



第二章 道路与回路

计算机系网络所：张小平



主要内容

- 2.1 道路与回路
- 2.2 道路与回路的判定
- 2.3 欧拉道路与回路
- 2.4 哈密顿道路与回路
- 2.5 旅行商问题
- 2.6 最短路径
- 2.7 关键路径
- 2.8 中国邮路问题



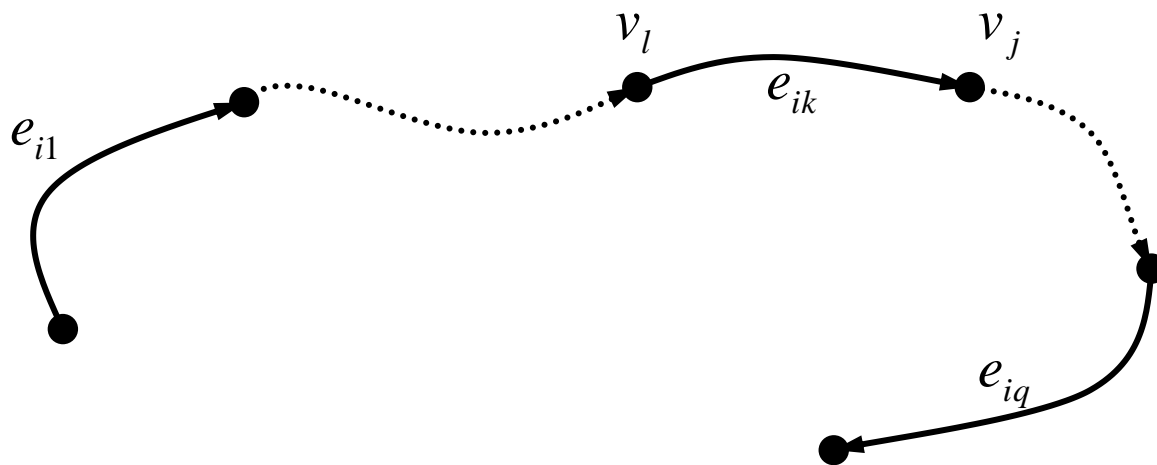
道路与回路

- 定义2.1.1 有向图 $G=(V,E)$ 中, 若边序列 $P=(e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{iq})$, 其中 $e_{ik}=(v_l, v_j)$ 满足:

v_l 是 $e_{i(k-1)}$ 的终点

v_j 是 $e_{i(k+1)}$ 的始点

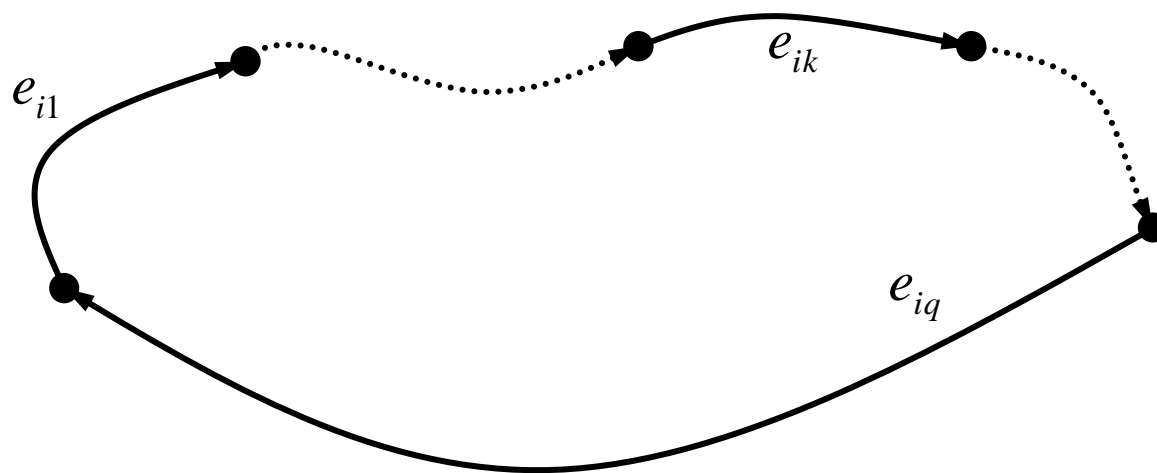
则称 P 是 G 的一条**有向道路**;





