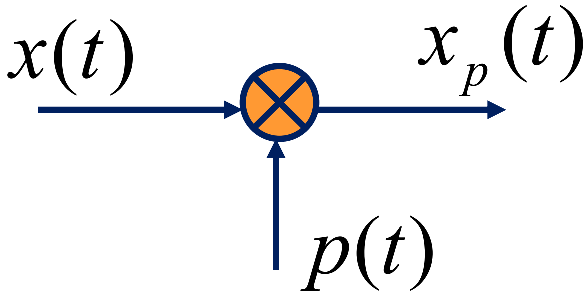
信号处理原理

贾珈

2022.10.18

- 采样与量化的概念
- 采样与采样定理

- **采样的数学模型：**



在时域： $x_p(t) = x(t)p(t)$

在频域: $$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

- **冲激串采样(理想采样):**

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$ T为采样间隔

$$x_p(t) = x(t)p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

$x_p(t)$的傅里叶频谱

$$p(t) \leftrightarrow P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi}{T}n)$$

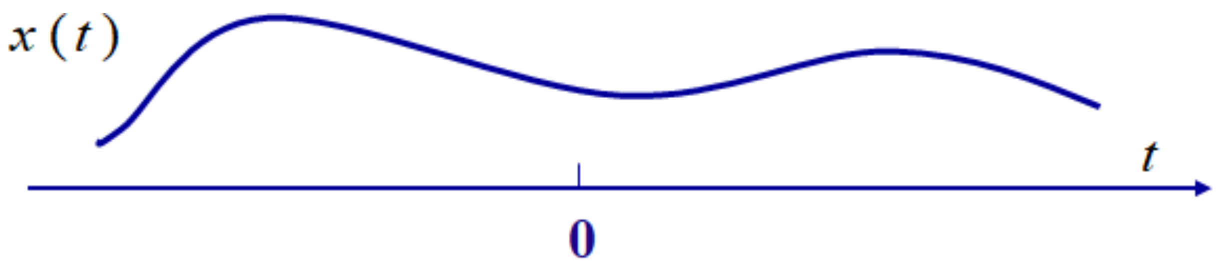
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega)$$

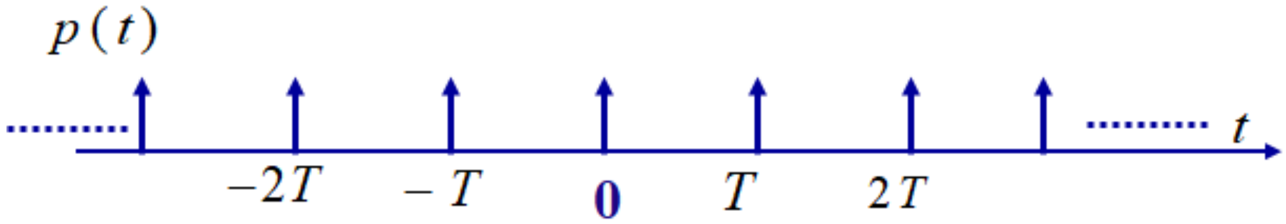
$$= \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega - k\omega_s)) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

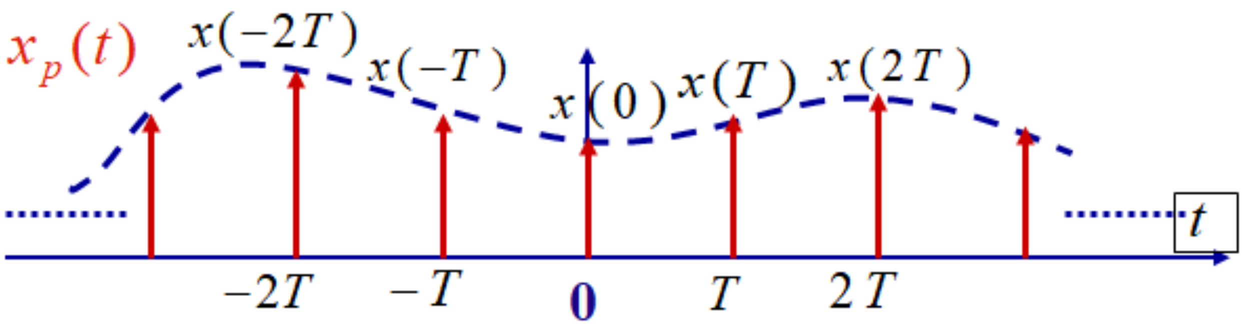
可见，在时域对连续时间信号进行理想采样，就相当于在频域将连续时间信号的频谱以ω_s为周期进行延拓。

采样与采样定理





$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

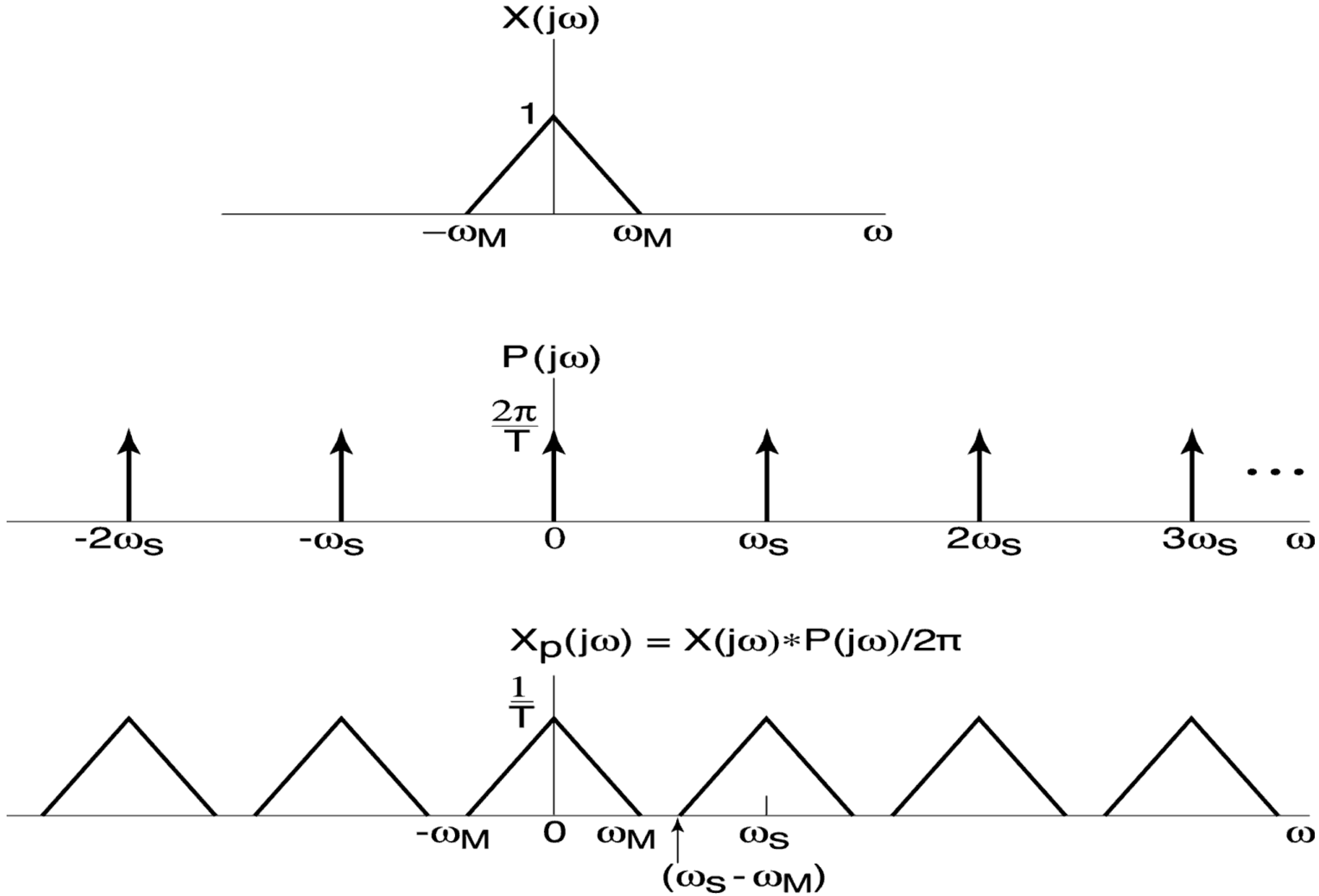


$$x_p(t) = x(t)p(t)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

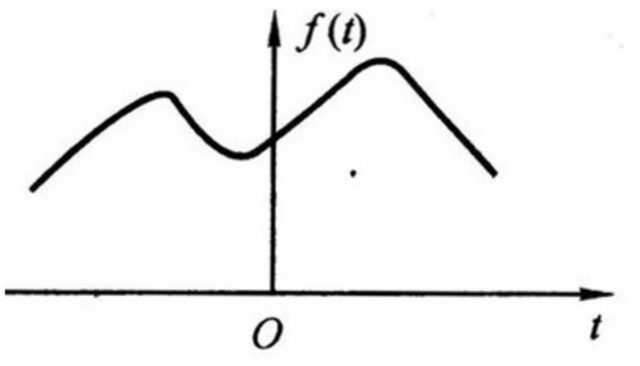
采样与采样定理

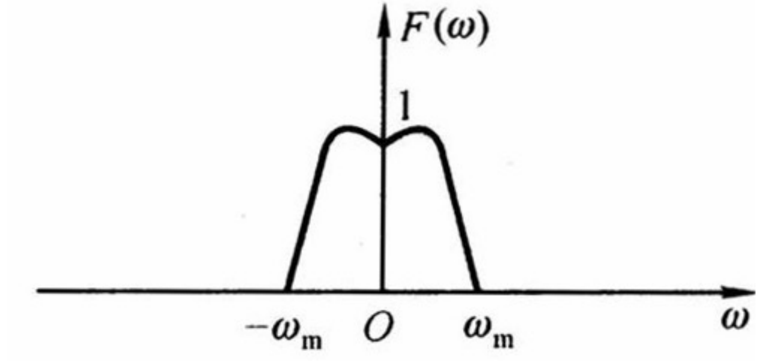
例：



X(jω)
1
−ωM
ωM
ω
P(jω)
2π/T
...
-2ωS
-ωS
0
ωS
2ωS
3ωS
ω
Xp(jω) = X(jω)∗P(jω)/2π
1/T
-ωM
0
ωM
ωS
ω
(ωS - ωM)

