, 按分量展开可以得到:

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \int \left( \sum_i r_i^2 \sum_j \omega_j e_j - \sum_i r_i e_i \sum_j r_j \omega_j \right) dm$$

利用之前定义的二级矩:

$$\mathbf{L} = (M_{xx} + M_{yy} + M_{zz}) \sum_i \omega_i e_i - \sum_{ij} M_{ij} \omega_j e_i$$

写成分量形式为:

$$\begin{cases} L_x = (M_{yy} + M_{zz})\omega_x + M_{xy}\omega_y + M_{xz}\omega_z \\ L_y = M_{yx}\omega_x + (M_{xx} + M_{zz})\omega_y + M_{yz}\omega_z \\ L_z = M_{zx}\omega_x + M_{zy}\omega_y + (M_{xx} + M_{yy})\omega_z \end{cases}$$

对比之前的惯量张量, 我们发现了实际上惯量张量的非对角线分量其实就是对应的惯量积, 从而还具有对称性:

$$I_{ij} = I_{ji} = M_{ij}$$

而对角线分量却不是惯量积. 它是真正对这些轴的转动惯量, 如  $x$  轴:

$$I_x = M_{yy} + M_{zz}$$

数学上可以证明, 对任何点, 存在特殊的三条正交轴  $x - y - z$ , 称为主轴(principal axes), 可以使得惯量积都为零, 只剩下三个主转动惯量:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

即:

$$\mathbf{L} = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z)$$

# 第八章 弹性体

## 8.1 弹性体的物理描述

所谓弹性体就是完全弹性(elasticity)的物体. 弹性描述的是使物体发生形变的力撤除以后物体可以回到静息状态的属性. 弹性力学研究的对象与范围就是弹性体的力学性质. 一般来说, 固体主要具有弹性而液体主要具有黏性, 若是研究中间的状态, 非牛顿流体(non-newtonian fluid) 和塑性固体(plastic solid), 那就是黏弹性力学(rheology) 要研究的对象了. 典型的黏弹性过程受力不是简单地正比于位移而是与速度, 与历史相关. 因此而可以发生永久的不可恢复的变形.

正因为如此, 完整描述弹性体的运动学时, 不得不额外留心所有点的实际位移. 在流体时也许速度更需要注意. 所以我们写出一个初始  $t = 0$  位置矢量为  $\mathbf{R}$  的点, 经过  $t$  时间到达位置为  $\mathbf{r}$  处, 也就是我们要定义一个  $3D \times 1D$  到  $3D$  的映射:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$$

不失普遍性地, 我们考虑如何刻画在  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  的形变. 我们需要研究在  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  的附近  $d\mathbf{R} = dX\mathbf{e}_x + dY\mathbf{e}_y + dZ\mathbf{e}_z$  处的位移  $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$  与中心的位移去比较. 数学上有以下泰勒展式:

$$\boldsymbol{\delta}(d\mathbf{R}, t) = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{0}, t) + d\mathbf{R} \cdot \nabla \boldsymbol{\delta}$$

上式中  $\nabla \boldsymbol{\delta}$  是一个有九个分量的张量, 张量这一概念上一章介绍过, 它是九个分量的三行三列式的组合, 现在它的作用是可以与之前的矢量  $d\mathbf{R}$  点乘把它线性地映射为另一个矢量:

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{\delta} &= \sum_{i,j} \frac{\partial \delta_j}{\partial X_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ \nabla \boldsymbol{\delta} : \sum_i dX_i \mathbf{e}_i &\rightarrow \sum_j d\delta_j \mathbf{e}_j = \sum_j \left( \sum_i \frac{\partial \delta_j}{\partial X_i} dX_i \right) \mathbf{e}_j \\ \nabla \boldsymbol{\delta} : &\begin{bmatrix} \frac{\partial \delta_x}{\partial X} & \frac{\partial \delta_y}{\partial X} & \frac{\partial \delta_z}{\partial X} \\ \frac{\partial \delta_x}{\partial Y} & \frac{\partial \delta_y}{\partial Y} & \frac{\partial \delta_z}{\partial Y} \\ \frac{\partial \delta_x}{\partial Z} & \frac{\partial \delta_y}{\partial Z} & \frac{\partial \delta_z}{\partial Z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

不难发现第二个式子是不证自明的. 所以实际上刻画形变的包含于  $\nabla \boldsymbol{\delta}$  这个张量. 但是并不是完全取决于它, 考虑像刚体这样的不能变形的物体, 上一章介绍过, 旋转依然是可能的. 不妨设刚体不仅随  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  的点发生了  $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{0}, t)$  式的平动, 也要发生一个  $d\phi$  的小角度转动. 在这里我们让转动的角度足够小以至于可以做小角近似. 这样就可以把刚体式的位移的以上张量写成:

$$\boldsymbol{\delta}(d\mathbf{R}, t) = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{0}, t) + d\phi \times d\mathbf{R}$$

$$\nabla \boldsymbol{\delta} : \begin{bmatrix} 0 & d\phi_z & -d\phi_y \\ -d\phi_z & 0 & d\phi_x \\ d\phi_y & -d\phi_x & 0 \end{bmatrix}$$

这个矩阵是一个反对称矩阵,从而我们得出一个结论:一个固体在某点位移对应的  $\nabla\delta$  如果是反对称的,则不产生任何形变,仅仅是局部整体发生了平移和旋转.

但是有一个简单的定理.任何一个方矩阵  $[M_{ij}]$  都能被唯一地分解为对称矩阵和反对称矩阵.分别称作原来矩阵的对称部分(symmetric component) 和反对称部分(anti-symmetric component).用矩阵的转置可以很简单的得到这个结果:

$$[M_{ij}] = [S_{ij}] + [A_{ij}]$$

$$[S_{ij}] = \frac{[M_{ij}] + {}^t[M_{ij}]}{2}, \quad [A_{ij}] = \frac{[M_{ij}] - {}^t[M_{ij}]}{2}$$

那么问题就很简单了,之前那个矩阵的对称部分就是描述形变的部分.这个部分被叫做应变张量(strain tensor),以后用  $\varepsilon$  来表示<sup>1</sup>:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla\delta + {}^t\nabla\delta)$$

$$\varepsilon : \begin{bmatrix} \frac{\partial\delta_x}{\partial X} & \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_y}{\partial X} + \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_x}{\partial Y} & \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_z}{\partial Y} + \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_y}{\partial Z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_y}{\partial X} + \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_x}{\partial Y} & \frac{\partial\delta_y}{\partial Y} & \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_x}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_z}{\partial X} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_z}{\partial Y} + \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_y}{\partial Z} & \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_x}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial\delta_z}{\partial X} & \frac{\partial\delta_z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \theta_{xy}/2 & \theta_{zx}/2 \\ \theta_{xy}/2 & \varepsilon_y & \theta_{yz}/2 \\ \theta_{zx}/2 & \theta_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