道路与回路

- 如果 e_{iq} 的终点也是 e_{il} 的始点，则称 P 是 G 的一条有向回路。



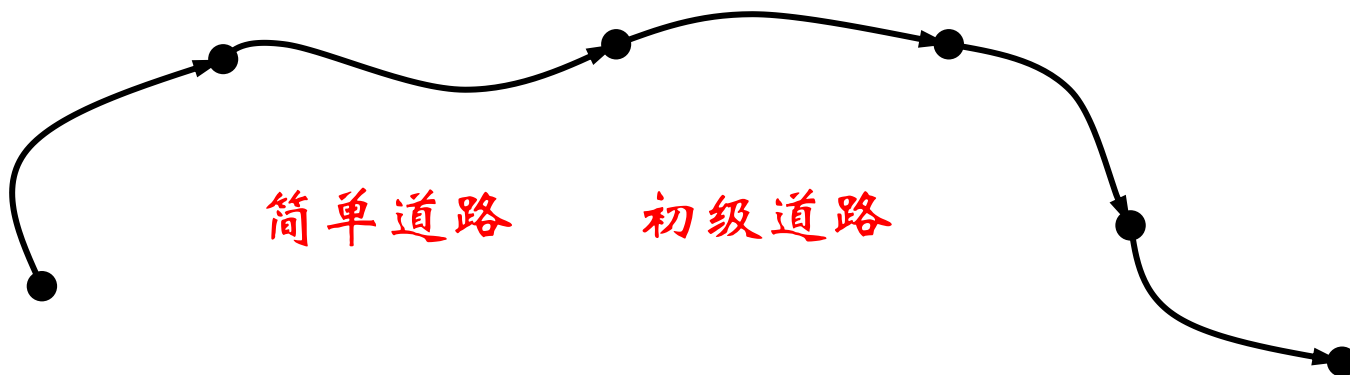


道路与回路

- **简单有向道路（回路）**：P中的边没有重复出现
- **初级有向道路（回路）**：P中的结点没有重复出现，简称路和回路
- **显然，初级有向道路一定是简单有向道路**
- **思考：非初级有向道路的简单有向道路具有什么特征？**

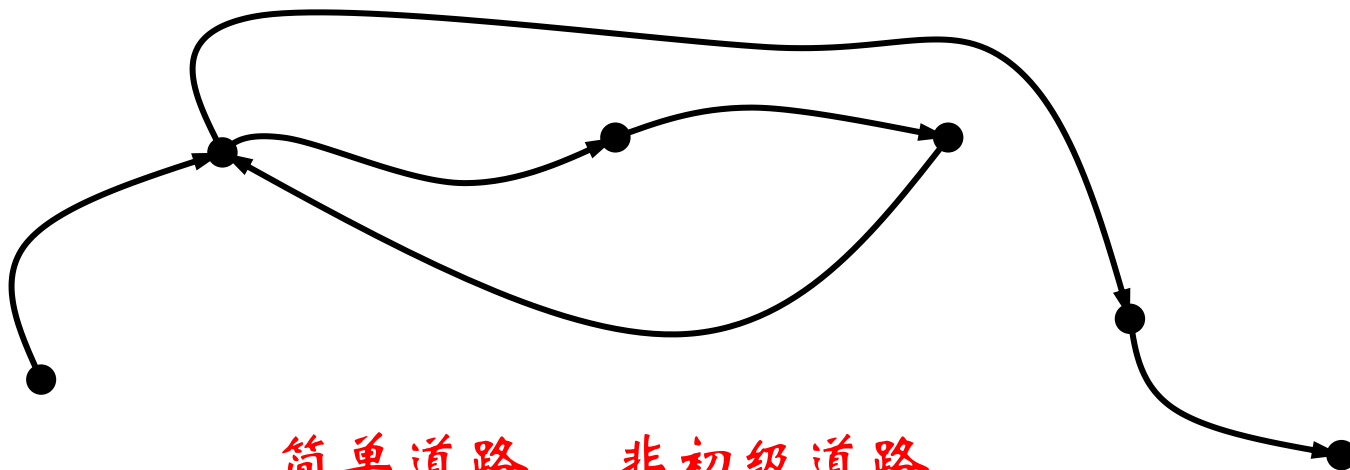


道路与回路



简单道路

初级道路



简单道路

非初级道路



道路与回路

- 定义2.1.2 无向图 $G=(V,E)$ 中, 若点边交替序列 $P=(v_{i1}, e_{i1}, v_{i2}, e_{i2}, \dots, e_{i(q-1)}, v_{iq})$ 满足:

$v_{ik}, v_{i(k+1)}$ 是 e_{ik} 的两个端点

则称 P 是 G 中的一条链或道路;

若 $v_{iq} = v_{i1}$, 则称 P 是 G 中的一个圈或回路。

- 简单道路 (回路): P 中没有重复边
- 初级道路 (回路): P 中没有重复结点



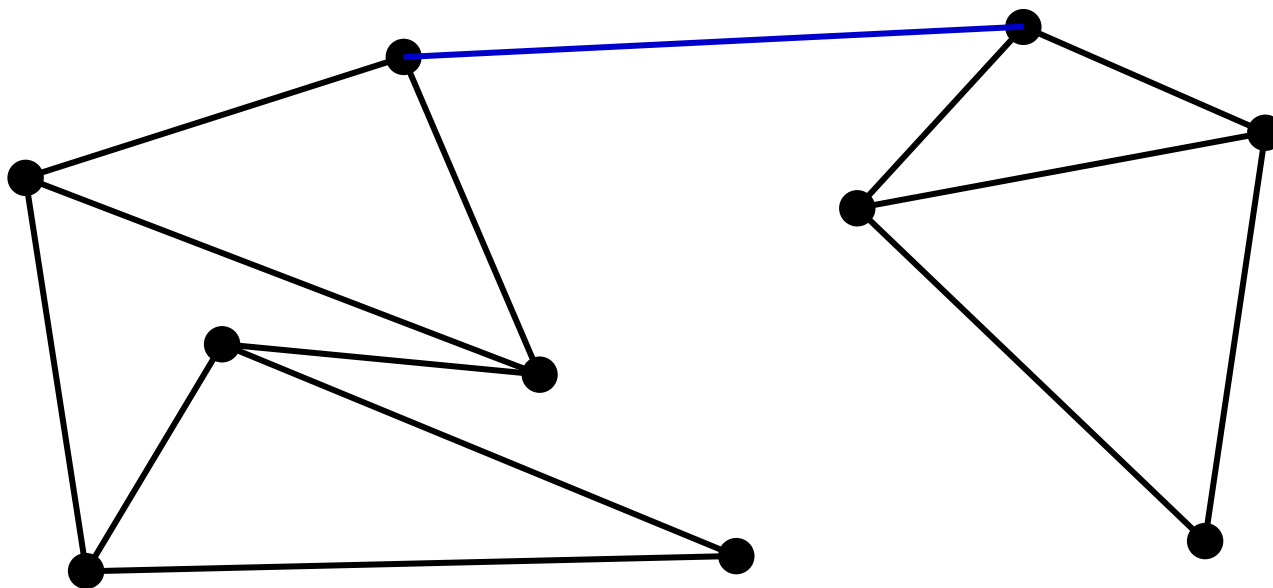
道路与回路

- 定义2.1.3 设 G 为无向图，若 G 的任意两结点间都存在道路，就称 G 为**连通图**，否则称为**非连通图**。
- 对于有向图 G ，如果在不考虑其各边的方向的情况下是连通图，则称**有向图 G 是连通图**。
- 若连通子图 H 不是 G 的任何连通子图的真子图，则称 H 是 G 的极大连通子图，或称**连通支**。



道路与回路

连通子图 H 不是 G 的任何连通子图的真子图





道路与回路

- 显然， G 的每个连通支都是它的导出子图。
- 思考：
 - 若 G 为连通图，其连通支个数为几个？
 - 具有两个连通支的图，其邻接矩阵和关联矩阵是什么特点？



道路与回路

例：设 G 为简单图，证明当 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 时， G 为连通图

证明（反证法）：假定 G 为非连通图

– G 至少含2个连分支 $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$

– 令 $|V(G_1)| = n_1, |V(G_2)| = n_2$ ，显然有 $n_1 + n_2 = n$

– 同理， $|E(G_1)| = m_1, |E(G_2)| = m_2$ ，显然有 $m_1 + m_2 = m$



道路与回路

— 由于 G 为简单图，因此

$$\left. \begin{aligned} m_1 &\leq \frac{1}{2}n_1(n_1 - 1) \\ m_2 &\leq \frac{1}{2}n_2(n_2 - 1) \end{aligned} \right\} \rightarrow m \leq \frac{1}{2}n_1(n_1 - 1) + \frac{1}{2}n_2(n_2 - 1)$$