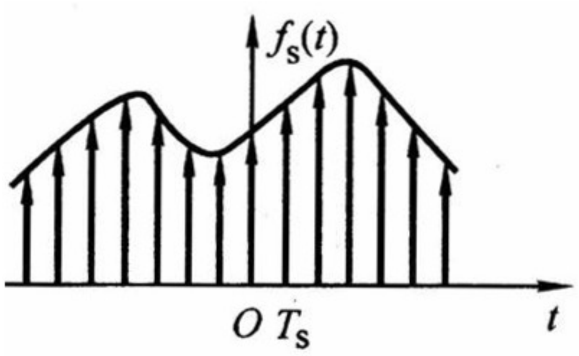
采样的频域分析

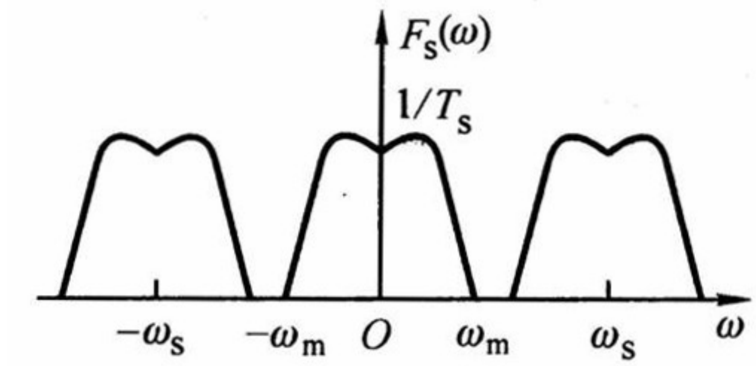




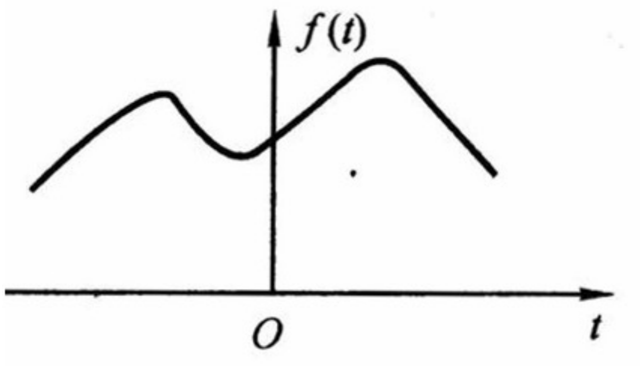
$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

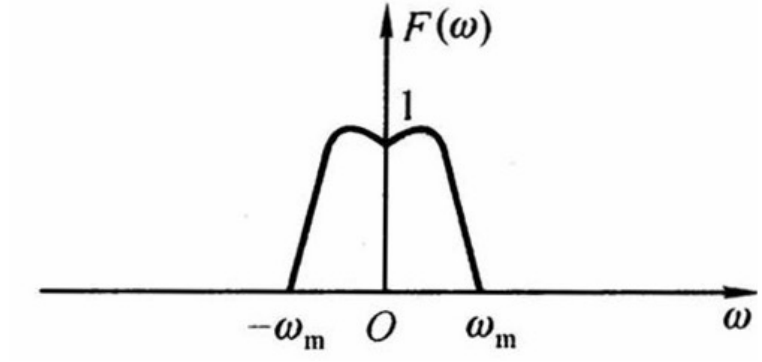
$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s)$$





