

清华大学计算机科学与技术系

信号处理原理

贾珈

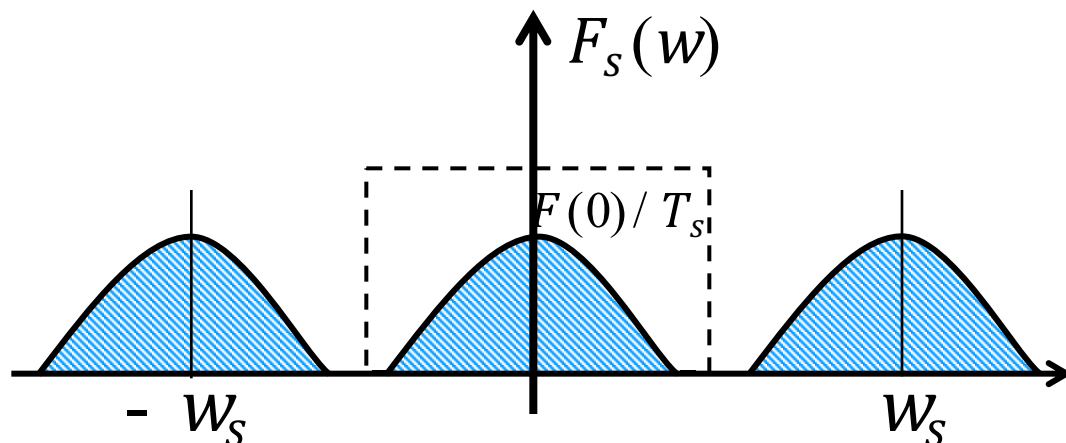
jjia@tsinghua.edu.cn

13651399048

2022.11.29

什么是滤波器？

滤波器是以特定方式改变信号的频率特性，从而变换信号的处理系统。



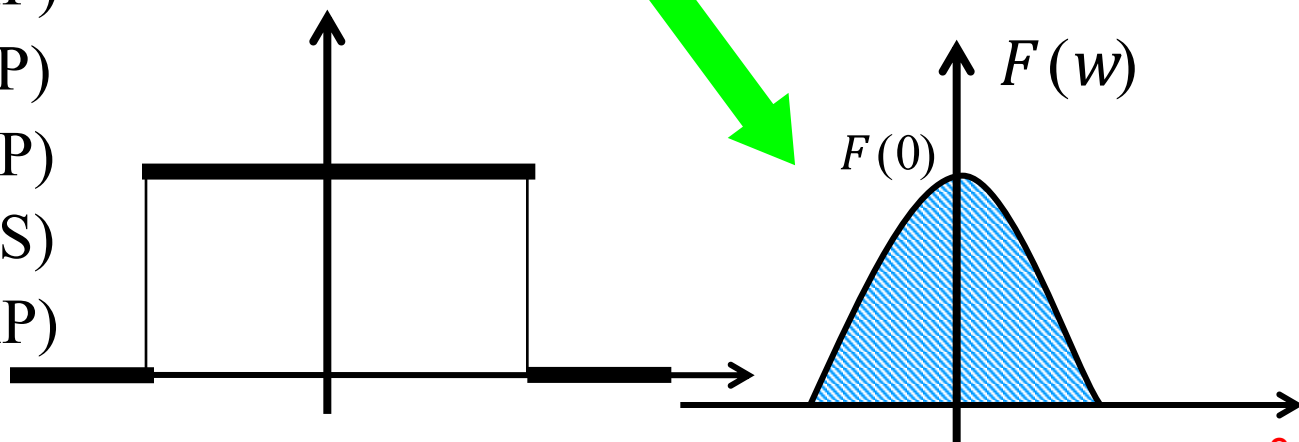
高通滤波器(HP)

