



第三章 树Ⅱ

计算机系网络所：张小平



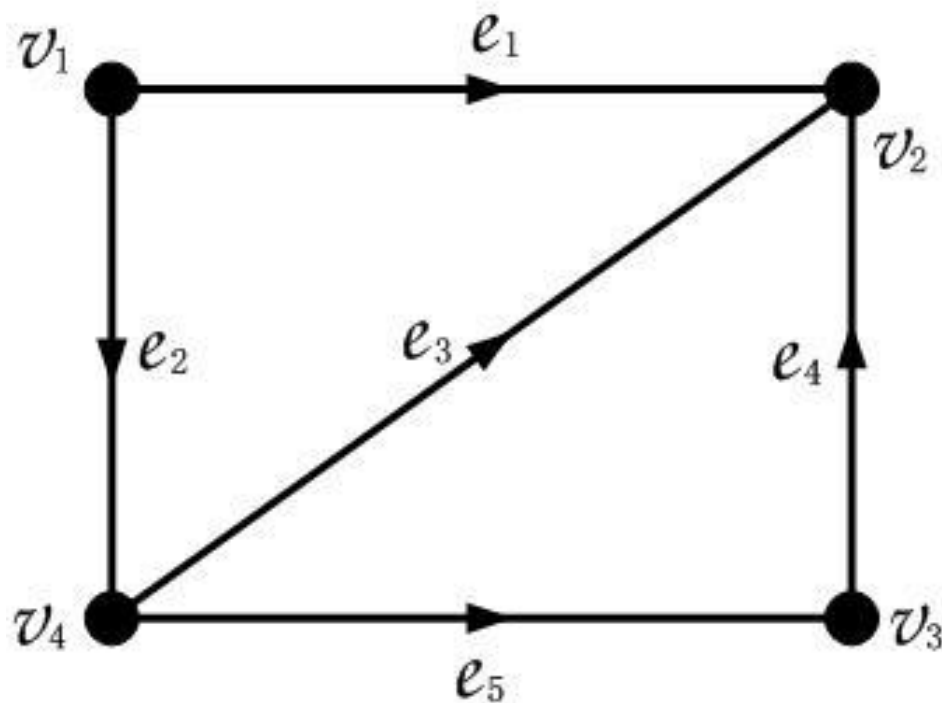
主要内容

- 3.1 树的有关定义
- 3.2 基本关联矩阵及其性质
- 3.3 支撑树的计数
- 3.4 回路矩阵与割集矩阵
- 3.5 支撑树的生成
- 3.6 Huffman树
- 3.7 最短树
- 3.8 最大分枝



支撑树的计数

- 给定连通图 G ，其支撑树可以有多少个？





支撑树的计数

- 定理3.3.1 (Binet-Cauchy定理) 已知两个矩阵

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{n \times m}$, 满足 $m \leq n$, 则

$$\det(AB) = \sum_i A_i B_i$$

其中 A_i , B_i 都是 m 阶行列式

A_i 是从 A 中取不同的 m 列所成的行列式;

B_i 是从 B 中取相应的 m 行构成的行列式;

结果为全部组合求和



支撑树的计数

例：已知

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{求 } \det(AB)$$

解：方法1：由矩阵乘法

$$AB = \begin{bmatrix} 28 & 17 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

因此 $\det(AB) = 28 \times 16 - 17 \times 2 = 414$



支撑树的计数

方法2: 根据比内-柯西定理计算

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) = \sum_i A_i B_i$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 414 \end{aligned}$$



支撑树的计数 - 有向连通图

- 定理3.3.2 设 B_k 的是有向连通图 $G = (V, E)$ 的某一基本关联矩阵, 则 G 的不同支撑树的数目是
$$\det(B_k B_k^T)$$

证明: 设 $B_k = (b_{ij})_{(n-1) \times m}$

- 由比内-柯西定理, $\det(B_k B_k^T) = \sum_i |B_i| |B_i^T|$
- 其中 $|B_i|$ 是 B_k 的某 $n-1$ 阶子阵的行列式
- $|B_i^T|$ 是对应的 B_k^T 的 $n-1$ 阶子阵的行列式
- 有 $|B_i| = |B_i^T|$



支撑树的计数 - 有向连通图

- 因此, 可以得到

$$\det(B_k B_k^T) = \sum_i |B_i| |B_i^T| = \sum_i |B_i|^2$$

- 由定理3.2.6, 如果 $|B_i| \neq 0$, 则其所对应的边构成 G 的一棵树

- 再由定理3.2.2, $|B_i|$ 只能为0, 1或-1

- 因此, $\det(B_k B_k^T)$ 恰恰是 G 中不同树的数目

证毕!



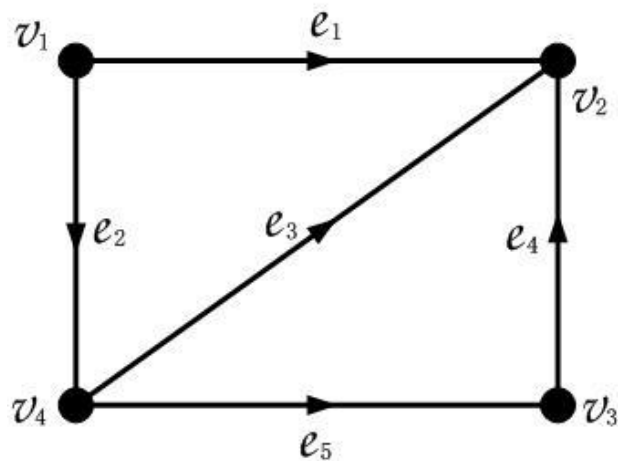
支撑树的计数

- 采用比内-柯西定理计算矩阵乘积的行列式通常比较复杂
- 其价值在于：揭示了乘积矩阵的行列式与各矩阵的子阵行列式之间的关系
- 连通图中不同支撑树的计数恰好利用了这种关系，从而可以用代数的方法很容易解决支撑树的计数问题



支撑树的计数 - 有向连通图

例：



$$B = \begin{bmatrix} v_1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ v_3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{red arrow}} B_4 = \begin{bmatrix} v_1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ v_3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & & & & & & \\ & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}$$

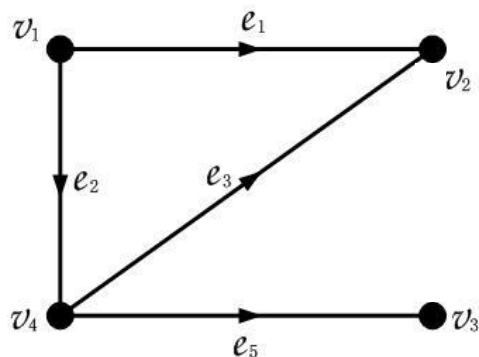
$$\det(B_4 B_4^T) = 8$$



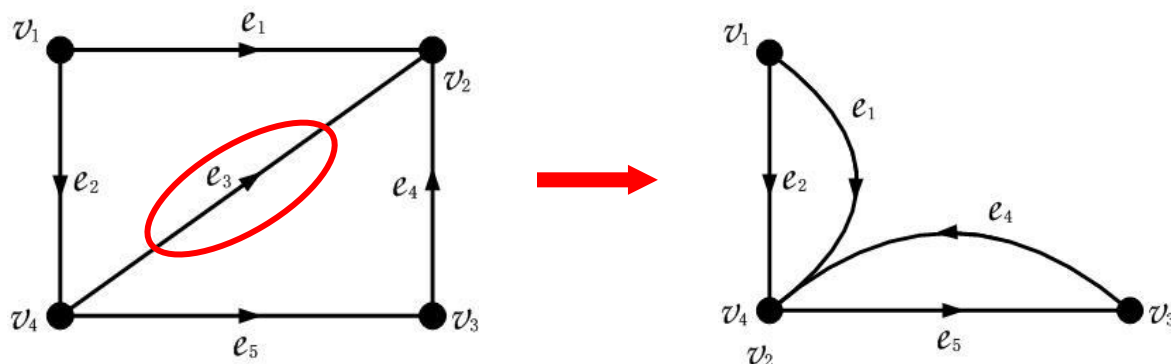
支撑树的计数 - 有向连通图

思考:

- 计算 G 中不含某特定边 e 的树的数目, 如何计算?



