## 关于单刚体wbc的算法说明

考虑到双足每腿有5个主动自由度,如果把脚踝解开的话,仍有4个。根据Bonnie的构型,单腿足底接触力及扭矩应该有也设置为4个:

$$f_x, f_y, f_z, au_z$$

## 期望值的选取

其次考虑此次使用连续模型,那么对于位置和姿态误差即采用给定期望加速度的方式。对位置:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_d = \boldsymbol{K}_{xp}(\boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{K}_{xd}(\dot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{x}})$$

对姿态:

$$\dot{oldsymbol{\omega}}_d = oldsymbol{K}_{wp} \hat{oldsymbol{\omega}} heta + oldsymbol{K}_{wd} (oldsymbol{\omega}_d - oldsymbol{\omega})$$

其中:

$$\hat{oldsymbol{\omega}} heta = \{\ln(oldsymbol{R}_doldsymbol{R}_{cur}^T)\}^ee$$

又有:

$$(\ln R)^ee = egin{cases} [0,0,0]^T & ext{(if } oldsymbol{R} = oldsymbol{E}) \ rac{\pi}{2}[r_{11}+1,r_{22}+1,r_{33}+1]^T & ext{(else if } oldsymbol{R} ext{ is diagonal),} \ heta oldsymbol{l}/||oldsymbol{l}|| & ext{(otherwise)} \end{cases} \ oldsymbol{R} = egin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \ r_{21} & r_{22} & r_{23} \ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \ oldsymbol{l} & oldsymbol$$

其中, $\operatorname{atan2}(y,x)$ 即为四象限反正切函数(four-quadrant inverse tangent)。

## 对于Bonnie双足的单刚体模型

考虑取输入 $\mathbf{u}=[f_{rx},f_{ry},f_{rz}, au_r,f_{lx},f_{ly},f_{lz}, au_l]\in\mathbb{R}^{8\times 1}$ ,则由单刚体牛顿欧拉方程,并忽略角速度非线性项可得:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_{3\times 1} & \mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_{3\times 1} \\ (\boldsymbol{p}_r - \boldsymbol{p}_{CoM}) \times & [0,0,1]^T & (\boldsymbol{p}_l - \boldsymbol{p}_{CoM}) \times & [0,0,1]^T \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} m(\ddot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{g}) \\ \mathbf{R}_{cur} \mathbf{I}_b \boldsymbol{R}_{cur}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_d \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}_d}$$

其中, $oldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{6 imes 8}$ , $oldsymbol{b}_d \in \mathbb{R}^{6 imes 1}$ 。

## OP问题构建

该问题的目标函数包含以下几个部分:1. 动力学方程的输出,即 $\mathbf{Au}$ 与 $\mathbf{b}_d$ 尽量接近;2.系统输入尽量小;3.系统输出与上一次相比的变化尽量小。综合上述即可得到目标函数为:

$$J = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}_d)^T \boldsymbol{S} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}_d) + \alpha \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{W}_c \boldsymbol{u} + \beta (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{prev})^T \boldsymbol{W}_p (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{prev})$$

将上式展开去掉常数项并同时除去常数2,可以得到化简之后的式子为:

$$J = rac{1}{2}oldsymbol{u}^T(oldsymbol{A}^Toldsymbol{S}oldsymbol{A} + lphaoldsymbol{W}_c + etaoldsymbol{W}_p)oldsymbol{u} + (-oldsymbol{b}_d^Toldsymbol{S}oldsymbol{A} - etaoldsymbol{u}_{prev}^Toldsymbol{W}_p)oldsymbol{u}$$

其中 $m{S} \in \mathbb{R}^{6 imes 6}$ , $m{W}_c, m{W}_p \in \mathbb{R}^{8 imes 8}$ 。

约束条件方面,主要是包括摩擦力约束,z方向的半封闭约束以及腾空腿约束。定义 $m{M}_c \in \mathbb{R}^{6 imes 4}$ 为约束矩阵,则可以定义为:

$$egin{aligned} m{M}_c = egin{bmatrix} 1 & 0 & \mu & 0 \ -1 & 0 & \mu & 0 \ 0 & 1 & \mu & 0 \ 0 & -1 & \mu & 0 \ 0 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ m{u}_{low} = [m{0}^{1 imes4}, f_z^{low}, au_z^{low}] \ m{u}_{upp} = [m{inf}^{1 imes4}, f_z^{upp}, au_z^{upp}] \ m{bmatrix} m{u}_{low1} \end{bmatrix} \leq m{bmatrix} m{M}_c & m{0} \ m{0} & m{M}_c \end{bmatrix} m{u} \leq m{bmatrix} m{u}_{upp1} \ m{u}_{upp2} \end{bmatrix}$$

如果某条腿腾空则将其 $f_z$ 和 $\tau_z$ 的上下限都设置成0即可。