

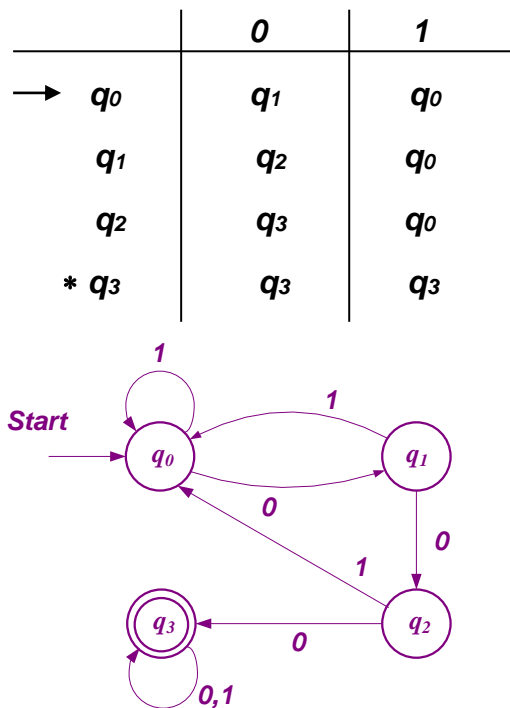
Slide04 必做题

*!Exercise 2.2.2

参考解答：从"课程文件"中下载网页文件，从中找到参考解答

Exercise 2.2.4 (b)

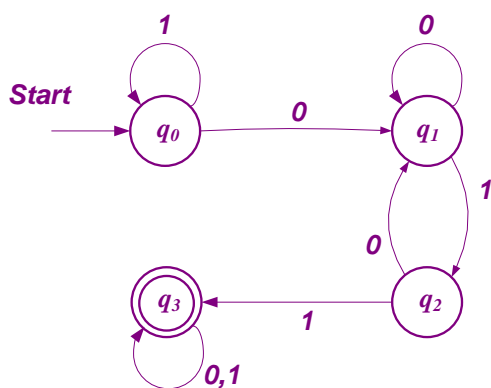
参考解答：取初态为 q_0 ， q_1 代表前一个输入字符为 0， q_2 代表前两个输入字符为子串 00， q_3 代表输入字符串中至少包含一个 000 子串，即 q_3 为终态。用转移表或转移图给出结果均可。



Exercise 2.2.4 (c)

参考解答：取初态为 q_0 ， q_1 代表前一个输入字符为 0， q_2 代表前两个输入字符为子串 01， q_3 代表输入字符串中至少包含一个 011 子串，即 q_3 为终态。用转移表或转移图给出结果均可。

	0	1
→ q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
* q_3	q_3	q_3



! Exercise 2.2.5(d)

参考解答：取每个状态为 $q_{i,j}$ 的形式，这里 i, j 满足： $0 \leq i \leq 4$, $0 \leq j \leq 2$ 。 $q_{i,j}$ 的含义：已扫描的输入串中 0 的个数被 5 除余 i ，1 的个数被 3 除余 j 。初态为 $q_{0,0}$ ，终态集只包含状态 $q_{0,0}$ 。

由于状态数目为 15，较多，所以只给出转移表：

		0	1
→ *	$q_{0,0}$	$q_{1,0}$	$q_{0,1}$
	$q_{0,1}$	$q_{1,1}$	$q_{0,2}$
	$q_{0,2}$	$q_{1,2}$	$q_{0,0}$
	$q_{1,0}$	$q_{2,0}$	$q_{1,1}$
	$q_{1,1}$	$q_{2,1}$	$q_{1,2}$
	$q_{1,2}$	$q_{2,2}$	$q_{1,0}$
	$q_{2,0}$	$q_{3,0}$	$q_{2,1}$
	$q_{2,1}$	$q_{3,1}$	$q_{2,2}$
	$q_{2,2}$	$q_{3,2}$	$q_{2,0}$
	$q_{3,0}$	$q_{4,0}$	$q_{3,1}$
	$q_{3,1}$	$q_{4,1}$	$q_{3,2}$
	$q_{3,2}$	$q_{4,2}$	$q_{3,0}$
	$q_{4,0}$	$q_{0,0}$	$q_{4,1}$
	$q_{4,1}$	$q_{0,1}$	$q_{4,2}$
	$q_{4,2}$	$q_{0,2}$	$q_{4,0}$

Exercise 2.2.7 Let A be a DFA and q a particular state of A , such that

$\delta(q,a) = q$ for all input symbols a . Show by induction on the length of the input that for all input strings w , $\delta'(q,w) = q$.