其中三个对角元素  $\varepsilon$  称作正应变(normal strain).而非对角的元素  $\theta$  称作剪应变(shear strain).如图8.1所示,在一种非常简单的模型中,大气中的棒被在沿棒方向施加一个拉力而伸长,但宽方向很自然地会产生些许的收缩.那么根据在棒里取出不同的微元形式,其变形方向也会有所改变.红色部分沿  $x$  方向就发生了明显的正应变.这是因为合适地平移,旋转其变形后的微元对齐形变前的微元(虚线)后,明显发现在  $x$  方向长度变大了.如果初始长度为  $X$ ,之后在微元范围内端点的  $x = X + \delta$ .于是根据上面的定义,正应变其实就是:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{X} = \frac{x - X}{X}$$

而蓝色部分是个平行四边形,将底边与变形前的底边对齐以后,我们发现  $x - y$  平面上顶角不再是  $90^\circ$ ,这其实就标志着剪应变.如果这个角度减小了  $\alpha$ ,那么之后的  $x = X + Y \tan \alpha$ ,  $y = Y$ .这就说明  $\delta_x = Y \tan \alpha$ ,  $\delta_y = 0$ .从而:

$$\theta_{xy} = \frac{\partial\delta_y}{\partial X} + \frac{\partial\delta_x}{\partial Y} = \tan \alpha \approx \alpha$$

可见这个角度变化其实就就是剪应变,它与边的对齐方式无关,如果  $x, y$  轴夹角变小便是正的.正应变,剪应变都是无量纲的物理量.

接下来需要考虑弹性体的内部受力情况.令人惊讶的是,它也必然由一个对称张量描述.首先我们意识到弹性力内部的受力具有以下特征:A. 是空间点的函数,不同点处可以不同,但每一点应当有一个受力情况,它就是内部的应力(stress).B. 不是一个矢量.显然指出弹性体中的一点,并不能马上对应出来这个点处的某个受力的情况,因为我们考虑的是内力而不是外力,但是点处的受力不可能有明确的施力物体与受力物体.那么其实还需要在这一点处找到一个面矢量  $d\mathbf{S}$ ,才能说是谁对谁的力.我们这样就发现了,其实指定一个应力,本质上就是在每一点指定一个面矢量  $d\mathbf{S}$  到相互作用力  $d\mathbf{F}$  的映射.C. 显然,这样的映射应当为线性映射<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> 本书印刷体张量都是与矢量一致的粗体.手写时,为了区分,可以把张量写作带异型箭头的形式  $\overset{\leftrightarrow}{T}$  或者直接用自由指标的分量代指构成的整体  $T_{ij}$ .

<sup>2</sup> 证明留给读者做思考,需要用到极限微元受力分析.

这样就几乎已经说明, 应力其实就是一个张量. 因为从一个矢量  $d\mathbf{S}$  到另一个矢量  $d\mathbf{F}$  的线性映射的数学模型其实就是张量, 它存在  $3 \times 3 = 9$  个分量. 我们进一步指定,  $d\mathbf{F}$  的含义  $d\mathbf{S}$  指向的那一侧的体元对这一侧的体元通过  $d\mathbf{S}$  施加的相互作用力. 这个张量就是:

$$\left\{ \begin{array}{l} dF_x = \sigma_{xx}dS_x + \sigma_{xy}dS_y + \sigma_{xz}dS_z \\ dF_y = \sigma_{yx}dS_x + \sigma_{yy}dS_y + \sigma_{yz}dS_z \\ dF_z = \sigma_{zx}dS_x + \sigma_{zy}dS_y + \sigma_{zz}dS_z \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{\sigma} : d\mathbf{S} \rightarrow d\mathbf{F}$$

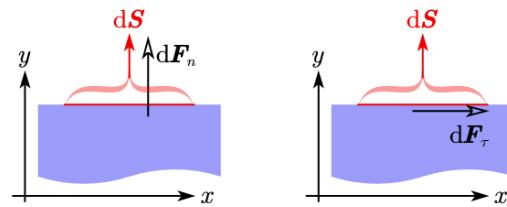


图 8.2: 正应力与剪应力

$$\boldsymbol{\sigma} : \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

这个张量就叫做**应力张量**(stress tensor). 通过极限微元的受力分析, 可以证明这个张量还必须是对称的<sup>3</sup>. 也就是说, 我们可以写成以下形式:

$$\boldsymbol{\sigma} : \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

同样的, 参考图8.2, 我们可以发现, 对角线元素  $\sigma$  代表**正应力**(normal stress) 而非对角线元素  $\tau$  代表**剪应变**(shear stress). 如果把面元取为  $d\mathbf{S} = dS_y e_y$ , 考虑在平面上的受力就会产生两个分量:

$$d\mathbf{F}_n = \sigma_y dS_y e_y, \quad d\mathbf{F}_\tau = \tau_{xy} dS_y e_x$$

前者就是垂直于面的以拉力为正的正应力, 后者就是平行于面方向的剪应力. 而应力本身都是和以往学过的压强量纲一致, 国际单位是帕斯卡 Pa:

$$\sigma = \frac{dF_n}{dS}, \quad \tau = \frac{dF_\tau}{dS}$$

引入两个张量以后, 剩下的就是构造两者之间的因果关系: 应力是如何造成应变的. 在纯粹的弹性理论中, 我们可以假设应力张量到应变张量的映射再一次是一个逐点线性的映射. 这样的结果是数学上造成了每一点需要引入一个四阶的张量来描述这样的映射. 三维情况下四阶的张量一共会造成  $3^4 = 81$  个独立分量. 由于应力应变张量本身具有对称性, 故其实只需要  $6^2$  个独立分量. 再由于体系的非耗散性的要求<sup>4</sup>, 其独立分量数最终减少到 21 个. 这也是高度非对称的介质的弹性系数中独立的量的个数. 然而, 如果介质是完全各向同性的, 也就是说沿所有三维空间中任意方向的长度与角度的拉伸与压缩都是相同困难的情况下, 张量的对称性理论可以告诉我们, 独立的弹性系数只会剩下两个. 具体来说,  $\epsilon$  与  $\sigma$  之间的关系必然会变成以下不依赖于坐标系选取的形式:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \cdot \boldsymbol{\epsilon} + \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \mathbf{I}$$

<sup>3</sup>也留给读者自己完成.

<sup>4</sup>导致了某种形式互易定理.

而按照这样的方式选取的弹性系数  $\lambda$  和  $\mu$  被叫做**拉梅参数**(Lamé parameters). 式中  $\text{Tr}$  代表取迹操作, 而  $I$  是单位张量. 带入之前的两个张量的写法上式实际上意味着:

$$\sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_y = 2\mu\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_z = 2\mu\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\tau_{ij} = \mu\theta_{ij}$$

至少我们能从上式发现, 剪应力和正应力是分别独立地导致剪应变和正应变的, 尤其是剪应力, 它在三个方向甚至都是互相独立地, 而这个比例系数就还被叫做**剪变模量**(shear modulus), 用  $G$  来表示. 即拉梅系数  $\mu \equiv G$ . 这个在切向成立的结论称作**横向胡克定律**(transverse Hooke's law):

$$\frac{F_\tau}{S} = G \frac{\delta}{y}$$

而前三个式子对应的正应力正应变之间的关系比较复杂. 首先我们把三式相加可以得到:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (2\mu + 3\lambda)(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

我们意识到, 任何物体在大气环境下实际上就受到周围分子不断撞击产生的大气压力而体积收缩, 实际上就是三个方向应力相等于压强  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$ , 而且三个应变  $\varepsilon_i$  就等价于线压缩率, 应当是体压缩率的三分之一的情况, 这样我们得到:

$$p = \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\Delta V}{V}$$

这个系数就叫做**体弹性模量**(bulk modulus):

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

一般来说, 弹性体预先在大气体系中被压缩, 在这个基础上, 线性地叠加上由于其他形式的应力  $\sigma$  导致的新应变  $\varepsilon$ .

