数字逻辑电路

(2020级本科生课程)

清华大学计算机系
陶品
taopin@tsinghua.edu.cn
办公室：FIT 3－531 （13717813059）

课程基本情况

- 教学形式：讲课，辅导，网上、定时和现场答疑
- 学时安排：3学分，共48学时
- 教学内容
  - 第一章：前言和基本知识介绍　（第1周，前3学时）
  - 第二章　逻辑代数和化简方法　（第2、3周，共6学时）
  - 第三章：门电路　（第4周，共3学时）
  - 第四章：组合逻辑电路　（第5～7周，共9学时）
  - 第五章：时序逻辑电路　（第8～12周，共15学时）
  - 第六章：可编程逻辑电路　（第13～15周，共9学时）
  - 数字逻辑电路课程总复习　（第16周，3学时）

第二章 逻辑代数

2.1 逻辑代数的基本运算与公式

2.2 公式法化简逻辑函数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

- 公式法化简的缺点
  - 需要掌握计算技巧，容易出错；
  - 不容易判断结果是否为最简；

- 图解法
  - 优点：直观明了，过程简单，可从图中直接求出最简表达式；
  - 缺点：函数变量不能太多，一般为4变量及4变量以下；4变量以上用卡诺图化简比较困难。

第二章 逻辑代数

- 2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数
  - 逻辑代数中的两个重要概念
    - 最小项（MinTerm）
    - 最大项（MaxTerm）

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

- 最小项的定义
  - 设一个逻辑函数表达式中有n个变量，由它们组成的具有n个变量的“与项”中，每个变量以原变量或反变量的形式出现且仅出现一次，这个与项为最小项。

例如：n=3，对A、B、C，有8个最小项

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \qquad A\bar{B}\bar{C} \qquad \bar{A}B\bar{C} \qquad AB\bar{C}$$

$$\bar{A}\bar{B}C \qquad A\bar{B}C \qquad \bar{A}BC \qquad ABC$$

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

最小项的性质

- n个变量有2^n个最小项。
- 对任意最小项，只有一组变量取值使它的值为1，其他取值使该最小项为0
- 任何逻辑函数均可表示为唯一的一组最小项~~之和~~（与或），称为标准的与或表达式
- 某一最小项不是包含在F的原函数中，就是包含在F的反函数中
- n个变量全体最小项~~之和~~（与或）必为“1”

第二章 逻辑代数

■2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

最小项的表示

- ✓ 将最小项表示为m_i，i是对应2进制表示的10进制数值

应用举例：n=3时8个最小项为（C为高位，A低位）

$$m_0 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \quad m_1 = A\bar{B}\bar{C} \quad m_2 = \bar{A}B\bar{C} \quad m_3 = AB\bar{C}$$

$$m_4 = \bar{A}\bar{B}C \quad m_5 = A\bar{B}C \quad m_6 = \bar{A}BC \quad m_7 = ABC$$

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

- 举例：用最小项表示一个函数

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{A}B + BC + A\overline{B}\,\overline{C} \\
&= \overline{A}B(C + \overline{C}) + (A + \overline{A})BC + A\overline{B}\,\overline{C} \\
&= \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + ABC + A\overline{B}\,\overline{C} \\
&= m_6 + m_2 + m_7 + m_1 \\
&= \sum m^3(1,2,6,7)
\end{aligned}
$$

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

最大项的定义

- 设一个逻辑函数表达式中有n个变量，由他们组成的具有n个变量的**或项**中，每个变量以原变量或反变量的形式出现且仅出现一次，则称这个项为最大项。

例如：n=3的最大项为

$$M_0 = A + B + C \qquad M_1 = \overline{A} + B + C$$

$$M_2 = A + \overline{B} + C \qquad M_3 = \overline{A} + \overline{B} + C$$

$$M_4 = A + B + \overline{C} \qquad M_5 = \overline{A} + B + \overline{C}$$

$$M_6 = A + \overline{B} + \overline{C} \qquad M_7 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

最大项的性质

- n个变量有2^n个最大项。
- 对任意最大项，只有一组变量取值使它的值为0，其他取值使该最大项为1
- 任何逻辑函数均可表示为唯一的一组最大项~~之积~~（或与），称为标准的或与表达式
- 某一最大项不是包含在F的原函数中，就是包含在F的反函数中
- n个变量全体最大项~~之积~~（或与）必为“0”

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

- 举例：用最大项表示一个函数

$$F=(A+B)\bullet(\overline{A}+B+C)$$
$$=[A+B+(C\bullet\overline{C})]\bullet(\overline{A}+B+C)$$
$$=(A+B+C)\bullet(A+B+\overline{C})\bullet(\overline{A}+B+C)$$
$$=M_0\bullet M_4\bullet M_1$$
$$=\prod M^3(0,1,4)$$

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

最大项与最小项的关系

（1）对于所有的i，相同i的最大项与最小项互补

$$M_i = \overline{m_i}$$

$$m_i = \overline{M_i}$$

（2）对于所有的i，$\sum m_i$ 和 $\prod M_i$ 互为对偶式

公式法化简（不唯一、不好判断）

$$Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB + AC + BC + ABC$$

$$\Rightarrow Y = \bar{A}\bar{B} + AB + AC + BC$$

$$\Rightarrow Y = \bar{A}\bar{B} + AB + (A + B)C$$

$$\Rightarrow Y = \bar{A}\bar{B} + AB + \overline{\bar{A}\,\bar{B}}C$$

$$\Rightarrow Y = \bar{A}\bar{B} + \overline{\bar{A}\,\bar{B}}C + AB$$

$$\Rightarrow Y = \bar{A}\bar{B} + C + AB$$

吸收律

(Absorption)

$$\begin{cases} A + \bar{A}B = A + B \\ A \bullet (\bar{A} + B) = A \bullet B \\ A + A \bullet B = A \\ A(A + B) = A \end{cases}$$

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

- **卡诺图：** Karnaugh Map（by Maurice Karnaugh，1953）；
- **卡诺图：逻辑函数的图示表示，把最小项填入卡诺图，利用相邻最小项的互补性，消去一个变量，实现化简。**
- **卡诺图的构成**

  (1) 由矩形或正方形组成的图形

  (2) 将矩形分成若干小方块，每个小方块对应一个最小项。

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

1变量卡诺图

整体为1

1

只有一个变量，将大方框划分为左、右两部分，表示$\overline{A}$和A

$\overline{A}$	A

也可以将大方框划分为上、下两部分，表示$\overline{A}$和A

$\overline{A}$
A

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

2变量卡诺图：假设两个变量分别为A和B

一个变量用大方框左、右两部分表示$\bar{A}$和A

$\bar{A}$	A

另一个变量用大方框上、下两部分表示$\bar{B}$和B

$\bar{B}$
B

将两图合二为一，可得2变量卡诺图

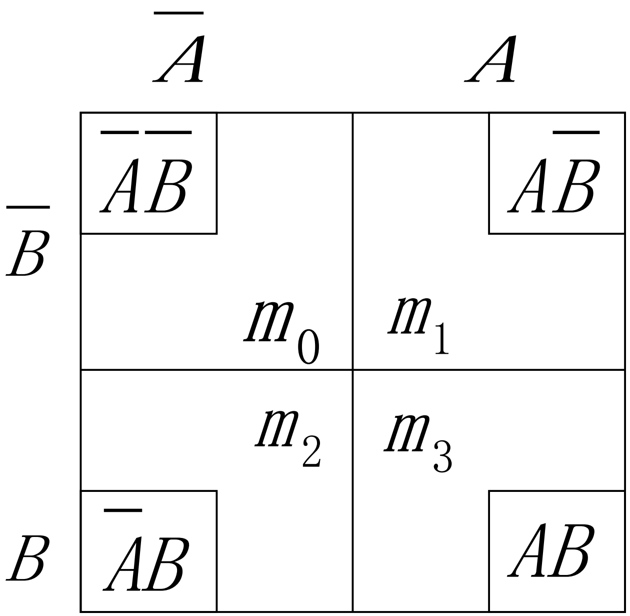
	$\bar{A}$	A
$\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$
B	$\bar{A}B$	AB

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

2变量卡诺图

✓一个整体可由代表4个最小项的四个小方格组成：



改画成

B \ A	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

即2变量卡诺图

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

3变量卡诺图

✓一个整体分成8个小方格

C \ BA	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

注意：上表头编码按00－01—11－10循环？？码顺序排列，而不是00－01－10－11

第二章 逻辑代数

■2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

➢循环码（格雷码）

- ✓循环码的定义：相邻两个编码之间只有一位数不同，而且首尾两个编码之间也只有一位数不同，这种编码叫循环码。
  - ✓2位循环码:→ 00→01→11→10 →
  - ✓3位循环码:→000→001→011→010→110→111→101→100
  - ✓循环码的特点：每次只变一位；用在卡诺图上，可以消去最小项的多余变量。

第二章 逻辑代数

- **3变量卡诺图的含义**

B A / C	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

B A / C	00	01	11	10
0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	$\overline{A}B\overline{C}$
1	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$	ABC	$AB\overline{C}$

第二章 逻辑代数

3变量卡诺图化简

C \ AB	00	01	11	10
0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}\,\overline{C}$
1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	ABC	$A\overline{B}C$

✓3变量函数如何用卡诺图化简？

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} = \overline{B}\,\overline{C}$$

$$F = A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}C + ABC = A$$

$$F = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC = \overline{A}C$$

$$F = AB\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B = ?$$

请用公式法和卡诺图法分别试一试

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

- 4变量卡诺图

DC \ BA	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

第二章 逻辑代数

■4变量卡诺图

➢2个最小项相邻

➢合并后减少1个变量

$$F_1 = A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}CD = A\bar{B}C$$

$$F_2 = \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} = B\bar{C}\bar{D}$$

$$F_3 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \bar{A}B\bar{C}D = \bar{A}\bar{C}D$$