参考解答 归纳于 w 的长度.

- 1 设 $|w| = 0$, 即 $w = \varepsilon$.
由定义, $\delta'(q,\varepsilon) = q$
- 2 设 $|w| = n+1$, 且 $w = xa$, 其中 a 为一个输入符号. 显然, $|x| = n$.
由归纳假设, $\delta'(q,x) = q$.
所以, $\delta'(q,w) = \delta'(q,xa) = \delta(\delta'(q,x), a) = \delta(q,a) = q$.

*!Exercise 2.2.9

参考解答: 从"课程文件"中下载网页文件, 从中找到参考解答

Exercise 2.3.2

参考解答: 注意: 对于该题目, 不要遗漏了状态 ϕ .

	0	1
$\rightarrow \{p\}$	$\{q,s\}$	$\{q\}$
* $\{q\}$	$\{r\}$	$\{q,r\}$
* $\{q,s\}$	$\{r\}$	$\{p,q,r\}$
* $\{q,r\}$	$\{r,s\}$	$\{p,q,r\}$
$\{r\}$	$\{s\}$	$\{p\}$
* $\{p,q,r\}$	$\{q,r,s\}$	$\{p,q,r\}$
* $\{r,s\}$	$\{s\}$	$\{p\}$
* $\{s\}$	ϕ	$\{p\}$
* $\{q,r,s\}$	$\{r,s\}$	$\{p,q,r\}$
ϕ	ϕ	ϕ

Exercise 2.3.4 (b)

参考解答: 大部分同学没有困难, 注意不要遗漏单个字符的情形. 如下是一种解法:

$$Q = \{q_s, q_0, q_1, \dots, q_9, q_f\}, \quad \Sigma = \{0, 1, \dots, 9\},$$

初态 q_s ,

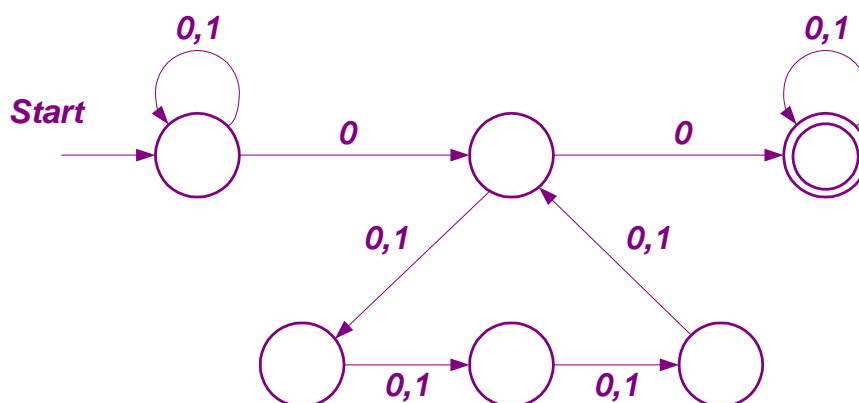
终态集 $\{q_f\}$,

$$\delta(q_s, a) = \{q_k \mid k \neq a\} \cup \{q_f\};$$

$\delta(q_k, a) = \{q_k\}, \quad \text{if } k \neq a;$
 $\delta(q_k, a) = \{q_i\}, \quad \text{if } k = a.$
 其中, $k = 0, 1, \dots, 9.$

Exercise 2.3.4 (c)

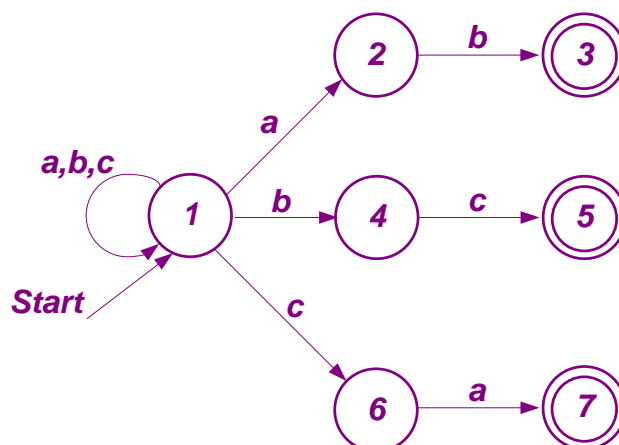
参考解答：题目要求被接受的字符串中存在两个 0，它们之间的字符数目为 0, 4, 8, 12, ..., 即 4 的倍数。，如下状态图代表一种解法



