2. 已知：内、外球壳半径分别为 $R_1=0.02m$，$R_2=0.06m$，$\varepsilon_{r_1}=6$，$\varepsilon_{r_2}=3$，半径 $R=0.04m$，内球带电 $Q=-6\times10^{-8}C$

求：(1) D, E 分布，D-r，E-r 曲线 (2) 球壳间电势差 U (3) 内壳电介质面束缚电荷密度 σ'

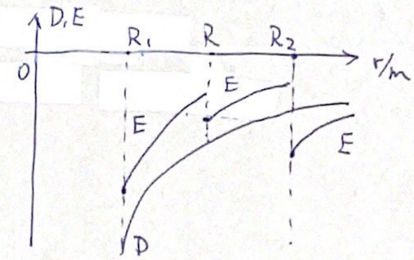
解：(1) 由D的高斯定律，有 $r<R_1$，$D=0$；$r>R_1$，$D=\dfrac{Q}{4\pi r^2}$

又 $E=\dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$，有：$r<R_1$，$E=0$；

$R_1<r<R$，$E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r^2}$；

$R<r<R_2$，$E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}r^2}$；

$r>R_2$，$E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.



(2) $$U=\int_{R_1}^{R}E\,dr+\int_{R}^{R_2}E\,dr=\int_{R_1}^{R}\frac{Q\,dr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r^2}+\int_{R}^{R_2}\frac{Q\,dr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}r^2}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r\varepsilon_{r_1}}\Big|_{R_1}^{R}-\frac{1}{r\varepsilon_{r_2}}\Big|_{R}^{R_2}\right)$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1\varepsilon_{r_1}}-\frac{1}{R\varepsilon_{r_1}}+\frac{1}{R\varepsilon_{r_2}}-\frac{1}{R_2\varepsilon_{r_2}}\right)$$

$$=9\times10^{9}\times-6\times10^{-8}\times\left(\frac{1}{0.02\times6}-\frac{1}{0.04\times6}+\frac{1}{0.04\times3}-\frac{1}{0.06\times3}\right)$$

$$=-3750\ V.$$

(3) $$\sigma'=P\cdot e_n=-P_n=-\varepsilon_0(\varepsilon_{r_1}-1)E=-\varepsilon_0(\varepsilon_{r_1}-1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r^2}=-(6-1)\frac{-6\times10^{-8}}{4\pi\times6\times0.02^2}=9.95\times10^{-6}C/m^2$$

3. 已知：圆筒内半径 R_1，外半径 R_2，$R_2<2R_1$，分界面 r_0，内层介质介电常数 ε_{r_1}，外层 ε_{r_2}，$\varepsilon_{r_2}=\varepsilon_{r_1}/2$，$E_{max}$.

求：先击穿介质，最大电势差 U_{max}.

解：

设线电荷为 λ，则 $D\cdot2\pi rl=\lambda\cdot l \Rightarrow D=\dfrac{\lambda}{2\pi r}$；又 $E=\dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$

故 $E_{内}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\cdot r}$ $(R_1<r<r_0)$，$E_{外}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}\cdot r}=\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\cdot r}$ $(r_0<r<R_2)$

注意到 $R_1<r_0<r_2<2R_1$，即 $r_0<2R_1$

又 $\dfrac{E_{外,m}}{E_{内,m}}=\dfrac{\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r_0}}{\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\cdot R_1}}=\dfrac{2R_1}{r_0}>1$，即 $E_{外,m}>E_{内,m}$，故外层介质先被击穿.

此时 $E_{外,m}=E_{max}=\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\cdot r_0} \Rightarrow \dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}=r_0E_{max}$

而电势差 $$U=\int_{R_1}^{r_0}\frac{\lambda\,dr}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\cdot r}+\int_{r_0}^{R_2}\frac{\lambda\,dr}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\cdot r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\cdot\ln\frac{r_0}{R_1}+\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}\cdot\ln\frac{R_2}{r_0}$$

$$=\frac{r_0E_{max}}{2}\cdot\left(\ln\frac{r_0}{R_1}+2\ln\frac{R_2}{r_0}\right)=\frac{r_0E_{max}}{2}\cdot\ln\frac{R_2^2}{R_1r_0}.$$

6. 已知：细胞壁厚度 $d=5.2\times10^{-9}m$，面电荷密度 $\sigma=\pm0.52\times10^{-3}\ C/m^2$，内表面为正，$\varepsilon_r=6$

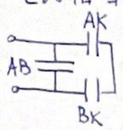
求：场强 E，电势差 U.

