实数
- 代数数：若$x_0\in\mathbb{R}$是整系数方程$a_0x^n+\cdots+a_n=0$的根，其中$a_0,\cdots,a_n\in\mathbb{Z}$，则$x_0$是代数数
- 超越数：不是代数数的实数

可数集：若R的一个子集S可与自然数的一个子集构成一一对应，则S是可数集。 $Q\cong N$

☆ R中，代数数出现概率为0，超越数出现概率为1.

例：π、e、$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$、$\pi^{\sqrt{2}}$、e^{π}、$\ln\pi$是超越数

复数表示方法：1/ $z=x+iy$ $\quad x,y\in\mathbb{R}$

2/ $z\neq0$时，$z=re^{i\theta}$ 其中$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}>0$ $\quad\theta\in[0,2\pi)$

$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ Euler公式

$z\to\infty\iff r\to+\infty$

$z_1,z_2\neq0$时，$\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$，$\arg(\frac{z_1}{z_2})=\arg(z_1)-\arg(z_2)$

内点 $z_0\in D$. 若$\exists\delta>0$，当$|z-z_0|<\delta$时，$\forall z\in D$，则称z_0为D的内点

邻域 $N_\delta=\{z\,|\,|z-z_0|<\delta\}$是以$z_0$为圆心，$\delta$为半径的开圆盘

开集 由内点构成的集合

连通 $\forall z_1,z_2\in D$，存在折线$L\subset D$，使L首尾连接z_1,z_2

折线 有限个直线段的并 [无穷长曲线面积可以非0]

区域 连通的开集

有限分式 $f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 其中$P_n(z)$、$Q_m(z)$是复系数n/m次多项式

例 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$ 证：$\triangle z_1z_2z_3$是正三角形

补充证法：$f_3(z)=\prod_{k=1}^{3}(z-z_k)=z^3-(\sum z_i)z^2+(\sum z_iz_j)z-z_1z_2z_3$ $\quad|z_k|=r\iff|z_k|^2=z_k\bar{z}_k=r^2\Rightarrow\frac{1}{z_k}=\frac{\bar{z}_k}{r^2}$

$$\sum z_iz_j=z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=\frac{z_1z_2z_3}{r^2}(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3)=\frac{z_1z_2z_3}{r^2}\overline{(z_1+z_2+z_3)}=0 \qquad \sum z_i=0$$

则$f_3(z)=z^3-z_1z_2z_3=z^3-r^3e^{i\theta_0}$ （设$z_k=re^{i\theta_k}$ $(k=1,2,3)$ $\theta_0=\theta_1+\theta_2+\theta_3$） 分圆多项式 ⇓ 零点构成圆内接正n边形

$f_3(z)=0\Rightarrow z=z_k=re^{\frac{i(\theta_0+2(k-1)\pi)}{3}}$ $(k=1,2,3)$

[推广] $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=r>0 \quad z_1+z_2+z_3+z_4=0$

$$f_4(z)=\prod_{k=1}^{4}(z-z_k)=z^4-\underbrace{(\sum z_i)}_{=0}z^3+\underbrace{(\sum z_iz_j)}_{=\sigma_2}z^2-\underbrace{(\sum z_iz_jz_k)}_{=0}z+z_1z_2z_3z_4$$

$$=z^4+az^2+b$$

$\Rightarrow z_3=-z_1,\ z_4=-z_2 \quad \Rightarrow$ 矩形

补充充要条件: $\sum z_iz_j=0 \ (\sum z_i^2=0) \Rightarrow$ 正方形

$\begin{cases} n=2m \longrightarrow m\text{个条件} \\ n=2m+1 \longrightarrow m\text{个条件} \end{cases}$

$\sigma_2=0 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2=0$

$\Leftrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ re^{i\theta_2}}}{z_2}=\pm iz_1=\pm e^{\frac{\pi}{2}i}z_1$

$=\pm re^{i(\theta_1+\frac{\pi}{2})}$

$\Leftrightarrow \theta_2-\theta_1=\arg z_2-\arg z_1$

$=\arg\frac{z_2}{z_1}=\pm\frac{\pi}{2}$ (负号舍)

同理 $\theta_4-\theta_3=\theta_3-\theta_2=\frac{\pi}{2}$