还有一种至关重要的变形. 如果我们在一根弹性棒的  $x$  方向施加应力  $\sigma$ , 但是  $y - z$  方向不施加任何的力  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ , 扣除原来大气造成的应变, 通过解方程得到  $\varepsilon = \varepsilon_x$  和  $\varepsilon' = \varepsilon_y = \varepsilon_z$  的值:

$$\begin{cases} \sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda(\varepsilon + 2\varepsilon') \\ 0 = 2\mu\varepsilon' + \lambda(\varepsilon + 2\varepsilon') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma \\ \varepsilon' = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\varepsilon \end{cases}$$

第一个式子翻过来写就是描述拉力与棒伸长之间的**纵向胡克定律**(longitudinal Hooke's law). 相关的弹性系数称作**杨氏模量**(Young's modulus), 即  $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ . 而第二个式子反映了如果棒在拉力方向伸长, 在垂直方向必然缩短的现实. 缩短率与伸长率的比值称为**泊松比**(Poisson's ratio), 即  $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$ :

$$\frac{F_n}{S} = E \frac{\delta}{x}, \quad \frac{\delta'}{y} = \nu \frac{\delta}{x}$$

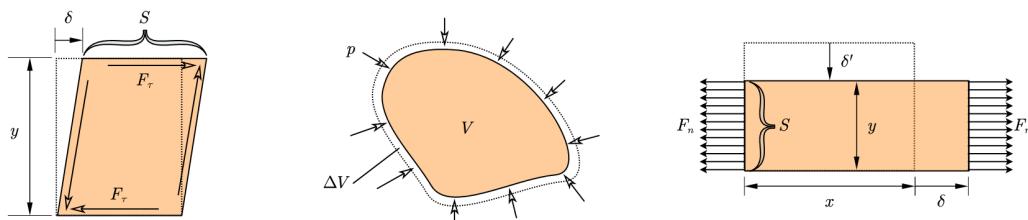


图 8.3: 剪变模量, 体弹性模量与杨氏模量

三个弹性模量的单位也是应力的单位, 即帕斯卡, 而典型材料的弹性模量在  $10^{10}\text{Pa}$  的数量级.

## 8.2 弹性棒, 弹性绳, 弹性膜与弹性体

在弹性的语境下,除了体状的大块弹性介质的研究,一些边缘化的状态:比如弹性体的表面,或者本来就在空间上受到限制的情况,包括本节介绍的弹性棒,绳,膜等,都是值得研究,且具有相似行为的体系.这种相似性体现在具有同一类的动力学方程和能量结构上.并最终导致了下一节介绍的弹性波的结果.

### 8.2.1 弹性棒

考虑一根弹性棒<sup>8.6</sup>,忽略其在垂直棒方向的运动带来的动力学效应.那么棒就被简化为一维的模型.在变量上,我们选取棒未形变时的坐标  $x$  和时间  $t$  为自变量,而沿正方向向前的位移  $\xi$  为因变量,即  $\xi(x, t)$ .此时如 (a) 图,在棒上  $x$  处找一个固连在棒上的面元,随  $x$  改变的不仅仅是  $\xi$ ,其实还有通过这一个面元相互拉扯的应力  $\sigma$ .于是我们就来到了 (b) 中关于应力的计算.同时参考 (c) 图,一个体积元  $dx$  的左右侧原坐标  $x$  与  $x + dx$ ,但是它们的位移是不一样的,前者是  $\xi(x)$ ,后者则是  $\xi(x + dx) = \xi + d\xi$ ,即:

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

那么这一段微元长度就变为  $dx + d\xi$ .根据胡克定律,由于伸长产生的应力就是:

$$\sigma(x, t) = E \frac{d\xi}{dx} = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

最后 (c) 图再取出  $dx$  的微元,其质量密度为  $\rho$ ,截面积为  $S$ ,那么其质量和两段受力的合力为:

$$dm = \rho S dx$$

$$dF = d\sigma S = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

根据牛顿第二定律  $dF = dm \cdot a$ ,  $a$  则是位移  $u$  对时间的二阶导数.这就给出了以下方程:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

这样的方程有一个名字,这也是我们第一次遇到这样的方程,称为**波动方程**(wave equation).一维波动方程的一般形式为:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

其中  $v$  必须是一个常数数学上才叫波动方程,  $v$  称为**波速**(wave velocity).而弹性棒对应的波速就是:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

波动方程和波速,正如其名,在下一节我们去解它之后就会发现就是产生的弹性波的特征.

下一个问题是考虑棒振动的能量.动能是比较简单的,我们把微元的动能做积分就是总动能:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} dm \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

但我们尤其关心能量的**定域化**(localization) 问题.就是说能量是否可以表示为逐点的能量密度的体积分.就动能来看这也是成立的:

$$T = \int_0^L \mathcal{T} \cdot S dx \Rightarrow \mathcal{T} = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

现在我们来思考势能的定义. 显然棒不均匀伸长的情况相对于以往棒均匀伸长是两种完全不同的情况, 棒所储存的势能不仅要重新推导, 甚至需要在推导中确立其存在性. 事实上如果某一段  $dx$  内应力为拉力  $\sigma > 0$ , 那么如果在这个力下这一段伸长  $d\xi(t+dt) - d\xi(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right) dt$ , 内部应力就会做负功, 我们只需要证明这个功对应的功率(除以  $dt$ ) 等于对应体积内的势能的增加, 即:

$$ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx = \frac{d}{dt} (\mathcal{V} S dx)$$

这样就得到了:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2, \quad V = \int_0^L \mathcal{V} \cdot S dx$$

总能量总是要守恒的, 对于棒的能量的计算, 现在就可以普遍地写为棒上**能量密度**(energy density) 的积分, 这个总能量密度就是动能密度  $\mathcal{T}$  和势能密度  $\mathcal{V}$  的和:

$$w = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

### 8.2.2 弹性绳

考虑一条质量线密度为  $\lambda$ , 预先被拉紧且拉力为  $T$  的细绳. 由于形变小所以沿绳方向的拉力几乎是个常数. 那么考虑这个绳在垂直  $x$  方向发生位移  $\xi(x, t), \eta(x, t)$ . 我们立马就发现了这个问题不同于上一个问题之处在于因变量变多了. 上一个弹性棒中的运动模式是**纵波**(longitudinal wave). 而这里要建立的是垂直传播方向的**横波**(transverse wave) 模型. 横波不同于纵波的一大本质区别在于它有**偏振**(polarization). 我们把  $\xi$  和  $\eta$  两个方向叫做其偏振方向.