解：
$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{0.52\times10^{-3}}{8.85\times10^{-12}\times6}=9.79\times10^{6}\ V/m$$
$$U=Ed=9.79\times10^{6}\times5.2\times10^{-9}=0.051\ V.$$

14. 已知：板面积 $S=0.02m^2$，板距 $d_1=0.5mm=5\times10^{-4}m$，板到上下底面距离 $d_2=0.25mm=2.5\times10^{-4}m$

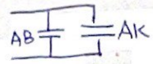
求：电容 C，板和盒相连的电容 C'

解：电路相当于：



故电容
$$C=C_{AB}+\frac{C_{AK}C_{BK}}{C_{AK}+C_{BK}}$$
$$=\frac{\varepsilon_0S}{d_1}+\frac{\left(\frac{\varepsilon_0S}{d_2}\right)^2}{2\left(\frac{\varepsilon_0S}{d_2}\right)}$$
$$=\frac{\varepsilon_0S}{d_1}+\frac{\varepsilon_0S}{2d_2}$$
$$=\varepsilon_0S\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{2d_2}\right)$$
$$=8.85\times10^{-12}\times0.02\left(\frac{1}{5\times10^{-4}}+\frac{1}{2\times2.5\times10^{-4}}\right)$$
$$=7.08\times10^{-10}F.$$

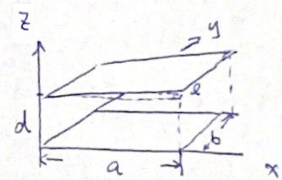
板盒相连后，电容 $C=C_{AB}+C_{AK}$



$$=\frac{\varepsilon_0S}{d_1}+\frac{\varepsilon_0S}{d_2}$$
$$=\frac{8.85\times10^{-12}\times0.02}{5\times10^{-4}}+\frac{8.85\times10^{-12}\times0.02}{2.5\times10^{-4}}$$
$$=1.062\times10^{-9}F.$$

15. 已知：板长 a，宽 b，一边板距 d，另一端 $l+d$ $(l\ll d)$

求：电容 C



解：注意到，$y=d+\frac{l}{a}x$

故
$$C=\int_0^a\frac{\varepsilon_0\,b\cdot dx}{d+\frac{l}{a}x}=\frac{\varepsilon_0ab}{l}\ln\frac{d+l}{d}=\frac{\varepsilon_0ab}{l}\ln\left(1+\frac{l}{d}\right)$$
$$\simeq\frac{\varepsilon_0ab}{l}\left(\frac{l}{d}-\frac{1}{2}\left(\frac{l}{d}\right)^2\right)=\frac{\varepsilon_0ab}{d}\left(1-\frac{l}{2d}\right)$$

16. 已知：$d_0=2cm=2\times10^{-2}m$，板 $d=1.5cm=1.5\times10^{-2}m$，电势差 $U=0.6U_0$

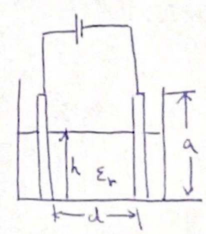
求：相对介电常量 ε_r.

解：
$$U=E_0(d_0-d)+\frac{E_0}{\varepsilon_r}\cdot d=E_0d_0\left(1-\frac{d}{d_0}+\frac{d}{\varepsilon_rd_0}\right)=U_0\left(1-\frac{d}{d_0}+\frac{d}{\varepsilon_rd_0}\right)$$

由于 $U=0.6U_0$，故
$$1-\frac{d}{d_0}+\frac{d}{\varepsilon_rd_0}=0.6\Rightarrow1-\frac{1.5\times10^{-2}}{2\times10^{-2}}+\frac{1.5\times10^{-2}}{\varepsilon_r\times2\times10^{-2}}=0.6\Rightarrow\varepsilon_r=2.14$$

20. 已知：$\varepsilon_{r,eff}$，高度 a.

求：油的相对介电常量 ε_r 与高度 h 的关系



解：不妨设板间距为 d，板宽为 b，有
$$C=\frac{\varepsilon_0}{d}(a-h)b+\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1hb}{d}=\frac{\varepsilon_0b}{d}\cdot[a-h+h\varepsilon_1]=\frac{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r,eff}\,ab}{d}$$

故 $a\varepsilon_{r,eff}=a-h+h\varepsilon_1\Rightarrow\varepsilon_{r,eff}=1-\frac{h}{a}(1-\varepsilon_1)$，故 ε_1 越大，介电常量变化越明显，因此甲醇 $(\varepsilon_r=33)$ 更适合此油量计