- 计算 G 中必定含特定边 e 的树的数目, 如何计算?





支撑树的计数 - 无向连通图

思考：

- 无向连通图的关联矩阵不存在 -1 元素，如何计算其支撑树的数目？
- 对无向连通图 G 的每边任给一个方向，得到有向连通图 G' ，则 G' 的支撑树与 G 的支撑树一一对应！



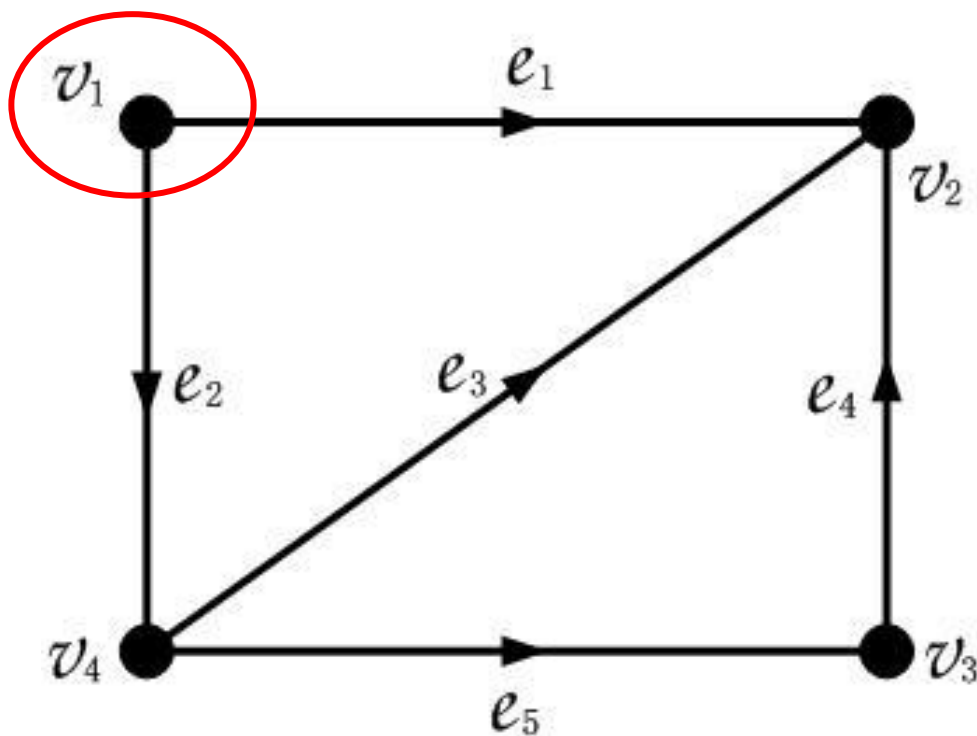
支撑树的计数—小结

- 有向连通图中支撑树的计数
 - 采用基本关联矩阵计算
 - 含特定边的计数
 - 不含特定边的计数
- 无向连通图中支撑树的计数



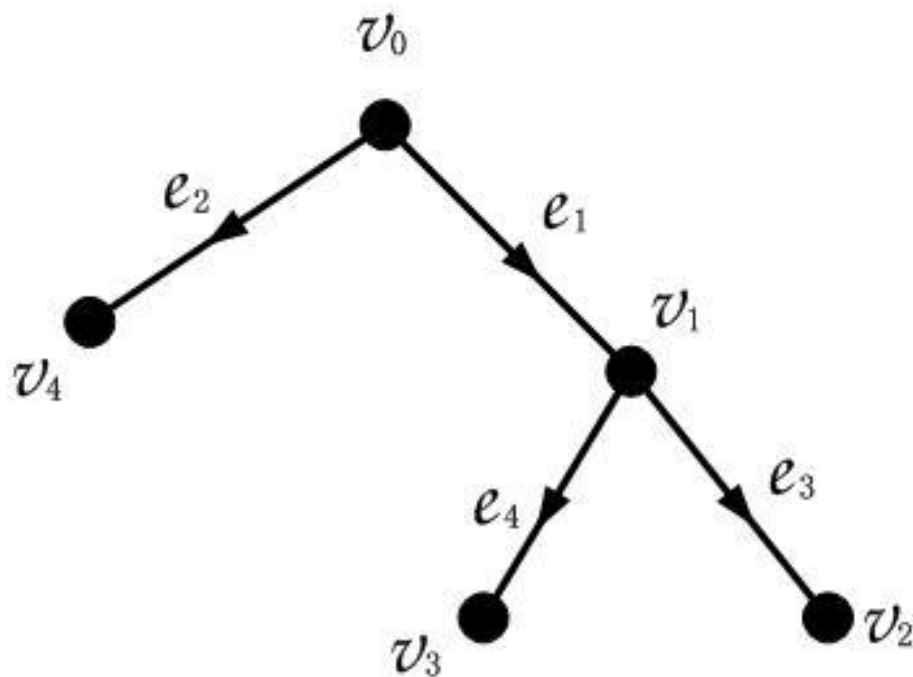
支撑树的计数

- 给定连通图 G ，其支撑树可以有多少个？
- 以某结点为根的支撑树可以有多少个？





支撑树的计数 - 根树的计数

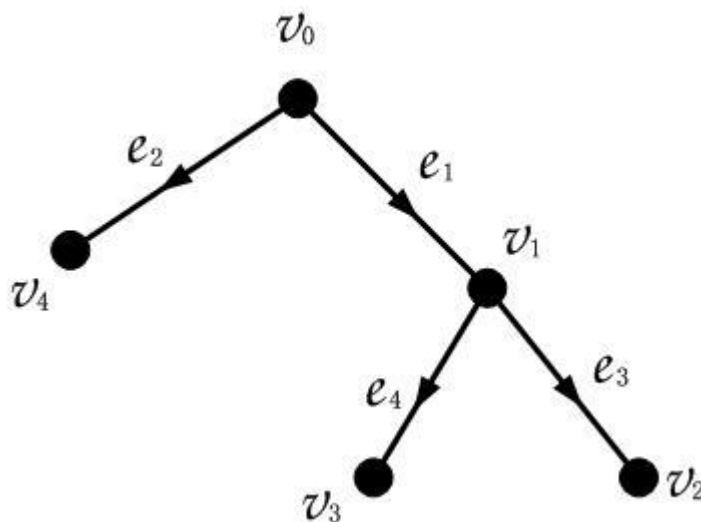




支撑树的计数 – 根树的计数

- 定义3.3.1 T 为有向树，若 T 中存在某结点 v_0 的负度为0，其余结点负度为1，则称 T 为以 v_0 为根的外向树，或称 **根树**，用 \vec{T} 表示。