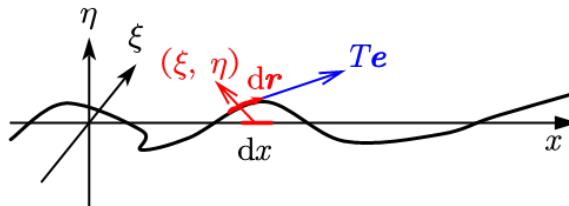


图 8.5: 弹性绳的建模

在建模上, 两者具有相似性. 同样是找到  $dx$  微元两端作用的力. 现在它大小几乎就是  $T$ , 只是方向变成了  $e$ , 它是绳端的单位切向量:

$$dr = (dx, d\xi, d\eta) \Rightarrow e = \frac{(dx, d\xi, d\eta)}{\sqrt{dx^2 + d\xi^2 + d\eta^2}}$$

由于在  $\xi, \eta$  方向的位移产生的斜率是小量, 上式近似为:

$$e = \left( 1, \frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dx} \right) = \left( 1, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

那么拉力  $Te$  的主要效果也就是在  $T_\xi = T \frac{\partial \xi}{\partial x}$  和  $T_\eta = T \frac{\partial \eta}{\partial x}$  两个方向上, 在微元段  $dx$  两侧的力的差产生了在  $\xi, \eta$  方向的加速度. 那么就得到了波动方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

可以发现, 波动方程的形式相对弹性棒没有本质的变化, 只不过从一个方程变成了两个独立量要满足的波动方程. 以及波速公式变成了:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

能量的表现与推导方法也是类似的. 唯一的区别是现在的密度指的是线密度. 可以给出:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\lambda \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}\lambda \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}T \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2$$

还有一点值得指出. 就是在这样的情况下势能还有一种极其简单的等效计算方法, 就是表面能(surface energy) 的计算方法, 体系的势能实际上就是简单地正比于变形之后的总绳长的:

$$V = T \int |\mathrm{d}\mathbf{r}| = T \int \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2} = T \int \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2} \mathrm{d}x$$

事实上, 对上式进行小量近似就可以发现:

$$V = T \int \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \mathrm{d}x = V_0 + \int \mathcal{V} \mathrm{d}x$$

从而不变拉力绳的势能实际上单纯地正比于绳子被拉长到了多长. 形成单位长度的绳子需要的能量是完全一致的.

### 8.2.3 弹性膜

弹性膜的情况则与弹性绳的情况互补: 这一次是自变量变成了二维的  $x, y$ , 当然还有时间  $t$  一共三个. 倒是因变量只剩下垂直于面方向的位移  $\xi$ . 即  $\xi(x, y, t)$ . 面的惯性由质量面密度  $\mu$  来描述. 而面的弹性, 类似于弹性绳, 我们也给面拉紧造成各向同性的内部张力. 这种拉紧是均匀的, 所以才造成均匀的面密度. 而同时也会对面上线元  $\mathrm{d}s$  造成彼此之间垂直于线元的, 平行于面方向的拉力  $\mathrm{d}F = \sigma \mathrm{d}s$ . 其中  $\sigma$  称作张力系数(tension coefficient). 那么如果在  $x - y$  平面上选取右旋的闭合曲线圈, 中间围着一块膜. 在边界上一个典型的线段元和当点处的法向量就是:

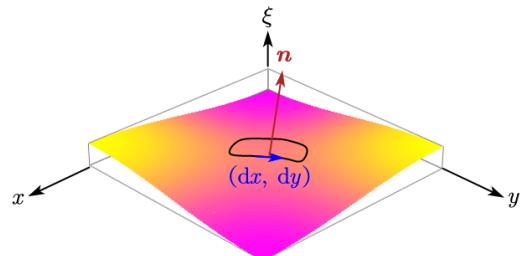


图 8.6: 弹性膜的建模

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = (dx, dy, d\xi) = \left( dx, dy, \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \right), \quad \mathbf{n} = \left( -\frac{\partial \xi}{\partial x}, -\frac{\partial \xi}{\partial y}, 1 \right)$$

那么通过这一段弧元, 周围膜对这一段膜施加的力, 忽略二阶小量就是:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = -\sigma \mathbf{n} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \sigma \left( dy, -dx, \frac{\partial \xi}{\partial x} dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} dx \right)$$

足以发现, 如果考虑曲线中的膜受到的合力, 显然  $x - y$  方向是平衡的. 合力在  $\xi$  方向, 大小可以根据数学上的格林公式<sup>5</sup>得到:

$$F_\xi = \sigma \oint \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} dx \right) = \iint \sigma \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

从中我们可以发现, 单位面积上给出的内力就是:

$$f = \frac{\mathrm{d}F_\xi}{\mathrm{d}x \mathrm{d}y} = \sigma \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

<sup>5</sup> 格林公式(Green formula) 为, 对任何平面区域  $D$  与其边界右旋闭合曲线  $\partial D$ :

$$\oint_{\partial D} P(x, y) \mathrm{d}x + Q(x, y) \mathrm{d}y = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

那么根据牛顿第二定律, 这就是让膜产生  $\xi$  方向加速度的力. 化简就得到了膜对应的二维波动方程:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\mu} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

对应波速就是:

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$$

同理, 对应动能和势能的面密度为:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \\ \mathcal{V} &= \frac{1}{2} \sigma \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \sigma \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

同样的, 势能可以重新表述为表面能:

$$V = \sigma \int |dS| V_0 + \int \mathcal{V} dx dy$$

#### 8.2.4 弹性体 \*

终于我们可以讨论自变量有  $x - y - z$  三维空间和  $t$  一维时间, 因变量, 即弹性体的位移矢量  $\delta$  也有三个维度的最复杂的情况. 本章第一节的讨论总结下来就是两个式子:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{\delta} + {}^t \nabla \boldsymbol{\delta})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{I}$$

它给出了位移的一阶倒数是如何产生力的. 另外一部分物理公式, 就是计算单位体积受到的合力, 最后联立牛顿第二定律, 我们就有希望给出波动方程.

计算合力需要对一个体积区域  $D$  的边界闭合外向曲面  $\partial D$  上受到的外力进行积分:

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial D} dS \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

这其实可以使用数学上广义上的高斯定理化为体积分:

$$\mathbf{F} = \iiint_D \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dx dy dz \Rightarrow \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dx dy dz} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

最后再联立牛顿第二定律, 我们就化简出来第三个方程:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\delta}}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

可以得到, 如果把  $\boldsymbol{\delta}$  记做  $(\xi, \eta, \zeta)$ , 那么对应的方程就称作**纳维-柯西方程**(Navier-Cauchy equation). 完全展开的形式为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial y} \right) \end{aligned}$$

这样写是不利于我们分析其求解的. 通过数学化简, 我们暂时先把波动方程写成如下形式:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\delta}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\delta}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\delta})$$

其中需要用到矢量微分恒等式:

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\delta}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\delta}) = \nabla^2 \boldsymbol{\delta}$$

最后, 棒中的能量守恒, 动能密度是简单的. 而势能密度在只有正应变或剪应变情况下容易证明, 它就是应力和产生的应变乘积的一半. 普遍情况下只需要做叠加即可:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\rho \left( \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2}\rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}\rho \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}\rho \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \theta_{xy} + \tau_{yz} \theta_{yz} + \tau_{zx} \theta_{zx}) = \frac{1}{2}\lambda(\nabla \cdot \boldsymbol{\delta})^2 + \frac{1}{2}\mu(\nabla \boldsymbol{\delta} : \nabla \boldsymbol{\delta} + {}^t \nabla \boldsymbol{\delta} : \nabla \boldsymbol{\delta})$$