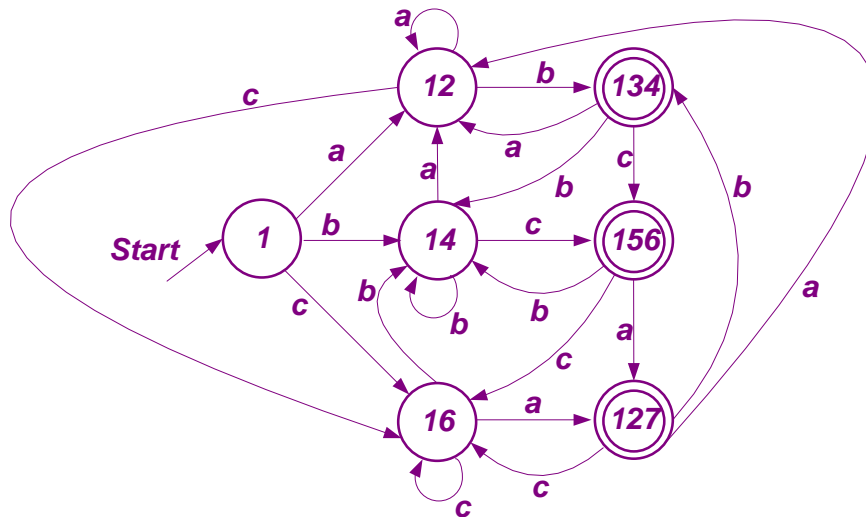
Exercise 2.4.2 (c)

参考解答：

假设 Exercise 2.4.1 (c) 的结果为



依 2.4 节的方法，Exercise 2.4.2 (c) 的结果为



Exercise 2.5.2

参考解答:

a) Compute the ε - closure of each state.

$$\text{ECLOSE}(p) = \{p, q, r\}$$

$$\text{ECLOSE}(q) = \{q\}$$

$$\text{ECLOSE}(r) = \{r\}$$

b) Give all the strings of length three or less accepted by the automaton.

ε , a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc, baa, bab, bac, bca, bcb, bcc, caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc.

c) Convert the automata to a DFA.

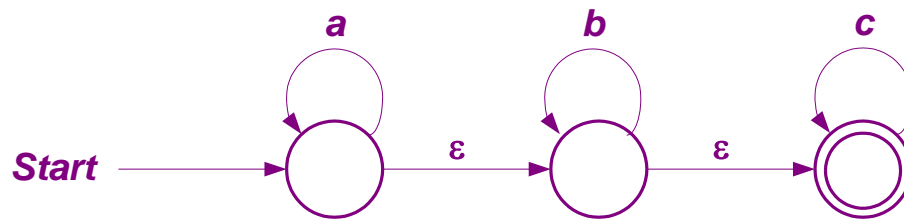
		a	b	c
→ *	$\{p, q, r\}$	$\{p, q, r\}$	$\{q, r\}$	$\{p, q, r\}$
*	$\{q, r\}$	$\{p, q, r\}$	$\{r\}$	$\{p, q, r\}$
*	$\{r\}$	ϕ	ϕ	ϕ
	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ

Exercise 2.5.3 设计下列语言的 ε - NFA. 注意应用 ε -转移简化你的设计.