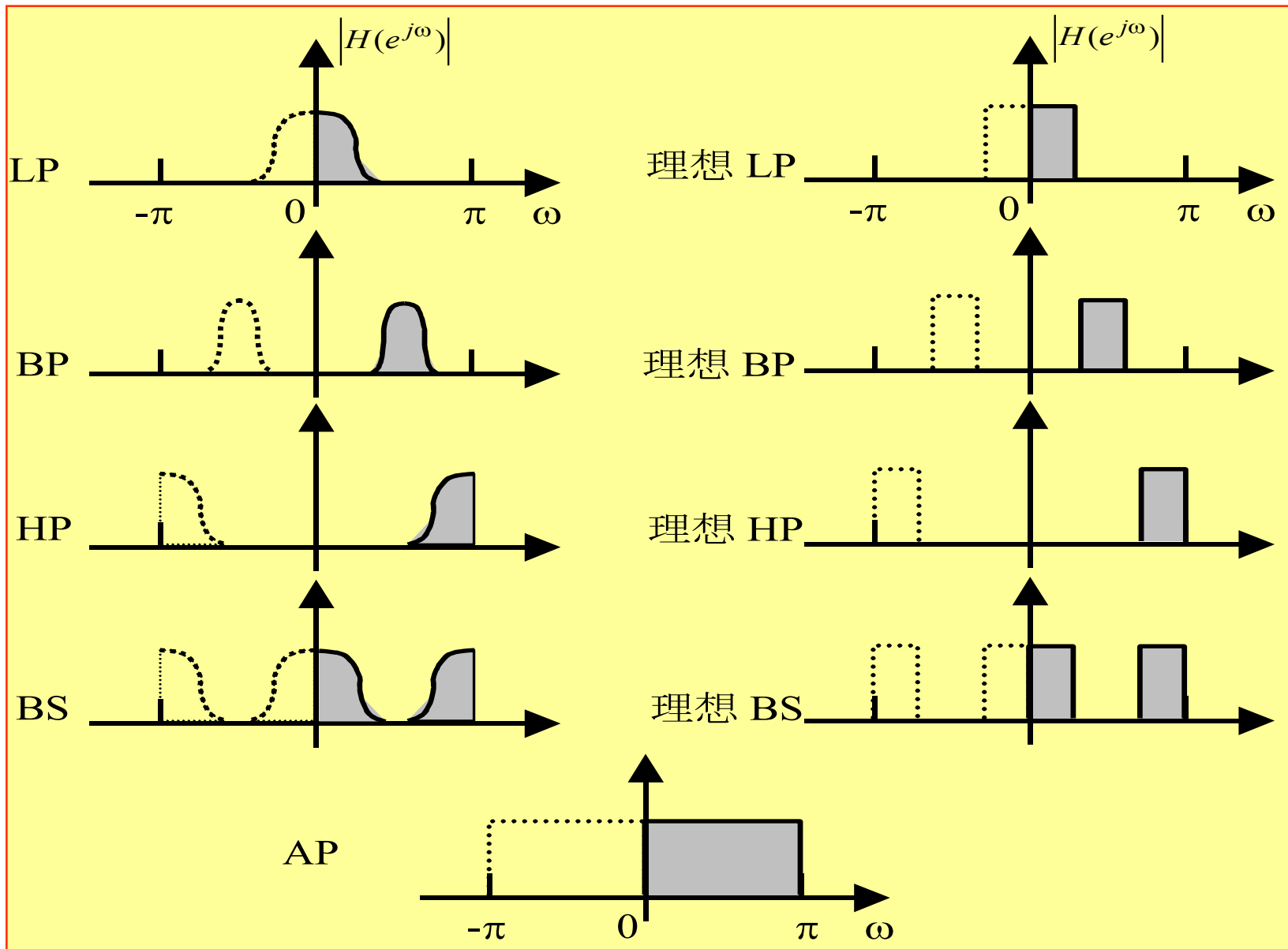
低通滤波器(LP)

带通滤波器(BP)

带阻滤波器(BS)

全通滤波器(AP)