式中 “:” 符号表示张量之间的双点乘运算. 具体来说:

$$\left( \sum_{ij} T_{ij} e_i e_j \right) : \left( \sum_{ij} S_{ij} e_i e_j \right) = \text{Tr}(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S}) = \sum_{ij} T_{ij} S_{ji}$$

### 8.3 弹性波

波动方程的求解问题其实是非常简单的. 它其实是普遍的偏微分方程(partial differential equation, PDE)求解问题中最简单的一类. 不同于常微分方程, 一个多元函数, 如  $\xi(x, t)$ , 在自变量取某值时不仅仅可以求函数值和对  $x$  的各阶导数, 还可以求对  $t$  的各阶导数, 甚至还可以求  $x$  和  $t$  的各阶混合导数. 对这些值提出限制, 就构成了偏微分方程:

$$F\left(x, t, \frac{\partial^{m+n}\xi}{\partial x^m \partial t^n}\right) = F\left(x, t, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t}, \dots\right) = 0$$

与常微分方程类似的一点是, 它一般也存在着大量的解. 尤其是线性偏微分方程的特殊情况, 其解也是满足常微分方程的叠加原理, 通特解原理的:

$$\sum_{i,j} c_{ij}(x, t) \frac{\partial^{m+n}\xi}{\partial x^m \partial t^n} = f(x, t)$$

其中最简单的波动方程其实就是二阶的齐次的常系数的线性偏微分方程:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= 0, c_{00} = c_{01} = c_{10} = 0, c_{20} = -v^2, c_{11} = 0, c_{02} = 1, c_{ij} = 0 \ (i > 2 \text{ or } j > 2) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \end{aligned}$$

如何找到以上方程的所有解(通解)? 我们介绍两种常见的思路:

#### 8.3.1 分离变量法

猜测原方程具有如下形式的特解:

$$\xi(x, t) = A(x)u(t)$$

代入原方程, 两边同时除以  $A(x)u(t)$ , 化为纯粹的分离变量的常微分方程形式:

$$\frac{\frac{d^2 u}{dt^2}}{u} = v^2 \frac{\frac{d^2 A}{dx^2}}{A}$$

左侧必然是不含  $x$  的那一类函数. 而右侧又必须是不含  $t$  的那一类函数. 两者还是同一个函数. 所以这个函数  $x, t$  都不含有, 那便是常数. 最后再注意到随时间变化的部分在简谐函数下恰好能符合常数的要求:

$$u(t) = e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{d^2 u}{dt^2}}{u} = -\omega^2$$

最后求解对  $A$  的限制, 得到:

$$A(x) = A e^{\mp i k x}, \quad \frac{\omega}{k} = v$$

从而我们就得到了通解的一组基:

$$\left\{ \xi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)}, \xi(x, t) = A e^{i(\omega t + kx)} \middle| \frac{\omega}{k} = v \right\}$$

根据傅里叶理论. 上述解的叠加其实就是所有可能在一维下符合波动方程的解. 这样一组基本的解就是右行波和左行波解. 注意到这样的波有一点不符合实际情况: 它完全没有色散, 所有的频率的波传播速度都完全一样, 说明我们的建模过于简单.

### 8.3.2 变量代换法

如果我们尝试变量代换:

$$x_+ = x + vt, x_- = x - vt$$

那么容易发现, 原来的方程居然变成了:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_+ \partial x_-} = 0$$

这样, 只需要  $\xi$  仅仅是其中一个变量的函数, 对另一个函数的偏导数就是零, 就能符合以上的方程. 即任意的  $f(x_+)$  和  $g(x_-)$  都是以上方程的解. 由于叠加原理, 我们就能肯定地找到以下特解:

$$\xi(x, t) = g(x - vt) + f(x + vt)$$

这其实也构成了通解, 它甚至直接就是任意通解的形式, 不仅是可以叠加形成通解的一组基:

$$\{\xi(x, t) = g(x - vt) + f(x + vt) \mid \forall f \forall g\}$$

其中任意的  $g(x - vt)$  就代表初始时刻波形  $g(x)$  任意的一列右行波. 而  $f$  就是左行波. 即任何一维的波动总可以分解为任意波形的左行波和右行波的叠加. 上一节的任意频率的各种简谐波又可以叠加形成任意波形, 实际上就是傅里叶理论的重要内容.

### 8.3.3 多维情况

如果是类似于弹性绳那样的波动方程:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

那么这个一维传播的二维振动的基础行波解就可以表达为:

$$(\xi, \eta) = (A, B) e^{i(\omega t \pm kx)}, \quad \frac{\omega}{k} = v$$

其中偏振矢量  $(A, B)$  可以是任何可能性, 如果是  $(0, 1)$  就是  $\xi$  方向的线偏振, 如果是  $(1, 0)$  就是  $\eta$  方向的线偏振. 故这个振动还可以按偏振模式分解为两个. 注意到  $A, B$  都是复数还可以带有相位. 如果两个方向复振幅的模相等而相位差  $90^\circ$ , 那么这个偏振模式就叫做圆偏振. 即, 相对简单一维振动, 它还多了偏振这一个自由度.

如果是类似于弹性膜那样的波动方程:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

那么这个二维传播的一维振动的基础行波解就被表达为:

$$\xi = A e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad , \quad \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} = v$$

那么这个波就同时具有了以下自由度:频率(决定  $\omega$  和  $k$  以及引申的周期,波长等等),传播方向(决定  $k_x$  和  $k_y$  的比例和正负),强度(决定  $A$  的模),以及相位(决定  $A$  的幅角).

最后考虑弹性体中的波动方程,即纳维-柯西方程:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\delta}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\delta}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\delta})$$

这个方程看上去很难直接求解.但是实际上数学上有一重要定理为我们提供了重要的线索.就是斯托克斯-亥姆霍兹定理(Stokes-Helmholtz's theorem)发现,任何三维空间中的矢量  $\boldsymbol{\delta}(r)$  都可以分解为一个有旋无散场  $\boldsymbol{\delta}_S$  与有散无旋场  $\boldsymbol{\delta}_P$  的叠加:

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}_S + \boldsymbol{\delta}_P \quad : \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\delta}_S = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{\delta}_P = \mathbf{0}$$

基于这一点,我们可以考虑纳维-柯西方程在仅有有旋无散的振动和有散无旋的振动情况下的各自的解,只要存在,叠加在一起就是通解了.再次结合式子:

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\delta}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\delta}) = \nabla^2 \boldsymbol{\delta}$$

首先考虑有旋无散的振动.那么纳维-柯西方程简化为:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\delta}_S}{\partial t^2} = -\mu \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\delta}_S)$$

但是旋即借助前式发现:

$$-\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\delta}_S) = \nabla^2 \boldsymbol{\delta}_S$$

这就相当于给出了:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\delta}_S}{\partial t^2} = v_S^2 \nabla^2 \boldsymbol{\delta}_S = v_S^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \boldsymbol{\delta}_S, \quad v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