例：



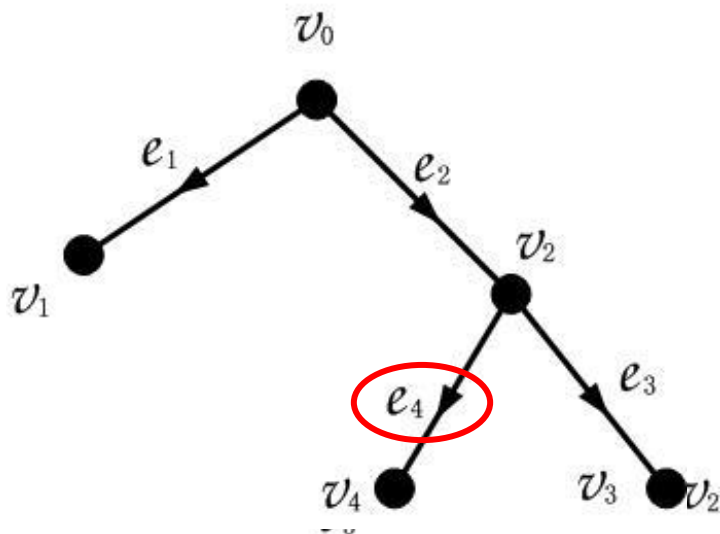
$$B_0 = \begin{bmatrix} v_0 & & & & \\ v_1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ v_4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix}$$

特点：除 v_0 外，每行只有一个 -1



支撑树的计数 - 根树的计数

- 如果对根树的结点和边重新进行编号, 使每条边 $e = (v_i, v_j)$ 都满足 v_i 的编号小于 v_j 的编号, 同时 $e = (v_i, v_j)$ 的编号为 e_j



$$B_0' = \begin{bmatrix} v_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix}$$

思考: 为什么按照规则编号后, 根树中根结点对应的基本关联矩阵一定是上三角矩阵?

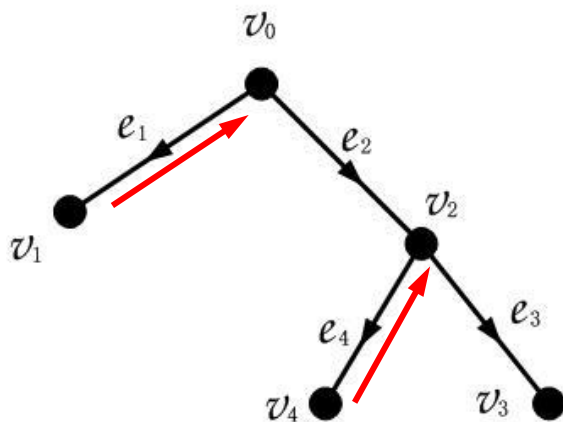


支撑树的计数 - 根树的计数

思考：

- 无向树是否一定有“根”？
- 有向树是否一定有“根”？
- 非根数基本关联矩阵是否可调整为上三角矩阵？

非根树基本关联矩阵
可调整为上三角矩阵且
对角线上将出现“1”元素



$$B_0' = \begin{bmatrix} v_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix}$$



支撑树的计数 – 根树的计数

- 令 \bar{B}_k 表示有向连通图 G 的基本关联矩阵 B_k 中全部 1 元素改为 0 后的矩阵。
- 相应地， G 的支撑树的基本关联矩阵，可调整为上三角矩阵，但原先的 “1” 变为了 “0”。
 - 如果该树为非根树，则对角线将出现 “0” 元素
 - 如果该树为根树，则对角线全部为 “-1” 元素

行列式为零

行列式绝对值为 “1”



支撑树的计数 - 有向连通图

- 定理3.3.2 设 B_k 的是有向连通图 $G=(V,E)$ 的某一基本关联矩阵, 则 G 的不同树的数目是

$$\det(B_k B_k^T)$$

- 定理3.3.3 有向连通图 G 中以 v_k 为根的根树数目是

$$\det(\bar{B}_k B_k^T)$$



支撑树的计数 – 根树的计数

- 证明：

- 由比内-柯西定理 $\det(\vec{B}_k B_k^T) = \sum_i |\vec{B}_i| |B_i^T|$
- 若 $|B_i^T| \neq 0$ ，说明这 $n-1$ 条边构成了 G 的一棵树
- 若 $|\vec{B}_i| \neq 0$ ，说明该树是以 v_k 为根的根树。
- 二者的乘积非零说明存在一棵 v_k 为根的根树。
- 由于遍历了所有 $n-1$ 条边的组合，因此

$$\det(\vec{B}_k B_k^T) = \sum_i |\vec{B}_i| |B_i^T|$$

为以 v_k 为根的根树的数目！



支撑树的计数 – 根树的计数

思考：

- 如何计算以 v_0 为根节点不含某特定边 e 的根树的数目？

$$G' = G - e$$

计算 G' 的以 v_0 为根节点根树的数目即可



支撑树的计数 – 根树的计数

- 如何计算以 v_0 为根节点必含某特定边 e 的根树的数目？
 - 将该边收缩为一点 **×**
 - 先计算以 v_0 为根节点的根树数目，再计算不含边 e 的根树数目，求差值即可。
 - 其他计算方法：设 $e = (u, v)$
将除 e 之外所有以 v 为终点的边都删掉得到 G' ，
然后计算 G' 的以 v_0 为根节点根树的数目即可



支撑树的计数—小结

- 有向连通图支撑树的计数
 - 比内—柯西定理
 - 基本关联矩阵性质
 - 含特定边、不含特定边的计算方法
- 无向连通图支撑树的计数
 - 无向 \rightarrow 有向变换
- 有向连通图根树的计数
 - 根树基本关联矩阵的性质和特点
 - 计算方法



主要内容

- 3.1 树的有关定义
- 3.2 基本关联矩阵及其性质
- 3.3 支撑树的计数
- 3.4 回路矩阵与割集矩阵
- 3.5 支撑树的生成
- 3.6 Huffman树
- 3.7 最短树
- 3.8 最大分枝



回路矩阵与割集矩阵 — 回路矩阵

- 定义3.4.0 有向连通图 $G = (V, E)$ 中存在回路 C 。给定回路 C 一个参考方向，则 C 中的边如和此方向一致，称之为**正向边**，否则称之为**反向边**。

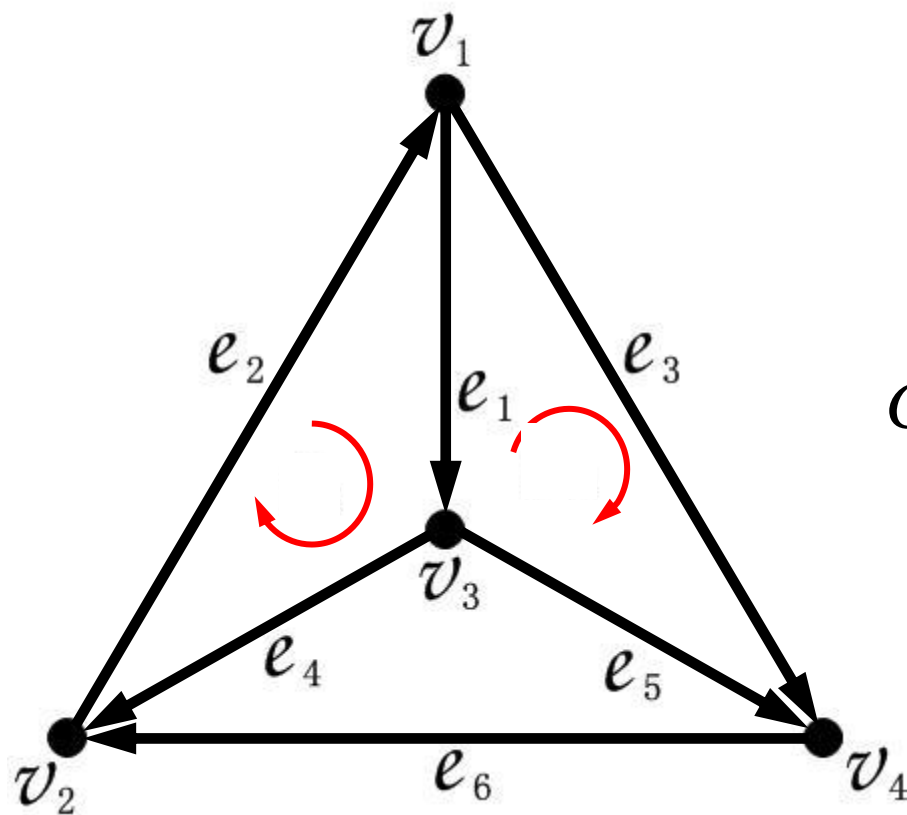


回路矩阵与割集矩阵—回路矩阵

- 定义3.4.1 有向连通图G的全部初级回路构成的矩阵，称为G的完全回路矩阵，记为 C_e ：

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & , e_j \in C_i \text{ 且与回路 } C_i \text{ 方向一致} \\ -1 & , e_j \in C_i \text{ 且与回路 } C_i \text{ 方向相反} \\ 0 & , \text{ 其他} \end{cases}$$