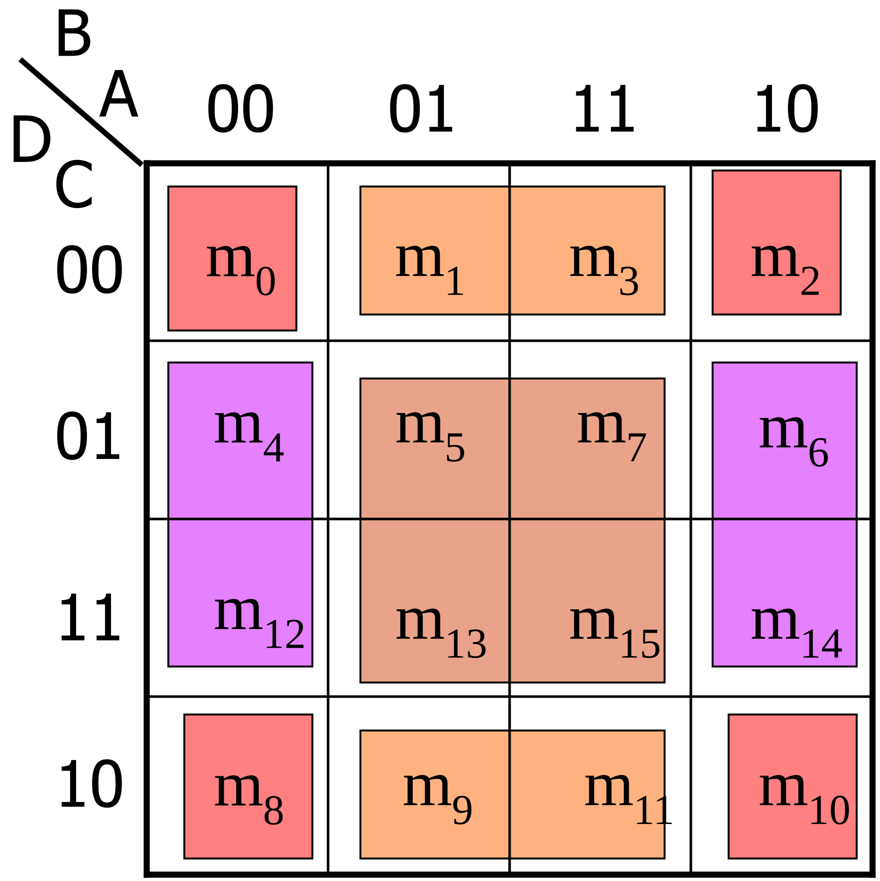
$$F_4 = A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\bar{B}\bar{C}D = A\bar{B}\bar{C}$$

DC \ BA	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

第二章 逻辑代数

■4变量卡诺图

- ➢ 4个最小项相邻



➢合并后减少2个变量

$$F_1 = AC$$

$$F_2 = \overline{A}C$$

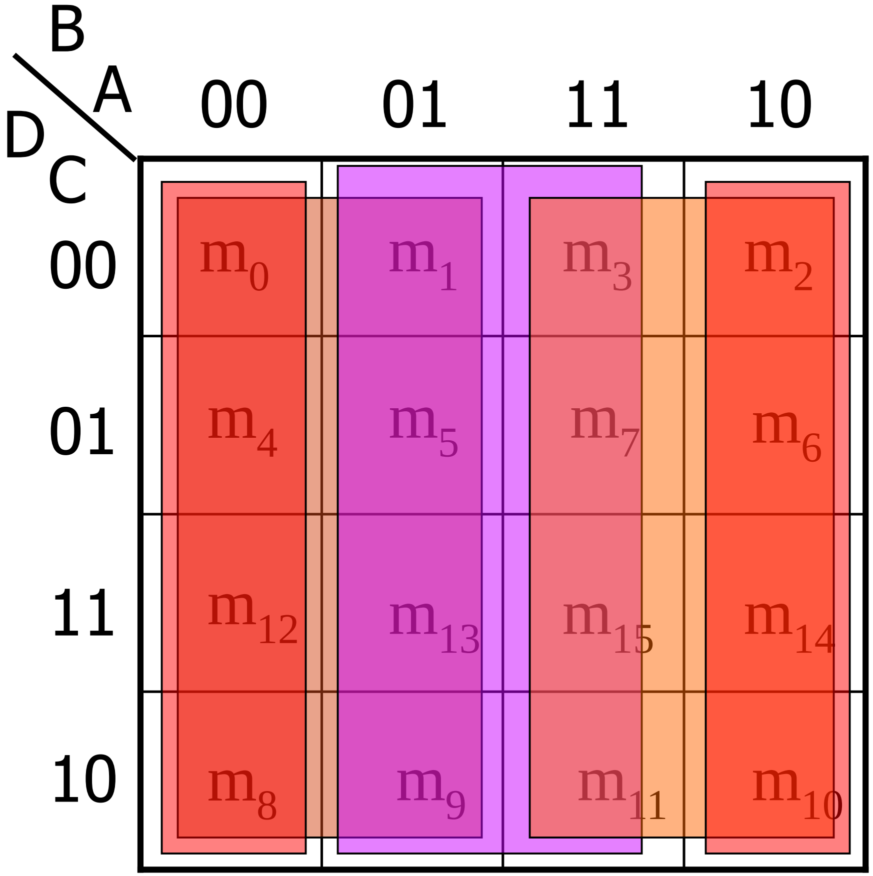
$$F_3 = A\overline{C}$$

$$F_4 = \overline{A}\,\overline{C}$$

第二章 逻辑代数

4变量卡诺图

- 8个最小项相邻



- 合并后减少3个变量

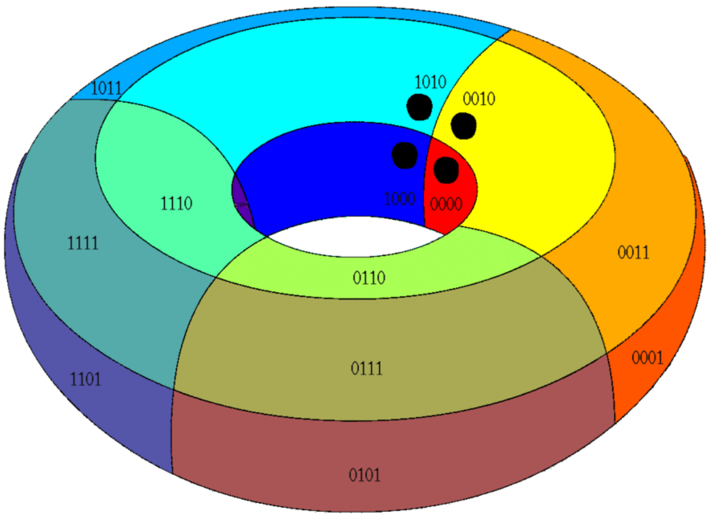
$$F_1 = \overline{B}$$

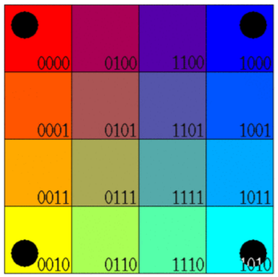
$$F_2 = A$$

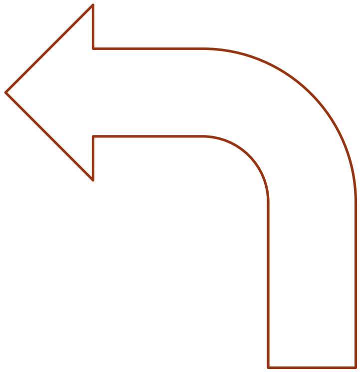
$$F_3 = B$$

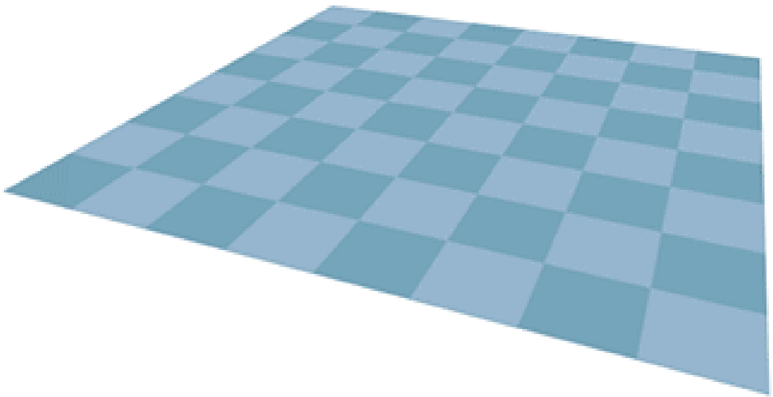
$$F_4 = \overline{A}$$

第二章 逻辑代数









4变量卡诺图的合并关系三维想象。

第二章 逻辑代数（50）

最小项的卡诺图表示

$$F = \bar{A}B + BC + A\bar{B}\bar{C}$$
$$= \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + ABC + A\bar{B}\bar{C}$$
$$= \sum m^3(1,2,6,7)$$

C \ BA	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

在函数最小项对应的小方块填“1”，其他方块填“0”；

C \ BA	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

卡诺图化简的步骤

1 画图：按照循环码规律指定卡诺图变量取值；

2 填数：在函数最小项对应的小方块填“1”，其他方块填“0”；

3 合并：合并相邻填“1”的小方块，两个方块合并消去一个变量（一维块）；4个方块合并消去两个变量（二维块）；

4 先大后小：合并过程中先找大圈合并，圈越大消去的变量越多；

5 不要漏、不冗余：使每一最小项至少被合并包含过一次；每个合并的圈中，至少要有一个“1”没有被圈过，否则这个圈就是多余的。

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

- 例1 “与或”式化简：

$$F = AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + ABC + \overline{A}BC$$