模拟滤波器与数字滤波器

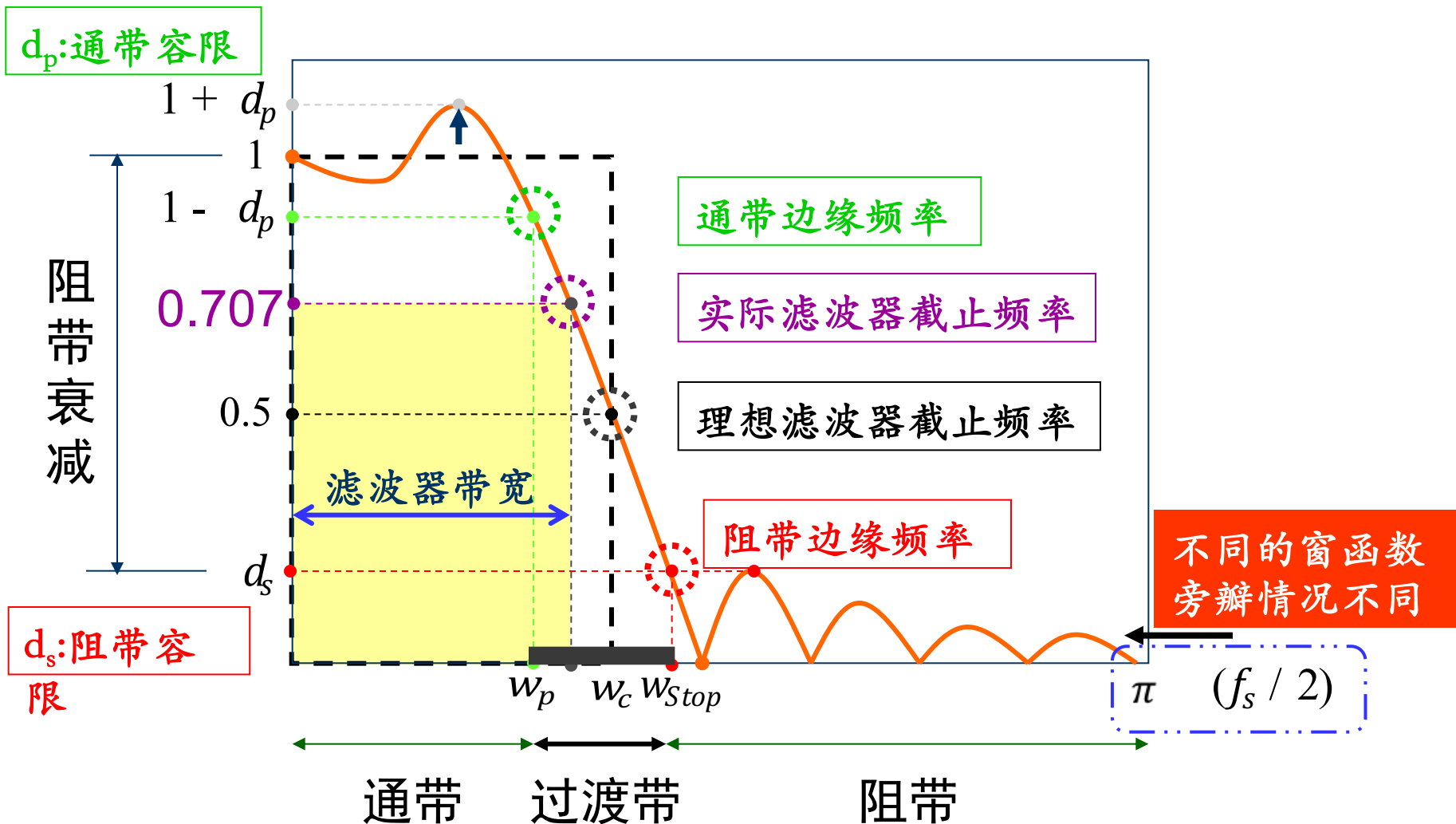
模拟滤波器是由电阻、电容、电感等部件构成的电路。滤波器特性对所用部件的物理标称值非常敏感，而且，有些部件的物理特性会随温度变化而改变。

数字滤波器是用软件实现的，很少依赖硬件。滤波软件只是一系列程序指令。虽然它是在硬件平台上运行，但是硬件平台本身并不决定滤波器的性能。数字滤波器的性能是由**一组系数**确定的。

数字滤波器的实现方式：

- 1 用流程图计算滤波器的输出
- 2 用差分方程计算滤波器的输出
- 3 用卷积过程计算滤波器的输出
- 4 用DTFT直接改变信号频谱

滤波器的滤波特性参数（低通滤波器）



说明：虚线表示的是理想低通滤波器的滤波特性；实线表示的是窗函数法设计得到的实际的低通滤波器的滤波特性。

滤波器是以特定方式改变信号频率特性的系统 →

什么是系统？

系统是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的**具有特定功能的整体**。

如计算机系统，医疗系统，雷达导航系统……

通俗地说，对信号进行处理的各种环境都可以被称为系统。在信号处理领域，系统是为了传送信号或对信号进行加工处理而构成的某种组合。

这种组合，既可以有对应的物理设备，如电容、放大器…
也可以是纯粹的算法，如计算机软件程序等。

关键是“特定功能的整体”

系统的分类

▶ 连续时间系统

- 输入和输出的信号都是连续时间信号，并且在系统内部也没有对信号进行转换的系统。

▶ 离散时间系统

- 输入和输出的信号都是离散时间信号，并且在系统内部，信号也是离散时间形式。

这两种不同的系统类别，它们的系统原理和分析方法，除少数内容外，基本上一致的。

本章主要介绍离散时间系统。

系统的分类

仅讨论线性、时不变、因果系统

线性系统

同时满足叠加性与齐次性的系统。

- **满足叠加性**是指：当几个输入信号同时输入系统时，系统总的输出等于每个输入信号单独输入系统时的输出信号和。
- **满足齐次性**是指：当输入信号乘以某个常数时，系统的输出也倍乘相同的常数。

时不变系统

若系统无论何时收到输入，系统的输出都是相同的，则称系统为**时不变**系统。反之，则称为时变系统。

→ 线性时不变系统

若系统既是线性的，又是时不变的，则我们称之为线性时不变系统。简记为**LTI系统**。

因果系统

如果系统的输出取决于现在和以前的输入数据，而与以后的输入数据无关，则称此系统为因果系统。

所有实际系统都是因果系统！

稳定系统

若系统的输入有界则输出也是有界的，则称此系统为稳定系统。这个性质通常被称为**BIBO原则**。

为什么要研究系统（滤波器）？

■ 对于具有特定参数的系统，它具有何种处理信号的特性？

◆ 即：分析信号在通过系统后，信号的性质会发生什么样的变化？

■ 对于给定的传输和处理信号的要求，如何设计实现系统，使系统与其匹配？

◆ 即：如何设计和实现系统，使系统满足信号处理的要求，系统应具有怎样的功能和参数？

系统的描述方法

用差分方程来描述线性、时不变、因果数字滤波器

示例

$$y(n) = \frac{1}{b_0} [a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1)]$$

