虚拟现实技术 · hw1

计01　容逸朗　2020010869

书面部分

模型变换

> 假设有三维空间点 $\mathbf{p}=(2,4,-6)^T$， 依次做如下模型变换
>
> - x坐标扩大为2倍,y坐标扩大为1.5倍,z坐标缩小一半.
> - 绕y轴旋转90度
> - 沿 x、y、z 轴分别平移 2、-4、3 个单位
>
> 分别写出缩放、旋转和平移矩阵(10 分); 计算 p 经过变换后的坐标(5 分).

由题意得缩放、旋转和平移矩阵如下：

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1.5&0&0\\0&0&0.5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\mathbf{R}_y=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-4\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

因为 $\mathbf{p}$ 是三维空间上的点，在齐次坐标下可表示为：$\mathbf{p}'=(2,4,-6,1)^T$

经过上面的变换后得到齐次坐标：

$$\mathbf{p}_{\text{world}}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}_y\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}'=(-1,2,-1,1)^T$$

故变换后的坐标为 $\mathbf{p_1}=(-1,2,-1)^T$

视角变换

> 接下来将世界坐标转换为相机空间坐标， 相机的摆放方式为：
>
> - 相机位置 $\mathbf{e}=(0,-4,3)$
> - 相机看向点 $\mathbf{c}=(0,0,0)$
> - 相机上方向 $\mathbf{u}=(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5})$
>
> 写出视角变换矩阵(10 分); 对于 (i) 中模型变换后的点 p, 继续计算其经过视角变换后的坐标(5 分).

首先计算相机坐标系：

$$\mathbf{z^c} = \frac{\mathbf{e}-\mathbf{c}}{||\mathbf{e}-\mathbf{c}||} = \frac{(0,-4,3)}{5} = \left(0,-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$$

$$\mathbf{x^c} = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{z^c}}{||\mathbf{u}\times\mathbf{z^c}||} = (1,0,0)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{z^c}\times\mathbf{x^c} = (0,\frac{3}{5},\frac{4}{5})$$

因此视角变换矩阵为：

$$\mathbf{M_{view}} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{T}(-\mathbf{e}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

视角变换后的齐次坐标：

$$\mathbf{p_{view}} = \mathbf{M_{view}}\cdot\mathbf{p_{world}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ \frac{2}{5}\\ -\frac{36}{5}\\ 1\end{pmatrix}$$

对应坐标为 $\mathbf{p_2} = (-1,\frac{2}{5},-\frac{36}{5})^T$

投影变换

> 透视投影参数如下：
>
> - aspect: 1
> - fovy: 90。
> - zNear(n): 1, zFar(f): 9
>
> 写出透视投影矩阵(5 分)；接着 (ii) 中的结果计算 p 在截断空间中的坐标(5 分)和经过透视除法后的 NDC 坐标(5 分)。

取 $f = cot(fovy/2) = cot(45^\circ) = 1$，那么透视投影矩阵为：

$$\mathbf{M_{proj}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{9}{4}\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

截断空间坐标为：

$$\mathbf{p_{clip}} = \mathbf{M_{proj}} \cdot \mathbf{p_{world}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{36}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{27}{4} \\ \frac{36}{5} \end{pmatrix}$$

NDC 坐标为：

$$\mathbf{p_{ndc}} = \frac{5}{36} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{27}{4} \\ \frac{36}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{36} \\ \frac{1}{18} \\ \frac{15}{16} \\ 1 \end{pmatrix}$$

对应坐标为 $\mathbf{p_3} = (-\frac{5}{36}, \frac{1}{18}, \frac{15}{16})^T$

视口变换

> 假设有分辨率为 480 × 480 像素的屏幕，屏幕最左下方像素坐标为 (0, 0)，接着 (iii) 中的结果计算经过视口变换后 p 点在屏幕空间中的坐标，计算结果不需要取整(5 分).

$$x_{window} = \frac{480}{2}(x_{ndc} + 1) + 0 = \frac{620}{3} = 206.33$$
$$y_{window} = \frac{480}{2}(y_{ndc} + 1) + 0 = \frac{760}{3} = 253.33$$

由此得到 p 点在屏幕空间的坐标为：$(206.33, 253.33)$