— 由于 $n_1 \leq n - 1$, $n_2 \leq n - 1$

故：

$$m \leq \frac{1}{2}(n-1)(n_1 - 1 + n_2 - 1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

与前提矛盾！

证毕！



道路与回路

例：设 G 为简单图，证明当 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 时，
 G 为连通图



道路与回路—小结

- 有向图：
 - 有向道路，有向回路
 - 简单有向道路（回路），初级有向道路（回路）
- 无向图：
 - 道路（链），回路（圈）
 - 简单道路（回路），初级道路（回路）
- 连通图：
 - 连通支（极大连通子图）



主要内容

- 2.1 道路与回路
- **2.2 道路与回路的判定**
- 2.3 欧拉道路与回路
- 2.4 哈密顿道路与回路
- 2.5 旅行商问题
- 2.6 最短路径
- 2.7 关键路径
- 2.8 中国邮路问题



道路与回路的判定

- 如何判定图G中任意两个结点间存在道路或回路？
 - 观察！
 - 计算！
- 计算机中只能通过代数计算来判定图G的连通性以及结点间道路、回路
 - 邻接矩阵法
 - 搜索法 (BFS, DFS)



道路与回路的判定

- 邻接矩阵法：设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵
由邻接矩阵定义可知：

$$a_{ij} = 1 \quad \Rightarrow \quad (v_i, v_j) \in E(G)$$

即图 G 中存在 v_i 到 v_j 的边。



道路与回路的判定

- 我们再观察 $A^2 = (a_{ij}^{(2)})_{n \times n}$ ，据矩阵乘法可知：

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{kj}$$

$a_{ij}^{(2)} \neq 0$ 当且仅当存在 k ，使 $a_{ik} = a_{kj} = 1$

这意味着 v_i 可以经过2条边 (v_i, v_k) 和 (v_k, v_j)
到达 v_j



道路与回路的判定

- 同理，对于 $A^l = (a_{ij}^{(l)})_{n \times n}, (l \leq n)$

如果 $a_{ij}^{(l)} \neq 0$

意味着 v_i 可以经过 l 条边 $(v_i, v_p), \dots, (v_q, v_j)$
到达 v_j



道路与回路的判定

$$a_{ij} \neq 0$$

v_i 可以通过1条边到达 v_j

$$a_{ij}^{(2)} \neq 0$$

v_i 可以通过2条边到达 v_j

⋮

$$a_{ij}^{(l)} \neq 0$$

v_i 可以通过 l 条边到达 v_j

⋮

如何判定两个结点之间存在道路？

如何计算两个结点之间存在几条道路？



道路与回路的判定

- 令 $P = A + A^2 + \dots + A^n$
 - 如果 $p_{ij} = t$, 说明从 v_i 可以经过 t 条道路到达 v_j ;
 - 反之, 说明在 n 步之内 v_i 无法到达 v_j , 即 v_i 与 v_j 间不存在道路
- 以上方法可以判定任意两个结点间存在多少条道路。
- 计算复杂度为 $O(n^4)$ 。



道路与回路的判定

- 思考：

- 计算所得到的两结点间“所有道路”是“道路”、“简单道路”还是“初级道路”？
- 图中如果出现重边，如何计算？
- 如果要你罗列出所有道路，如何通过运算的方式得到？



道路与回路的判定

- 实际应用中，往往只需要判定任意两结点间是否存在道路



道路与回路的判定

- 可采用逻辑运算方法：

$$A^l = \left(a_{ij}^{(l)} \right)_{n \times n}, \quad a_{ij}^{(l)} = \bigvee_{k=1}^n \left(a_{ik}^{(l-1)} \wedge a_{kj} \right), \quad l = 2, 3, \dots, n$$

相应地，

$$P = A \vee A^2 \vee \dots \vee A^n$$

- 这就是图G的道路矩阵。



道路与回路的判定

- Warshall 算法:

- Begin

- $P \leftarrow A$

- for $i=1$ to n

- for $j=1$ to n

- for $k=1$ to n

- $$p_{jk} \leftarrow p_{jk} \vee (p_{ji} \wedge p_{ik})$$

- end

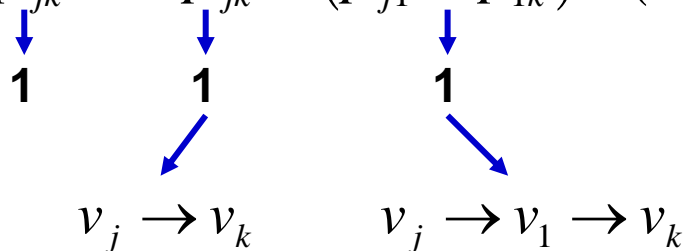


道路与回路的判定

- 定理2.2.1 Warshall算法的结果是图G的道路矩阵。

证明：（归纳法）

当 $i=1$ 时 $p_{jk}^{(1)} = p_{jk} \vee (p_{j1} \wedge p_{1k}) \quad (k=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n)$

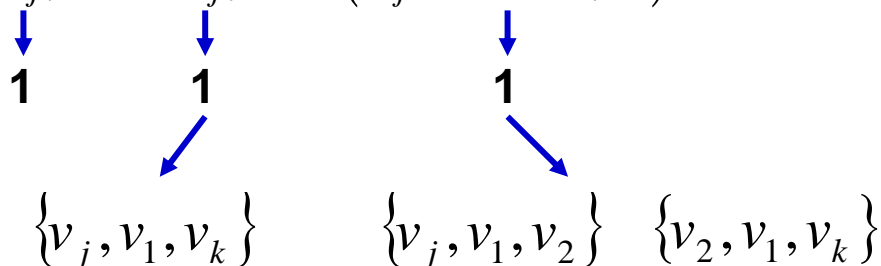


$p_{jk}^{(1)} = 1 \iff$ 结点集 $\{v_j, v_1, v_k\}$ 之间有 v_j 到 v_k 的道路



道路与回路的判定

当 $i=2$ 时 $p_{jk}^{(2)} = p_{jk}^{(1)} \vee (p_{j2}^{(1)} \wedge p_{2k}^{(1)}) \quad (k=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n)$



$p_{jk}^{(2)} = 1 \iff$ 结点集 $\{v_j, v_1, v_2, v_k\}$ 之间有 v_j 到 v_k 的道路

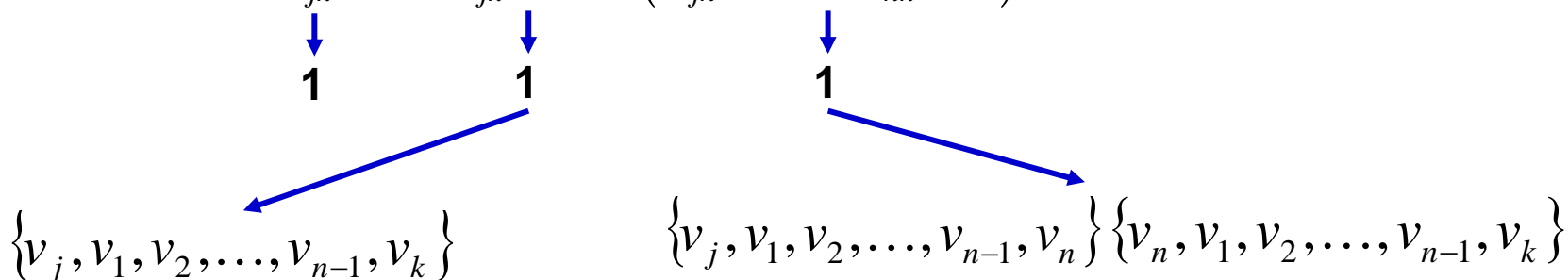
设当 $i=n-1$ 时, $p_{jk}^{(n-1)} = 1 \iff$

结点集 $\{v_j, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_k\}$ 之间有 v_j 到 v_k 的道路



道路与回路的判定

当 $i = n$ 时 $p_{jk}^{(n)} = p_{jk}^{(n-1)} \vee (p_{jn}^{(n-1)} \wedge p_{nk}^{(n-1)})$ ($k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$)



$$p_{jk}^{(n)} = 1 \iff$$

结点集 $\{v_j, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n, v_k\}$ 之间有 v_j 到 v_k 的道路

证毕!