更一般的表达式

$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M a_r x(n-r)$$

N为所需过去输出的个数，通常称为**滤波器的阶数**

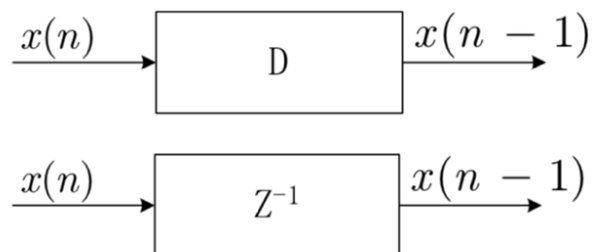
为什么差分方程能表示系统呢？ →

差分方程流图

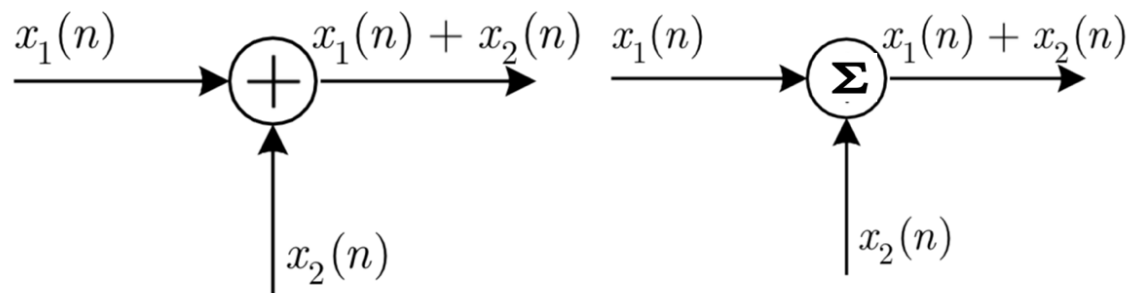
$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M a_r x(n-r)$$



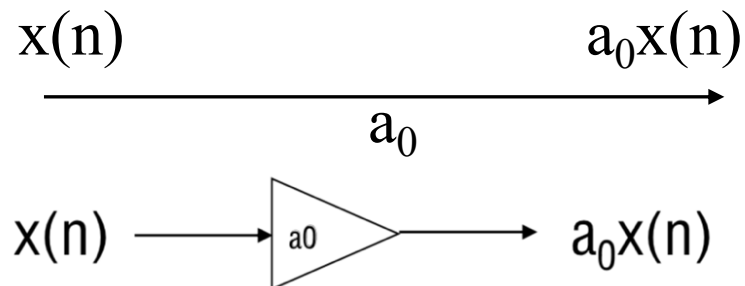
延时单元



信号相加



乘上系数

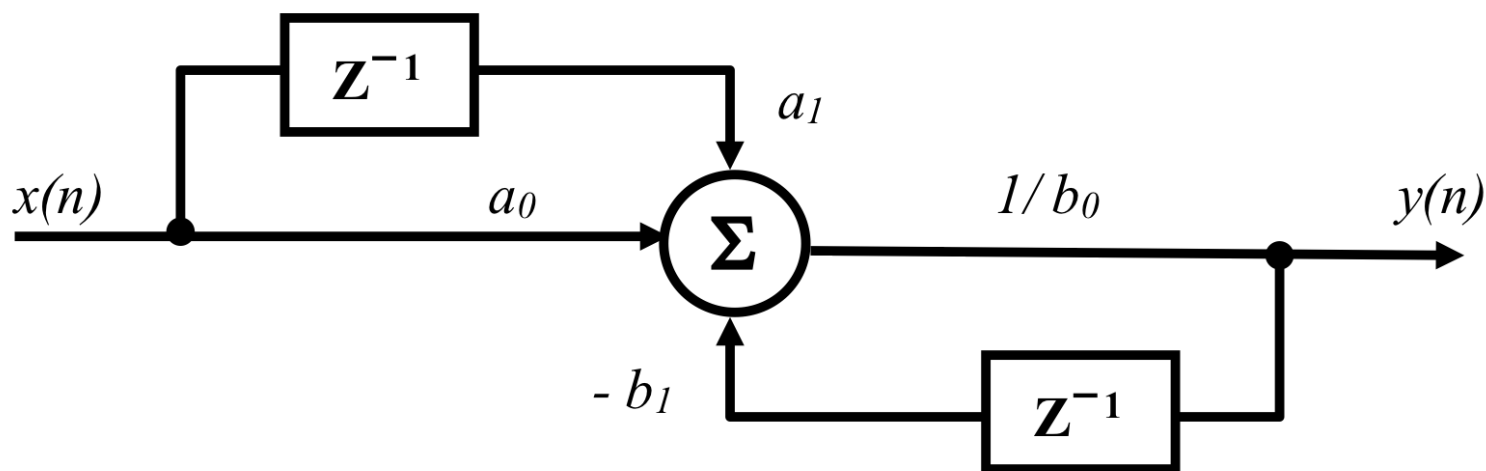


【课堂练习1】 画出下列差分方程的流图

$$y(n) = \frac{1}{b_0} [a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1)]$$