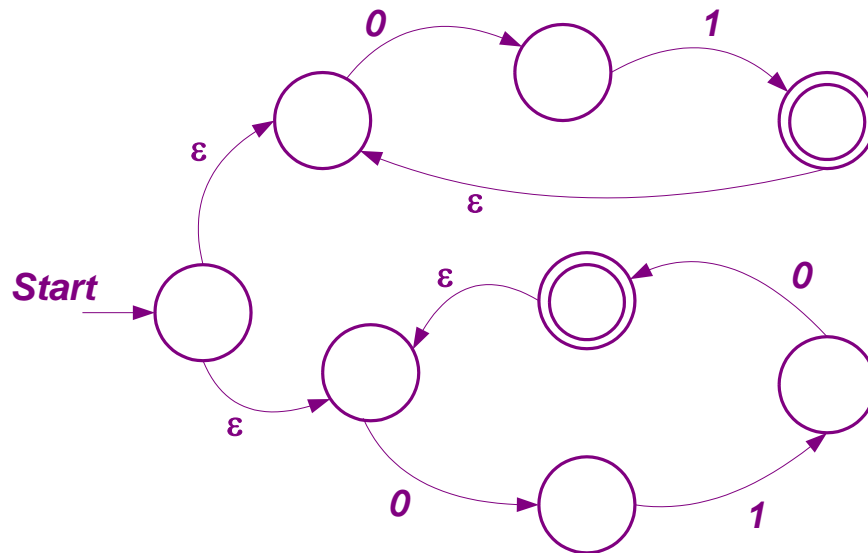
a) The set of strings consisting of zero or more **a**'s followed by zero or more **b**'s, followed by zero or more **c**'s.

! b) The set of strings consisting of either **01** repeated one or more times or **010** repeated one or more times.

参考解答: a)



!b)



Exercise 4.4.2

对图 4.15 的 DFA 重复 Exercise 4.4.1 的工作.

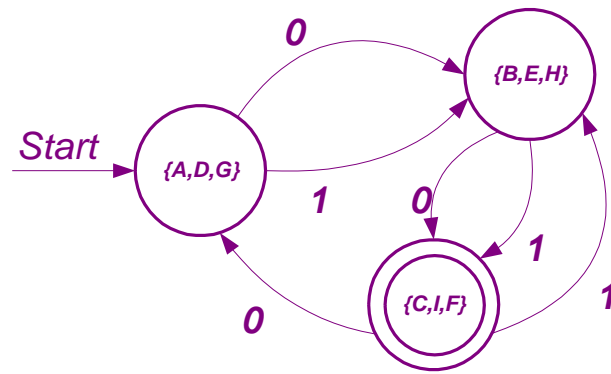
a) 画出填表算法所用的填充表, 并标记可区别状态偶对.

b) 构造等价的最小状态自动机.

参考解答:

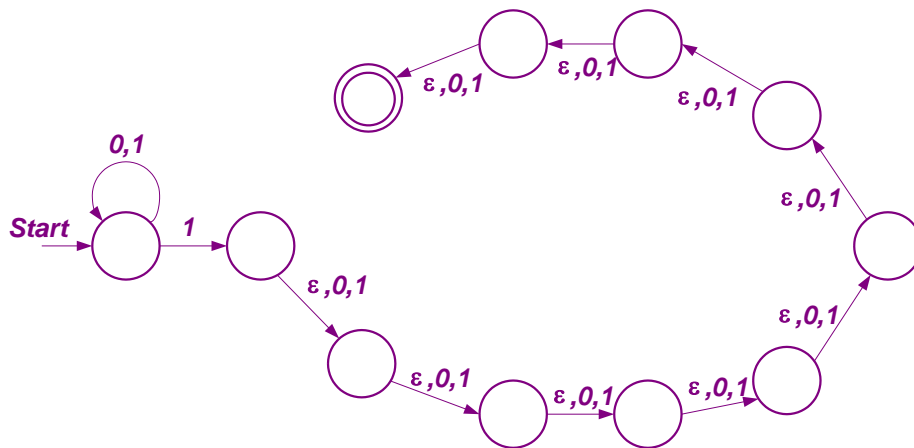
a) $(A,D), (A,G), (B,E), (B,H), (C,F), (C,I), (D,G), (E,H), (F,I)$.

b) 等价类: $\{A,D,G\}, \{B,E,H\}, \{C,I,F\}$. 等价的最小状态 DFA 为



!Exercise 2.5.3(c)

参考解答:



Slide04 思考题

!Exercise 2.2.5(b)

参考解答:

状态集 $Q = \{q_i \mid 0 \leq i < 2^{10}\}$, 字母表 $\Sigma = \{0, 1\}$, 初态 $= q_0$, $F = \{q_i \mid 2^9 \leq i < 2^{10}\}$

$\delta(q_i, 0) = q_k$; 其中 $k = 2i \bmod 2^{10}$

$\delta(q_i, 1) = q_k$; 其中 $k = (2i+1) \bmod 2^{10}$

!!*Exercise 2.2.6(a)

