5.10 已知：半径 R，小圆板半径 $\frac{R}{2}$，挖去圆板后质量 m.（设 ρ 为圆板密度，l 为厚度）

求：板绕原中心的转动惯量 J.

解：圆板补全后，质量 $m_1 = \pi R^2 \cdot \rho l$，而 $m = \pi R^2 - \pi(\frac{R}{2})^2 \rho l = \frac{3}{4}\pi R^2 \rho l$，故 $m_1 = \frac{4}{3}m$.

挖去的小圆板质量 $m_2 = \pi(\frac{R}{2})^2 \rho l = \frac{1}{4}m_1 = \frac{1}{3}m$.

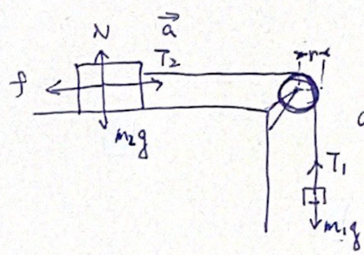
圆板补全后绕 O 的转动惯量 $J_1 = \frac{1}{2}m_1 R^2 = \frac{2}{3}mR^2$

小圆板绕 O 转动惯量 $J_2 = J_2' + md^2 = \frac{1}{2}m_2(\frac{R}{2})^2 + m_2 \cdot (\frac{R}{2})^2 = \frac{3}{8}m_2 R^2 = \frac{1}{8}mR^2$

板绕 O 的转动惯量 $J = J_1 - J_2 = \frac{2}{3}mR^2 - \frac{1}{8}mR^2 = \frac{13}{24}mR^2$.

5.11 已知：两物体质量 m_1, m_2，定滑轮质量 m，半径 r，摩擦系数 μ_k

求：m_1 加速度 a，绳子张力 T_1, T_2



解：对 m_1，由牛顿第二定律，有 $-T_1 + m_1 g = m_1 a$

对 m_2，由牛顿第二定律，有 $T_2 - \mu_k m_2 g = m_2 a$

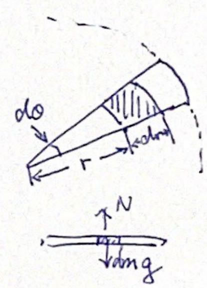
对滑轮，由转动定律，有 $M = J\alpha \Rightarrow r(T_1 - T_2) = \frac{1}{2}mr^2\alpha$

$\alpha = \frac{a}{r}$，故 $T_1 - T_2 = \frac{1}{2}ma$

解得 $a = \frac{m_1 - \mu_k m_2}{m_1 + m_2 + m/2} g$，$T_1 = \frac{m_2 + \mu_k m_2 + m/2}{m_1 + m_2 + m/2} g$，$T_2 = \frac{m_1 + \mu_k m_1 + \mu_k m_1/2}{m_1 + m_2 + m/2} g$

5.14. 已知：半径 R，质量 m 的圆盘，摩擦系数 μ_k，转速 ω

求：唱片受到的摩擦力矩 M，达到角速度 ω 需时 t，力矩 M 做功 W，获得动能 E_k.



解：唱片的一个面元 $dS = rd\theta \cdot dr$，其质量 $dm = \frac{dS}{\pi R^2} \cdot m = \frac{rmd\theta\, dr}{\pi R^2}$

受力矩 $dM = rdf = r\mu_k \cdot dm \cdot g = \frac{r^2 \mu_k mg\, d\theta dr}{\pi R^2}$

总力矩 $M = \int dM = \frac{\mu_k mg}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \theta \cdot \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3}\mu_k mgR$

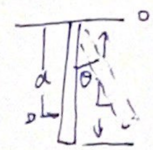
加速到 ω 需时：$t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega J}{M} = \frac{\omega \cdot \frac{1}{2}mR^2}{\frac{2}{3}\mu_k mgR} = \frac{3}{4}\frac{\omega R}{\mu_k g}$

力矩做功：$W = M\Delta\theta = M \cdot \omega t = \frac{2}{3}\mu_k mgR \cdot \omega \cdot \frac{3\omega R}{4\mu_k g} = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$

动能 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}mR^2 \times \omega^2 = \frac{1}{4}mR^2\omega^2$

5.16 已知：杆长 $L=0.4m$，$M=1.0kg$，子弹质量 $m=8g=8\times10^{-3}kg$，速度 $v_0=200m/s$，射入点 $d=\frac{3}{4}L$.

求：角速度 ω，最大偏转角 θ.