【课堂练习1】画出下列差分方程的流图

$$y(n] = \frac{1}{b_0} [a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1)]$$



系统响应的分类

1 零输入响应

系统可能在没有任何激励信号作用时，产生信号输出。

在这种情况下，系统的输出显然是与外界无关的(因为外界并没有给系统输入信号)，输出是由系统自身的内部信息引起的。

系统自身的内部信息，可能是先前激励（或扰动）作用的后果，不过，没有必要追究它们历史演变的详细过程，只需知道在当前激励接入系统时，系统瞬时状态即可。

由此看来，系统的零输入响应是一种纯粹由系统的起始状态所产生的响应。

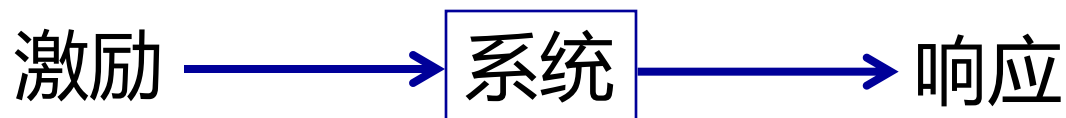
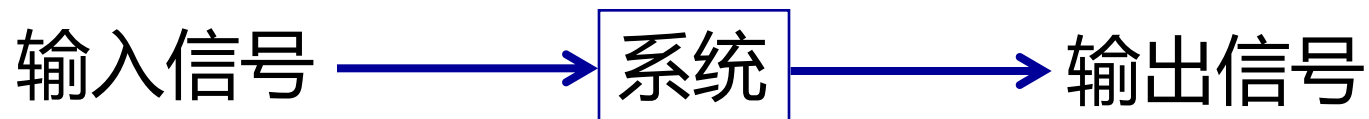
2 零状态响应

系统在每一时刻都对应一种状态，开始研究系统的时刻系统所处的状态称为起始状态。

所谓系统的零状态响应，就是指系统在起始状态时状态值为零(相当于系统没有存储任何能量和信息)。

在这种状况下，给系统输入一个激励信号，则系统所产生输出响应就被称为系统的零状态响应。

滤波器的脉冲响应（冲激响应）



滤波器的脉冲响应（冲激响应），就是滤波器对脉冲输入的响应。即：当滤波器的输入为单位脉冲时，滤波器的输出就是单位脉冲响应。

单位冲激（单位脉冲）

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & (n = 0) \\ 0, & (n \neq 0) \end{cases}$$

内插：由样本值重建某一函数的过程。

- 理想内插：**以理想低通滤波器（频域矩形脉冲）的单位冲激响应（Sa函数形态）作为内插函数

设 $h(t)$ 为理想低通滤波器的单位冲激响应，则

$$x(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) * h(t)$$

函数与单位冲激函数的卷积

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT)$$

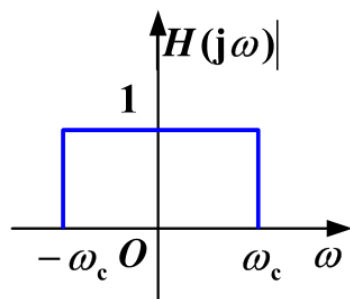
$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$$

一个函数与单位冲激函数的卷积，等价于把该函数平移到单位冲激函数的冲激点位置。

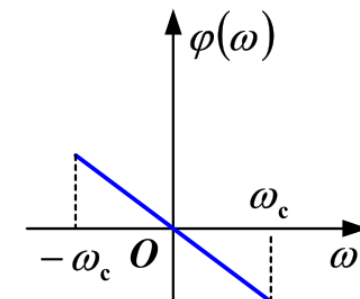
理想低通滤波器（频域矩形脉冲）的单位冲激响应

是Sa函数形态 $h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_0)]$

理想低通滤波器



$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0$$

即

理想低通滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ ，即为其傅立叶逆变换。

例1. 求下列滤波器脉冲响应的前6个采样值

$$y(n) = 0.25[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)]$$

用 $\delta(n)$ 代替 $x(n)$, $h(n)$ 代替 $y(n)$, 则有:

$$h(n) = 0.25[\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)]$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & (n = 0) \\ 0, & (n \neq 0) \end{cases} \longrightarrow$$

