清华大学计算机科学与技术系

信号处理原理

贾珈

jjia@tsinghua.edu.cn

13651399048

2022.10.24

第一次习题课

例1：求单位阶跃信号$u(t)$的频谱

解:

$$F(j\omega)=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-j\omega t}dt$$

令$u(t)=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}e^{-\alpha t}u(t)$，则$F(j\omega)=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\alpha+j\omega}$

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\alpha+j\omega}=\lim_{\alpha\to 0^+}\left\{\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}-j\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right\}=\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}+\frac{1}{j\omega}$$

其中：$\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}=\begin{cases}\infty, \omega=0\\ 0, \omega\neq 0\end{cases}=A\delta(\omega)$

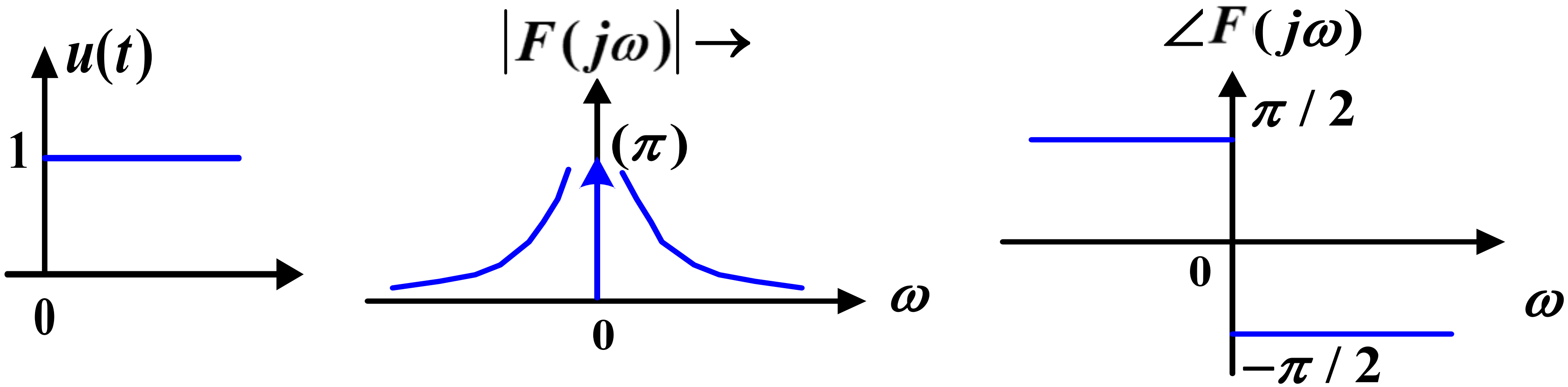
而，$A=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty}=\pi$

所以，$u(t)\Leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

例1：求单位阶跃信号$u(t)$的频谱

解::

$$u(t) \boxed{\leftrightarrow} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