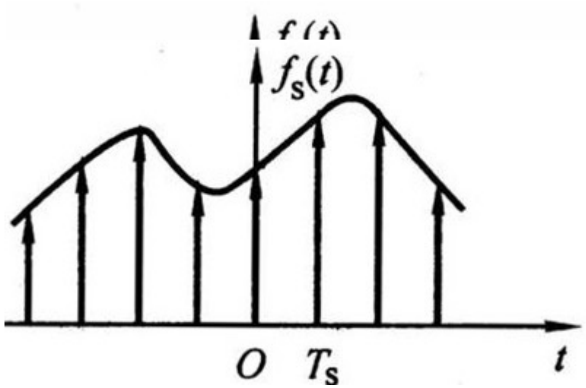
采样与混叠

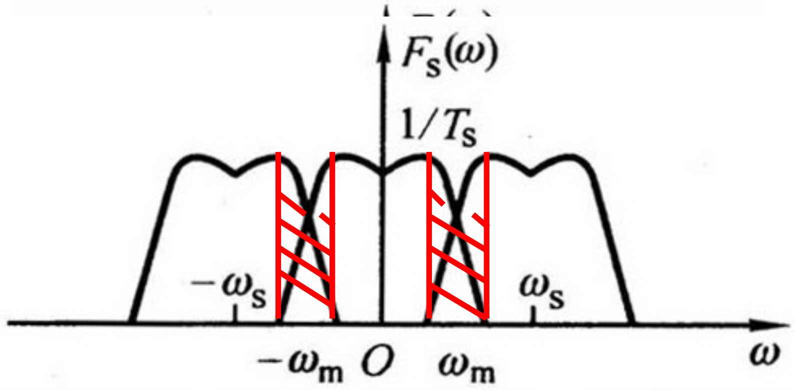




$$f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega-n\omega_s)$$





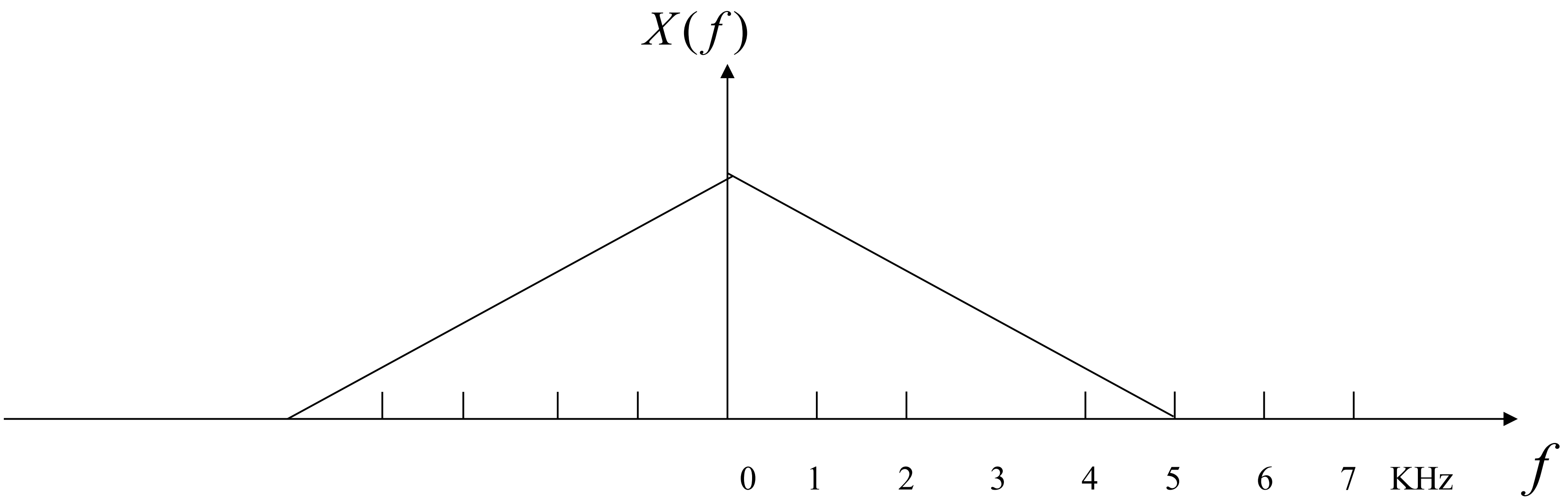
抽样周期变大，频谱的周期变小，离散信号的谱发生相互重叠的现象：混叠

【课堂练习1】

设模拟音频信号高频截至频率为5kHz,抽样频率为6kHz。

问题：

抽样后信号频谱与原信号频谱在2kHz处有什么差异？



主观题 0.5分

设置

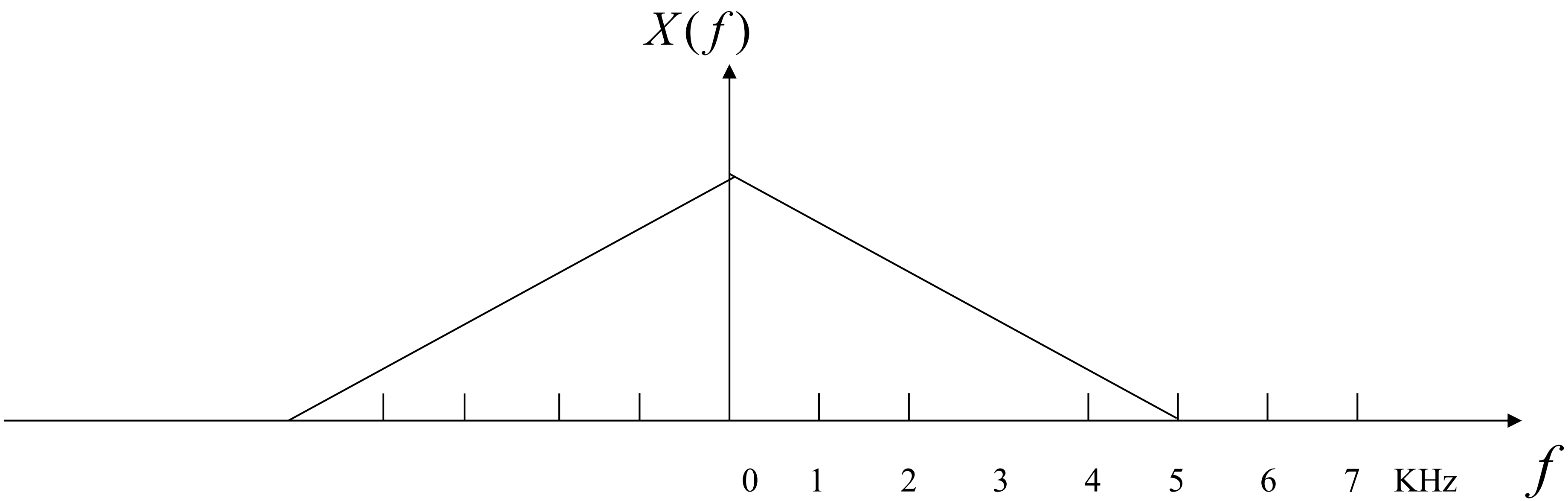
采样与混叠

【课堂练习1】

设模拟音频信号高频截至频率为5kHz,抽样频率为6kHz。

问题：

抽样后信号频谱与原信号频谱在2kHz处有什么差异？



正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

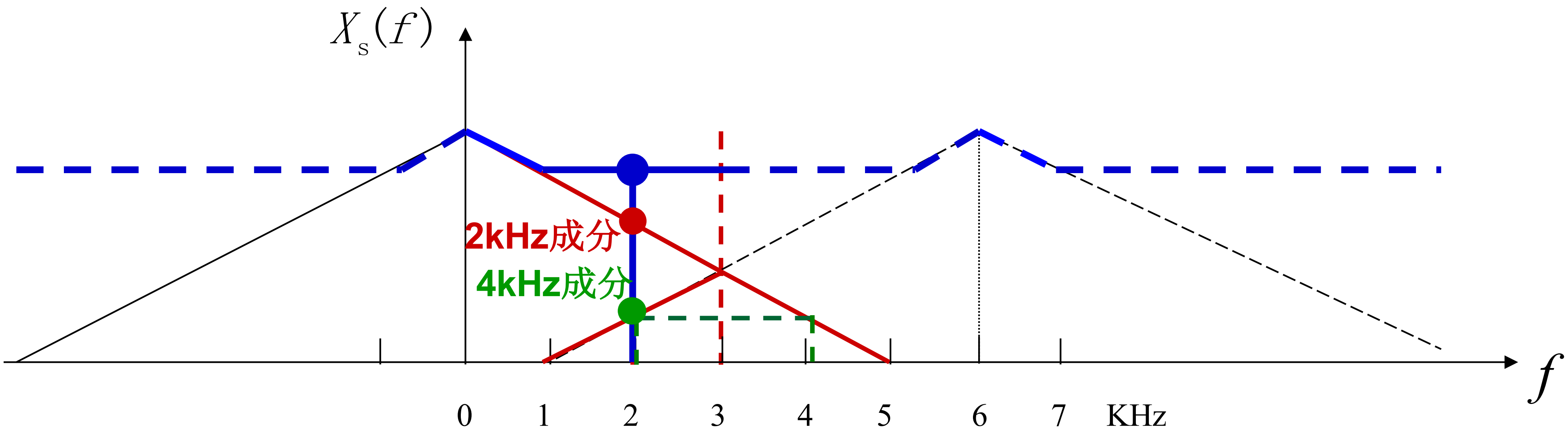
采样与混叠

【课堂练习1】

设模拟音频信号高频截至频率为5kHz,抽样频率为6kHz。

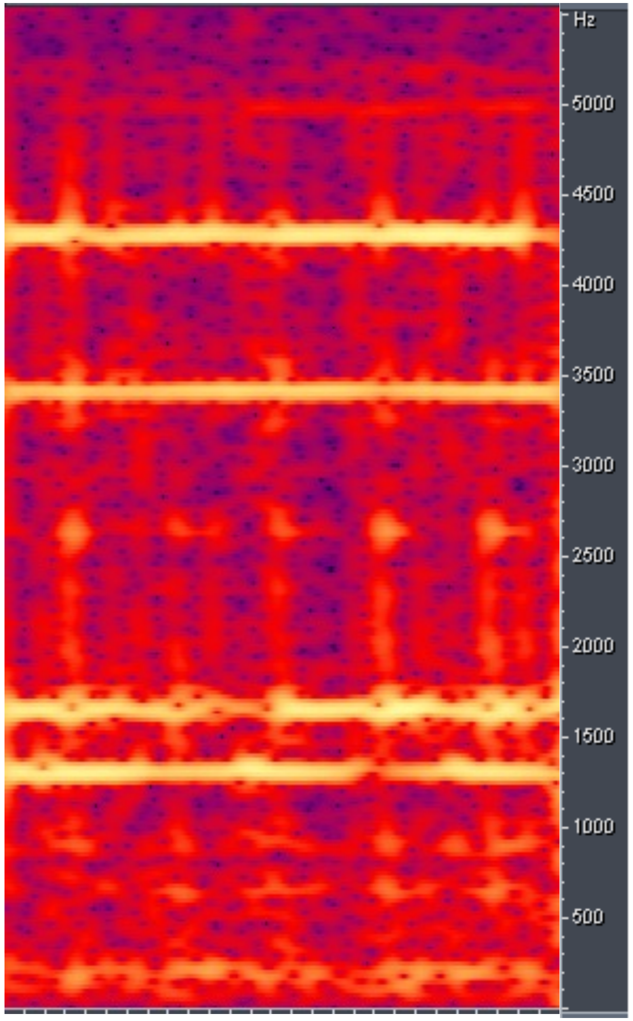
问题：

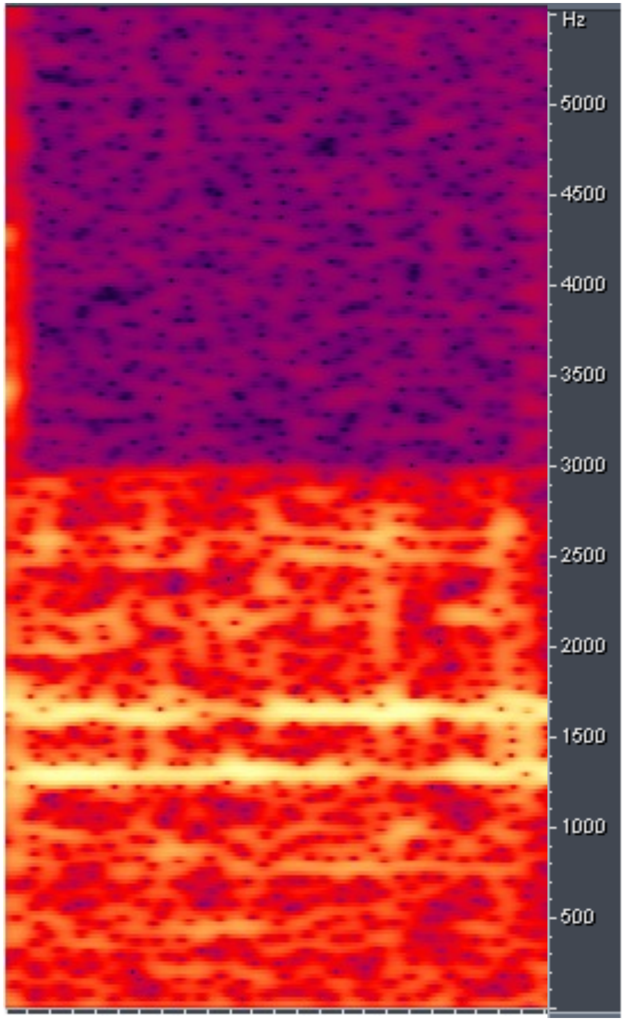
抽样后信号频谱与原信号频谱在2kHz处有什么差异？



思考：混叠对音频质量会产生什么影响？

混叠





11KHz

6KHz

思考：如何防止混叠？

采样与采样定理

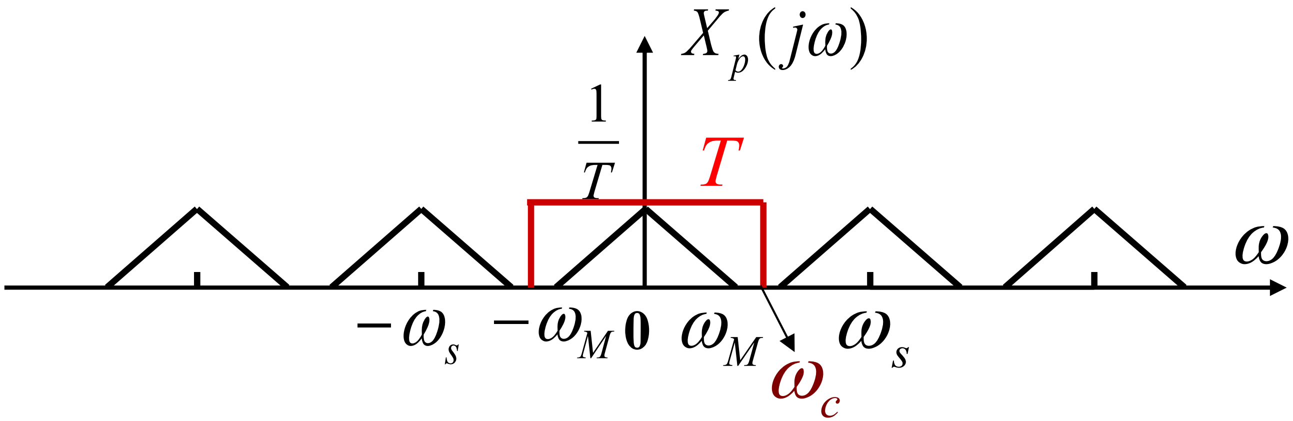
要想使采样后的信号样本能完全代表原来的信号，就意味着要能够从 $X_p(j\omega)$ 中不失真地分离出$X(j\omega)$ 。这就要求 $X(j\omega)$在周期性延拓时**不能发生频谱的混叠**。为此必须要求:

1. $x(t)$必须是带限的，最高频率分量为ω_M。

2. 采样间隔（周期）不能是任意的，必须保证采样频率 $\omega_s > 2\omega_M$。其中，$\omega_s = 2\pi/T$为采样频率。

在满足上述要求时，可以通过理想低通滤波器从$X_p(j\omega)$中不失真地分离出$X(j\omega)$。

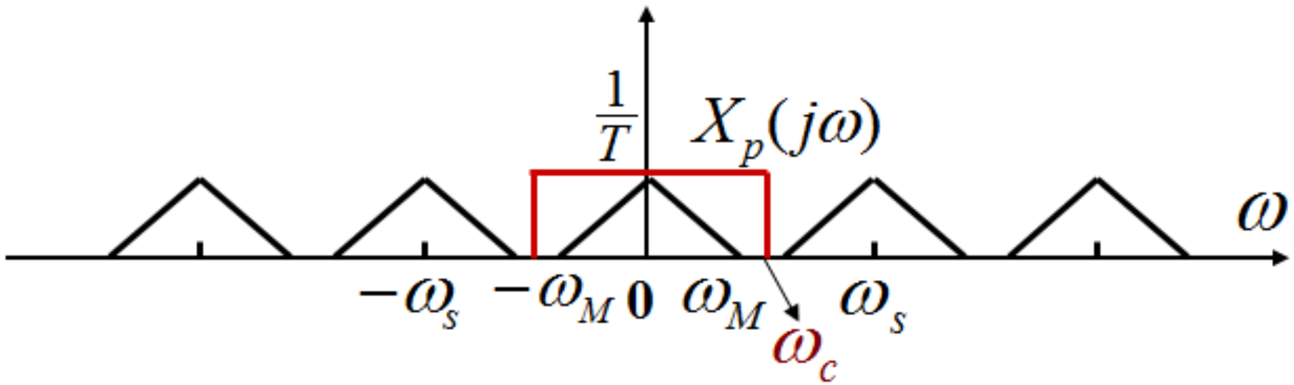
采样与采样定理

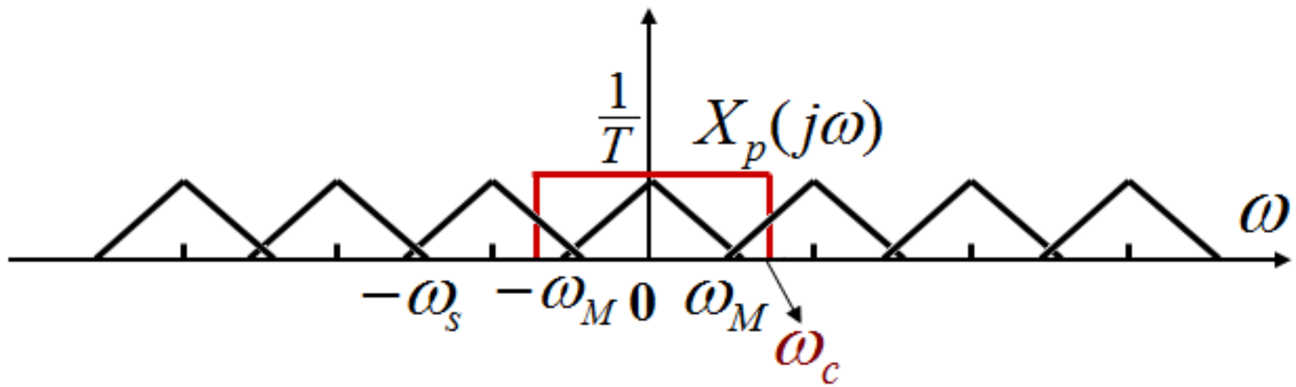


- **Nyquist 采样定理:**

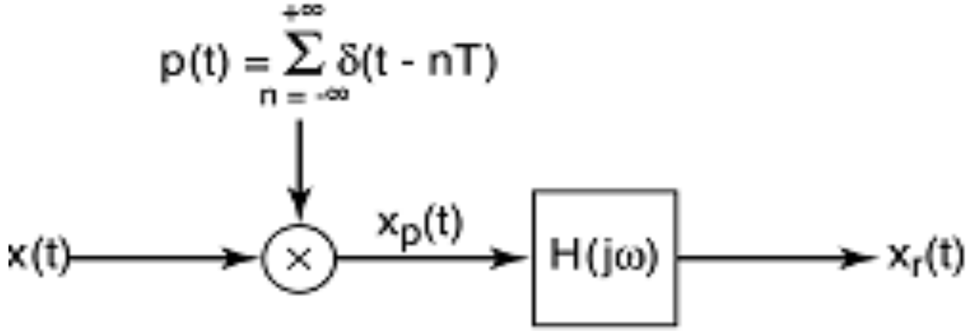
对带限于最高频率ω_M对连续时间信号$x(t)$，如果以$\omega_s > 2\omega_M$的频率进行理想采样，则$x(t)$可以唯一地由其样本$x(nT)$来确定。