C \ BA	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

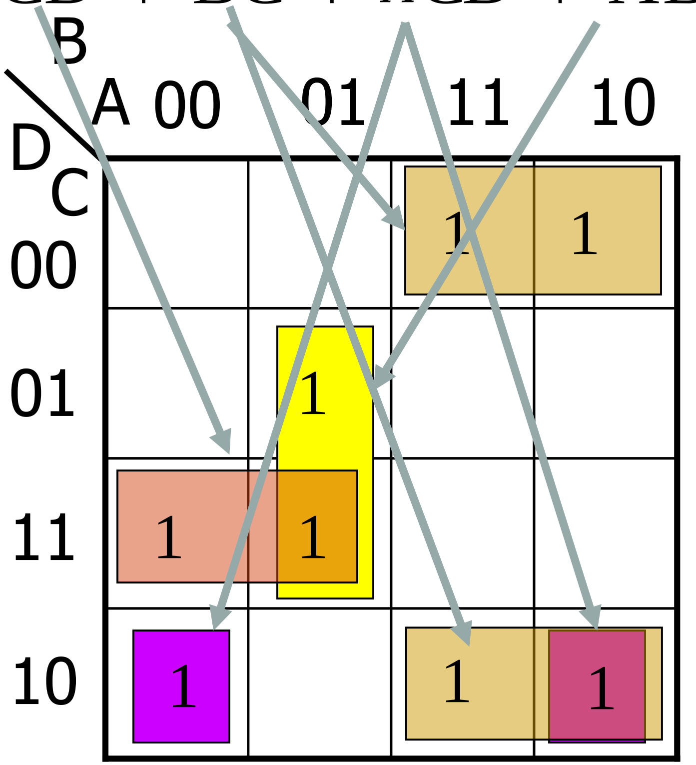
化简结果：$F = AB + \overline{A}C$

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

例2 “与或”式化简：

$$F=\overline{B}CD+B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{C}D+A\overline{B}C=\sum m^4(2,3,5,8,10,11,12,13)$$

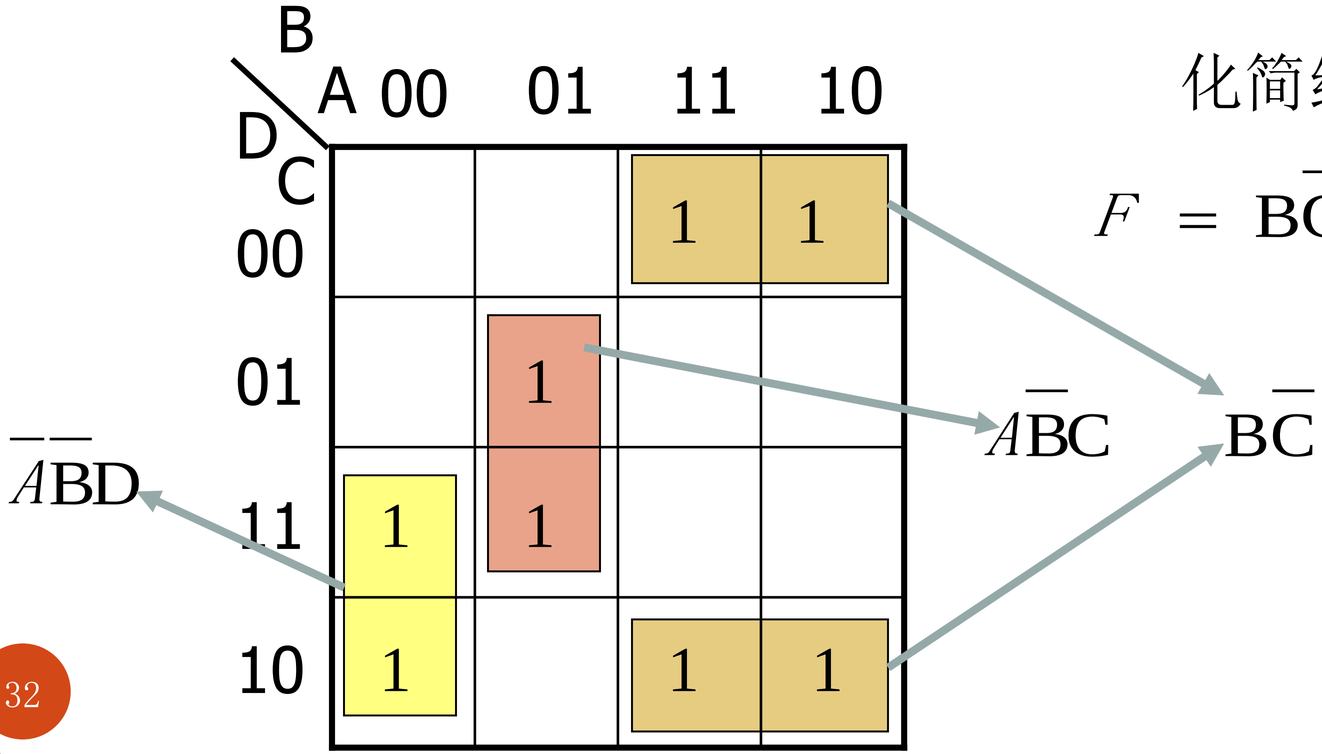


第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

- 例2 “与或”式化简(续)：

$$F = \bar{B}CD + B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}D + A\bar{B}C$$



化简结果:

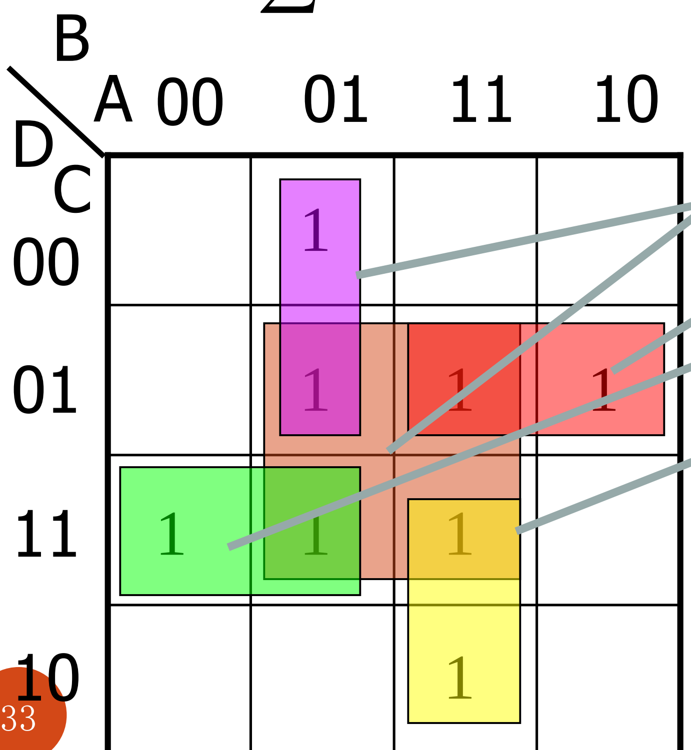
$$F = B\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}D$$

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

规则的深刻理解

$$F=\sum m^4(1,5,6,7,11,12,13,15)$$



AC　$BC\overline{D}$　$\overline{A}\overline{B}D$　$\overline{B}CD$　ABD

$$F=AC+BC\overline{D}+\overline{A}\overline{B}D+\overline{B}CD+ABD$$

有没有问题?

大框(AC)包含的最小项被4个小框完全包含，AC是多余的项。

最简表达式应为:

$$F=BC\overline{D}+\overline{A}\overline{B}D+\overline{B}CD+ABD$$

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

卡诺图化简的步骤

1 画图：按照循环码规律指定卡诺图变量取值；

2 填数：在函数最小项对应的小方块填“1”，其他方块填“0”；

3 合并：合并相邻填“1”的小方块，两个方块合并消去一个变量（一维块）；4个方块合并消去两个变量（二维块）；

4 先大后小：合并过程中先找大圈合并，圈越大消去的变量越多；

5 不要漏、不冗余：使每一最小项至少被合并包含过一次；每个合并的圈中，至少要有一个“1”没有被圈过，否则这个圈就是多余的。

第二章 逻辑代数

图解法求解反函数

$$F = AB\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + ABC + \overline{A}BC$$

化简结果：$F = AB + \overline{A}C$

$$\overline{F} = \overline{AB + \overline{A}C}$$

$$= \overline{AB} \bullet \overline{\overline{A}C}$$

$$= (\overline{A} + \overline{B}) \bullet (A + \overline{C})$$

$$= \overline{A}\,\overline{C} + A\overline{B} + \overline{B}\,\overline{C} = A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$$