例：



$$C_e = \begin{bmatrix} c_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ c_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ c_5 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ c_6 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ c_7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}$$



回路矩阵与割集矩阵 — 回路矩阵

思考：

- 图 G 中会有多少个初级回路？
- 考虑极端情况： G 为完全图
 - 任意不少于三个节点就可以形成一个初级回路

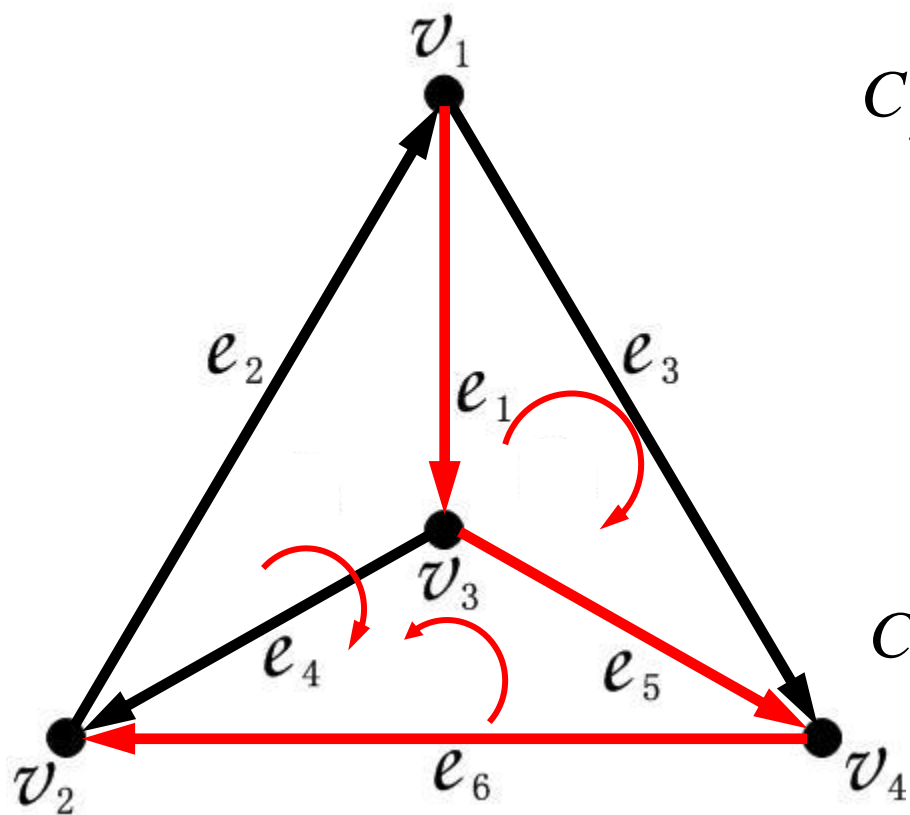


回路矩阵与割集矩阵 — 回路矩阵

- 定义3.4.2 当有向图 $G=(V,E)$ 的支撑树 T 确定后，每条余树边 e 所对应的回路称为**基本回路**，该回路的方向与 e 的方向一致。由全部基本回路构成的矩阵称为 G 的**基本回路矩阵**，记为

$$C_f$$

例：



$$C_f = \begin{bmatrix} c_{e2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ c_{e3} & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ c_{e4} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}$$

$$C_f = \begin{bmatrix} c_{e2} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \end{matrix}} \\ c_{e3} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 & -1 & 0 \end{matrix}} \\ c_{e4} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 & -1 \end{matrix}} \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_1 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}$$

显然，基本回路矩阵的秩为 $m - n + 1$ $C_f = (I \quad C_{f_{12}})$



回路矩阵与割集矩阵 — 回路矩阵

- 定理3.4.1 有向连通图 $G=(V,E)$ 的关联矩阵 B 和完全回路矩阵 C_e 的边次序一致时, 恒有:

$$BC_e^T = 0$$

证明: 设 $D = BC_e^T$, 则

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} \cdot c_{jk}$$

其中 b_{ik} 是结点 v_i 和边 e_k 的关联情况

c_{jk} 是回路 C_j 和边 e_k 的关联情况

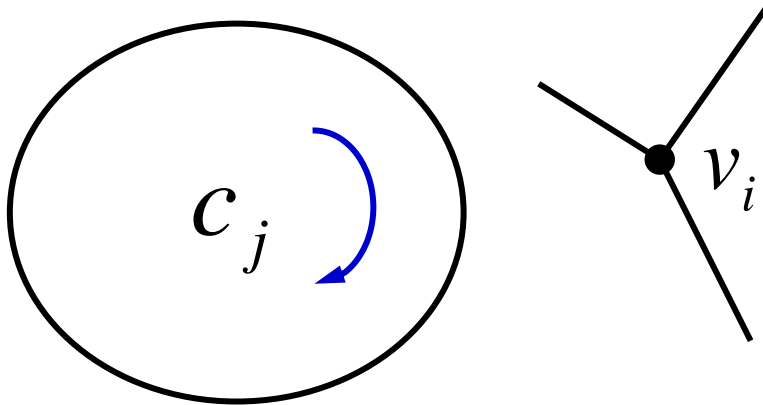


回路矩阵与割集矩阵 - 回路矩阵

回路 C_j 与结点 v_i 只有两种情况:

- C_j 不经过结点 v_i :

- 与 v_i 关联的任一边都不是 C_j 中的边
- 此时 b_{ik} 不为零时, c_{jk} 一定为零
- c_{jk} 不为零时, b_{ik} 一定为零



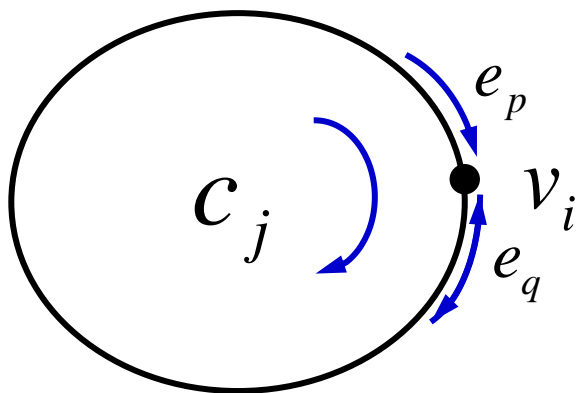
$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} \cdot c_{jk} = 0$$



回路矩阵与割集矩阵 — 回路矩阵

– C_j 经过结点 v_i :

- 则 C_j 必定经过与 v_i 关联的两条边 e_p 和 e_q
- 若 e_p 和 e_q 同向, 则 c_{jp} 和 c_{jq} 同正负, b_{ip} 和 b_{iq} 一正一负
- 若 e_p 和 e_q 反向, 则 c_{jp} 和 c_{jq} 一正一负, b_{ip} 和 b_{iq} 同正负



$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} \cdot c_{jk} = 0$$

$$BC_e^T = 0$$

证毕!