- **Nyquist 采样定理:**

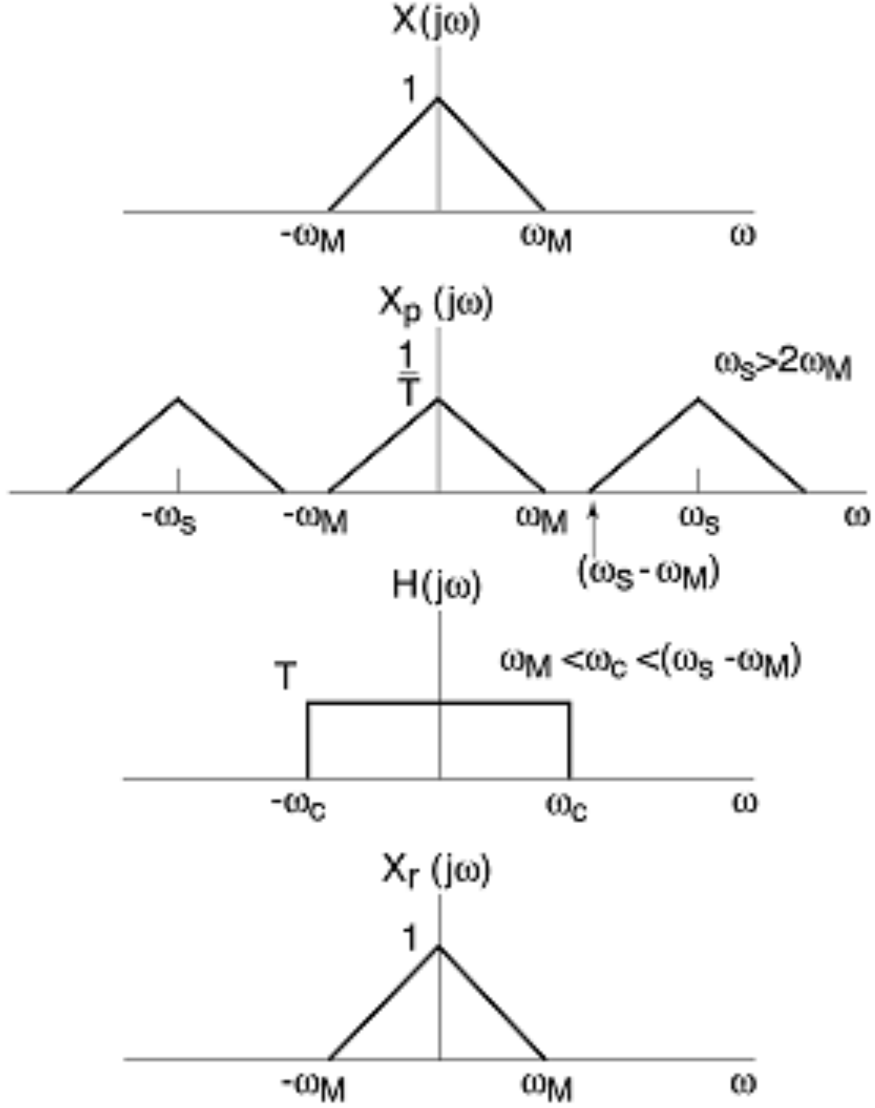




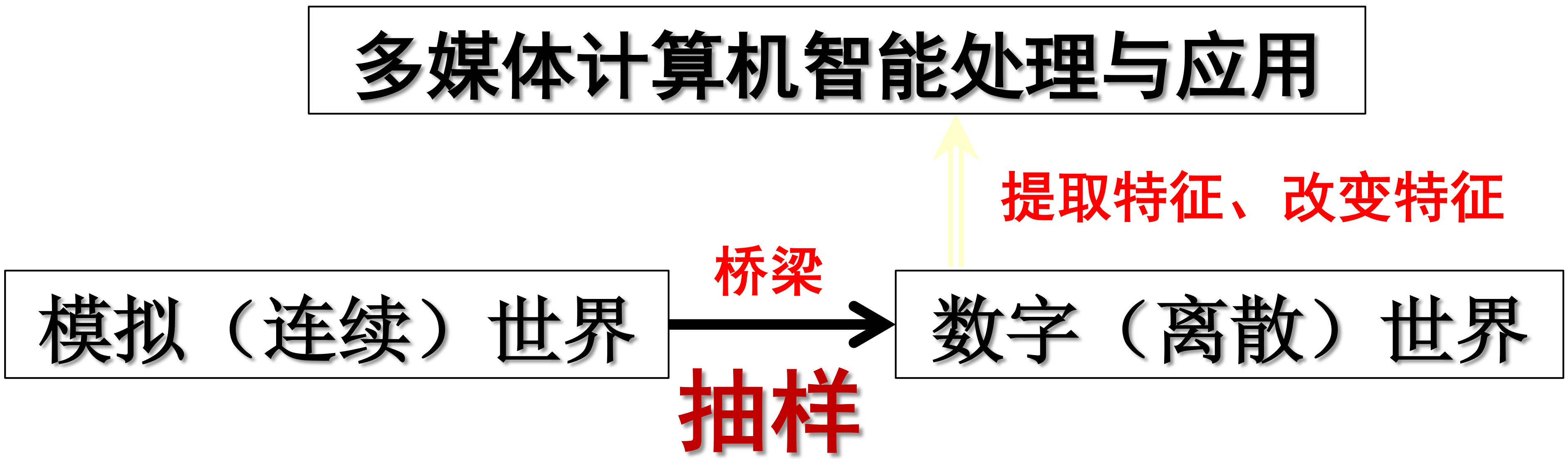
采样与采样定理



- 在工程实际应用中，理想滤波器是不可能实现的。而非理想滤波器一定有过渡带，因此，实际采样时,ω_s 必须大于$2\omega_M$。



抽样定理的方法论思考



- 关键科学问题

  局部如何选择，才能全面体现整体的变化规律？

  - ✓ 信号处理：抽样定理对抽样频率的约束

复习：采样与采样定理

研究连续时间信号与离散时间信号之间的关系

我们最关心什么？

- 在什么条件下，一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息？
  - 答：频带受限信号 符合抽样定理限定条件
- 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地恢复成原来的连续时间信号？

内插：由样本值重建某一函数的过程。

- **理想内插:**以理想低通滤波器（频域矩形脉冲）的单位冲激响应（Sa函数形态）作为内插函数

设 $h(t)$为理想低通滤波器的单位冲激响应，则

$$x(t)=x_p(t)*h(t)=\sum_{n-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)*h(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)h(t-nT)$$

函数与单位冲激函数的卷积

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

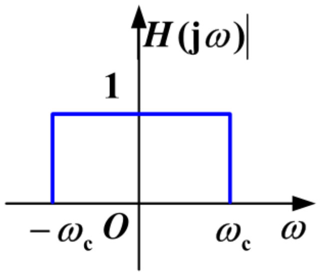
一个函数与单位冲激函数的卷积，等价于把该函数平移到单位冲激函数的冲激点位置。

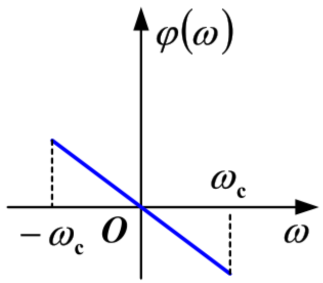
【**Tips**】理想低通滤波器（频域矩形脉冲）的单位冲激响应是Sa函数形态

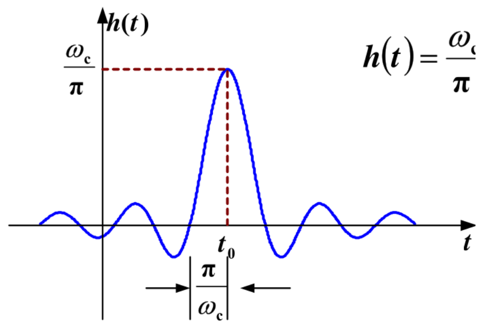
采样与采样定理

理想低通滤波器（频域矩形脉冲）的单位冲激响应是Sa函数形态

理想低通滤波器







$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}1\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

即

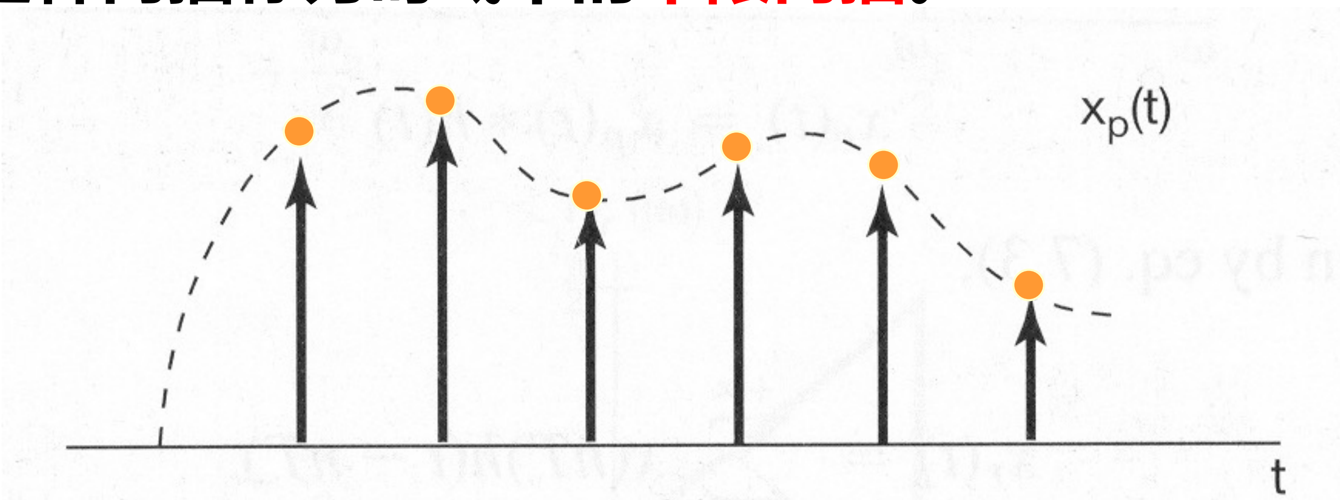
$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$\varphi(\omega)=-\omega t_0$$

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot \mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_0)]$$