$$h(0) = 0.25 \quad h(1) = 0.25 \quad h(2) = 0.25$$

$$h(3) = 0.25 \quad h(4) = 0 \quad h(5) = 0$$

【课堂练习2】求下列滤波器脉冲响应的前6个采样值（设滤波器是因果系统，即脉冲响应在 $n=0$ 之前为零）

$$y(n) - 0.4y(n-1) = x(n) - x(n-1)$$

【课堂练习2】求下列滤波器脉冲响应的前6个采样值

$$y(n) - 0.4y(n-1) = x(n) - x(n-1)$$

设滤波器是因果系统，即脉冲响应在 $n=0$ 之前为零。

用 $\delta(n)$ 代替 $x(n)$ ， $h(n)$ 代替 $y(n)$ ，则有：

$$h(n) - 0.4h(n-1) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & (n = 0) \\ 0, & (n \neq 0) \end{cases} \quad \longrightarrow$$

$$\underline{h(0) = 1.0} \quad h(1) = -0.6 \quad h(2) = -0.24$$

$$h(3) = -0.096 \quad h(4) = -0.0384 \quad h(5) = -0.01536$$

有限脉冲响应FIR和FIR滤波器

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a(k)x(n-k)$$

上述系统的脉冲响应在有限个非零采样值后下降到零。这种响应被称为有限脉冲响应（finite impulse response, **FIR**），这种滤波器称为FIR滤波器。

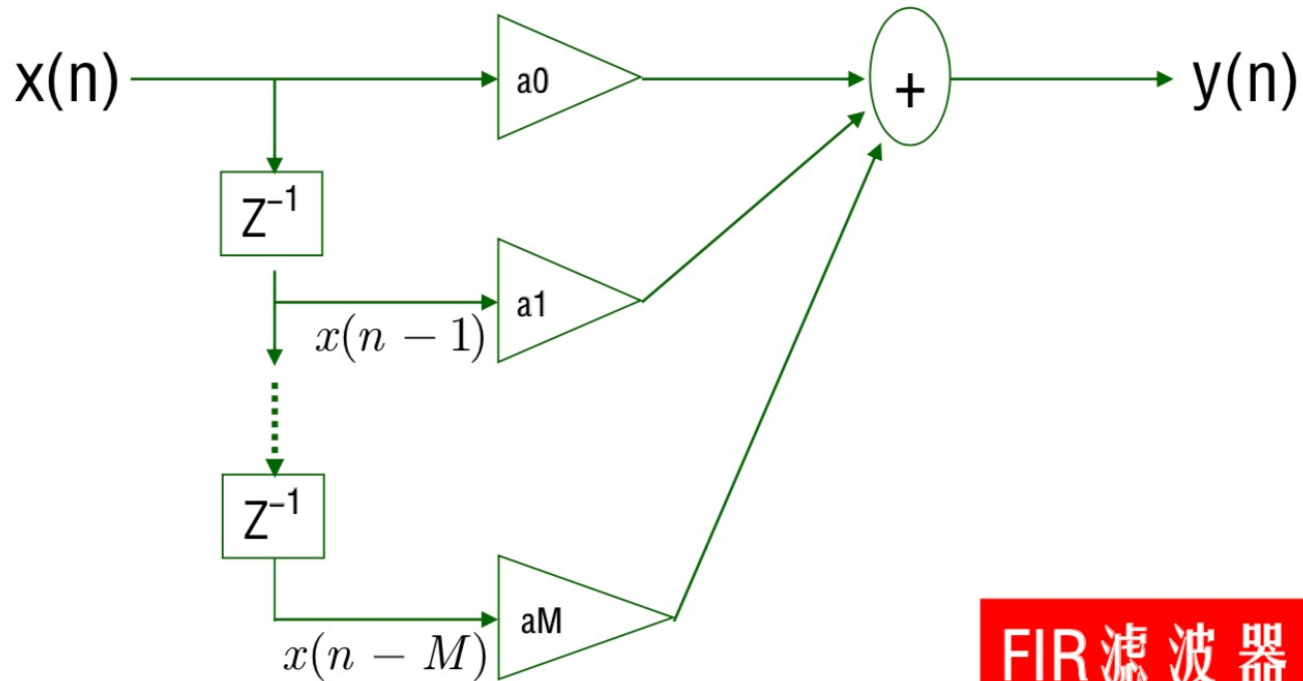
无限脉冲响应IIR和IIR滤波器

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a(k)x(n-k) + \sum_{k=1}^N b(k)y(n-k)$$