这样就可以求解了,其通解的基为:

$$\boldsymbol{\delta}_S = \mathbf{A}_S e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = v_S$$

最后验证它是否符合散度为零的条件,发现必须要满足:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_S = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{A}_S$$

即这样的波其实是一种横波.它构成的要素有频率,传播方向,强度,偏振,以及相位.这样的弹性体波称作剪波(shear wave).它发生的形变就是剪应变,其波速恰好用的就是剪切模量  $\mu = G$ :

$$v_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

再考虑有散无旋的振动.那么纳维-柯西方程简化为:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\delta}_P}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\delta}_P)$$

但是旋即借助前式发现:

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\delta}_P) = \nabla^2 \boldsymbol{\delta}_P$$

这就相当于给出了:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\delta}_P}{\partial t^2} = v_P^2 \nabla^2 \boldsymbol{\delta}_P = v_P^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \boldsymbol{\delta}_P , \quad v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

这样就可以求解了, 其通解的基为:

$$\boldsymbol{\delta}_P = \mathbf{A}_P e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} , \quad \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = v_P$$

最后验证它是否符合旋度为零的条件, 发现必须要满足:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{A}_S = 0 \Rightarrow \mathbf{k} // \mathbf{A}_S$$

即这样的波其实是一种纵波. 它构成的要素有频率, 传播方向, 强度, 以及相位. 这样的弹性体波称作压波(pressure wave). 它发生的形变就是正应变, 注意其波速用的既不是弹性棒情况的杨氏模量  $E$ , 也不是体弹性模量  $K$ , 与后者关系更近, 实际上由第一节的知识:

$$v_P = \sqrt{\frac{K + 4G/3}{\rho}}$$

最终我们发现, 作为纵波的压波波速  $v_P$  总是要比作为横波的剪波  $v_S$  快一些. 故在地震波场合下, 总是把前者叫做首波(primary wave), 后者叫做次波(secondary wave). 两种命名方法都是导致纵波简记为 P 波, 横波简记为 S 波的原因. 也经常地, 我们会把特定方向传播, 有特定频率(横纵波速不同会导致  $k$  不同)的横波两种偏振, 加上纵波称作三种不同的偏振, 波从振源传播到特定点, 三种偏振需要的时间是不同的. 纵波总是先到, 横波后到.

地球内部结构虽然目前只能从现象去反过来建立模型, 但比较令人相信的一点是内部存在分层的现象, 在地表以下约 2891km 处存在从固态的地幔到高压“液态”的地核的古登堡不连续性(Gutenberg discontinuity). 作为类似于固态的高压液态, 在建立模型上十分重要的一点是, 其剪变模量  $G$  几乎降低到了 0. 这给出了两个结果: 一是通过剪变的弹性得以传播和存在的剪波无法存在, 故地震波在地幔-地核分界面上会发生 S 波的全反射<sup>6</sup>. 二是压波就彻底变成了由体弹性模量决定的波速公式, 这一个公式也是正常气体, 液体中的体波的波速公式:

$$v_P = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

尤其是在理想气体中, 比如空气中传播的声波, 其波速就可以把气体视作理想气体, 而气团的压缩与膨胀都被视作绝热的(因为振动频率高气体完全无法达到热学平衡), 于是:

$$\begin{aligned} pV^\gamma &= C \Rightarrow \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \\ \Rightarrow K &= -\frac{dp}{dV/V} = \gamma p \end{aligned}$$

带入声速, 结合密度公式  $\rho = \mu p / RT$ , 得到气体中的声速公式:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

这个计算早在 1687 年就由牛顿完成, 但是受限于当时几乎等于空白的热学, 力学理论的限制与同样几乎是空白的实验测量数据, 牛顿给出的公式中没有出现绝热指数  $\gamma$ , 导致它计算出的室温下空气中声速只有 300m/s. 比正确值 340m/s 小了不少. 这个误差后来由拉普拉斯解释与修正.

### 8.3.4 再论格波

<sup>6</sup>少量 S 波有可能转化为 P 波继续向地核传播

# 第九章 流体

## 9.1 流体的物理描述

我们暂时只研究流体的动力学特征. 规避掉任何有关热学的问题.

首先考察流体的运动学. 流体已经不再具有恢复任何形变的能力, 故引入流体相对初始时刻的位移已经不是最合适的方法了. 如果依然这么处理, 把流体质元的位置写为初始位置和时间的函数, 这个描述方法称作拉格朗日法(Lagrange's method). 即:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{R}, t)$$

这样我们自然地可以得到一条曲线和它的方程, 便是选定某个  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$ , 于是位置  $\mathbf{r}$  单独成为某个时间的函数. 这代表某个质元的实际运动过程和轨迹. 这个轨迹称作迹线(path line).

但是, 跟常见的做法是, 我们不再关心每一个时刻各个空间位置的质元的初始位置在哪儿, 这没有太大的意义. 值得关心的当下流体在做何种流动. 即每一个点处的流速  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  是如何的. 其实就是上面函数的对时间偏导数:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{R}: \mathbf{f}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{r}}$$

用流速场  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  来描述流体的方法称作欧拉法(Euler's method). 而欧拉法的抽象函数也可以可视化: 我们找到这样的空间曲线, 数学上称作流速场的积分曲线: 它在每一点的切线方向与某一时刻  $t_0$  下该点流速相同, 或者说它是以下微分方程的解:

$$\frac{dx}{v_x|_{t=t_0}} = \frac{dy}{v_y|_{t=t_0}} = \frac{dz}{v_z|_{t=t_0}}$$

这样的曲线就叫流线(streamline), 一组流线还可以形成流管(streamtube) 的概念. 流线与迹线显然不一定重

合, 因为流线只需要给出某一时刻的流速场就可以画出来, 但迹线显然是要追踪不同时刻一个质元的运动, 如果下一时刻的流速场变了, 流体质元就会沿另一套流线去运动了. 但即使迹线不再直观, 使用欧拉法的优越性与完备性后面就会逐渐发现.

讨论流体的运动时有两个常见的特殊情况与条件可以使问题变得更简单:

一是, 常见的液体, 常常被建模为不可压缩流体(incompressible fluid). 它有两种等价的表述方式. 一方面由于体积不可被压缩, 质量又守恒. 其密度便是个常数:

$$\rho = \text{Const.}$$

又或者关注流速场的性质就会发现, 这个场只能是无散的, 否则就会因为流体流向局部体积元造成内部质量增加:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

正因为这一点, 液体作为流体的计算更简单, 其结果也更简单: 动力学的流动与热学往往是解耦合的, 流体的温度分布在这个模型性不会影响到流体的运动, 反过来流体的流动却必然对传热有影响. 比如搅动冷

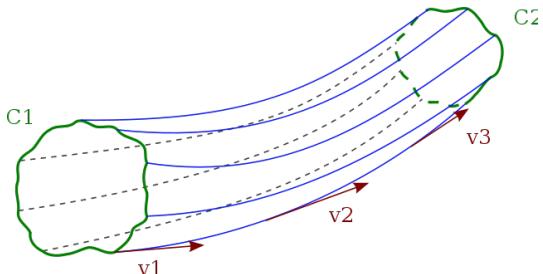


图 9.1: 流线与流管

热不均匀的水,水的运动几乎由搅动的方式决定而与温度分布有关,但水的温度变化显然受到搅动的强烈影响.但是在非常常见的对流传热(heat transfer by convection)问题中,温度变化导致的密度变化产生的动力学效果是不可或缺的一环,那种场合就绝对不能把流体视作不可压缩流体.典型的情况,液体比如水锅烧水时的强对流情况,探究洋流的产生等等,气体则几乎都需要视作可压缩的流体.