24. 已知：板面积 S，板间距 d，电量 Q 不变，金属板厚 b

求：(1) 电容器储能增量 ΔW，(2) 外力做功 (3) U 不变。

解：(1) $C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$，$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d-b}$，$\Delta W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0}=\frac{Q^2}{2}\left(\frac{d-b-d}{\varepsilon_0 S}\right)=-\frac{Q^2 b}{2\varepsilon_0 S}$

(2) $W_{外}=\Delta W<0$，外力做负功，即电场力做功，故板被吸入

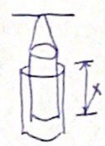
(3) U 不变时电量改变，$\Delta Q=(C-C_0)U$，故 $W_{电源}=\Delta Q\cdot U=(C-C_0)U^2$

故电容器储存的能量增加为 $\Delta W=\frac{Q^2}{2C}-\frac{Q^2}{2C_0}=\frac{1}{2}CU^2-\frac{1}{2}C_0U^2=\frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon_0 S b}{d(d-b)}$

又 $\Delta W=W_{电源}+W_{外} \Rightarrow W_{外}=\Delta W-W_{电源}=\frac{1}{2}U^2(C-C_0)-(C-C_0)U^2=-\frac{1}{2}U^2(C-C_0)=-\frac{U^2\varepsilon_0 S b}{2d(d-b)}$

25. 已知：外圆筒 $R_1=7cm=7\times10^{-2}m$，$R_2=5cm=5\times10^{-2}m$，$U=5kV=5\times10^{3}V$

求：内筒受向下电力 F



解：不妨设内筒在外筒的长度为 x，此时两筒组成的电容器

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 x}{\ln(R_1/R_2)},\quad Q=CU=\frac{2\pi\varepsilon_0 x U}{\ln(R_1/R_2)},\quad W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi\varepsilon_0 x\cdot U^2}{\ln(R_1/R_2)}$$

$$F=-\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\pi\varepsilon_0 U^2}{\ln(R_1/R_2)}=\frac{\pi\times8.85\times10^{-12}\times(5\times10^3)^2}{\ln(7\times10^{-2}/5\times10^{-2})}=2.07\times10^{-3}\ N.$$

28. 已知：面积 S，板间距 y_0，电介质 $\varepsilon_r=1+\frac{3}{y_0}y$

求：(1) 电容 C (2) 电量 Q 时面束缚电荷密度 $\sigma_上$ $\sigma_下$ (3) 介质内体束缚电荷密度 $\rho_体$ (4) 底面束缚电荷为 0。

解：(1) $dC=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{dy}$，$C=\int dC=\int\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{dy}=\frac{1}{\int_0^{y_0}\frac{dy}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}}=\frac{\varepsilon_0 S}{y_0\int_0^{y_0}\frac{dy}{y_0+3y}}=\frac{3\varepsilon_0 S}{y_0\ln4}$

(2) $\sigma_上=-\varepsilon_0(\varepsilon_{r y_0}-1)E=-\varepsilon_0(\varepsilon_{r y_0}-1)\frac{D}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r y_0}}=-\frac{\varepsilon_{r y_0}-1}{\varepsilon_{r y_0}}\cdot\sigma=-\frac{3}{4}\sigma=-\frac{3Q}{4S}$

$\sigma_下=-\varepsilon_0(\varepsilon_{r,0}-1)E=-\varepsilon_0(1-1)E=0$

(3) 板内取底面为单位面，高为 dy 的高斯面，由高斯定律有：

$dq=\rho dy=\varepsilon_0\cdot dE=d\left(\frac{D}{\varepsilon_r}\right)=-\frac{Q}{S}\cdot d\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\right)$

故体束缚电荷 $\rho_体=\int_0^{y_0}\rho S dy=\int_0^{y_0}-Q\cdot d\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\right)=\frac{3Q}{4}$

(4) $\sigma_上\cdot S+\rho=-\frac{3Q}{4S}\cdot S+\frac{3Q}{4}=0$

29. 已知：$\varepsilon_r=3$，$Q=2\times10^{-6}C$

求：$Q_上$，$Q_下$

解：上半部电势 $U_上=\frac{Q_上}{4\pi\varepsilon_0 R}$，下半部 $U_下=\frac{Q_下}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$，上下部相连，故 $U_上=U_下$，因此 $Q_下=\varepsilon_r Q_上=3Q_上$

又因为 $Q=Q_上+Q_下$，解得：

$$\begin{cases}Q_上=\frac{Q}{4}=\frac{1}{4}\times2\times10^{-6}=5\times10^{-7}\ C\\ Q_下=Q-Q_上=\frac{3}{4}Q=\frac{3}{4}\times2\times10^{-6}=1.5\times10^{-6}\ C\end{cases}$$