回路矩阵与割集矩阵 — 回路矩阵

- 思考:

- 关联矩阵任一行与完全回路矩阵任一行向量的转置乘积是否为零?
- 关联矩阵与基本回路矩阵的转置矩阵的乘积是否为零?
- 基本关联矩阵与基本回路矩阵的转置矩阵乘积是否为零?



回路矩阵与割集矩阵 — 回路矩阵

- 推论：有向连通图的基本关联矩阵 B_k ，基本回路矩阵 C_f ，在边次序一致的情况下，有

$$B_k C_f^T = 0$$



回路矩阵与割集矩阵 — 回路矩阵

- 定理3.4.4 若有向连通图 $G=(V,E)$ 的基本关联矩阵 B_k 是和基本回路矩阵 C_f 的边次序一致, 并设 $C_f=(I \quad C_{f_{12}})$, $B_k=(B_{11} \quad B_{12})$, 则

$$C_{f_{12}} = -B_{11}^T \cdot (B_{12}^{-1})^T$$

证明:

— 由推论知 $B_k C_f^T = 0$, 写成块矩阵形式

$$(B_{11} \quad B_{12}) \begin{bmatrix} I \\ C_{f_{12}}^T \end{bmatrix} = 0 \rightarrow B_{12} \cdot C_{f_{12}}^T = -B_{11}$$

证毕!





回路矩阵与割集矩阵—回路矩阵

- 定理3.4.4说明了基本关联矩阵和基本回路矩阵之间的关系
 - 说明根据基本关联矩阵，可以通过计算得到基本回路矩阵



回路矩阵与割集矩阵—回路矩阵

- 定理3.4.2 有向连通图 $G=(V,E)$ 完全回路矩阵的秩为 $(m-n+1)$

证明：

- 基本回路矩阵为完全回路矩阵的子阵（列数相等，行数不等）。
- 基本回路矩阵秩为 $m-n+1$
- 则完全回路矩阵的秩不小于 $m-n+1$

$$\text{即：} \quad \text{ran}(C_e) \geq m-n+1$$



回路矩阵与割集矩阵—回路矩阵

- sylvester定理： 设 A, B 分别为 $n \times m$ 与 $m \times s$ 的矩阵， 则 $\text{ran}(AB) \geq \text{ran}(A) + \text{ran}(B) - m$

$$B: n \times m \quad \text{ran}(B) = n - 1$$

$$C_e^T: m \times s \quad \text{ran}(C_e^T) = ?$$

$$BC_e^T = 0 \Rightarrow \text{ran}(BC_e^T) = 0$$

$$\text{即: } \text{ran}(C_e^T) \leq m - n + 1$$

$$\text{故: } \text{ran}(C_e) = m - n + 1$$

证毕！



回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 定义3.4.3 有向连通图 G 中 $(m - n + 1)$ 个互相独立的回路组成的矩阵，称为 G 的回路矩阵，记为 C 。
- 回路矩阵 C 具有以下几个简单性质：
 - 基本回路矩阵 C_f 是回路矩阵
 - $BC^T = 0$ ，其中 B 与 C 的边次序一致
 - $C = P \cdot C_f$ ，其中 P 为非奇异方阵， C 与 C_f 边次序一致



回路矩阵与割集矩阵 — 回路矩阵

- 定理3.4.3 连通图 $G=(V,E)$ 的回路矩阵 C 的任一 $(m-n+1)$ 阶子阵行列式非零, 当且仅当这些列对应于 G 的某一棵余树

证明:



回路矩阵与割集矩阵—回路矩阵

- 充分性：已知余树 \bar{T} \Rightarrow 对应行列式非零
 - 可构造出G的基本回路矩阵 $C_f = (I \quad C_{f_{12}})$ 。
 - 对给定的回路矩阵 C 进行列交换，使其边序与 C_f 一致，这样可写为 $C = (C_{11} \quad C_{12})$ ，其中 C_{11} 对应余树 \bar{T}
 - 由性质3， $C = P \cdot C_f$ ，即
$$(C_{11} \quad C_{12}) = P(I \quad C_{f_{12}}) = (P \quad P \cdot C_{f_{12}})$$
 - 因此， $C_{11} = P$ ， P 非奇异，即 C_{11} 行列式非零

充分性证毕



回路矩阵与割集矩阵 - 回路矩阵

- 必要性：已知回路矩阵 C 的某 $(m-n+1)$ 阶子阵行列式非零。
 - 将这 $(m-n+1)$ 列放在前面，写为 $C = (C_{11} \quad C_{12})$
 - 求证 C_{11} 对应的是一棵余树（反证法）：
 - 假设 C_{12} 对应的不是一棵树，则 C_{12} 中必含回路，不妨设为 C_x
 - 由于回路矩阵的各行线性无关，且完全回路矩阵秩为 $m-n+1$

任意一个回路都可以由回路矩阵各行向量线性表示！





回路矩阵与割集矩阵 — 回路矩阵

- 因此, C_x 一定可以由 C 中各行线性表示, 即 C 经过行初等变换, 可以得到表示 C_x 的行向量

$$C = (C_{11} \quad C_{12}) \xrightarrow{\text{red arrow}} C' = \begin{bmatrix} C_{11}' & C_{12}' \\ \textcircled{C_x} & \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{red arrow}} C' = \begin{bmatrix} C_{11}' & C_{12}' \\ \boxed{0} & C_{12}'' \end{bmatrix}$$

- 即 C_{11} 可经过行初等变换, 可得到
- 说明 C_{11} 行列式为零, 与前提矛盾。
- 因此 C_{12} 对应的是一棵树, C_{11} 对应其余树!

必要性证毕!



回路矩阵与割集矩阵 — 回路矩阵

- 定理3.4.3 连通图 $G=(V,E)$ 的回路矩阵 C 的任一 $(m-n+1)$ 阶子阵行列式非零, 当且仅当这些列对应于 G 的某一棵余树

VS

- 定理3.2.6 令 B_k 是有向连通图 G 的基本关联矩阵, 那么 B_k 的任意 $n-1$ 阶子阵行列式非零的充要条件是其各列所对应的边构成 G 的一棵支撑树。



主要内容

- 3.1 树的有关定义
- 3.2 基本关联矩阵及其性质
- 3.3 支撑树的计数
- **3.4 回路矩阵与割集矩阵**
- 3.5 支撑树的生成
- 3.6 Huffman树
- 3.7 最短树
- 3.8 最大分枝



回路矩阵与割集矩阵 – 割集矩阵

- 定义3.4.4 设 S 为有向图 $G=(V,E)$ 的边子集, 若
 - $G' = (V, E - S)$ 比 G 的连通支数多1
 - 对任意 S 的真子集 S' , $G'' = (V, E - S')$ 与 G 的连通支数相同

则称 S 为 G 的一个割集

- 一般给割集 S 一个方向, 称它为有向割集

?

