关于单刚体wbc的算法说明

考虑到双足每腿有5个主动自由度，如果把脚踝解开的话，仍有4个。根据Bonnie的构型，单腿足底接触力及扭矩应该有也设置为4个：

$$f_x, f_y, f_z, \tau_z$$

期望值的选取

其次考虑此次使用连续模型，那么对于位置和姿态误差即采用给定期望加速度的方式。对位置：

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_d = \boldsymbol{K}_{xp}(\boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{K}_{xd}(\dot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{x}})$$

对姿态：

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_d = \boldsymbol{K}_{wp}\hat{\boldsymbol{\omega}}\theta + \boldsymbol{K}_{wd}(\boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega})$$

其中：

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}\theta = \{\ln(\boldsymbol{R}_d\boldsymbol{R}_{cur}^T)\}^\vee$$

又有：

$$(\ln R)^\vee = \begin{cases} [0,0,0]^T & (\text{if } \boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}) \\ \dfrac{\pi}{2}[r_{11}+1, r_{22}+1, r_{33}+1]^T & (\text{else if } \boldsymbol{R} \text{ is diagonal}), \\ \theta\boldsymbol{l}/||\boldsymbol{l}|| & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{l} = [r_{32} - r_{23}, r_{13} - r_{31}, r_{21} - r_{12}]^T,$$

$$\theta = \text{atan2}(||\boldsymbol{l}||, r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1),$$

其中，$\text{atan2}(y, x)$即为四象限反正切函数（four-quadrant inverse tangent）。

对于Bonnie双足的单刚体模型

考虑取输入$\boldsymbol{u} = [f_{rx}, f_{ry}, f_{rz}, \tau_r, f_{lx}, f_{ly}, f_{lz}, \tau_l] \in \mathbb{R}^{8\times1}$，则由单刚体牛顿欧拉方程，并忽略角速度非线性项可得：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_{3\times1} & \mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_{3\times1} \\ (\boldsymbol{p}_r - \boldsymbol{p}_{CoM})\times & [0,0,1]^T & (\boldsymbol{p}_l - \boldsymbol{p}_{CoM})\times & [0,0,1]^T \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} m(\ddot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{g}) \\ \boldsymbol{R}_{cur}\mathbf{I}_b\boldsymbol{R}_{cur}^T\dot{\boldsymbol{\omega}}_d \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}_d}$$

其中，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{6\times8}$，$\boldsymbol{b}_d \in \mathbb{R}^{6\times1}$。

QP问题构建

该问题的目标函数包含以下几个部分：1. 动力学方程的输出，即$\boldsymbol{Au}$与$\boldsymbol{b}_d$尽量接近；2.系统输入尽量小；3.系统输出与上一次相比的变化尽量小。综合上述即可得到目标函数为：

$$J = (\boldsymbol{Au} - \boldsymbol{b}_d)^T\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Au} - \boldsymbol{b}_d) + \alpha\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{W}_c\boldsymbol{u} + \beta(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{prev})^T\boldsymbol{W}_p(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{prev})$$

将上式展开去掉常数项并同时除去常数2，可以得到化简之后的式子为：

$$J=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{W}_c+\beta\boldsymbol{W}_p)\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{b}_d^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}-\beta\boldsymbol{u}_{prev}^T\boldsymbol{W}_p)\boldsymbol{u}$$

其中$\boldsymbol{S}\in\mathbb{R}^{6\times 6}$，$\boldsymbol{W}_c,\boldsymbol{W}_p\in\mathbb{R}^{8\times 8}$。

约束条件方面，主要是包括摩擦力约束，z方向的半封闭约束以及腾空腿约束。定义$\boldsymbol{M}_c\in\mathbb{R}^{6\times 4}$为约束矩阵，则可以定义为：

$$\boldsymbol{M}_c=\begin{bmatrix}1 & 0 & \mu & 0\\ -1 & 0 & \mu & 0\\ 0 & 1 & \mu & 0\\ 0 & -1 & \mu & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_{low}=[\mathbf{0}^{1\times 4},f_z^{low},\tau_z^{low}]$$

$$\boldsymbol{u}_{upp}=[\mathbf{inf}^{1\times 4},f_z^{upp},\tau_z^{upp}]$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_{low1}\\ \boldsymbol{u}_{low2}\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_c & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M}_c\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\leq\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_{upp1}\\ \boldsymbol{u}_{upp2}\end{bmatrix}$$

如果某条腿腾空则将其f_z和τ_z的上下限都设置成0 即可。