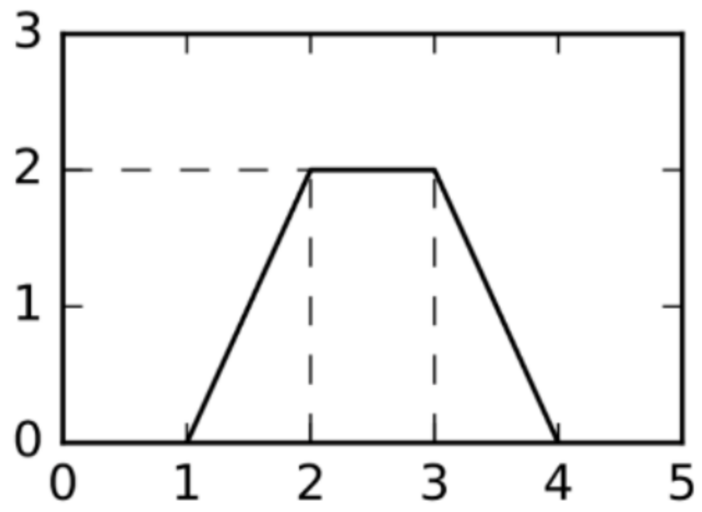


第一题

f(t)如图所示，

（1）绘出 $g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)*\delta(t-3n)$ 的波形

（2）求出 $g(t) = f(t)*u(t)$ 表达式，并绘制波形

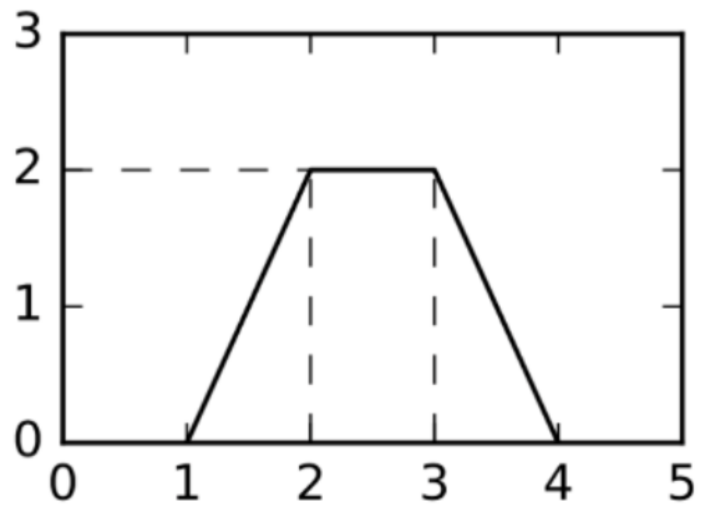


设置

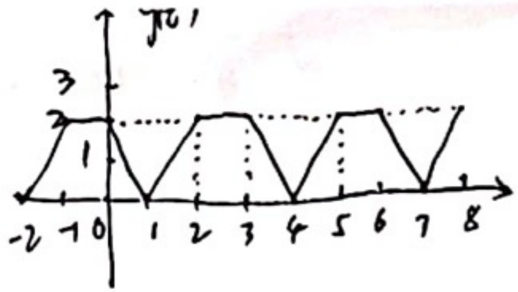
f(t)如图所示，

（1）绘出 $g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)*\delta(t-3n)$ 的波形

（2）求出 $g(t)=f(t)*u(t)$ 表达式，并绘制波形



2\. (1) $g(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-3n)$

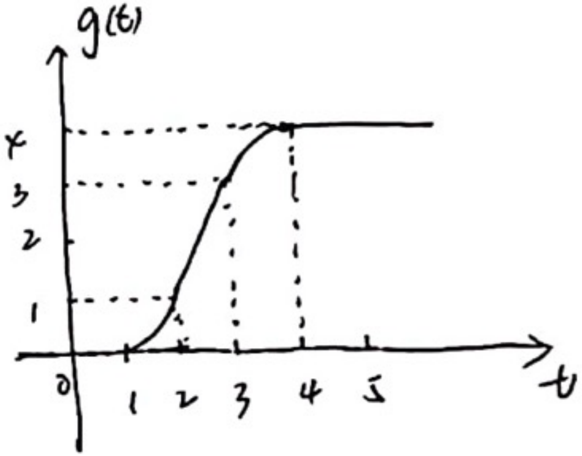


(2)

(2)

$u(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ $\qquad g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

$g(t)=\begin{cases}0, & t\leq 1\\ (t-1)^2, & 1<t\leq 2\\ 2t-3, & 2<t\leq 3\\ -t^2+8t-12, & 3<t\leq 4\\ 4, & t>4\end{cases}$



• IFT和FT的对偶性

I：FT与IFT的变换核函数是共轭对称的

$$\left\{e^{-j\omega t}\right\}^* = e^{j\omega t} \qquad \left\{e^{j\omega t}\right\}^* = e^{-j\omega t}$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left\{\boxed{\mathscr{F}_\omega\left[F^*(\omega)\right]}\right\}^*$$

