1. 命题可记为 $(\forall t\in\mathbb{Z})\ f(t)=-f(t) \Rightarrow (\forall k\in\mathbb{Z}) X(k)=-X(-k)$, $X(k)=\mathrm{DFT}[f(t)]$

证明：
$$X(-k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W_N^{-nk}$$
$$=-\sum_{n=0}^{N-1} x(-n)W_N^{-nk}$$
$$=-x(0)W_N^{0}-\sum_{n=1}^{N-1}x(N-n)W_N^{(N-n)k}$$
$$=-x(0)W_N^{0}-\sum_{m=1}^{N-1}x(m)W_N^{mk}$$
$$=-\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$
$$=-X(k),\ k=0,1,\cdots N-1$$

2. ①
$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-nk}X(k)$$
$$=2\left[\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}W_N^{-2nk}X(2k)+\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}W_N^{-n(2k+1)}X(2k+1)\right]$$
$$=2\left[\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}W_{N/2}^{-nk}G(k)+W_N^{-n}\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}W_{N/2}^{-nk}H(k)\right]$$
$$=2g(n)+2W_N^{-n}h(n),\quad n=0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$
$$x(n+\tfrac{N}{2})=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-(n+\frac{N}{2})k}X(k)$$
$$=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}W_N^{-(n+\frac{N}{2})2k}X(2k)+\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}W_N^{-(n+\frac{N}{2})(2k+1)}X(2k+1)\right]$$
$$=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}W_{N/2}^{-nk}G(k)+\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}W_{N/2}^{-nk}H(k)\,W_N^{\frac{N}{2}-n}\right]$$
$$=2\cdot g(n)-2W_N^{-n}h(n),\quad n=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

②.
$$x(3)=2x_{0,2,4,6}(3)+2x_{1,3,5,7}(3)W_8^{-3}$$
$$=2\left[2x_{0,4}(1)-2W_4^{-1}x_{2,6}(1)\right]+2W_8^{-3}\left[2x_{1,5}(1)-2W_4^{-1}x_{3,7}(1)\right]$$
$$=4x_{0,4}(1)-4j\,x_{2,6}(1)+2\sqrt{2}(j-1)x_{1,5}(1)+2\sqrt{2}(j+1)x_{3,7}(1)$$

3. 由于 $f(t)$ 是周期信号，因此可以 FS 展开，得：
$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_K e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$
注意到 $f(t)$ 有频率上限，即可以找到 k_0，使得
$$f(t)=\sum_{k=0}^{k_0}F_K e^{j\cdot\frac{2\pi}{T}kt}\qquad ①$$
考虑 $X(k)$ 的 IDFT，又有：
$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-nk}X(k)$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk},\quad n=0,1,\cdots,N-1$$
由于每次抽样均满足采样定理，因此对上式做周期内的n点采样的结果可恢复为原信号的形式：
$$f(n\cdot\tfrac{T}{N})=\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$
取 $t=n\cdot\frac{T}{N}$，有 $f(t)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$ ②

对比①②，可知 $F_K=\frac{X(k)}{N}$

整理系数有 $X(k)=NF_K$, $k=0,1,\dots,N-1$