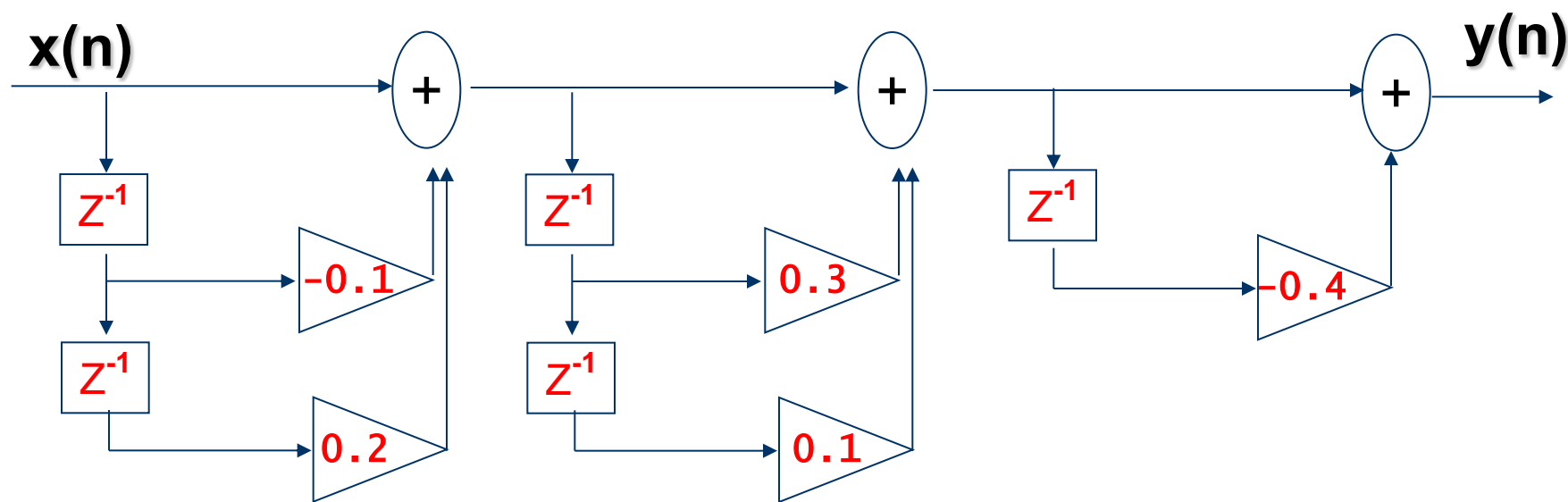
显然，新的输出取决于过去的输出，所以脉冲响应永远不会消失，这种响应被称为无限脉冲响应（infinite impulse response, **IIR**），这种滤波器称为IIR滤波器。