理想低通滤波器的单位冲激响应$h(t)$，即为其傅立叶逆变换

这种内插称为时域中的带限内插。

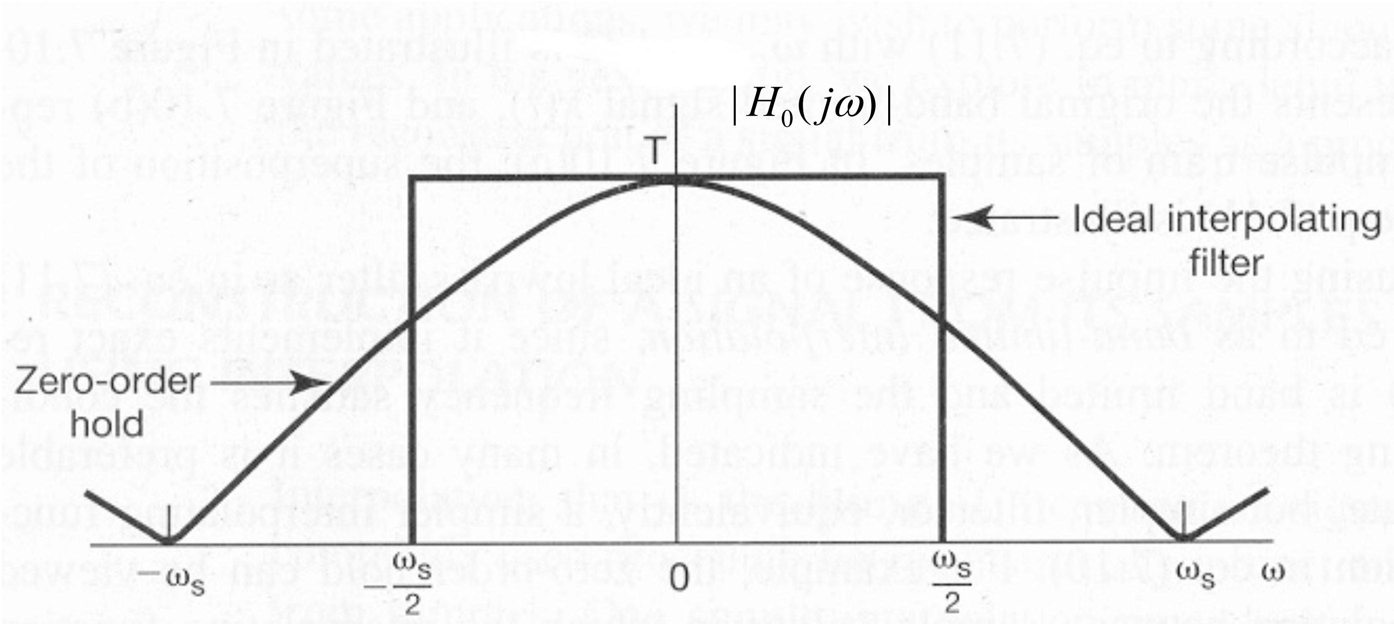


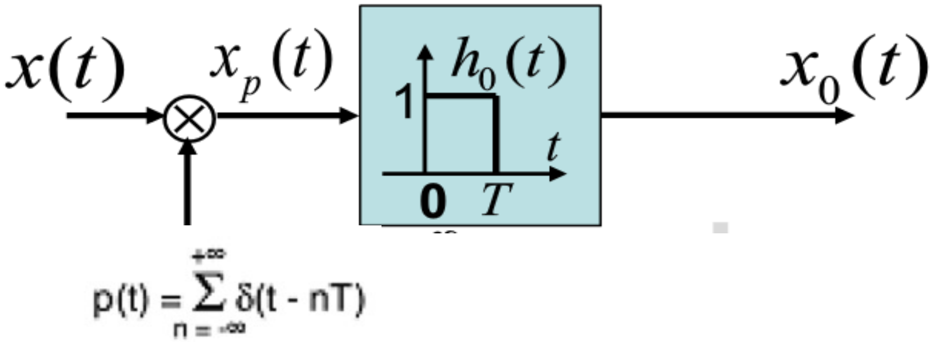
如何恢复原始的时间连续信号？

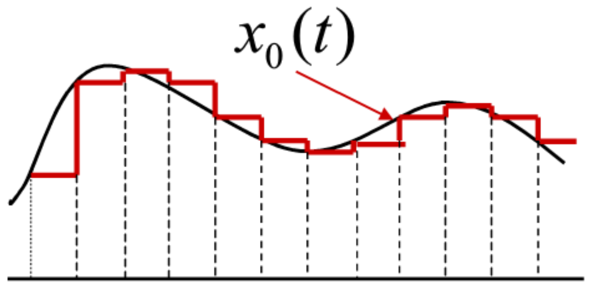
用滤波器函数对信号抽样值进行内插来重建模拟信号，相当于滤波器的冲击响应与信号值为权重的脉冲串的卷积。

- **零阶保持内插:**

零阶保持内插的内插函数 $h_0(t)$ 是矩形脉冲

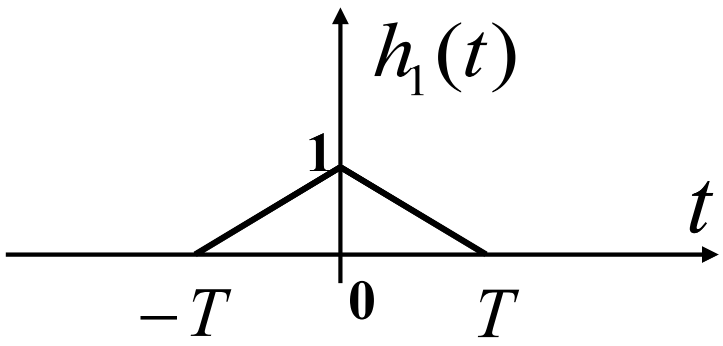


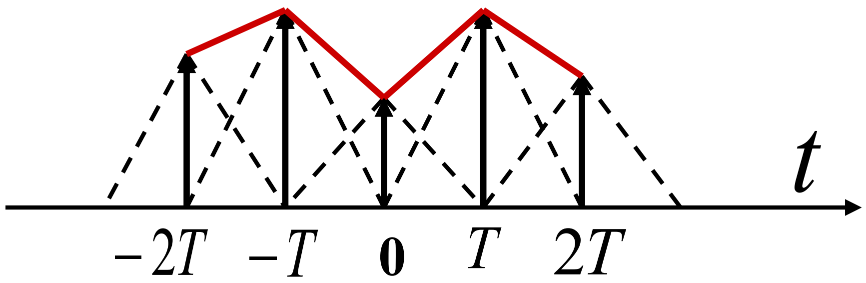




一阶保持内插(线性内插)：

线性内插时，其内插函数是三角形脉冲。

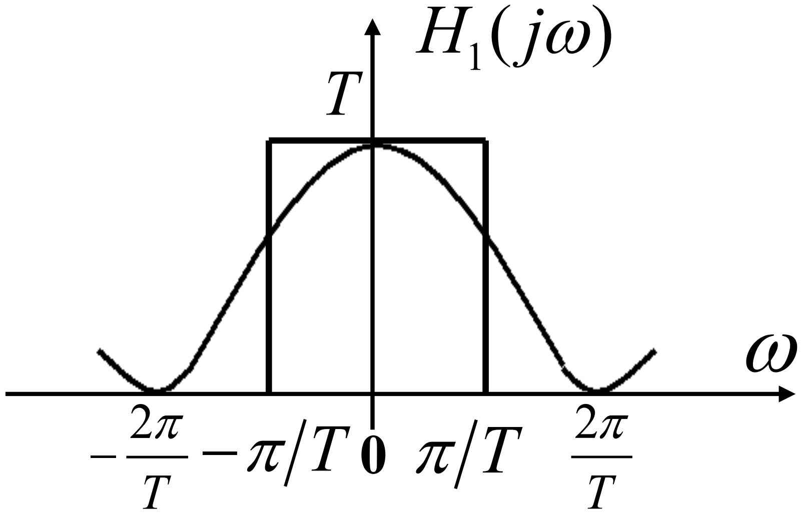




【课堂练习2】

$$H_1(j\omega) = T\left[\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\omega T}{2}}{\omega T/2}\right]^2$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\omega T}{2}}{\omega/2}\right]^2$$

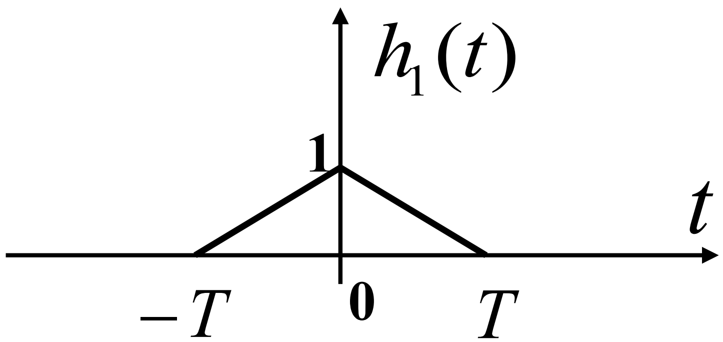


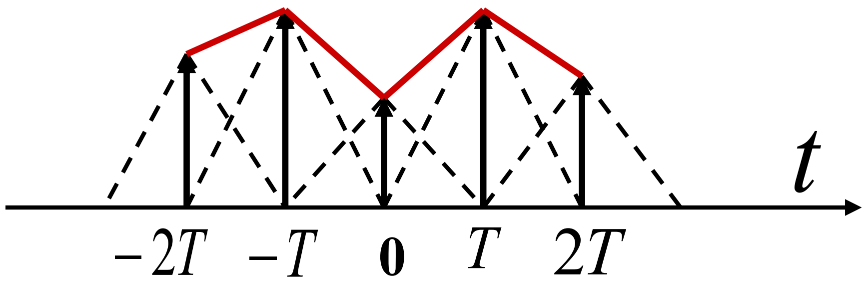
Tips: 三角形脉冲可以表示成两个矩形脉冲的卷积

主观题 0.5分 设置

一阶保持内插(线性内插)：

线性内插时，其内插函数是三角形脉冲。



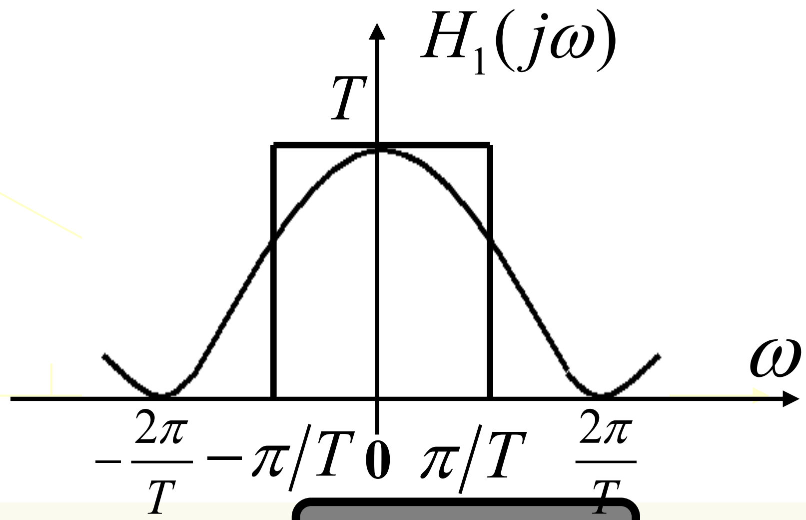


【课堂练习2】

Tips: 三角形脉冲可以表示成两个矩形脉冲的卷积

$$H_1(j\omega)=T\left[\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\omega T}{2}}{\omega T/2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\omega T}{2}}{\omega/2}\right]^2$$



正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

- **欠采样：频谱混叠**

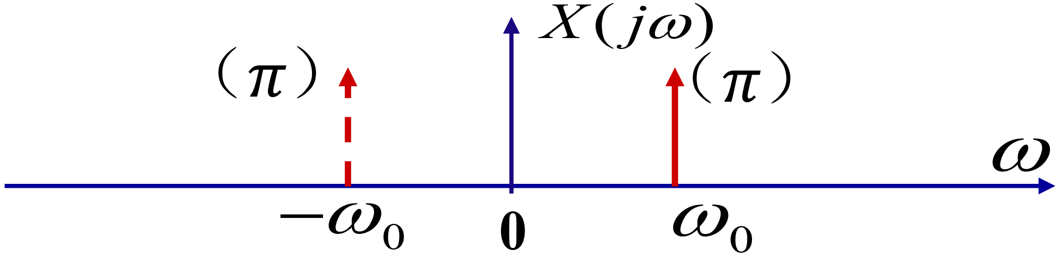
如果采样时，不满足采样定理的要求，就一定会在 $x(t)$ 的频谱周期延拓时，出现**频谱混叠**的现象。