道路与回路的判定

- 定理2.2.1 Warshall算法的结果是图G的道路矩阵。

Warshall算法：

- Begin
- $P \leftarrow A$
- for $i=1$ to n
- for $j=1$ to n
- for $k=1$ to n
- $p_{jk} \leftarrow p_{jk} \vee (p_{ji} \wedge p_{ik})$
- end



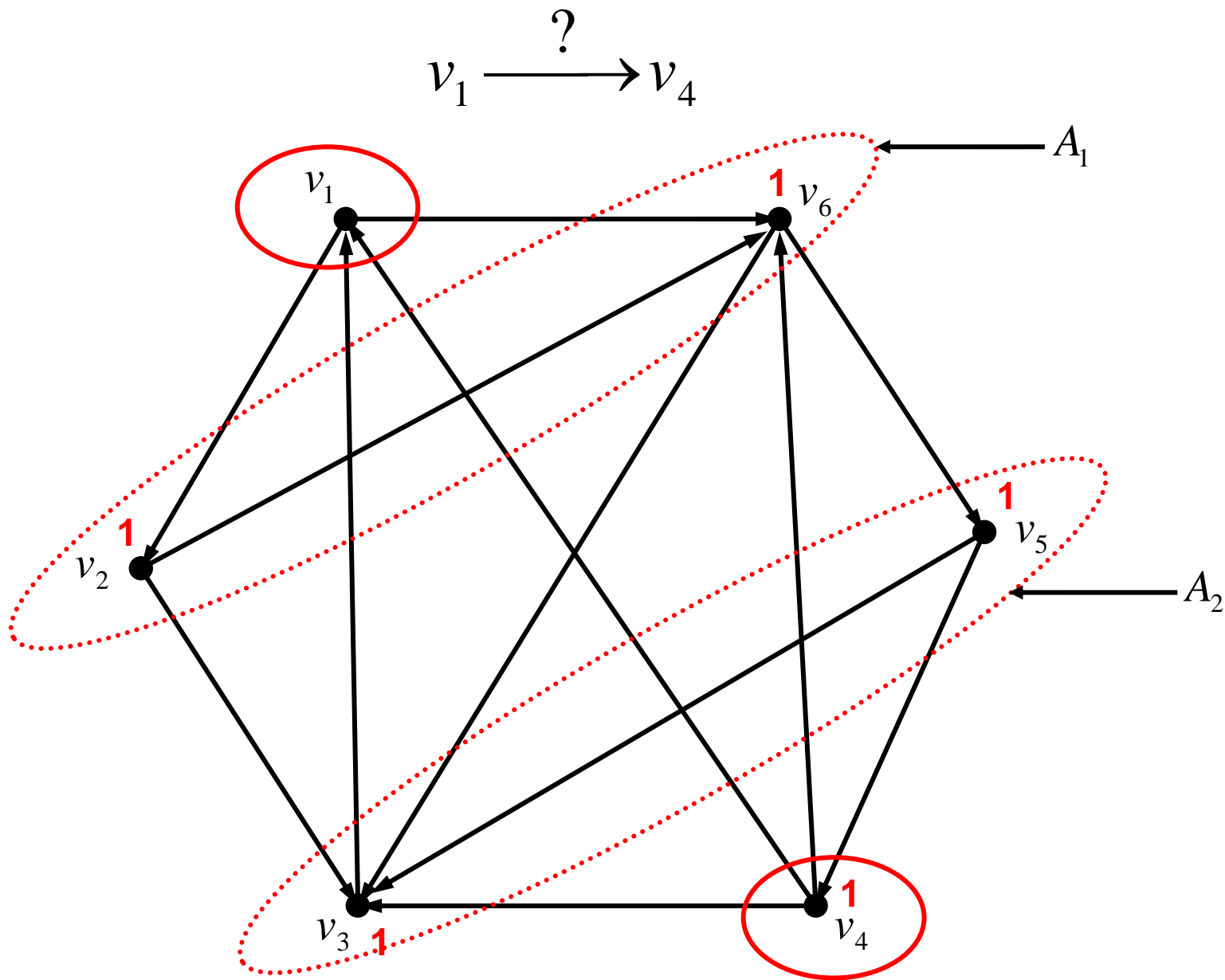
道路与回路的判定

- 搜索法：
 - 采用搜索的方法判断 G 中某一结点到其他结点是否存在道路经常更加方便
 - 常用的方法有两种：
 - 广探法(**Breadth First Search, BFS**)
 - 深探法(**Depth First Search, DFS**)