$\overline{A}\,\overline{C}$

$A\overline{B}$

C \ BA	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

$$\overline{F} = A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$$

卡诺图中根据0化简出的函数是原函数的反函数。

理论依据：$F + \overline{F} = 1$

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

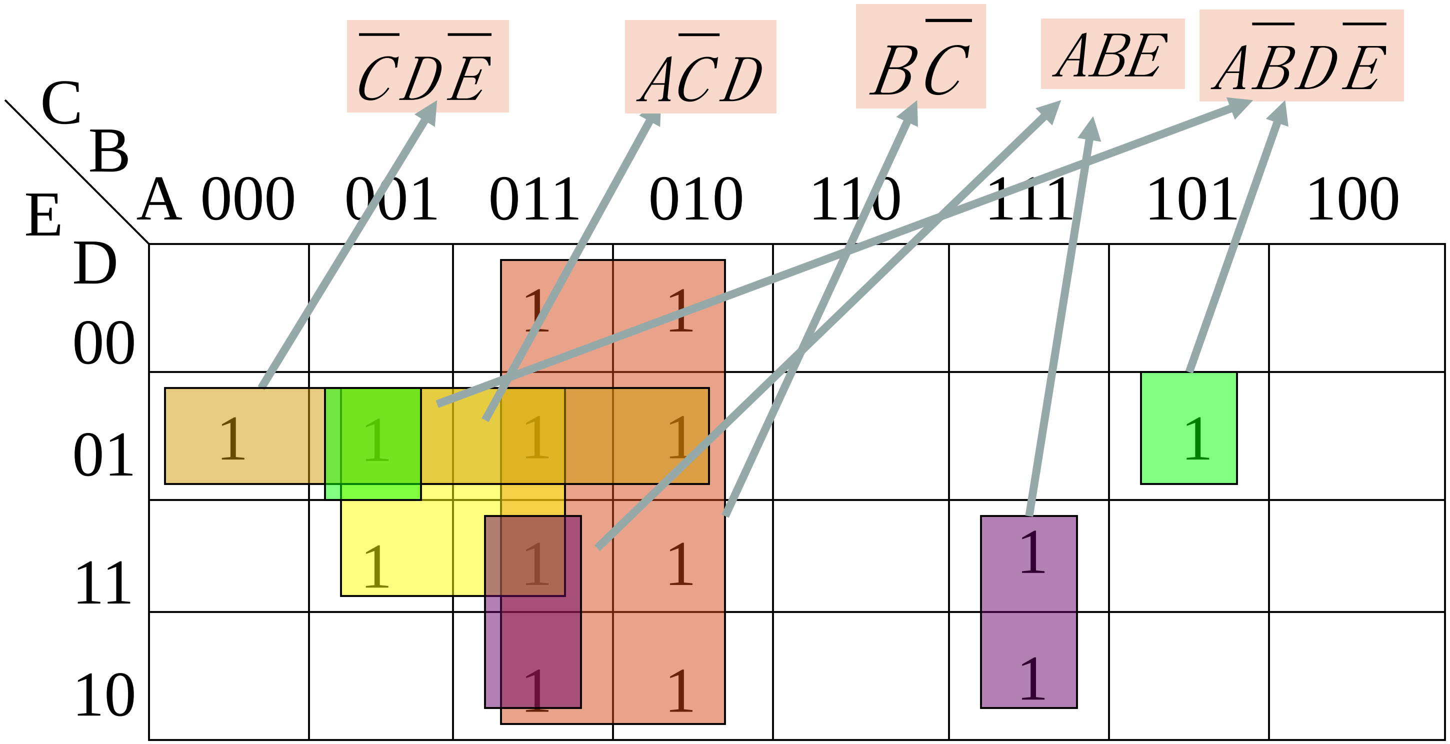
- 5变量函数的卡诺图化简

$$F = AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + ABE + A\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D\overline{E} + A\overline{B}CD\overline{E}$$

ED \ CBA	000	001	011	010	110	111	101	100
00			1	1				
01	1	1	1	1			1	
11		1	1	1		1		
10			1	1		1		

第二章 逻辑代数

- 5变量函数的卡诺图化简



$$F = B\bar{C} + A\bar{C}D + \bar{C}D\bar{E} + ABE + A\bar{B}D\bar{E}$$

第二章 逻辑代数

卡诺图化简法

- 优点：直观明了，过程简单，可从图中直接求出最简表达式；
- 缺点：函数变量不能太多，一般为4变量及4变量以下；4变量以上用卡诺图化简比较困难，容易出错。

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

特殊形式的逻辑函数化简

- 逻辑函数的基本形式：

  单输出逻辑函数，$F = f(A,B,C\cdots)$

- 特殊形式的逻辑函数：

  1. 多输出逻辑函数

  2. 包含无关项（Don’t Care）的逻辑函数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

- 特殊形式的逻辑函数化简
  - 多输出逻辑函数：同一组输入变量，有两个以上的输出。

$$F_1 = f_1(A,B,C\cdots)$$
$$F_2 = f_2(A,B,C\cdots)$$

  - 多输出逻辑函数的化简：化简时，在“与或”表达式中要尽量寻找公共的“或”项，使公共项为多个函数共享，这时从单个输出看可能不是最简，但总体是最简。
  - 多输出逻辑函数的化简（不作为基本要求）

第二章 逻辑代数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

特殊形式的逻辑函数化简

- 包含无关项（Don’t Care）的逻辑函数：函数F的取值只和一部分最小项有关，另一部分最小项既可以取“0”，也可以取“1”，这些最小项称“无关项”或“任意项”。

- “无关项”的两种情况：

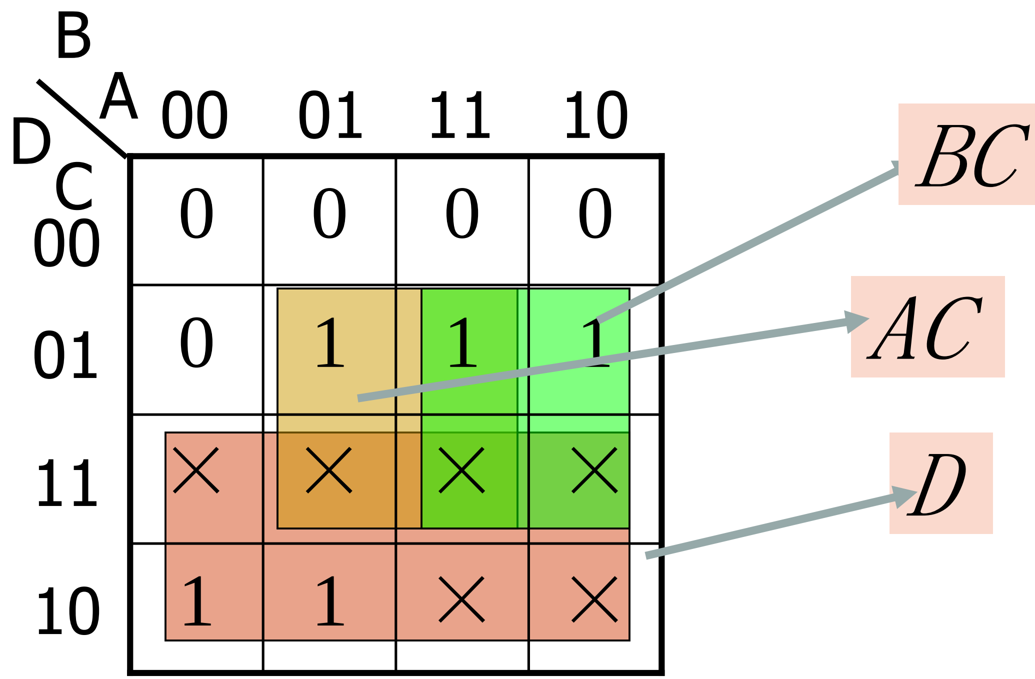
1. 这些输入组合不可能出现。

2. 输入组合虽能出现，但无需关心最小项是“1”还是“0”。

第二章 逻辑代数

- 例1：设计一位十进制数的数值范围判断器，当x>=5，F=1；否则，F=0。(ABCD表示一位十进制数,A是低位,D是高位)

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	1	0	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	0	1
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	×
1	1	0	1	×
0	0	1	1	×
1	0	1	1	×
0	1	1	1	×
1	1	1	1	×

