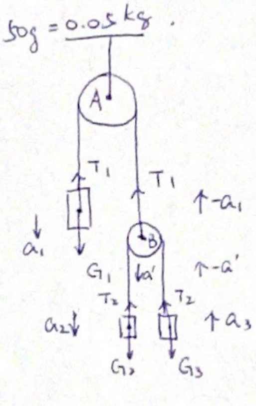
2.5 已知：物体质量分别为：$m_1 = 200g = 0.2kg$，$m_2 = 100g = 0.1kg$，$m_3 = 50g = 0.05kg$.



求：每个物体的加速度 a_1, a_2, a_3，绳的张力 T_1, T_2

解：设物体 m_2 相对滑轮 B 的加速度为 a'，则有

$$a_2 = -a_1 + a'$$

$$a_3 = |-a_1 - a'| = a_1 + a'$$

由牛顿第二定律：

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad ①$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 = m_2(a' - a_1) \quad ②$$

$$T_2 - m_3 g = m_3 a_3 = m_3(a_1 + a') \quad ③$$

又因为 $T_1 = 2T_2$，故有

$m_3 \times ② - m_2 \times ③$：$2m_2 m_3 g - (m_2+m_3)T_2 = -2m_2 \cdot m_3 a_1$

注意到 $T_2 = \frac{1}{2}T_1 = \frac{1}{2}m_1(g_1 - a_1)$，代入有

$$a_1 = \frac{(m_1m_2 + m_1m_3 - 4m_2m_3)g}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} = \frac{0.2\times0.1 + 0.2\times0.05 - 4\times0.1\times0.05}{0.2\times0.1 + 0.2\times0.05 + 4\times0.1\times0.05} \times 9.8 = 1.96\ m/s^2$$

另，②+③：$m_2 g - m_3 g = (m_2+m_3)a' + (m_3 - m_2)a_1$

即 $$a' = \frac{(m_2 - m_3)g - (m_3 - m_2)a_1}{m_2 + m_3} = \frac{(0.1-0.05)\times9.8 - (0.05-0.1)\times1.96}{0.1+0.05} = 3.92\ m/s^2$$

又 $a_2 = a' - a_1 = 3.92 - 1.96 = 1.96\ m/s^2$

$a_3 = a_1 + a' = 1.96 + 3.92 = 5.88\ m/s^2$

$T_1 = m_1(g - a_1) = 0.2 \times (9.8 - 1.96) = 1.57\ N$

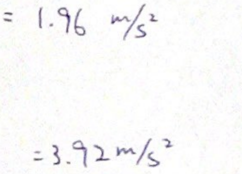
$T_2 = m_2(g - a_2) = 0.1 \times (9.8 - 1.96) = 0.784\ N$

2.7 已知：板的质量 $M = 1.5kg$，板上物体质量 $m = 2.45kg$，物体之间摩擦系数 $\mu = 0.25$.

求：抽出板需要的水平力 F.

解：设板从右方抽出，则受力如图

由牛顿第二定律，对于 M 在水平方向受力有：



$$F - f_{MG} - f_{Mm} = M \cdot a_m$$

即 $F - \mu(Mg + mg) - \mu mg = Ma_m$

化简得 $F = Ma_m + \mu Mg + 2\mu mg$

要使板抽出，必有 $a_M \geq a_m$，故

$$F \geq Ma_m + \mu Mg + 2\mu mg = M \cdot \frac{f_{mM}}{m} + \mu Mg + 2\mu mg = M \cdot \frac{\mu mg}{m} + \mu Mg + 2\mu mg = 2\mu(M+m)g$$

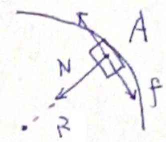
代入数字，有 $F \geq 2\times0.25\times(1.5 + 2.45)\times9.8 = 19.4N$.

清華大學 TSINGHUA UNIVERSITY 数学作业纸

班级：计01　姓名：卢逸朗　编号：2020010869　科目：大物　

2.18 已知：圆半径 R，摩擦系数 μ_k，过 A 点时速率为 V_0，

求：t 时刻后从 A 点开始的路程 S



解：对于圆周运动，在法向方向上有 $N=\frac{mv^2}{R}$

在切向方向上有 $-f=m\cdot\frac{dv}{dt}$

又有 $f=\mu_k N$

消去未知数，有：$\frac{dv}{dt}=-\frac{\mu_k\cdot v^2}{R} \Rightarrow \frac{dv}{v^2}=-\frac{\mu_k}{R}dt$

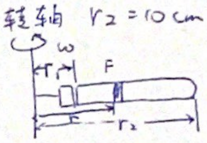
两边积分，有：$\int_{V_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=\int_0^t-\frac{\mu_k}{R}dt \Rightarrow -\frac{1}{V}+\frac{1}{V_0}=-\frac{\mu_k}{R}t \Rightarrow V=\frac{V_0R}{R+\mu_k t V_0}$