可压缩的流体也存在质量的连续性方程(continuity equation).我们可以把可变的密度  $\rho$  和流速  $v$  相乘作为流密度矢量  $j$ ,那么:

$$\nabla \cdot (\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

再注意到,  $v \cdot \nabla$  这个算符其实就是在跟随运动的流体一起运动,但是时间不变化,求物理量导数的算符,称为随体导数(material derivative).它与在局部求时间的偏导算符  $\partial/\partial t$ ,称作局部导数(local derivative)之和就是跟随流体质元一起运动,还考虑时间的流逝情况下的完整导数,即全导数(total derivative):

$$\frac{D}{Dt} = v \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t}$$

通过这一点我们就把反映物质转移与质量守恒的连续性方程写成了以下更具有解释性的形式:

$$\rho \nabla \cdot v + \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

这意味着,流体速度场存在散度就会导致流体质元随运动发生密度变化.从而也把不可压缩流体满足的两个条件联系在了一起.

第二个特殊情况与条件是,如果流体的流速场不随着时间变化而仅仅是位置的函数:

$$v = v(r)$$

这样的流动就称为定常流动(steady flow).否则称作非定常流动(unsteady flow).定常流动的意义需要在本章过程中慢慢体会.目前已经能够发现一点:只有在定常流动情况下,流线与迹线才是彻底重合的.

下面类似于弹性体,我们把流体在某个代表点,不妨就设在原点  $0$ ,附近的  $r$  处的流速场进行泰勒展开,保留到一阶:

$$v(r) = v(0) + r \cdot \nabla v$$

同理,把张量  $\nabla v$  分解为对称部分和反对称部分:

$$\nabla v = \epsilon + \omega$$

$$\epsilon = \frac{\nabla v + {}^t \nabla v}{2}, \quad \omega = \frac{\nabla v - {}^t \nabla v}{2}$$

这样流体的运动就被分解为三个部分:

$$v(r) = v(0) + r \cdot \omega + r \cdot \epsilon$$

最后一项尤其值得注意,前两项表示流体跟随中心整体的平动和绕中心的转动,质元与质元之间本质上是没有相对运动与变形的.第三项就表示会不可避免地产生质元与质元相对摩擦的情况.它由对称张量  $\epsilon$  描述.与弹性体的应变张量相似却又不同,这里不是位移而是速度作为变量去求导.称作应变率张量(rate-of-strain tensor):

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

最后还需要描述流体中的力.用应力张量来描述流体中的受力情况是合适地.但是我们发现问题可以进一步简化.首先我们考虑一种更简单的情况:流体静力学(hydrostatics).

我们知道,在流体中没有静摩擦的可能性.流体中的摩擦,即湿摩擦(wet friction),只可能是静摩擦.这是因为流体没有保持初始形态的能力,它只有一定的保持体积的能力,故对于不改变体积的剪应变,顶多只能阻碍,但不能恢复.故一个流体在剪应力下应当马上运动起来,不可能处于静止状态.故流体静力学必然只能处于正应力下,而且沿不同方向的正应力还必须相等,否则在不同坐标系下就有可能产生剪应力.这实际上就证明了我们熟悉的流体静力学内应力由标量压强(pressure)来描述的观点,注意正应力以拉力为正,压强对应负的正应力:

$$\sigma = -pI$$

那么计算一个体积区域  $V$  边界  $\partial V$  上的压力合力,可以由高斯定理得到:

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} dS \cdot \sigma = - \oint_{\partial V} pdS = \int_V \nabla \cdot \sigma dV = - \int_V \nabla p dV$$

这样就计算出来了内应力造成的体积力:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dV} = -\nabla p$$

例如在重力场中的水  $\nabla p = \rho g$  为常矢量,那么对没入水中的体积造成的浮力就是:

$$\mathbf{F} = - \int_V \nabla p dV = - \int_V \rho g dV = -\rho g V$$

这就是古希腊时期就被发现的著名的阿基米德原理(Archimedes' principle),今天看来它等价于高斯定律和尚未证明但正确的  $\nabla p = \rho g$ .这个式子其实就是平衡方程.设想处于平衡状态的静力学流体还受到外力场,体积力为  $f(r)$ .那么为了平衡就需要满足:

$$\nabla p = f$$

马上就可以发现,这个式子一方面作为压强分布的计算公式,同时,也由于左侧是一个标量场的梯度,在闭合路径上的积分必然给出零的结果,它又等于右侧,我们等于证明了:只有在外保守力场下的流体系统才有可能处于平衡状态.

那么,当流体开始运动起来,此时继续用压强描述流体内部应力就不再合适了,此时与上一章弹性体相同的是,我们可以引入对称的应力张量来修正原来的压强对应的单位张量:

$$\sigma = -p_0 I + \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

但仍然有一点值得注意,如果  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  同时增加一个量,这和改变了  $p_0$  没有本质区别,所以我们希望压强  $p_0$  反映了正应力的平均效应,故调整前后的配比使得后面的张量称为无迹的张量  $\tau$ ,称为黏滞应力张量(viscous stress tensor)或偏应力张量(deviatoric stress tensor):

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \tau_z \end{bmatrix} \quad (\tau_x + \tau_y + \tau_z = 0)$$

针对黏滞应力张量是否会产生,即流体有没有黏性(viscosity).我们又可以找到一种特殊的情况:无黏性流体(inviscid fluid),实际上经常被定义为理想流体(ideal fluid).此时流体即使在动,其应力也只有压强.反过来就是需要考虑黏滞的黏性流体(viscous fluid).

## 9.2 定常流动动力学

本节讨论范围仅限于无黏性流体。前半部分结论对于普遍的可压缩、非定常流体都是完全正确的。

若想为流体找到一个动力学方程，其实我们几乎已经在上一节完成了一大半。由于没有黏滞，上一节计算的内力的合力结果为：

$$\frac{d\mathbf{F}}{dV} = -\nabla p$$

再加上外体积力  $\mathbf{f}$ ，现在要做的只不过是把上一节的平衡方程改成质元的牛顿定律，注意其中的加速度，应该用跟随质元一起运动而计算的全导数：

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{f}$$

这就已经是能充分地解决问题的，流体需要符合的动力学方程。它被称作**欧拉方程**(Euler equation)。

另一个高频使用的方程是，如果我们再加上定常流动和不可压缩流体的限制条件，这就会导致著名的**贝努力方程**(Bernoulli equation)。暂时我们只加上定常流动这一个条件