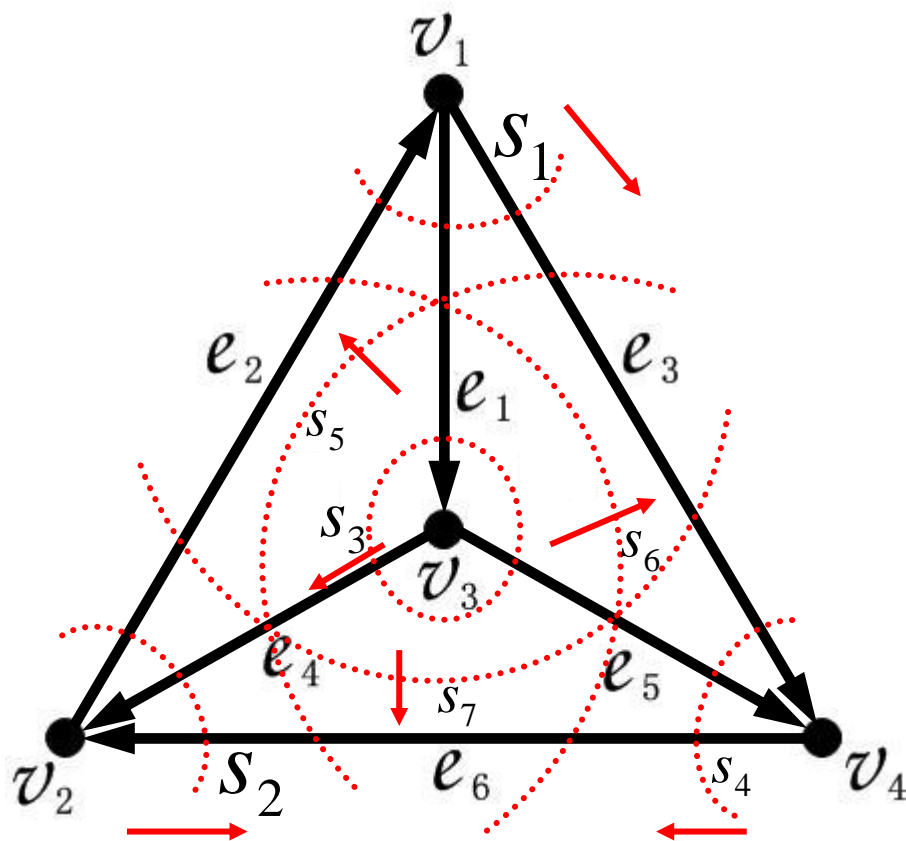


回路矩阵与割集矩阵—割集矩阵

- 定义3.4.5 有向连通图G的全部割集构成的矩阵，称为G的完全割集矩阵，记为 S_e ：

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & , e_j \in S_i \text{ 且与割集 } S_i \text{ 方向一致} \\ -1 & , e_j \in S_i \text{ 且与割集 } S_i \text{ 方向相反} \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

例：



$$S_e = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ s_3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ s_4 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ s_5 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ s_6 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ s_7 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}$$



回路矩阵与割集矩阵 — 回路矩阵

思考：

- 图G中会有多少个割集？
 - 一个割集可将连通图分为两个部分，连通图的一个划分就对应一个割集
 - n 个结点划分为两个部分，有多少种分法？
 - 设想将 n 个不同的球放入两个盒子

$$\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

完全割集矩阵规模为 $(2^{n-1} - 1) \times m$

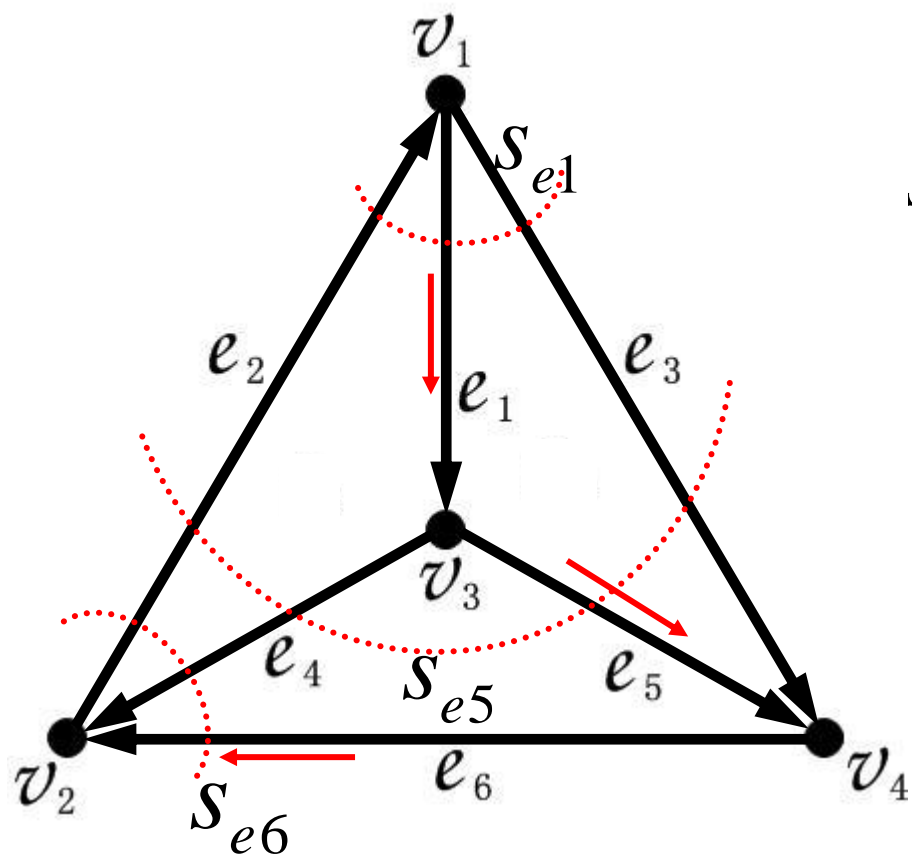


回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定义3.4.6 设 T 是连通图 G 的一棵树， e_i 是树枝。对应 e_i 存在 G 的割集 S_i ， S_i 只包括一条树枝 e_i 及某些余树枝，且与 e_i 的方向一致。此时称 S_i 为 G 的对应树 T 的一个**基本割集**
- 定义3.4.7 给定有向连通图 G 的一棵树 T ，由对应 T 的全部基本割集组成的矩阵称为**基本割集矩阵**，记为

$$S_f$$

例：



$$S_f = \begin{bmatrix} s_{e1} & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_{e5} & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ s_{e6} & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}$$



$$S_f = \begin{bmatrix} s_{e1} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix}} \\ s_{e5} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \end{matrix}} \\ s_{e6} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_1 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}$$

S_f 的秩为 $n-1$

$$S_f = (S_{f_{11}} \quad I)$$



回路矩阵与割集矩阵—割集矩阵

- 定理3.4.5 当有向连通图 G 的完全回路矩阵 C_e 和完全割集矩阵 S_e 的边次序一致时, 有

$$S_e C_e^T = 0$$

证明: 设 $D = S_e C_e^T$, 则

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m s_{ik} \cdot c_{jk}$$

其中 s_{ik} 是第 i 个割集 s_i 中 e_k 的情况

c_{jk} 是第 j 个回路 c_j 中 e_k 的情况



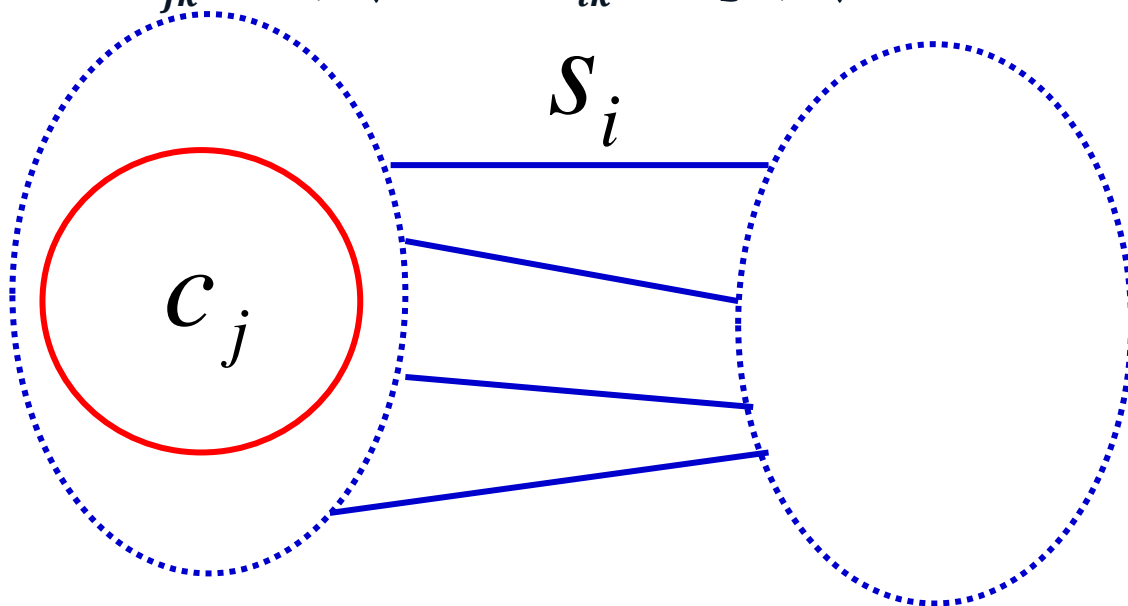
回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