参考解答: 从"课程文件"中下载网页文件, 从中找到参考解答

!! Exercise 2.2.6(b)

参考解答:

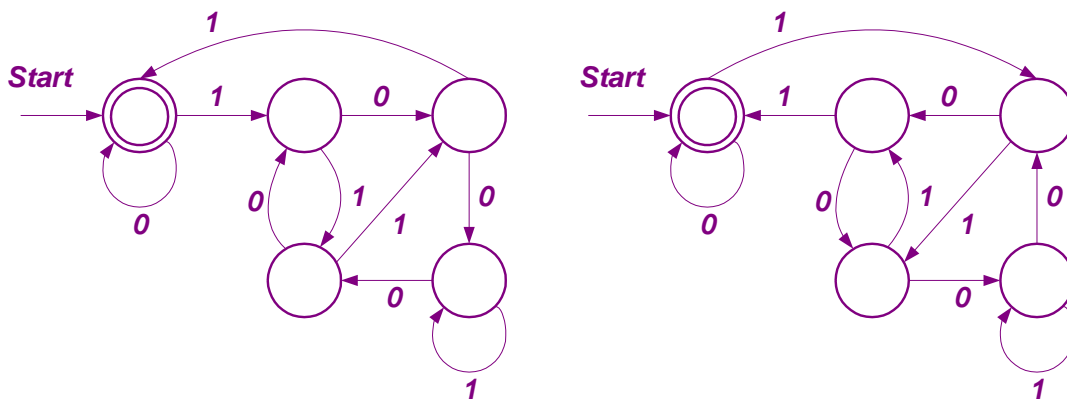
解答一. 借鉴 (a) 的思想, 状态中应包含当前已读过的输入串反向后的数字除以 5 的余数, 然后考虑读入当前符号后余数的可能变化; 所不同之处是数字是倒过来读的, 因此大小与已有字符串的长度有关, 但通过分析, 长度对余数的影响也是有规律的, 变化周期是 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 。这样, DFA 的状态应该由上述两方面信息构成。: 以下是其中一个代表解法:

$$Q = \{ q_{ij} \mid 0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 3 \}, \quad \Sigma = \{0, 1\}, \quad q_0 = q_{00}, \quad F = \{ q_{0j} \mid 0 \leq j \leq 3 \}$$

$$\delta(q_{ij}, 0) = q_{ik}; \text{ 其中 } k = (j+1) \bmod 4$$

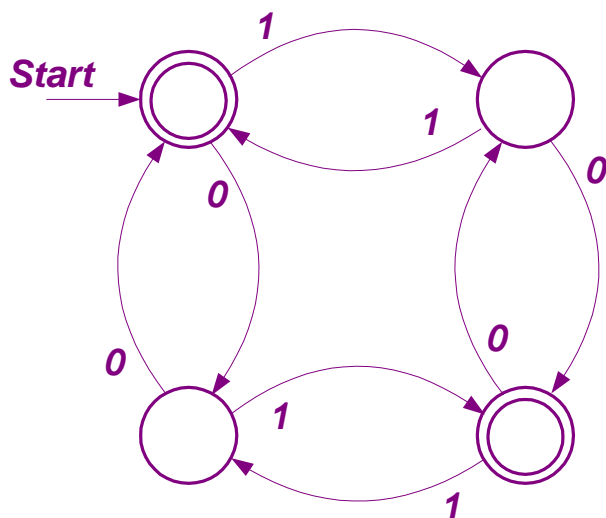
$$\delta(q_{ij}, 1) = q_{sk}; \text{ 其中 } s = (i+2^j) \bmod 5, \quad k = (j+1) \bmod 4$$

解答二. 利用 (a) 的结果, 若允许以 0 打头的串, 则如下左图的 DFA 可接受的二进制串能被 5 整除; 将该转移图的所有转移边反向, 则可得到一个满足条件的 DFA。这里注意: 允许出现以 0 打头的情况。



(附加的思考题)

思考题 定义 $\{0, 1\}$ 上的语言 $L = \{w \mid w \text{ 中 } 0、1 \text{ 数目的奇偶性相同}\}$. 试证明 L 是如下 DFA 的语言:



参考解答: 设左上的状态为 P , 右上的状态为 Q , 右下的状态为 R , 左下的状态为 S . δ 为此 DFA 的转移函数。

首先证明, 对任何 $w \in L$, $\delta'(P, w)=P$ 或 $\delta'(P, w)=R$, 即证 $w \in L(A)$ 。

归纳于 w 的长度 (因 w 中 0 、 1 数目的奇偶性相同, 所以 w 具有偶数长度):

- (1) 基础: $|w|=0$. 必有, $\delta'(P, w)=P$, 命题成立。
- (2) 归纳: 设 $|w|=2k$ ($k \geq 0$) 时, 命题成立。则当 $|w|=2(k+1)$ 时, 可令 $w=w_1w_2$, 其中 $|w_1|=2k$ 、 $|w_2|=2$ 。根据归纳假设, $\delta'(P, w_1)=P$ 或 $\delta'(P, w_1)=R$ 。
 若 $\delta'(P, w_1)=P$, 则有: 当 $w_2=01$ 或 $w_2=10$ 时, $\delta'(P, w)=R$; 当 $w_2=00$ 或 $w_2=11$ 时, $\delta'(P, w)=P$ 。
 若 $\delta'(P, w_1)=R$, 则有: 当 $w_2=01$ 或 $w_2=10$ 时, $\delta'(P, w)=P$; 当 $w_2=00$ 或 $w_2=11$ 时, $\delta'(P, w)=R$ 。
 所以 $|w|=2(k+1)$ 时, 上述命题成立。

再证明另一方面, 对任何 $w \in L(A)$, 有 $w \in L$ 。为方便, 先利用互归纳法证明以下 4 个相关命题:

- a. 若 $\delta'(P, w)=P$, 则 w 中包含偶数个 0 偶数个 1 ;
- b. 若 $\delta'(P, w)=Q$, 则 w 中包含偶数个 0 奇数个 1 ;
- c. 若 $\delta'(P, w)=R$, 则 w 中包含奇数个 0 奇数个 1 ;
- d. 若 $\delta'(P, w)=S$, 则 w 中包含奇数个 0 偶数个 1 ;

归纳于 w 的长度:

- (1) 基础: $|w|=0$. 必有, w 中包含偶数个 0 偶数个 1 。而此时只有 $\delta'(P, w)=P$ 成立, 所以上述 4 个命题在 $|w|=0$ 时均成立。
- (2) 归纳: 设 $|w|=k$ ($k \geq 0$) 时, 上述 4 个命题均成立。下面证明当 $|w|=k+1$ 时, 上述 4 个命题仍然成立。令 $w=w'a$, 其中 $a=0$ 或 $a=1$ 。分以下 4 种情形讨论:
 case1: $\delta'(P, w')=P$, 根据归纳假设, w' 中包含偶数个 0 偶数个 1 。
 若 $a=0$, 则 $\delta'(P, w)=S$, 上述 4 个命题中只有命题 d 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立; 若 $a=1$, 则 $\delta'(P, w)=Q$, 上述 4 个命题中只有命题 b 的前提部分成立, 而该命题的结论部

分也成立，所以上述 4 个命题均成立。

Case2: $\delta'(P, w')=Q$, 根据归纳假设, w' 中包含偶数个 0 奇数个 1.

若 $a=0$, 则 $\delta'(P, w)=R$, 上述 4 个命题中只有命题 c 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立; 若 $a=1$, 则 $\delta'(P, w)=P$, 上述 4 个命题中只有命题 a 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立。

Case3: $\delta'(P, w')=R$, 根据归纳假设, w' 中包含奇数个 0 奇数个 1.

若 $a=0$, 则 $\delta'(P, w)=Q$, 上述 4 个命题中只有命题 b 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立; 若 $a=1$, 则 $\delta'(P, w)=S$, 上述 4 个命题中只有命题 d 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立。

Case4: $\delta'(P, w')=S$, 根据归纳假设, w' 中包含奇数个 0 偶数个 1.

若 $a=0$, 则 $\delta'(P, w)=P$, 上述 4 个命题中只有命题 a 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立; 若 $a=1$, 则 $\delta'(P, w)=R$, 上述 4 个命题中只有命题 c 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立。

这样, 当 $|w|=k+1$ 时, 上述 4 个命题仍然成立。

所以, 对任何 $w \in L(A)$, 有 $w \in L$ 。

证毕。