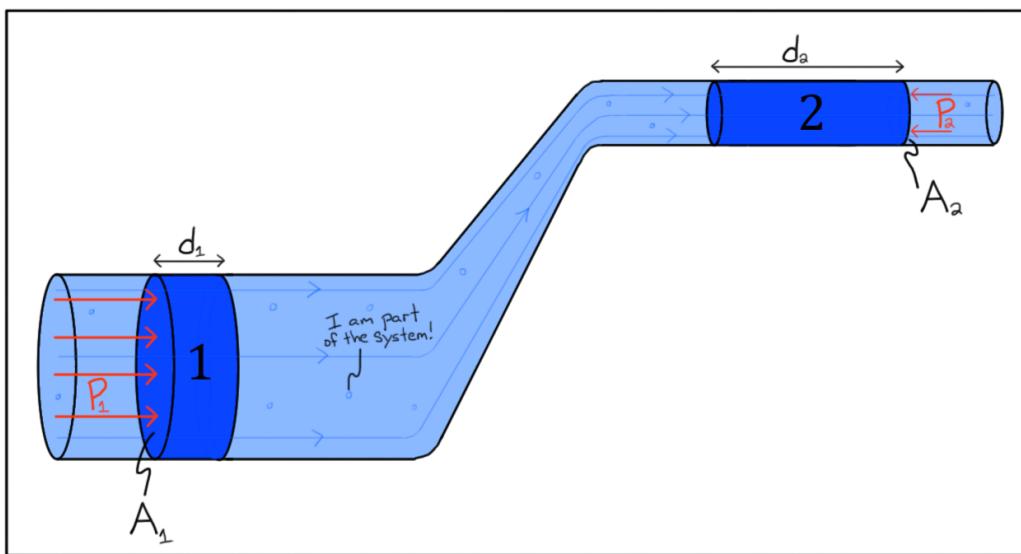


图 9.2: 贝努力方程

我们找到一根流线，并找到流线上的两个点 1, 2，在流线上垂直于流速方向把流线扩充为流管。那么在两处的面积  $A$  和密度  $\rho$  就要满足连续性方程，这对应着**流量**(flux) 的不变性：

$$Q = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

将外体积力写作质量势  $\varphi$  的梯度  $\mathbf{f} = -\rho \nabla \varphi$ 。写出定常流动下的欧拉方程：

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \varphi$$

如果计算以下量的梯度：

$$\nabla \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi \right) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho + \nabla \varphi$$

借助欧拉方程，上式三项互相抵消，仍然剩下两项。但是现在我们在考察左侧标量在同一条流线上的表现，两侧点乘  $\mathbf{e}_v$ ，右侧又乘项由于垂直也消失：

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi \right) = -\frac{p}{\rho^2} \frac{dp}{ds}$$

这说明我们得不到一个沿着流管守恒的量. 事实上,  $-\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds}$  项其实就是  $\frac{d}{ds} \frac{1}{\rho}$ , 即单位质量的物体具有体积沿着流线的变化率, 那么它再乘以压强, 就表示由于体积增加导致的对外界做功而减小的内部能量<sup>1</sup>:

$$-\frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} = -\frac{du}{ds}$$

这样就得到了可压缩流体的贝努力方程:

$$u + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi = \text{Const.}$$

通过这一点可以发现, 可压缩流体的内能往往是与动力学耦合在一起的, 而内能又往往影响温度. 所以内能的改变又会导致热学与动力学的耦合, 问题就变得很复杂.

但是如果流体不可压缩, 那么上式等号右侧  $\rho$  就是个常数, 从而直接左侧就具有零的导数. 那么我们就得到了不可压缩流体的贝努力方程, 往往写作:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho \varphi = \text{Const.}$$

### 9.3 黏滞流体动力学

描述黏滞流体的最标准的模型是牛顿流体(Newtonian fluid) 模型. 核心的定律称作牛顿黏滞定律(Newtonian law of viscosity). 如图9.3. 如果流体速度场是完全单向的, 且其大小的改变  $dv$  也只在垂直流速方向移动  $dl$  时发生, 那么就定义流速梯度为:

$$2\varepsilon = \frac{dv}{dl}$$

而由此产生的切应力就是:

$$\tau = \frac{dF}{dS}$$

牛顿定律指出, 两者应当成正比, 比例系数就是黏滞系数(viscosity), 常简称黏度  $\eta$ . 其单位是 Pa · s:

$$\tau = \eta \cdot 2\varepsilon$$

其实这里的黏度是动力学黏度(dynamic viscosity) 的简称. 实用中常常遇到需要把它除以介质密度的情况, 所以还有运动学黏度(kinematic viscosity) 的定义, 其单位是 m<sup>2</sup>/s, 与扩散系数单位是一样的:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

显然, 当我们考虑把牛顿黏滞定律进行推广时, 第一个值得注意的现象就是, 首先如果把流速方向记做  $x$  方向而变化方向记做  $y$  方向, 那么一是应力  $\tau$  其实就是作为  $x-y$  平面上的剪应力, 为了满足流体的力矩平衡, 不仅对  $x$  方向的分界面会产生  $x$  方向的黏滞摩擦力, 对  $y$  方向的分界面也同时会造成  $y$  方向的力以抵消这个效应, 在上图中, 总是左侧的液体对右侧的液体给向下的力, 右侧则给左侧向上的力.

第二点是, 显然下式不具有对称性:

$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

如果是  $v_y$  在随  $x$  产生改变, 上式就正确了, 此时同样会产生剪应力. 所以我们猜想如下式子是正确的:

$$\tau_{xy} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

<sup>1</sup>还需要绝热条件, 这样内能改变就只和做功有关.

事实上这也是牛顿黏滞定律唯一可能正确的推广形式. 单凭借这个结论我们就能得到很多有意义的结果. 这里直接不加证明地介绍其中的两个. 一是圆柱管道内的液体流动的哈根-泊萧叶方程(Hagen-Poiseuille equation). 如果管道半径  $R$ , 体积流量  $Q$ , 那么在长为  $l$  的一段上形成流动需要的压强差为:

$$\Delta p = \frac{8\eta Ql}{\pi R^4}$$

第二个式子是球形物体在黏滞流体中的阻力公式. 著名的斯托克斯定律(Stokes law). 如果球体半径为  $R$ , 速率为  $v$ , 那么阻力大小为:

$$F = 6\pi\eta rv$$

普遍的情形下, 之前介绍过的黏滞应力张量与应变率张量之间的关系, 根据对称性的原理, 与上一章类似地, 就写作:

$$\tau = 2\eta \cdot \varepsilon + \lambda \text{Tr}(\varepsilon) \cdot I$$

只不过在这里, 由于  $\tau$  的无迹性,  $\lambda$  没有别的选则, 只能取  $-2\eta/3$ . 这样就得到了黏滞流体的内力的决定性的方程. 最后, 类似于欧拉方程的方式进行推导, 我们最终得到了一个方程:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \eta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f}$$

这个方程就是著名的纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes equation).  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  项使得这个方程成为非线性的偏微分方程. 它的求解是如此之难, 以至于在 2000 年它成了 7 个千禧年难题(Millennium Prize problems)之一, 而且仅仅是为了解决最最初步的问题: 解的存在性与光滑性. 第一个解决它的科学家将获得一百万美元的奖金, 但目前这个问题的解决依然是遥遥无期的.

## 9.4 流体中的波

## 9.5 波的色散