说明点一：频谱混叠的情况下时域信号变了，但抽样点处取值不变

此时，即使通过理想内插也得不到原信号。但是无论怎样，恢复所得的信号 $x_r(t)$与原信号$x(t)$在采样点上将具有相同的值，即 $x_r(nT)=x(nT)$

【课堂练习3】采样与采样定理

$x(t)=\cos\omega_0 t$

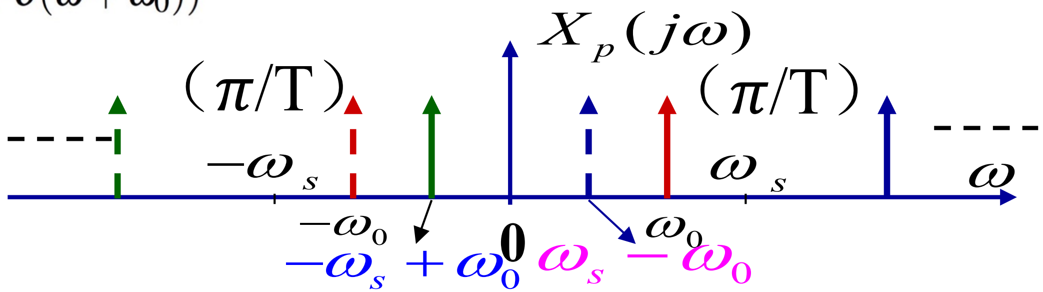


$x(t)$的频谱 $X(j\omega)$

$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=\mathscr{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]=\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$$

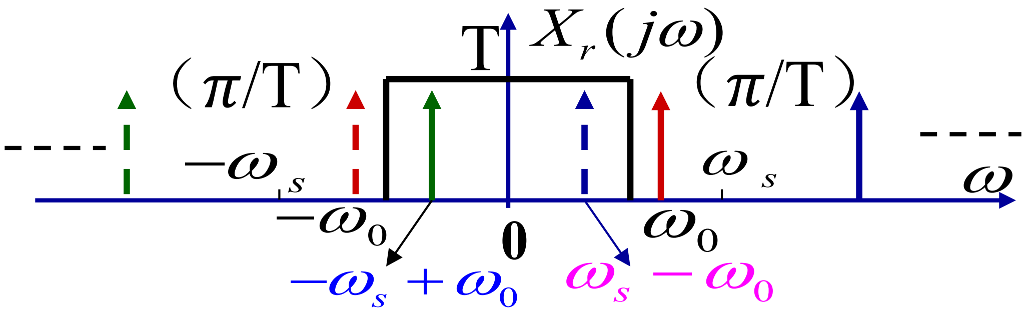
当 $\omega_0<\omega_s<2\omega_0$

产生频谱混叠。



恢复的信号为

$x_r(t)=\cos(\omega_s-\omega_0)t$



当 $t = nT$ 时有

$$
\begin{aligned}
x_r(nT) &= \cos(\omega_s - \omega_0)nT \\
&= \cos\omega_s nT \cdot \cos\omega_0 nT + \sin\omega_s nT \cdot \sin\omega_0 nT \\
&= \cos\omega_0 nT = x(nT)
\end{aligned}
$$

$$\omega_s = 2\pi / T$$

说明点二：工程应用时，如果采样频率 $\omega_s = 2\omega_M$ **将不足以从样本恢复原信号**

例如 $x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 在 $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T} = 2\omega_0$ 时

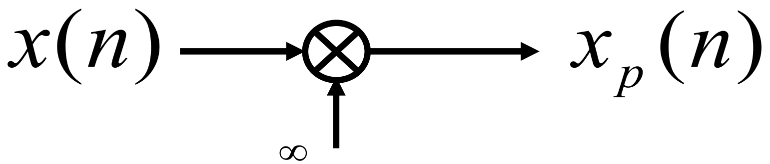
$$x(t) = \cos\varphi \cos\omega_0 t - \sin\omega_0 t \sin\varphi$$

$$x(nT) = \cos\varphi \cos\omega_0 nT$$

这和对 $x_1(t) = \cos\varphi \cos\omega_0 t$ 采样的结果一样。

从用样本代替信号的角度出发，出现欠采样的情况是工程应用中不希望的。

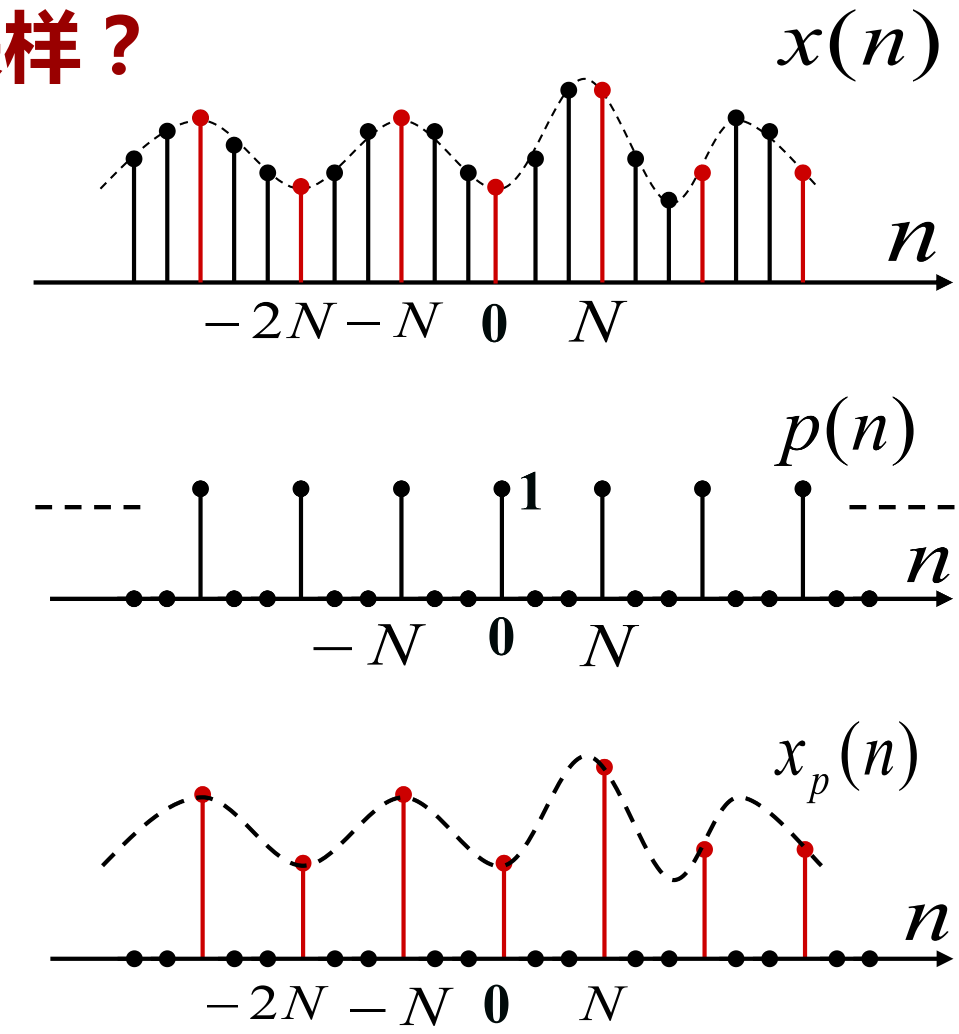
说明点三：采样之后又采样？



$$p(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)$$

$$x_p(n)=x(n)\cdot p(n)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kN)\delta(n-kN)$$