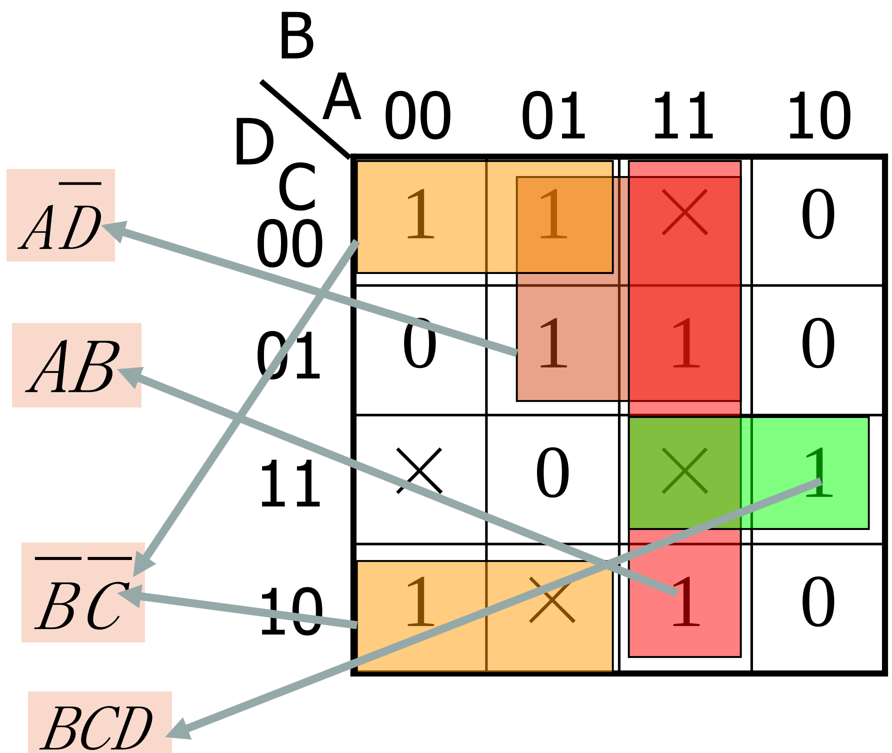


$$F = AC + BC + D$$

第二章 逻辑代数

- **例2：化简函数**

$$F = \sum m^4(0,1,5,7,8,11,14) + \sum \Phi^4(3,9,12,15)$$

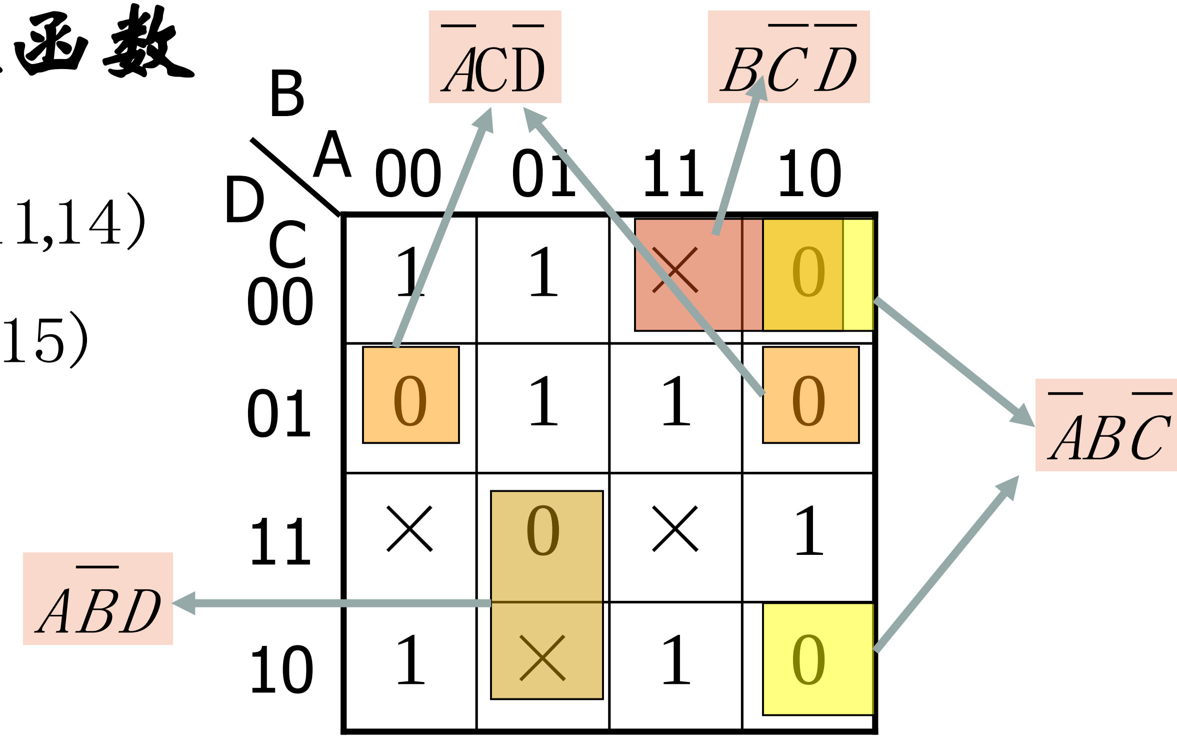


$$F = AB + A\bar{D} + \bar{B}\bar{C} + BCD$$

第二章 逻辑代数

- **求例2的反函数**

$$F = \sum m^4(0,1,5,7,8,11,14) + \sum \Phi^4(3,9,12,15)$$

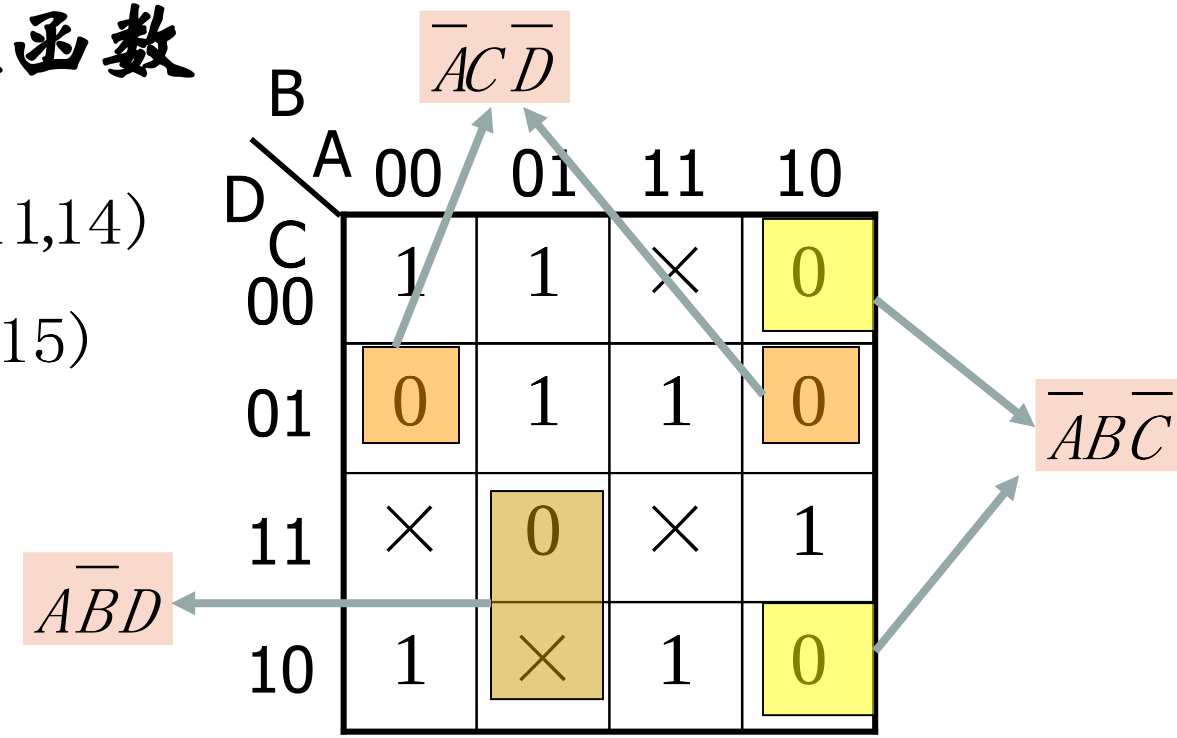


$$\overline{F} = B\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}D + \overline{A}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}$$

有没有问题？ $B\overline{C}\,\overline{D}$ 冗余!

- 求例2的反函数

$$F = \sum m^4(0,1,5,7,8,11,14) + \sum \Phi^4(3,9,12,15)$$



$$\overline{F} = A\bar{B}D + \bar{A}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}$$

第二章 逻辑代数

- 2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数——小结

1) 公式法：计算复杂，容易出错；难判断最简
2) 图解法：直观明了，过程简单，易判断最简；变量数≤4
3) 最小项、最大项：性质，对函数的表示
4) 图解法化简逻辑函数的规则
5) 图解法求解反函数
6) 图解法化简包含无关项的逻辑函数
7) 图解法求解包含无关项的反函数

第二章 逻辑代数

2.1 逻辑代数的基本运算与公式

2.2 公式法化简逻辑函数

2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数

2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)

第二章 逻辑代数

- 2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)
  - 公式法：
    - 计算复杂，容易出错；
    - 难判断最简
  - 图解法：
    - 直观明了，过程简单；
    - 易判断最简；变量数≤4 。

第二章 逻辑代数

- 多变量函数（变量个数>=5）如何化简？

> 用新的工具完成：计算机

> 我们能否从公式法和图解法中得到某些启示呢?

第二章 逻辑代数

化简函数

$$F=\sum m^4(2,4,6,8,9,10,12,13,15)$$

$$\begin{aligned}F=&\boxed{\bar{A}B\bar{C}\bar{D}}+\boxed{\bar{A}\bar{B}C\bar{D}}+\boxed{\bar{A}BC\bar{D}}+\boxed{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D}+\boxed{A\bar{B}\bar{C}D}\\&+\boxed{\bar{A}B\bar{C}D}+\boxed{\bar{A}\bar{B}CD}+\boxed{A\bar{B}CD}+ABCD\end{aligned}$$

$$=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}C\bar{D}+\boxed{\bar{B}D}+\boxed{ABCD}$$

$$=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}C\bar{D}+(\bar{B}+ABC)D$$

$$=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}C\bar{D}+(\bar{B}+AC)D$$