其中，$F_\omega[F^*(\omega)]$表示按自变量ω进行FT，结果仍是t的函数。

在计算机程序设计实现上，IFT可以通过FT来完成。

- **IFT和FT的对偶性**

II：$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

证明：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

将变量t与ω互换，可以得到：

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t}dt$$

等号右边是对函数$F(t)$的傅里叶变换！

- **IFT和FT的对偶性**

II： $F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

$$\begin{cases} f(t)\text{是偶函数} & F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(\omega) \\ f(t)\text{是奇函数} & F(t) \Leftrightarrow -2\pi f(\omega) \end{cases}$$

第二题

推导

频域积分 $$\int_{-\infty}^{\omega} F(\lambda)d\lambda \Leftrightarrow \pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t)$$

主观题 0.5分

设置

推导

频域积分 $\int_{-\infty}^{\omega} F(\lambda)d\lambda \Leftrightarrow \pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt}f(t)$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

1. 证明 频域积分

$\int_{-\infty}^{\omega} F(\lambda)d\lambda \Leftrightarrow \pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt}f(t)$

一个函数与单位阶跃函数的卷积

第三次课的课堂练习 $\int_{-\infty}^{\omega} F(\lambda)d\lambda = F(\omega) * u(\omega)$ 等于该函数的积分.

$\Leftrightarrow 2\pi\, \underbrace{\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]}_{f(t)} \cdot \mathcal{F}^{-1}[u(\omega)]$ 频域卷积定理

接下来求 $u(\omega)$ 的傅立叶逆变换，简化 求 $u(t)$ 的傅立叶变换 对偶性 $F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

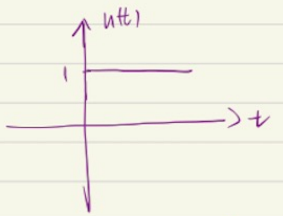
技巧性

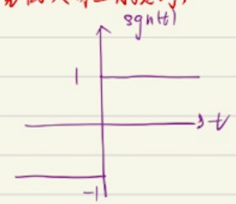
$u(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) + \frac{1}{2}$

符号函数不满足绝对可积条件，但是其仍然存在FT

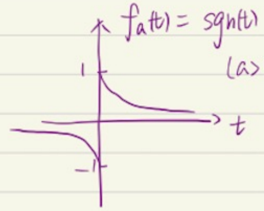
(FT存在的充分条件是时域信号绝对可积)

在第四次课上有提到.





$f_a(t) = \mathrm{sgn}(t)\cdot e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t>0 \\ -e^{at} & t<0 \end{cases}$ $(a>0)$



$\mathcal{F}[f_a(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{0}(-e^{at})e^{-j\omega t}dt$

$= \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-a-j\omega}\Big|_0^{+\infty} - \frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{0-1}{-a-j\omega} - \frac{1-0}{a-j\omega} = \frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}$

$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)] = \lim_{a\to 0}\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)\cdot e^{-a|t|}] = \lim_{a\to 0}\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{2}{\omega j}$

$\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}[\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)+\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\omega j} + \pi\delta(\omega) = \frac{1}{\omega j} + \pi\delta(\omega)$

利用的性质：频域卷积定理，对偶性，反褶性.