1. 差分方程 --- 非递归的差分方程

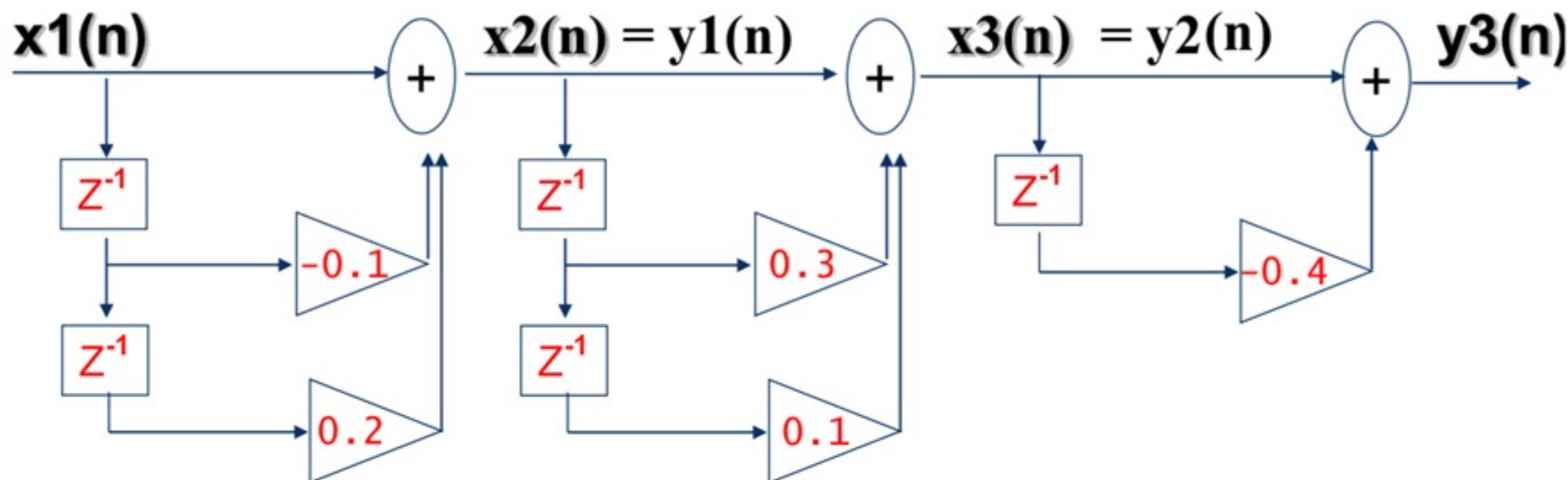
$$y(n) = \sum_{k=0}^M a(k)x(n-k)$$



【课堂练习3】 写出如图所示级联流图的差分方程



【课堂练习3】 写出如图所示级联流图的差分方程



$$\begin{aligned}
 y_1(n) &= x_1(n) - 0.1x_1(n-1) + 0.2x_1(n-2) \\
 y_2(n) &= x_2(n) + 0.3x_2(n-1) + 0.1x_2(n-2) \\
 y_3(n) &= x_3(n) - 0.4x_3(n-1)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y_3(n) &= x_1(n) - 0.2x_1(n-1) + 0.19x_1(n-2) \\
 &\quad - 0.058x_1(n-3) - 0.008x_1(n-5)
 \end{aligned}$$

滤波器差分方程流图优化

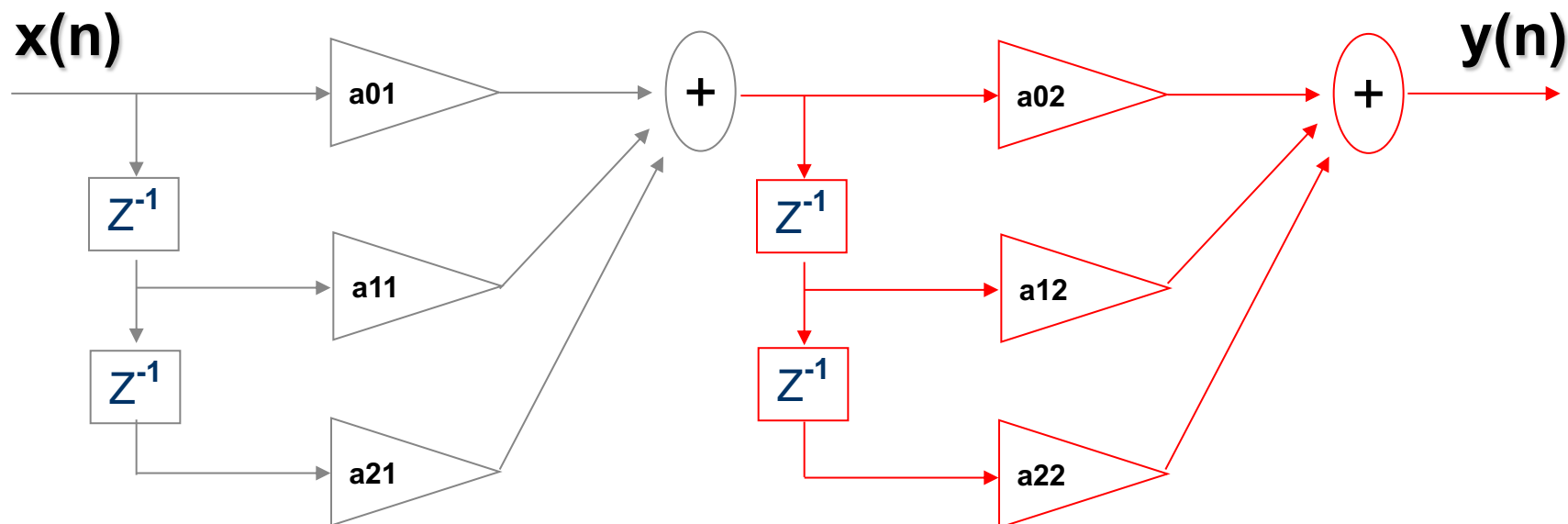
要求：

- (1) 减少存储
- (2) 减少运算 (乘法、加法)
- (3) 减少有效字长效应 (滤波器的系数必须量化，而处理器的有效比特数有限而产生的影响)



高阶滤波器 → 多个二阶滤波器节的级联
(滤波器系数大，对量化误差的敏感程度低)

非递归差分方程 - - 二阶 非递归 滤波器节 级联



$$y_1(n) = x_1(n) - 0.5x_1(n-1) + 0.1x_1(n-2)$$
$$y_2(n) = x_2(n) + 0.4x_2(n-1) + 0.2x_2(n-2)$$

$$y(n) = x(n) - 0.1x(n-1) + 0.1x(n-2) \\ - 0.06x(n-3) + 0.02x(n-4)$$

分级后，各滤波器节系数变大，对量化误差的敏感度降低 31

1、已知某系统的差分方程如下式：

$$y(n) = x(n) + x(n - 3) + 0.7y(n - 1) + 0.6y(n - 2)$$

(1) 判断系统的脉冲响应类型；

(2) 画出该系统信号流图

2、观察傅里叶变换 (FT), 傅里叶级数 (FS), 离散时间傅里叶变换 (DTFT), 离散傅里叶变换 (DFT) 时域和频域的周期性和离散性, 总结时域的离散性和频域周期性的关系, 时域周期性和频域离散性的关系

结束