解：角动量守恒：

$$mv_0\cdot\frac{3}{4}L = \omega\left(m(\tfrac{3}{4}L)^2 + J_{杆}\right) = \omega\left(m\cdot(\tfrac{3}{4}L)^2 + \frac{1}{3}ML^2\right)$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{3mv_0}{\frac{9}{4}mL + \frac{1}{12}ML} = \frac{3\times8\times10^{-3}\times200}{\frac{9}{4}\times8\times10^{-3}\times0.4+\frac{4}{3}\times1\times0.4} = 8.89\ rad/s.$$

系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}\omega^2\left(m\cdot(\tfrac{3}{4}L)^2 + \frac{1}{3}ML^2\right) = (1-\cos\theta)\left(\frac{1}{2}L\cdot Mg + \frac{3}{4}L\cdot mg\right)$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{\omega^2L}{g}\cdot\frac{(\frac{9}{16}m+\frac{M}{3})}{M+\frac{3}{2}m}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(1-\frac{8.89^2\times0.4}{9.8}\times\frac{\frac{9}{16}\times8\times10^{-3}+\frac{1}{3}}{1+\frac{3}{2}\times8\times10^{-3}}\right)$$

$$= 1.65\ rad$$

$$= 94.41^\circ$$

5.19. 已知：运动半径 $r=2.5m$，人质量 $m=70kg$，转动惯量 $J=3\times10^5 kg\cdot m^2$，转动角 $\theta=30^\circ$.

求：(1)人造重力 $=g$ 时，跑动速率 v，(2)此时(飞船)角速度 ω，(3)转动 θ 需要跑的圈数 n.

解：(1) $mg=\frac{mv^2}{r} \Rightarrow v=\sqrt{gr}=\sqrt{9.8\times2.5}=4.95m/s$

(2) 飞船及宇航员角动量守恒：

$$3mvr - J\omega = 0 \Rightarrow \omega = \frac{3mvr}{J} = \frac{3\times70\times4.95\times2.5}{3\times10^5} = 8.66\times10^{-3}\ rad/s$$

(3) 飞船转 30° 需时 $t=\frac{\pi}{6\omega}$

$$n = \frac{(\omega+\omega_{人})t}{2\pi} = \frac{(\omega+\frac{v}{r})\frac{\pi}{6\omega}}{2\pi} = \frac{1}{12}\left(1+\frac{v}{r\omega}\right) = \frac{1}{12}\left(1+\frac{4.95}{2.5\times8.66\times10^{-3}}\right) = 19.13$$

≈ 20(圈)

5.21. 已知：周期 $T = 0.033s$，周期增长率 $\frac{dT}{dt} = 1.26\times10^{-5}$ s/a，质量 $m = 1.5\times10^{30}$ kg，半径 $r = 10km = 10^4 m$

求：(1) 角加速度 a_t (2) 转动动能减少速率 $\frac{dE}{dt}$ (3) 若此速率保持不变，多久停止。

解：

(1) $a_t = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(\frac{2\pi}{T})}{dt} = -\frac{2\pi}{T^2}\frac{dT}{dt} = -\frac{2\pi}{0.033^2}\times\frac{1.26\times10^{-5}}{365\times24\times60^2} = -2.31\times10^{-9}$ rad/s²

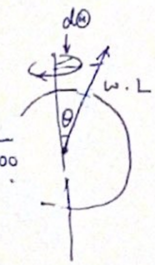
(2) $\frac{dE}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2}J\omega^2)}{dt} = J\omega\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{5}mr^2\frac{2\pi}{T}a_t = \frac{2}{5}\times1.5\times10^{30}\times(10^4)^2\times\frac{2\pi}{0.033}\times(-2.31)\times10^{-9}$

-2.63×10^{31} J/s

(3) $t = \frac{E}{|\frac{dE}{dt}|} = \frac{\frac{1}{2}J\omega^2}{|\frac{dE}{dt}|} = \frac{\frac{1}{5}mr^2\cdot(\frac{2\pi}{T})^2}{|\frac{dE}{dt}|} = \frac{1.5\times10^{30}\times(10^4)^2\times(\frac{2\pi}{0.033})^2}{5\times2.63\times10^{31}} = 4.14\times10^{10}\ s = 1311\ a$

5.27. 已知：$\theta = 23.5°$，转动惯量 $J = 8.05\times10^{37}$ km·m²，进动周期 $T = 26000a$

求：$|d\vec{L}/dt|$，太阳和月球的合力矩 M



解：$\left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = \frac{L\sin\theta\, d\Theta}{dt} = J\omega\sin\theta\cdot\frac{d\Theta}{dt} = 8.05\times10^{37}\times\frac{2\pi}{24\times60^2}\times\sin 23.5°\times\frac{2\pi}{26000\times365\times86400}$

$= 1.79\times10^{22}$ kg·m/s²

合力矩 $M = \left|\frac{dL}{dt}\right| = 1.79\times10^{22}$ N·m