回路 C_j 与割集 S_i 只有两种情况：

－ C_j 与割集 S_i 无公共边（不相交）：

- 此时 S_i 中的任一边都不是 C_j 中的边
- s_{ik} 不为零时， c_{jk} 一定为零
- c_{jk} 不为零时， s_{ik} 一定为零

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m s_{ik} \cdot c_{jk} = 0$$

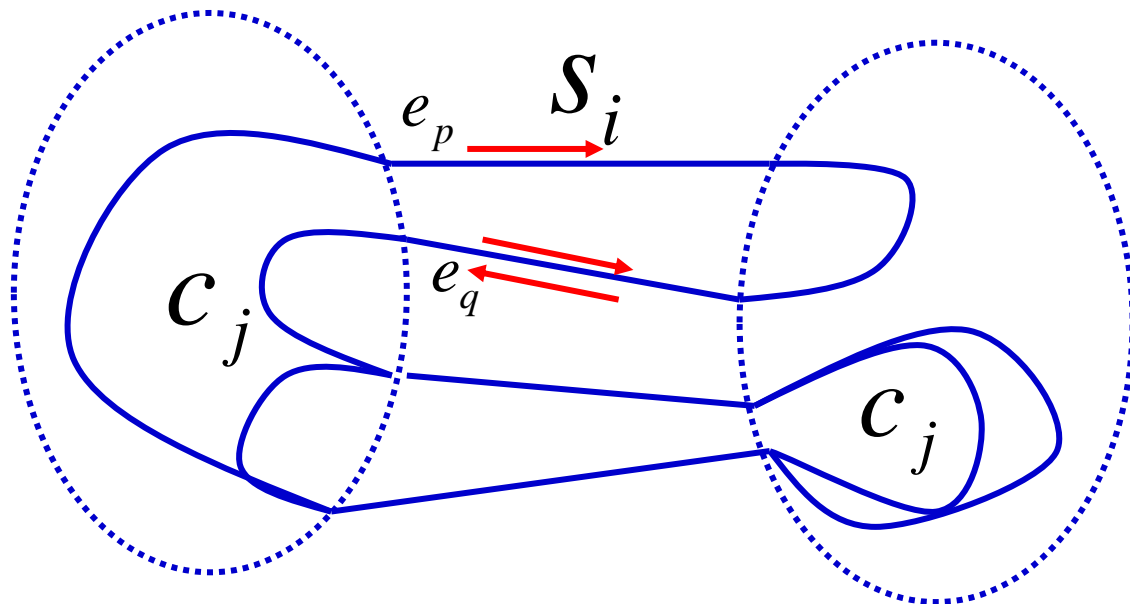




回路矩阵与割集矩阵 - 割集矩阵

- C_j 与割集 S_i 有公共边（相交）：

- 则 C_j 必定与 S_i 有 **成对出现的** 偶数条公共边 e_p 和 e_q
- 若 e_p 和 e_q 同向，则 C_{jp} 和 C_{jq} 一正一负， S_{ip} 和 S_{iq} 同正负
- 若 e_p 和 e_q 反向，则 C_{jp} 和 C_{jq} 同正负， S_{ip} 和 S_{iq} 一正一负



$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m s_{ik} \cdot c_{jk} = 0$$

$$S_e C_e^T = 0$$

证毕！



回路矩阵与割集矩阵—割集矩阵

- 定理3.4.5 当有向连通图 G 的完全回路矩阵 C_e 和完全割集矩阵 S_e 的边次序一致时, 有

$$S_e C_e^T = 0$$

- 思考:
 - 完全割集矩阵的任一行, 与完全回路矩阵的任一行的转置乘积, 是否为零?
 - 基本割集矩阵、基本回路矩阵是什么关系?



回路矩阵与割集矩阵—割集矩阵

- 定理3.4.5 当有向连通图 G 的完全回路矩阵 C_e 和完全割集矩阵 S_e 的边次序一致时，有

$$S_e C_e^T = 0$$

- 定理3.4.1 有向连通图 $G=(V,E)$ 的关联矩阵 B 和完全回路矩阵 C_e 的边次序一致时，恒有：

$$B C_e^T = 0$$



回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定理3.4.6 有向连通图 $G=(V,E)$ 完全割集矩阵的秩为 $(n-1)$

证明：

- 由于基本割集矩阵(秩为 $n-1$)是完全割集矩阵的行子阵，所以完全割集矩阵的秩不小于 $n-1$
- 由于 $S_e C_e^T = 0$ ，根据sylvester定理



回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- sylvester定理： 设A,B分别为 $n \times m$ 与 $m \times s$ 的矩阵， 则 $\text{ran}(AB) \geq \text{ran}(A) + \text{ran}(B) - m$

$$S_e: p \times m \quad \text{ran}(S_e) = ?$$

$$C_e^T: m \times q \quad \text{ran}(C_e^T) = m - n + 1$$

$$S_e C_e^T = 0 \Rightarrow \text{ran}(S_e C_e^T) = 0$$

$$\text{即:} \quad \text{ran}(S_e) \leq n - 1$$

$$\text{故:} \quad \text{ran}(S_e) = n - 1$$

证毕！



回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定义3.4.8 有向连通图 G 中 $(n-1)$ 个互相独立的割集组成的矩阵，称为 G 的**割集矩阵**，记为 S 。割集矩阵 S 具有以下几个简单性质：
 - － 基本割集矩阵 S_f 是割集矩阵
 - － $SC^T=0$ ，其中 S 与 C 的边次序一致
 - － $S=P \cdot S_f$ ，其中 P 为非奇异方阵， S 与 S_f 边次序一致



回路矩阵与割集矩阵—割集矩阵

- 定理3.4.7 有向连通图 $G=(V,E)$ 的割集矩阵 S 的任一 $(n-1)$ 阶子阵行列式非零, 当且仅当这些列对应于 G 的某棵树

证明:



回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 充分性：已知 G 的树 $T \Rightarrow$ 其对应子阵行列式非零
 - 构造基本割集矩阵 $S_f = (S_{f_{11}} \quad I)$ 。
 - 对给定的割集矩阵 S 进行列交换，使其边序与 S_f 一致，这样可写为 $S = (S_{11} \quad S_{12})$ ，其中 S_{12} 对应树 T
 - 由性质3， $S = P \cdot S_f$ ，即
$$(S_{11} \quad S_{12}) = P(S_{f_{11}} \quad I) = (P \cdot S_{f_{11}} \quad P)$$
 - 因此， $S_{12} = P$ ， P 非奇异，即 S_{12} 行列式非零