$$=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}C\bar{D}+\bar{B}D+ACD$$

第二章 逻辑代数

- **如何利用计算机进行函数化简？**
  - 计算机的特点：
    - 适合做重复而又复杂的工作！

- **能否从公式法有所发现？**

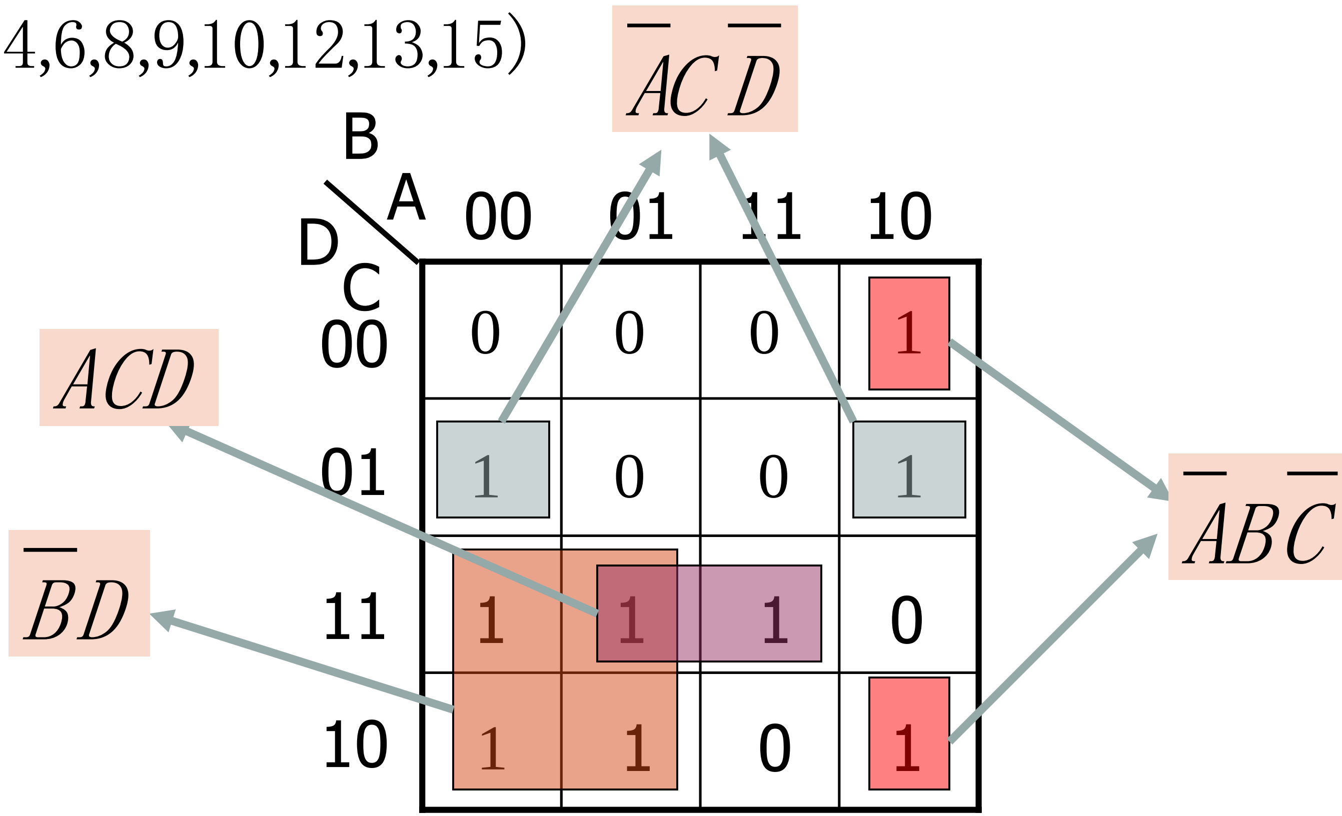
$$F=\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+A\bar{B}\bar{C}D$$
$$+\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}CD+A\bar{B}CD+ABCD$$

- 教给计算机学习公式，并识别合并项，很困难！

第二章 逻辑代数

- 化简函数：用卡诺图

$$F = \sum m^4(2,4,6,8,9,10,12,13,15)$$



$$F = \overline{B}D + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}C\overline{D} + ACD$$

第二章 逻辑代数

■ 如何利用计算机进行函数化简？

- 观察卡诺图
  - ✓通过两个相邻的“1”合并减少一个变量。
  - ✓继续合并相邻项可再减少一个变量。
- 问题：相邻项通过组合方式合并，会产生重复！
- 解决问题办法：设计一个较好的计算机算法，既可以合并，也可以挑出必要的项。

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	0
10	1	1	0	1

第二章 逻辑代数

2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)

- Q-M法是用分组表格法，基本思想是相邻两个最小项中有一个变量互补，这两相邻与项合成为一新的与项，从而消去一变量。
- Q-M(Quine-McCluskey) 法和卡诺图法的化简思路是一致的。

- 表格法
  - 优点：适合于多变量的函数，化简过程规律性强，适用于计算机算法实现。
  - 缺点：人工进行表格法化简很繁琐。

■2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)

- 什么情况下会出现“相邻两个最小项中有一个变量互补”？从最小项的编号上看有什么规律？
- 观察：以4变量卡诺图为例：

✓m1 同 m0,m3,m5,m9相邻，下标编号：

0001与0000,0011,0101,1001

✓m1 同 m4,m8,m10, m13等不相邻，

下标编号为：0001与0100,1000,1010,1101

BA \ DC	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

第二章 逻辑代数

2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)

- 结论：

最小项编号中“1”的个数差＝0，肯定不相邻

最小项编号中“1”的个数差>＝2，肯定不相邻

最小项编号中“1”的个数差＝1，可能相邻！

- 按照最小项m_i下标编号中二进制数“1”的个数进行分组比较，可以化简。

第二章 逻辑代数

2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)

- 表格法化简按照步骤进行：
  - （1）求出函数全部的质蕴涵项，
  - （2）从质蕴涵项中选出必要的质蕴涵项。

蕴涵项：函数“与或”表达式中的每个“与”项称为蕴涵项。

质蕴涵项：不能通过相邻项合并的蕴涵项称为质蕴涵项。

第二章 逻辑代数

2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)

- 举例：化简函数

$$F=\sum m^4(2,4,6,8,9,10,12,13,15)$$

- 第一步：
  求出函数全部的质蕴涵项

1）先把F中的各m_i，按下标i中"1"的个数，由少到多，分组排队列表(见表I)。组号是m_i中i所包含"1"的个数。

表I

组号	最小项	D	C	B	A
1	2	0	0	1	0
	4	0	1	0	0
	8	1	0	0	0
2	6	0	1	1	0
	9	1	0	0	1
	10	1	0	1	0
	12	1	1	0	0
3	13	1	1	0	1
4	15	1	1	1	1

第二章 逻辑代数

2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)

2）在表I的相邻组间进行逐项搜索，寻找相邻项，把可以合并的记在表II中，并在表I中相应的最小项旁作记号“√”。表II所列均是变量数为n-1的与项（n是F的变量数），它们同样按与项所含“1”的个数由少到多，分组排列。

3）重复上述过程，直到不能合并为止。

2.4逻辑函数的Q-M法化简

$$F = \sum m^4(2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15)$$

表I

组号	最小项	D	C	B	A	
1	2	0	0	1	0	√
	4	0	1	0	0	√
	8	1	0	0	0	√
2	6	0	1	1	0	√
	9	1	0	0	1	√
	10	1	0	1	0	√
	12	1	1	0	0	√
3	13	1	1	0	1	√
4	15	1	1	1	1	√

表II

组号	m	D	C	B	A
1	2,6	0	–	1	0
	2,10	–	0	1	0
	4,6	0	1	–	0
	4,12	–	1	0	0
	8,9	1	0	0	–
	8,10	1	0	–	0
	8,12	1	–	0	0
2	9,13	1	–	0	1
	12,13	1	1	0	–
3	13,15	1	1	–	1

逻辑函数的Q-M法化简

表II

组号	m	D	C	B	A	
1	2,6	0	_	1	0	P_1
	2,10	_	0	1	0	P_2
	4,6	0	1	_	0	P_3
	4,12	_	1	0	0	P_4
	8,9	1	0	0	_	√
	8,10	1	0	_	0	P_5
	8,12	1	_	0	0	√
2	9,13	1	_	0	1	√
	12,13	1	1	0	_	√
3	13,15	1	1	_	1	P_6

表III

组号	m	D C B A	
1	8,9,12,13	1 _ 0 _	P_7

在表I、II、III中，未打“√”的，标以P1~P7，称质蕴涵项。全部质蕴涵项，完全覆盖了F的各最小项。

$P_1 = \overline{A}B\overline{D}$　　$P_2 = \overline{A}B\overline{C}$　　$P_3 = \overline{A}C\overline{D}$

$P_4 = \overline{A}\,\overline{B}C$　　$P_5 = \overline{A}\,\overline{C}D$　　$P_6 = ACD$

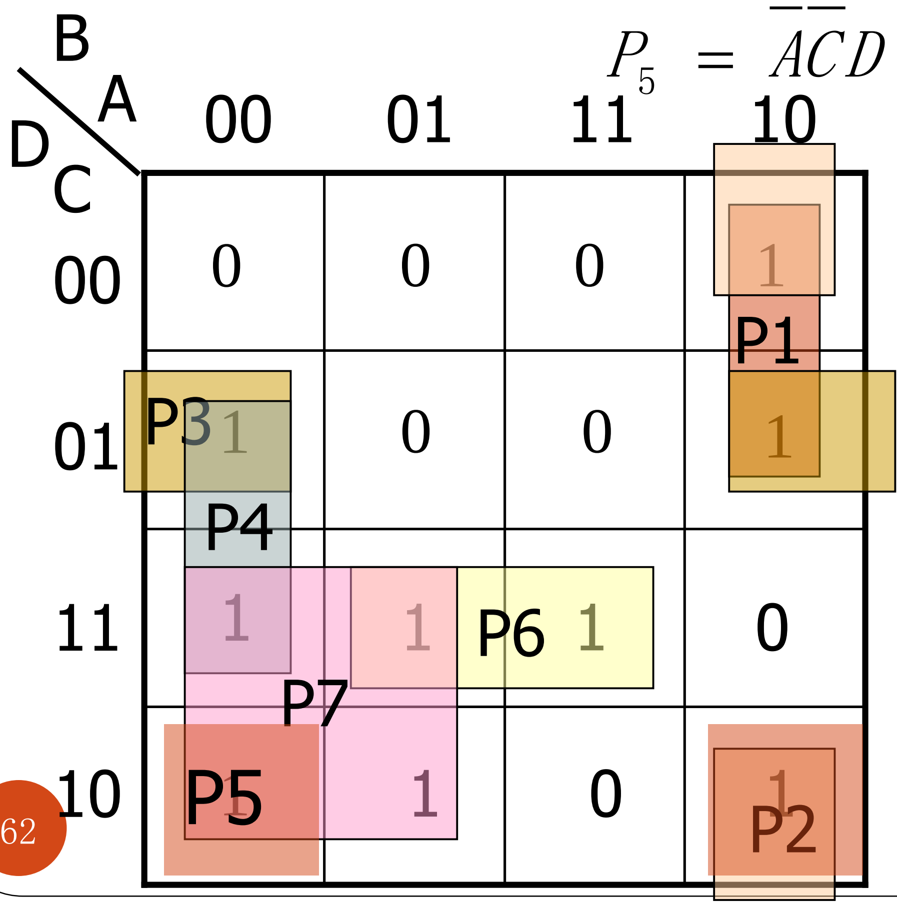
$P_7 = \overline{B}D$

在卡诺图上看全部质蕴涵项

$$F = \sum m^4(2,4,6,8,9,10,12,13,15)$$

$$P_1 = \overline{A}B\overline{D} \quad P_2 = \overline{A}B\overline{C} \quad P_3 = \overline{A}C\overline{D} \quad P_4 = \overline{A}\overline{B}C$$