根据FT的对偶性 $F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

$\frac{1}{jt} + \pi\delta(t) \Leftrightarrow 2\pi u(-\omega)$

总结三个公式 $\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

$\mathcal{F}[u(-\omega)] = \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{jt} + \pi\delta(t))$ 根据FT的反褶性

$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}$

$\mathcal{F}[u(\omega)] = \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{-jt} + \pi\delta(t))$ $f(-t) \Leftrightarrow F(-\omega)$

$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = f(t) * u(t)$

$2\pi\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]\cdot\mathcal{F}^{-1}[u(\omega)] = 2\pi\cdot f(t)\cdot\frac{1}{2\pi}(-\frac{1}{jt} + \pi\delta(t)) = \frac{f(t)}{-jt} + \pi\delta(t)f(0)$

第三题

（1）求$f(t) = \sin(t)\sin(2t) + e^{3jt}$ 函数的傅里叶级数。

（2）根据FT与iFT的对偶性，求$f(\omega) = \sin(\omega)\sin(2\omega) + e^{3j\omega}$的傅里叶逆变换iFT。

(1) 求$f(t)=\sin(t)\sin(2t)+e^{3jt}$ 函数的傅里叶级数。

(2) 根据FT与iFT的对偶性，求$f(\omega)=\sin(\omega)\sin(2\omega)+e^{3j\omega}$的傅里叶逆变换iFT。

IFT和FT的对偶性

$$F(t)\Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\{\boxed{\mathscr{F}_{\omega}[F^{*}(\omega)]}\}^{*}$$

8(1) 欧拉公式:

$$f(t)=\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\cdot\frac{e^{2jt}-e^{-2jt}}{2j}+e^{jt}$$

$$=\frac{3}{4}e^{3jt}+\frac{1}{4}e^{jt}+\frac{1}{4}e^{-jt}-\frac{1}{4}e^{-3jt}.$$

三角形式: $\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\cos 3t+j\sin 3t$

(2) $\mathcal{F}^{-1}(f(\omega))=\frac{3}{4}\delta(t+3)+\frac{1}{4}\delta(t+1)+\frac{1}{4}\delta(t-1)-\frac{1}{4}\delta(t-3)$

~~证明~~ 由于: $\mathcal{F}(f(t))=2\pi\left[\frac{3}{4}\delta(\omega-3)+\frac{1}{4}\delta(\omega-1)+\frac{1}{4}\delta(\omega+1)+-\frac{1}{4}\delta(\omega-3)\right]$

又 $\mathcal{F}(F(t))=2\pi f(-\omega)\Rightarrow\mathcal{F}^{-1}(f(\omega))=\frac{1}{2\pi}F(-t)$

$[$或 $\mathcal{F}^{-1}(F^{*}(t)]^{*}/2\pi.]$

$\therefore\mathcal{F}^{-1}(f(\omega))=\frac{3}{4}\delta(t+3)+\frac{1}{4}\delta(t+1)+\frac{1}{4}\delta(t-1)-\frac{1}{4}\delta(t-3).$