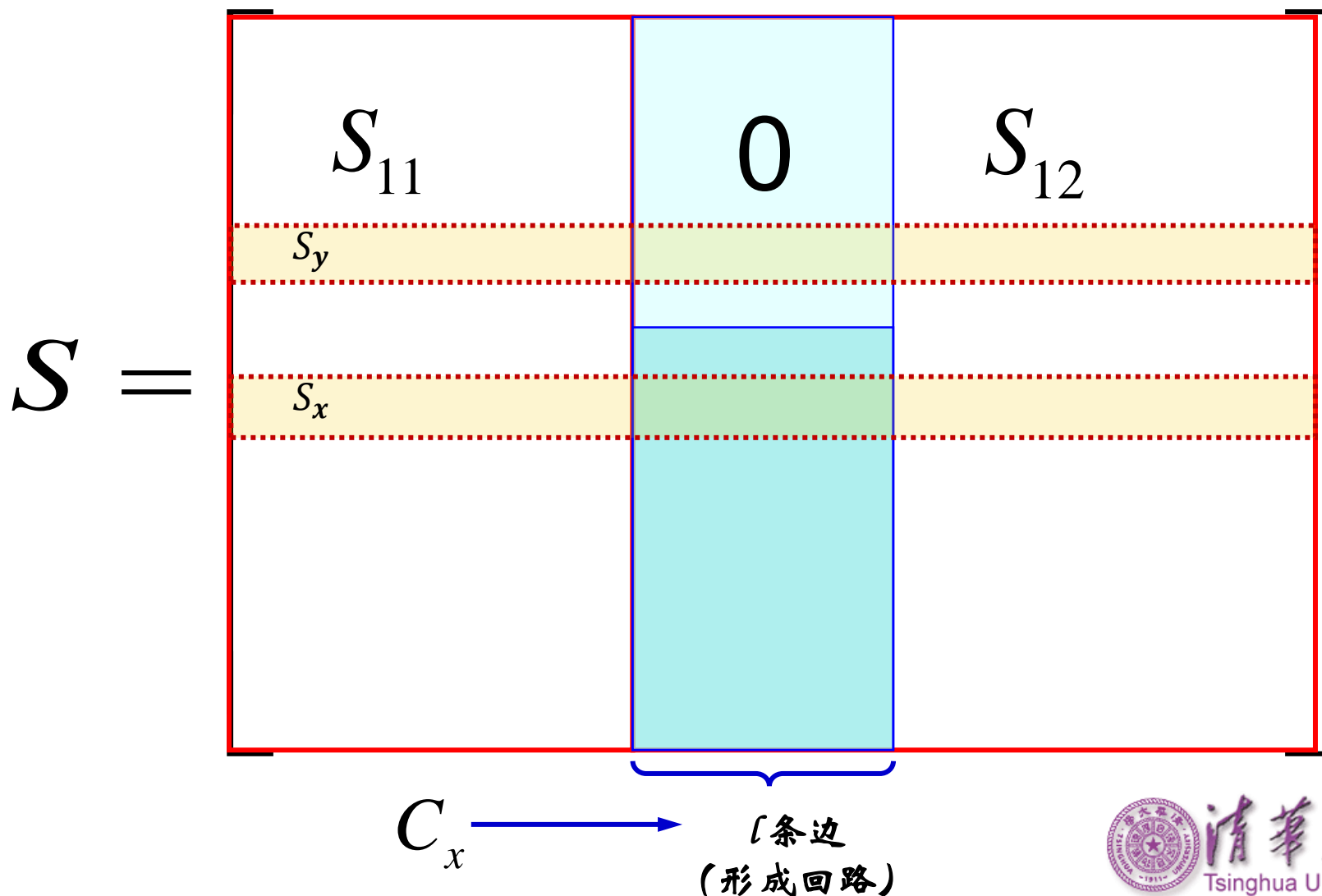


回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 必要性：已知割集矩阵 S 的某 $(n-1)$ 阶子阵行列式非零 \Rightarrow 所对应列构成一棵树
 - 将这 $(n-1)$ 列调整在后面，写为 $S = (S_{11} \quad S_{12})$
 - 反证法证明 S_{12} 对应的是一棵树：
 - 假设 S_{12} 对应的不是一棵树，则 S_{12} 所对应的边中必含回路，不妨设此回路为 C_x ，其边数为 l ($l < n$)



回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵





回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 必要性：已知割集矩阵 S 的某 $(n-1)$ 阶子阵行列式非零。
 - 将这 $(n-1)$ 列调整在后面，写为 $S = (S_{11} \quad S_{12})$
 - 反证法证明 S_{12} 对应的是一棵树：
 - 假设 S_{12} 对应的不是一棵树，则 S_{12} 所对应的边中必含回路，不妨设此回路为 C_x ，其边数为 l ($l < n$)
 - C_x 所对应的列形成 S_{12} 的子阵，而该子阵每一行的元素或者全零、或者1、-1成对出现，因此该子阵的 l 个列向量之和为零，因此 S_{12} 的列向量线性相关，即 S_{12} 行列式为零
 - 矛盾！

证毕！



回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定理3.4.7 有向连通图 $G=(V,E)$ 的割集矩阵 S 的任一 $(n-1)$ 阶子阵行列式非零, 当且仅当这些列对应于 G 的某棵支撑树
- 定理3.4.3 连通图 $G=(V,E)$ 的回路矩阵 C 的任一 $(m-n+1)$ 阶子阵行列式非零, 当且仅当这些列对应于 G 的某一棵余树
- 定理3.2.6 令 B_k 是有向连通图 G 的基本关联矩阵, 那么 B_k 的任意 $n-1$ 阶子阵行列式非零的充要条件是其各列所对应的边构成 G 的一棵支撑树。



回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 思考：

- 基本回路矩阵
- 基本割集矩阵
- 基本关联矩阵

它们的关系是什么？



回路矩阵与割集矩阵—割集矩阵

- 定理3.4.8 设 S_f 和 C_f 分别是连通图 G 中关于某棵树 T 的基本割集矩阵和基本回路矩阵，且边次序一致。并设 $S_f = (S_{f_{11}} \quad I)$, $C_f = (I \quad C_{f_{12}})$, 则 $S_{f_{11}} = -C_{f_{12}}^T$

证明：由推论有 $S_f \cdot C_f^T = 0$

即

$$(S_{f_{11}} \quad I) \begin{bmatrix} I \\ C_{f_{12}}^T \end{bmatrix} = 0$$

证毕！



回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定理3.4.4 若有向连通图 $G=(V,E)$ 的基本关联矩阵 B_k 是和基本回路矩阵 C_f 的边次序一致, 并设 $C_f=(I \quad C_{f_{12}})$, $B_k=(B_{11} \quad B_{12})$, 则

$$C_{f_{12}} = -B_{11}^T \cdot (B_{12}^{-1})^T$$



回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 推论3.4.1 当连通图G的基本关联矩阵 B_k 与基本割集矩阵 S_f 的边次序一致，并设：

$$B_k = (B_{11} \quad B_{12}), \quad S_f = (S_{f_{11}} \quad I)$$

则：
$$S_{f_{11}} = B_{12}^{-1} \cdot B_{11}$$

证明：由定理3.4.4，及定理3.4.8，

$$S_{f_{11}} = -C_{f_{12}}^T = -\left(-B_{11}^T \cdot (B_{12}^{-1})^T\right)^T = B_{12}^{-1} \cdot B_{11}$$

证毕！



回路矩阵与割集矩阵—小结

- 基本概念：
 - 回路矩阵、割集矩阵、基本回路矩阵、基本割集矩阵、完全回路矩阵、完全割集矩阵
- 回路矩阵基本性质
- 割集矩阵基本性质
- 基本回路矩阵、基本割集矩阵、基本关联矩阵三者关系



作业

- 课后
 - 4、5、11、13
- 选作
 - 9
- 下下次课：习题课
 - 持续接受报名，截止下周五下午6:00，请见网络学堂具体通知