$$P_5 = \overline{A}\overline{C}D \quad P_6 = ACD \quad P_7 = \overline{B}D$$



由图可见，$P_1 \sim P_7$覆盖了F的全部最小项；对每个P项，它们是不能再和其它P项或最小项合并了。

由图还可见，$P_1 \sim P_7$中有不必要的质蕴涵项：例如，若P_2，P_3必须，则P_1就不必要。

逻辑函数的Q-M法化简

如何挑选必要的质蕴涵项？

从卡诺图上能否有所启发？

先观察P1，P2，P3

$P_1 = \bar{A}B\bar{D}$　$P_2 = \bar{A}B\bar{C}$

$P_3 = \bar{A}\bar{C}D$

从卡诺图中可以看出：P2，P3可能是必要项，P1是冗余项。

原因：P1包含的两个最小项被P2和P3所包含。

有没有什么启发？

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	P3 1	0	0	1
11	1	1	1	0
10	1	1	0	P2 1

P1

逻辑函数的Q-M法化简

如何挑选必要的质蕴涵项？

如果一个P项中的最小项被其它P项全包含，则该P项是冗余项。

编写算法比较复杂，因为P2，P3是否为冗余项不确定！

反过来看，先挑选必要的P项！

如果只观察P1、P2、P3，由于1010只被P2包含，0100只被P3包含，P2，P3为必需。

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	1 P1
01	P3 1	0	0	1
11	1	1	1	0
10	1	1	0	1 P2

逻辑函数的Q-M法化简

- 如何挑选必要的质蕴涵项？

继续观察包含全部P项卡诺图

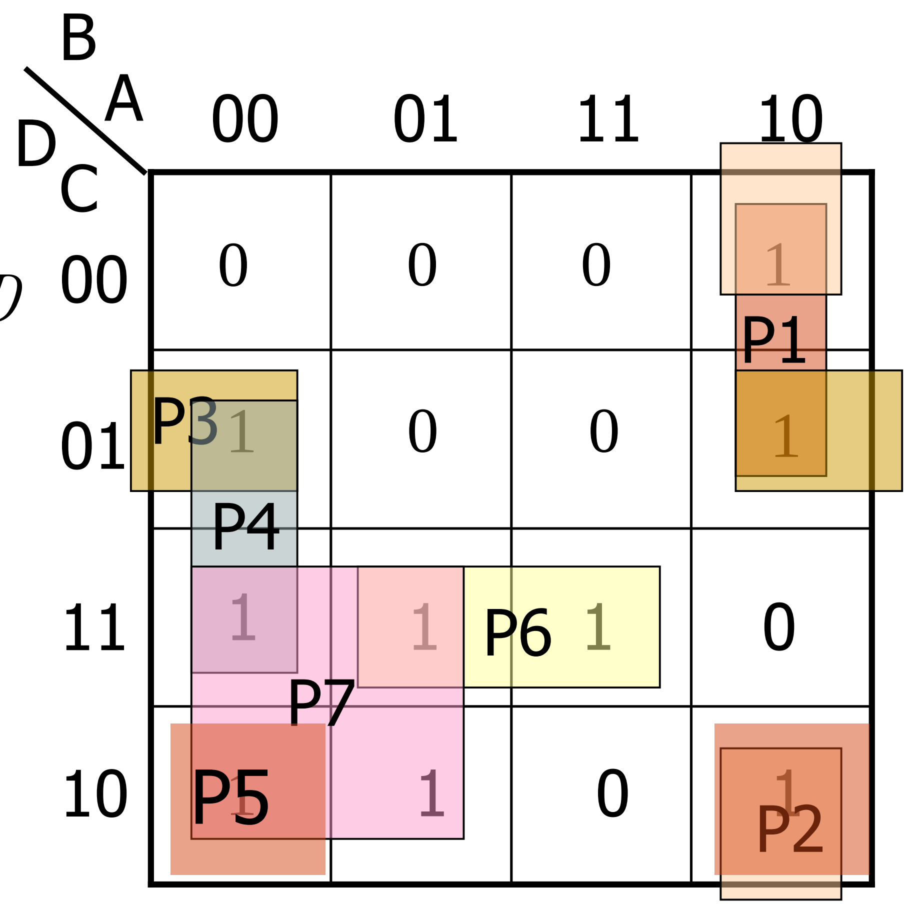
$P_1 = \bar{A}B\bar{D}$ $P_2 = \bar{A}B\bar{C}$

$P_3 = \bar{A}C\bar{D}$ $P_4 = \bar{A}\bar{B}C$ $P_5 = \bar{A}\bar{C}D$

$P_6 = ACD$ $P_7 = \bar{B}D$

发现P6和P7为必须保留的项！原因是最小项1111只被P6包含，1001只被P7包含。

既然P6和P7为必须保留的项，保留P6和P7！



逻辑函数的Q-M法化简

由于卡诺图不便用计算机处理，计算机处理表格比较方便，作出P项和最小项的对应表

质蕴涵项 \ 最小项	m_2	m_4	m_6	m_8	m_9	m_{10}	m_{12}	m_{13}	m_{15}
P_1	▲		▲						
P_2	▲					▲			
P_3		▲	▲						
P_4		▲					▲		
P_5				▲		▲			
P_6								▲	▲
P_7				▲	▲		▲	▲	

逻辑函数的Q-M法化简

2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)

- 第二步：从全部质蕴涵项中选出必要的质蕴涵项。

1）先作P_1～P_7和m_i对应的表格（表IV）

表IV

质蕴涵项 \ 最小项	m_2	m_4	m_6	m_8	m_9	m_{10}	m_{12}	m_{13}	m_{15}
P_1	▲		▲						
P_2	▲					▲			
P_3		▲	▲						
P_4		▲					▲		
P_5				▲		▲			
P_6								▲	▲
P_7				▲	▲		▲	▲	

2）进行“行列消去”:检查所有的m_i对应的列，若在m_i对应列中只有一个△，则该△所对应的P_j项为必要；保留P_j并消去P_j对应的行。由于P_j项为必要，P_j包含的所有△对应的列（最小项m）均可消去。

- m_9列只有一个△，所以P_7为必要；P_7有4个△，分别对应m_8, m_9, m_{12}, m_{13}。P_7所蕴涵的m_8, m_9, m_{12}, m_{13}均可从表中删去。同理，P_6也为必要，P_6所蕴涵的m_{13}, m_{15}可以从表中删去。

表IV

质蕴涵项 \ 最小项	m_2	m_4	m_6	m_8	m_9	m_{10}	m_{12}	m_{13}	m_{15}
P_1	△		△						
P_2	△					△			
P_3		△	△						
P_4		△					△		
P_5				△		△			
P_6								△	△
P_7				△	△		△	△	

逻辑函数的Q-M法化简

- 观察一下剩余P项和卡诺图的关系

质蕴涵项 \ 最小项	m_2	m_4	m_6	m_{10}
P_1	▲		▲	
P_2	▲			▲
P_3		▲	▲	
P_4		▲		
P_5				▲

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	0	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	1

删除P6和P7，对应于卡诺图是将P6和P7包含的最小项改为“0”！

观察卡诺图，P4和P5是冗余项，对应于表中P4行只有一个△，P5行只有一个△，P4和P5行可以删除

3）进行“行消去”：检查所有的P_j,对应的行，若在P_j对应的行中只有一个△，再检查该△所对应的列m_i，如果m_i还有其它的△，则P_j项为非必要质蕴涵项F(因为其它的P中已经包含了P_j，消去P_j对应的行。

- P_4行只有一个△，该△对应的m_8列中还有其它的△（P_3行）；P_4为非必要，消去P_4，同理消去P_5。

表V

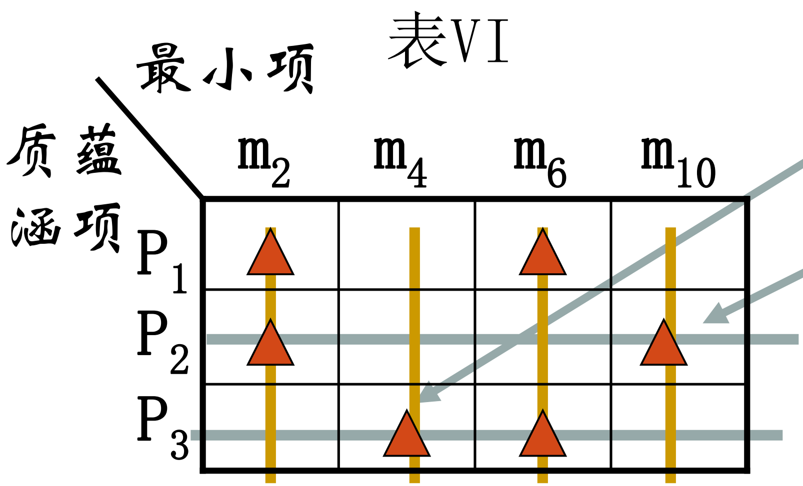
质蕴涵项 \ 最小项	m_2	m_4	m_6	m_{10}
P_1	△		△	
P_2	△			△
P_3		△	△	
~~P_4~~		~~△~~		
~~P_5~~				~~△~~