主观题

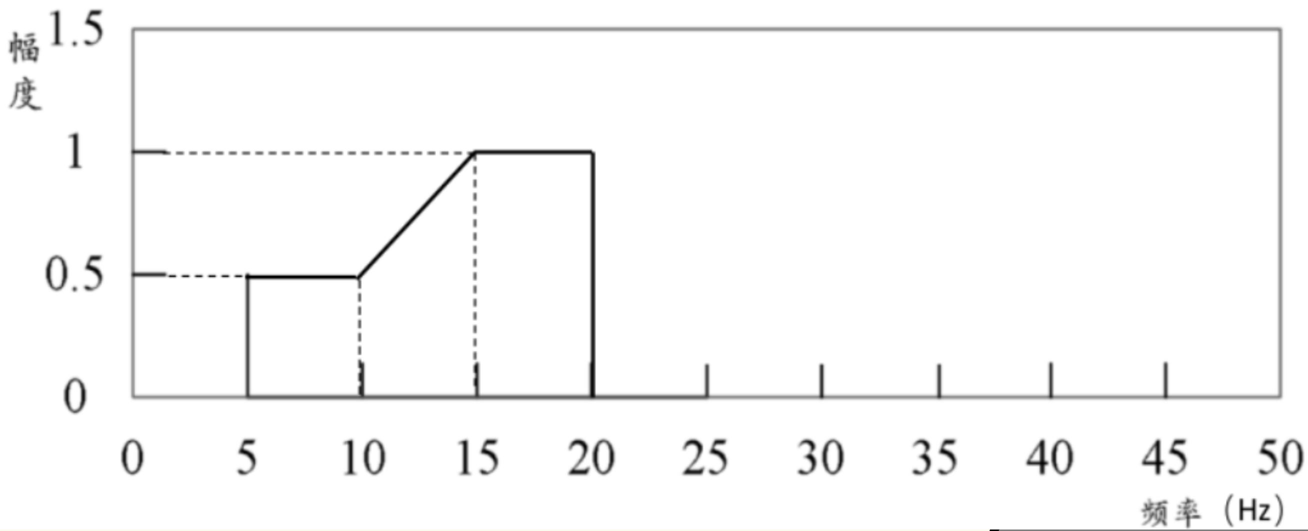
0.5分

设置

模拟信号的频谱如图所示，以如下不同采样频率对信号进行采样，请分别画出采样信号0到100Hz的频谱。

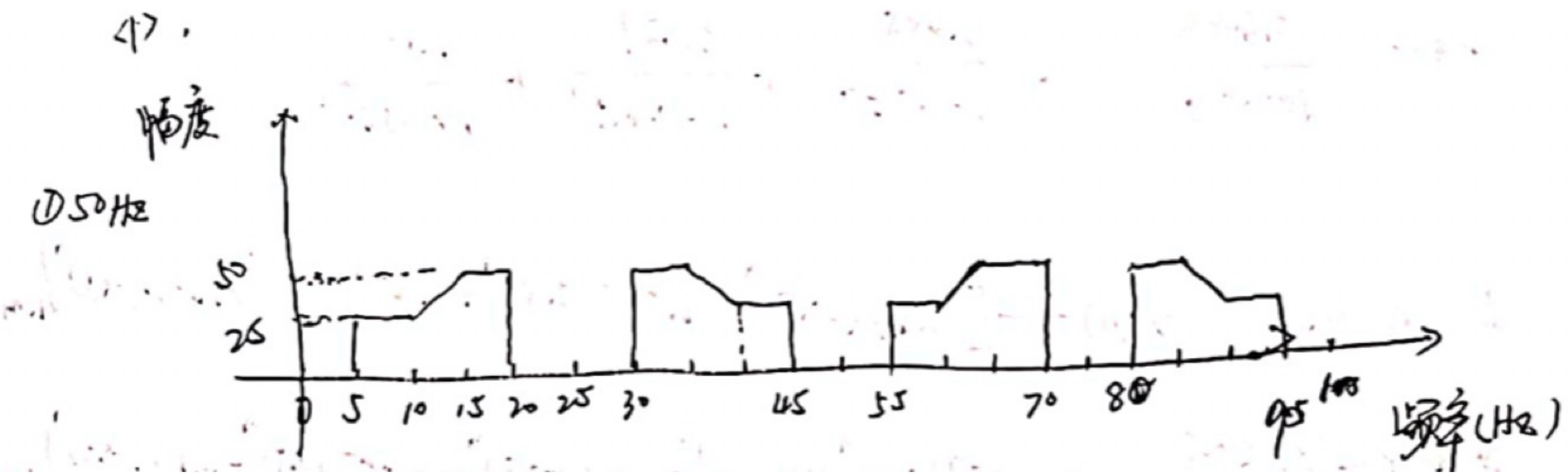
（1）50Hz

（2）20Hz时，有频谱混叠吗，能否画出混叠后的频谱



正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答



此题的考点1为实函数的频谱是共轭对称的，其幅度谱为偶函数。模拟信号、物理信号（区别于数字信号）一般表示实函数。考点2为采样后信号变为原来的1/Ts倍，即原来的fs倍。

这题因为实信号的频谱是共轭对称的，第二小问，发生频谱混叠，叠加以后，不能直接相加。所以此时无法根据已知信息画出混叠后的频谱