道路与回路的判定

- 广探法(BFS):
 - BFS法是从 G 的任一结点 v_0 开始, 找它的直接后继集 $\Gamma^+(v_0)$, 记为 A_1 , 然后对 A_1 中的每一个结点分别找它们的直接后继集, 这些后继集的并集记为 A_2 。依此类推, 直至找到目的结点。
 - 在搜索过程中, 难免会碰到重复搜索到的结点, 为避免结点的重复搜索可对结点进行标号。
(开始为0, 第一次搜索到后变为1, 之后标号为1的结点将不进入直接后继集)



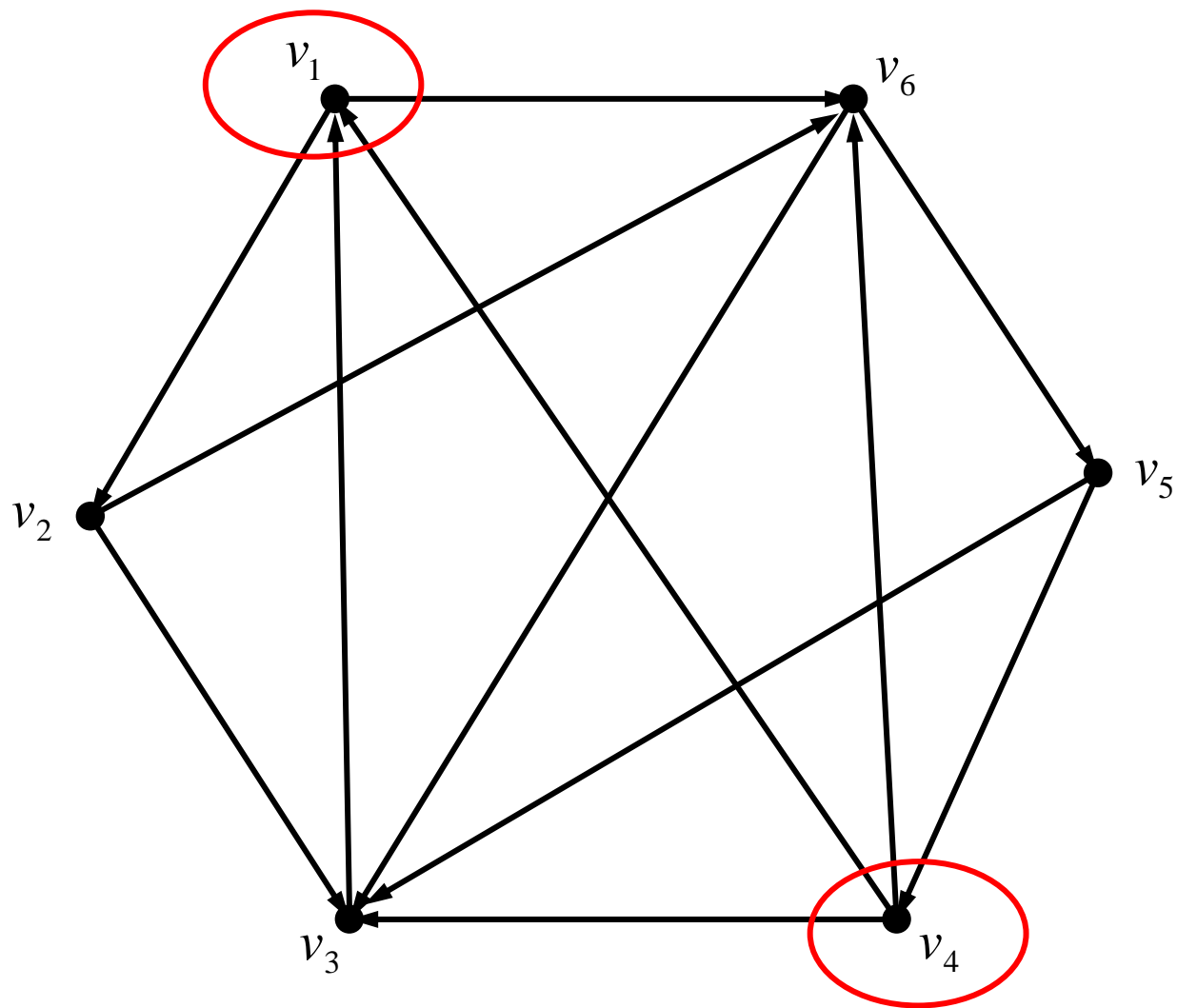
采用正向表数据结构实现，比较方便 思考：计算复杂度？



道路与回路的判定

- 深探法(DFS):
 - DFS与BFS截然不同。
 - 它从 v_0 开始, 只查找 v_0 的某个直接后继 v_1 , 记下 v_1 的前趋 v_0 , 然后再找 v_1 的某个未搜索过的直接后继 v_2 , 依此类推
 - 当从某个结点 v_j 无法再向下搜索时, 退回到它的前趋结点 v_{j-1} , 然后再找 v_{j-1} 的另一个未查过的直接后继。