表VI

质蕴涵项 \ 最小项	m_2	m_4	m_6	m_{10}
P_1	△		△	
P_2	△			△
P_3		△	△	

4）重复进行“行列消去”和“行消去”，直到消去全部的质蕴涵项为止。

P_2,P_3为必要质蕴涵项，保留并消去P_2,P_3和m_2, m_4, m_6, m_{10}列。算法结束。



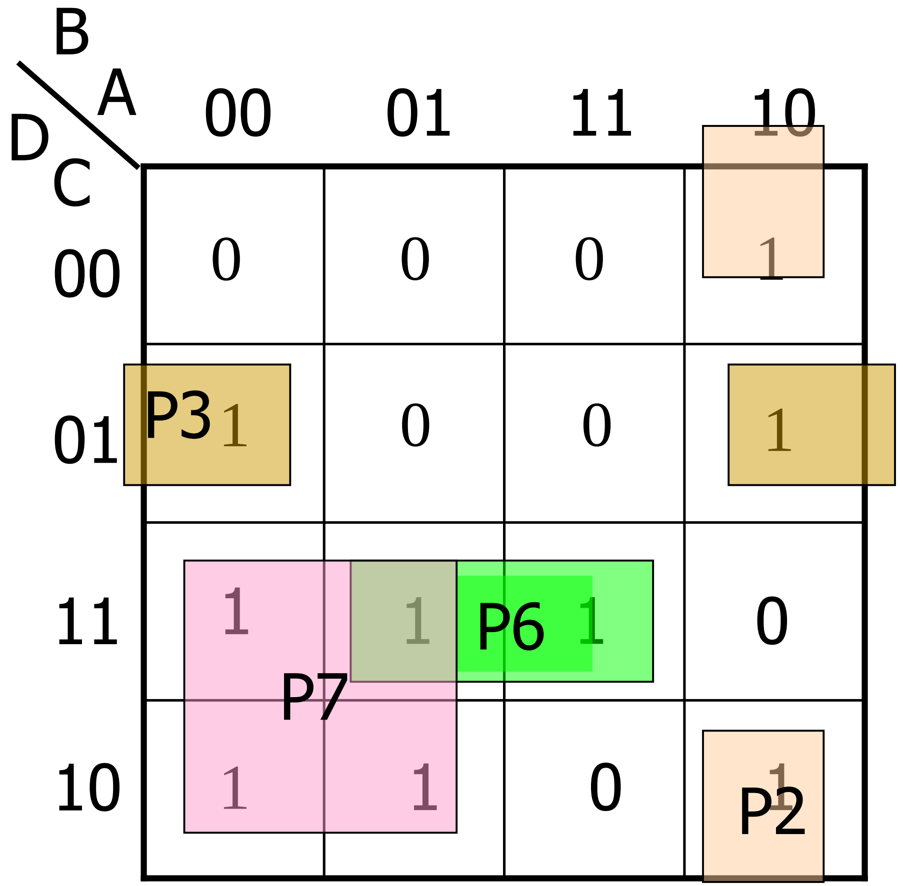
直观来看：因P_2,P_3蕴涵了表VI中所列全部m项（m_2, m_4, m_6, m_{10}），故P_1为非必要质蕴涵项

化简结果为：$F = P_2 + P_3 + P_6 + P_7 = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}C\overline{D} + ACD + \overline{B}D$

逻辑函数的Q-M法化简

用卡诺图直观观察：

$$F = P_2 + P_3 + P_6 + P_7 = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}C\overline{D} + ACD + \overline{B}D$$



逻辑函数的Q-M法化简

- 为了便于同学们直观理解，举例化简如下函数（该函数为最简）

$$F = \sum m^4(2,4,8,15)$$

$$= \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + ABCD$$

用表格法化简过程如何？

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	0	0	0
11	0	0	1	0
10	1	0	0	0

逻辑函数的Q-M法化简

第一步：求出函数全部的质蕴涵项

$$F=\sum m^4(2,4,8,15)$$

表I

组号	最小项	D	C	B	A
1	2	0	0	1	0
	4	0	1	0	0
	8	1	0	0	0
4	15	1	1	1	1

1）先把F中的各m_i，按下标i中“1”的个数，由少到多，分组排队列表(见表I)。组号是m_i中i所包含“1”的个数。

逻辑函数的Q-M法化简

2）在表I的相邻组间进行逐项搜索，寻找相邻项，把可以合并的记在表II中，并在表I中相应的最小项旁作记号“√”。表II所列均是变量数为n-1的与项（n是F的变量数），它们同样按与项所含“1”的个数由少到多，分组排列。

3）重复上述过程，直到不能合并为止。

表I

组号	最小项	D	C	B	A	
1	2	0	0	1	0	P1
	4	0	1	0	0	P2
	8	1	0	0	0	P3
4	15	1	1	1	1	P4

表II

组号	m	D C B A
1		

未打“√”的，标以P1~P4

逻辑函数的Q-M法化简

- 第二步：从全部质蕴涵项中选出必要的质蕴涵项。

1）先作P_1～P_4和m_i对应的表格（表III）

表I

组号	最小项	D	C	B	A	
1	2	0	0	1	0	P1
	4	0	1	0	0	P2
	8	1	0	0	0	P3
4	15	1	1	1	1	P4

表III

质蕴涵项 \ 最小项	m_2	m_4	m_8	m_{15}
P_1	△			
P_2		△		
P_3			△	
P_4				△

逻辑函数的Q-M法化简

2）进行“行列消去”：检查所有的m_i对应的列，若在m_i对应列中只有一个△，则该△所对应的P_j项为必要；保留P_j并消去P_j对应的行。由于P_j项为必要，P_j包含的所有△对应的列（最小项m）均可消去。

保留P1，P2，P3，P4

3）进行“行消去”

4）重复进行“行列消去”和“行消去”，直到消去全部的质蕴涵项为止。

表III

质蕴涵项 \ 最小项	m_2	m_4	m_8	m_{15}
P_1	△			
P_2		△		
P_3			△	
P_4				△

$$F = \sum m^4(2,4,8,15) = P1 + P2 + P3 + P4$$

$$= \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + ABCD$$

2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)

总结：表格法化简步骤：

(1) 求出函数全部的质蕴涵项，

1) 把F中的各m_i,按下标i中“1”的个数,分组排队列表。

2) 在列表逐项寻找相邻项并合并，并重新分组排列表。

3) 重复上述过程，直到不能合并为止。

(2) 从质蕴涵项中选出必要的质蕴涵项。

1) 先作P和m对应的表格

2) 进行“行列消去”

3) 进行“行消去”

4) 重复2）和3），直到消去全部的质蕴涵项为止。

2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)

- 表格法很繁琐，适合于编制计算机程序，如果人工使用表格法，容易出错。
- 计算机辅助逻辑化简的其他方法，在高年级选修课程和研究生课程中还会学到。

第二章 逻辑代数——小结

2.1 逻辑代数的基本运算与公式
2.2 公式法化简逻辑函数
2.3 图解法(卡诺图)化简逻辑函数
2.4 逻辑函数的表格法化简(Q-M法)

作业

- 作业：

  2.7 (1) ～ (3)
  2.11 (1) ～ (3)
  2.12 (1) ～ (3)
  2.13 (1) ～ (3)

作业

2.7（1）～（3）

2.7　将下列函数展开为最小项之和。

(1) $F=ABC+\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

(2) $F=AB+A\overline{B}+\overline{A}B+\overline{C}\,\overline{D}$

(3) $F=\overline{\overline{A}(B+\overline{C})}$

(4) $F=A(\overline{B}+C\overline{D})+\overline{A}BCD$

(5) $F=A(B+CD)+A\overline{B}CD$

2.11（1）～（3）

2.11　用卡诺图将下列函数化为最简“与或”式。

(1) $F=\sum m^3(0,1,2,4,5,7)$；

(2) $F=\sum m^4(0,1,2,3,4,6,7,8,9,11,15)$；

(3) $F=\sum m^4(3,4,5,7,9,13,14,15)$；

(4) $F=\sum m^4(2,3,6,7,8,10,12,14)$；

(5) $F=\sum m^5(4,6,12,14,20,22,28,30)$；

(6) $F=\prod M^4(3,4,6,7,11,13,15)$；

2.12（1）～（3）

2.12　将下列具有无关最小项的函数化为最简“与或”式。

(1) $F=\sum m^4(0,2,7,13,15)$

无关最小项为 $\sum d(1,3,4,5,6,8,10)$；

(2) $F=\sum m^4(0,3,5,6,8,13)$

无关最小项为 $\sum d(1,4,10)$；

(3) $F=\sum m^4(0,2,3,5,7,8,10,11)$；

无关最小项为 $\sum d(14,15)$；

(4) $F=\sum m^4(2,3,4,5,6,7,11,14)$

无关最小项为 $\sum d(9,10,13,15)$；

(5) $F=\prod M^4(1,4,6,9,12,13)+\prod D(0,5,10,15)$；

2.13（1）～（3）

2.13　用卡诺图将下列函数化为最简“与或”式；

(1) $F=ABC+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(2) $F=AC+ABC+A\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+BC$；

(3) $F=\overline{B}\,\overline{D}+ABCD+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(4) $F=\overline{A}BCD+ABC+DC+D\overline{C}B+\overline{A}BC$；

(5) $F=A\overline{B}+\overline{A}C+B\overline{C}\,\overline{D}+BCE+B\overline{D}E$；