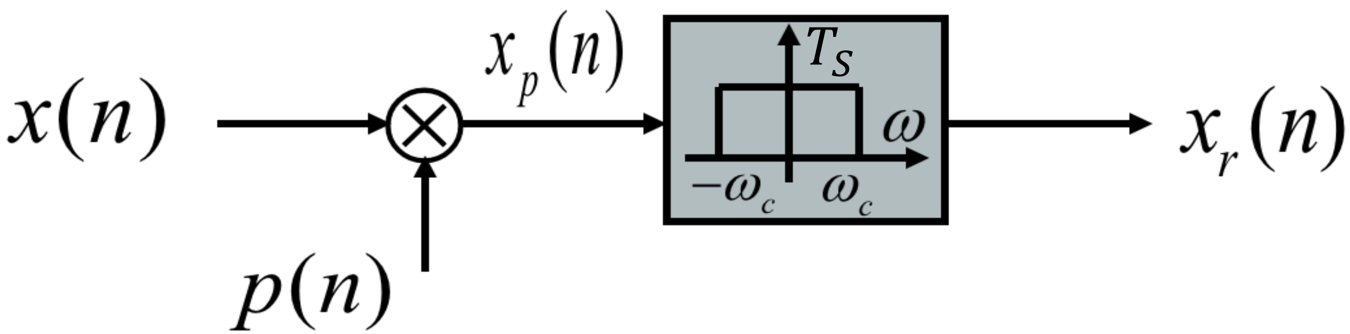
小结：采样与采样定理

在时域，对离散时间信号以T_S为间隔采样；在频域，**信号的频谱就是离散时间信号频谱一个周期以$\frac{2\pi}{T_S}$为间隔周期性延拓。**

要使$x_p(n)$能恢复成$x(n)$，则频谱在周期性延拓时不能发生混叠。为此要求：

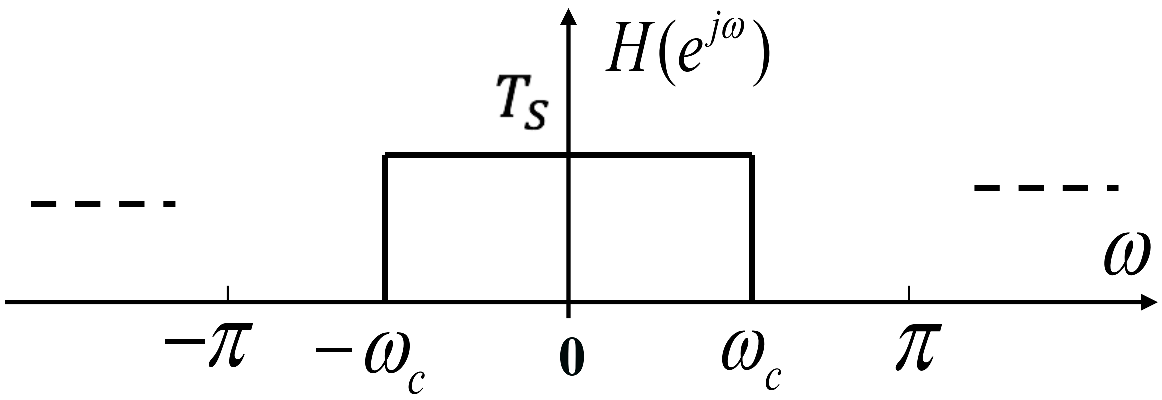
1. $x(n)$频谱的一个周期带限于ω_M

2. $\omega_s = \frac{2\pi}{T_S} > 2\omega_M$



小结：采样与采样定理

此时可以通过离散时间理想低通滤波器实现对信号 $x(n)$ 的恢复。理想低通的通带增益为T_S，截止频率满足：$\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$ 。

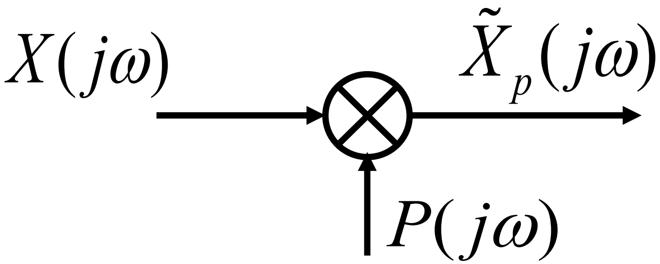


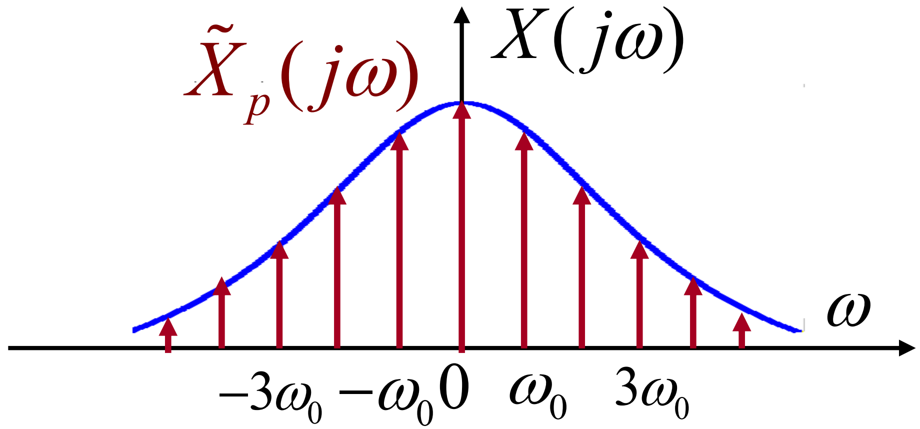
恢复 $x(n)$ 的过程也是一种带限内插过程，其内插函数为理想低通的单位脉冲响应 $\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$ 。

拓展：采样与采样定理

[很有趣的逆向思维] 频域采样？

采样的本质是将连续变量的函数离散化。因此，在频域也可以对连续的频谱进行采样。这一过程与时域采样是完全对偶的。





$$P(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

采样与采样定理

在频域有：

$$P(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$\tilde{X}_p(j\omega)=X(j\omega)P(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)\delta(\omega-k\omega_0)$$

在时域有：

$$\tilde{x}_p(t)=x(t)*p(t)$$

（**背下来**）

$$p(t)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{2\pi}{\omega_0}k)$$

参考：

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$p(t)\leftrightarrow P(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}n)$$

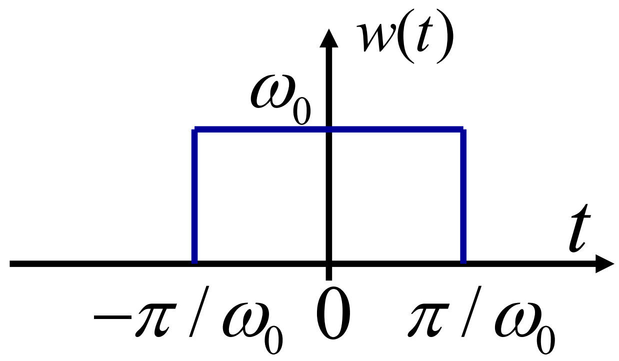
$$\therefore\quad \tilde{x}_p(t)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t-\frac{2\pi}{\omega_0}k)$$

这表明：**对信号的频谱在频域理想采样，相当于在时域将信号以**$2\pi/\omega_0$**为周期无限延拓。**

采样与采样定理

此时，可以通过矩形窗从周期性延拓的信号中截取出原信号。

$$w(t)=\begin{cases}\omega_0 & |t|\le \pi/\omega_0 \\ 0 & |t|>\pi/\omega_0\end{cases}$$



$$x(t)=\tilde{x}_p(t)w(t)$$

在频域，从频谱的样本重建连续频谱时的频域时限内插过程是以矩形窗的频谱作为内插函数实现的。

在频域有：$X(j\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\tilde{X}_p(j\omega)*W(j\omega)$

$W(j\omega)=2\pi\,\mathrm{sinc}(\omega/\omega_0)$ ——— **内插函数**

$$\therefore\quad X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega-k\omega_0}{\omega_0}\right)$$

应该指出：

带限和时限没有必然的逻辑联系。请注意时域采样定理应用条件中的带限要求。频域采样同理。

因此，对带限信号在频域采样时，如果时域没有说明是时限，则不能保证频谱的样本可以恢复原信号。

结 束

理想低通滤波器的单位冲激响应

$$h(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[H(\mathrm{j}\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

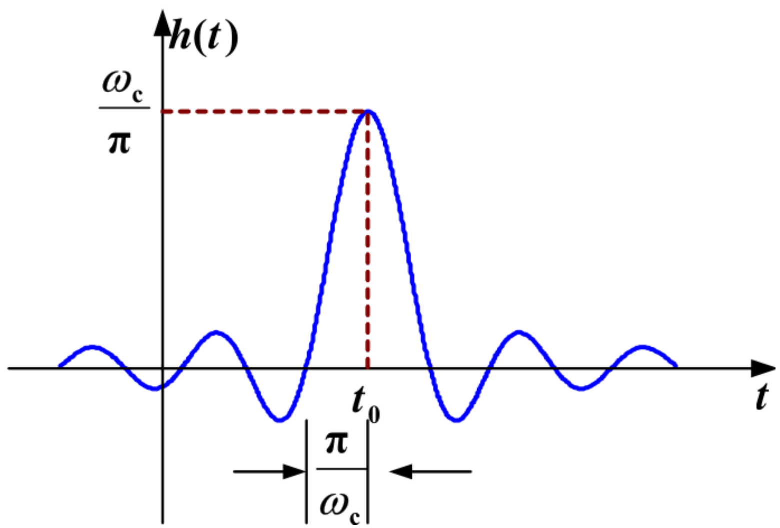
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\mathrm{j}(t-t_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{(t-t_0)}\cdot\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c(t-t_0)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c(t-t_0)}\right]$$

$$=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)}=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\mathrm{Sa}\left[\omega_c(t-t_0)\right]$$

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\mathrm{Sa}\left[\omega_c(t-t_0)\right]$$

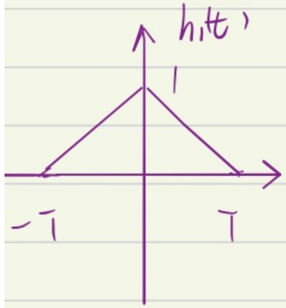


复习参考2：课堂练习2

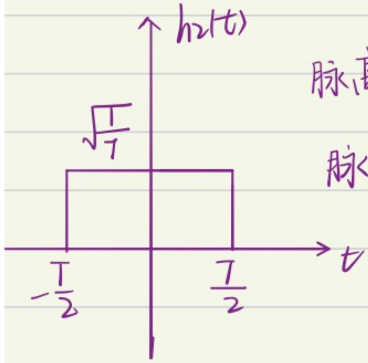
Tips: 三角形脉冲可以表示成两个矩形脉冲的卷积

$$H_1(j\omega)=T\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{\omega T}{2}}{\omega T/2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{\omega T}{2}}{\omega/2}\right]^2$$



三角形脉冲.



脉高为$\sqrt{T}$ $E=\sqrt{T}$

脉宽为T 的矩形脉冲 $\tau=T$

$$h_1(t)=h_2(t)*h_2(t)\Longleftrightarrow \mathcal{F}[h_1(t)]=\mathcal{F}[h_2(t)]\,\mathcal{F}[h_2(t)]$$

$$\mathcal{F}[h_2(t)]=E\tau\, Sa\left(\frac{T}{2}\omega\right)=\sqrt{T}\, Sa\left(\frac{T}{2}\omega\right)$$

$$\therefore \mathcal{F}[h_1(t)]=T\, Sa^2\left(\frac{T}{2}\omega\right)$$