路程 $S=\int_0^t v\,dt=\int_0^t\frac{V_0R}{R+\mu_kV_0t}dt=\int_0^t\frac{V_0R}{\mu_kV_0}\cdot\frac{d(R+\mu_kV_0t)}{R+\mu_kV_0t}=\frac{R}{\mu_k}\cdot\ln(R+\mu_kV_0t)\Big|_0^t$

$=\frac{R}{\mu_k}\cdot\ln\left(1+\frac{\mu_kV_0t}{R}\right)$

2.19 已知：离心机转速 $n=5\times10^4 r/min$，试管口离转轴 $r_1=2cm$，试管底离转轴 $r_2=10cm$

求：(1) 管底和管口的加速度与 g 的比值 $\frac{a_1}{g}$，$\frac{a_2}{g}$



(2) 试管液体 $m=12g$ 时，管底承受压力 F_b

(3) 管底大分子（质子质量 10^5 倍）所受离心力 F.

解：(1) $\frac{a_1}{g}=\frac{r_1w^2}{g}=\frac{r_1(2\pi n)^2}{g}=\frac{2\times10^{-2}\times(2\pi\times\frac{5\times10^4}{60})^2}{9.8}=5.60\times10^4$

管底处：$\frac{a_2}{g}=\frac{r_2w^2}{g}=\frac{r_2(2\pi n)^2}{g}=\frac{10\times10^{-2}\times(2\pi\times\frac{5\times10^4}{60})^2}{9.8}=2.80\times10^5$

(2) 在管中离轴 r cm 处取一质元，此时质元在法向方向受力 $F+dF-F=dF$

此质元质量为 $dm=\rho Sdr$（ρ 为密度，S 为切面面积）

由牛顿第二定律，有 $dF=dm\cdot a=dm\,rw^2=\rho srw^2dr$

故管底承受压力 $F_b=\int_0^{F_b}dF=\int_{r_1}^{r_2}\rho srw^2dr=\frac{1}{2}\rho sr^2w^2\Big|_{r_1}^{r_2}=\frac{1}{2}\rho sw^2(r_2^2-r_1^2)$

$=\frac{1}{2}\rho sw^2(r_2-r_1)(r_2+r_1)=\frac{1}{2}mw^2\cdot(r_2+r_1)=\frac{1}{2}m(2\pi n)^2(r_2+r_1)=2m\pi^2n^2(r_1+r_2)$

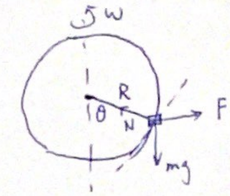
$=2\times12\times10^{-3}\times\pi^2\times\left(\frac{5\times10^4}{60}\right)^2\times(2\times10^{-2}+10\times10^{-2})=1.97\times10^4N.$

(3) 大分子所受离心力 $F=mrw^2=1.67\times10^{-27}\times10^5\times10\times10^{-2}\times(2\pi\times\frac{5\times10^4}{60})^2$

$=4.58\times10^{-16}N.$

2.25. 已知：圆环转速 ω，夹角 θ，圆环半径 R.

求：静止位置是否稳定



解：以圆环为参考系，设珠子重 m kg，则受力如图：

水平方向：$N\sin\theta - F = 0$

竖直方向：$N\cos\theta - mg = 0$

又因为 $F = m\omega^2 R\sin\theta$

故 $m\omega^2 R\sin\theta = F = N\sin\theta = \frac{mg}{\cos\theta}\cdot\sin\theta$，即 $m\sin\theta(\omega^2 R\cos\theta - g) = 0$ ①

要使珠子静止，必须有 $\theta = 0$，$\theta = \pi$ 或 $\theta = \pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$.

注意到小球切向方向受力

$$F_t = F\cos\theta - mg\sin\theta = m\omega^2 R\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta. \quad ②$$

不难发现，在静止位置时，$F_t = 0$，有 $dF_t = (m\omega^2 R(2\cos^2\theta - 1) - mg\cos\theta)\,d\theta$

即 $\frac{dF_t}{d\theta} = m\omega^2 R\left(2\cos^2\theta - 1 - \frac{g}{\omega^2 R}\cos\theta\right)$

当 $\theta = 0$ 时

$$\frac{dF_t}{d\theta} = m\omega^2 R\left(1 - \frac{g}{\omega^2 R}\right)$$

若 $1 - \frac{g}{\omega^2 R} < 0$，即 $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ 时，$dF_t, d\theta$ 异号，位置稳定，

反之，当 $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$ 时，$dF_t, d\theta$ 同号，不稳定.

当 $\theta = \pi$ 时

$$\frac{dF_t}{d\theta} = m\omega^2 R\left(1 + \frac{g}{\omega^2 R}\right) > 0，不稳定.$$

当 $\theta = \pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$ 时

$$\frac{dF_t}{d\theta} = m\omega^2 R\left(\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2 - 1\right)$$

若 $\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2 - 1 < 0$，即 $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ 时，稳定，

反之若 $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$ 时，不稳定.