$$v_1 \xrightarrow{?} v_4$$



思考：计算复杂度？



道路与回路的判定—小结

- 邻接矩阵法
 - 道路矩阵的计算方法
 - Warshall算法
- 搜索法
 - 广探法(BFS)
 - 深探法(DFS)



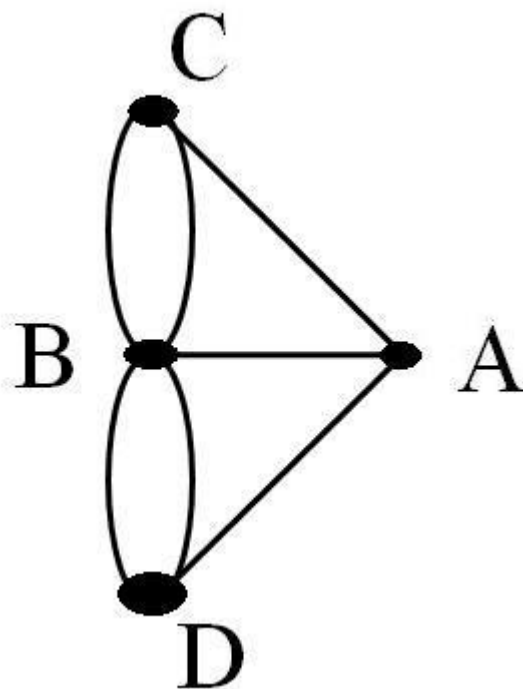
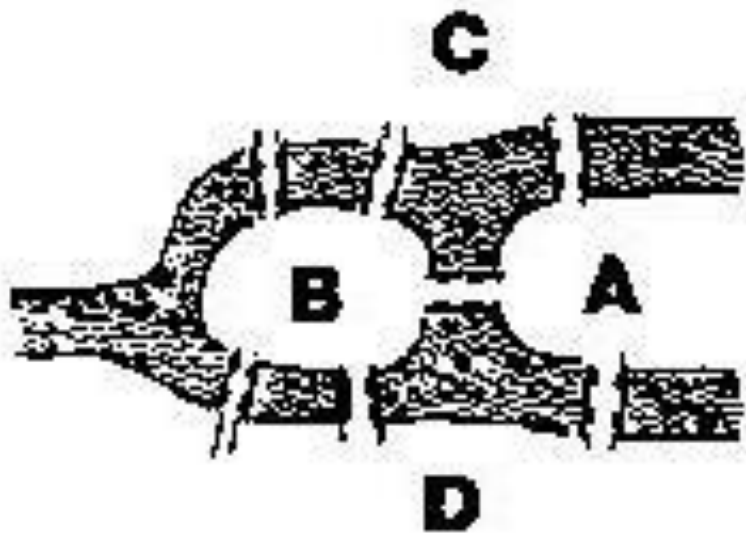
主要内容

- 2.1 道路与回路
- 2.2 道路与回路的判定
- **2.3 欧拉道路与回路**
- 2.4 哈密顿道路与回路
- 2.5 旅行商问题
- 2.6 最短路径
- 2.7 关键路径
- 2.8 中国邮路问题



欧拉道路与回路

- 定义2.3.1 无向连通图 $G = (V, E)$ 中的一条经过所有边的简单回路（道路）称为 G 的欧拉回路（道路）
- 七桥问题





欧拉道路与回路

- 定理2.3.1 无向连通图 G 存在欧拉回路的充要条件是 G 中各结点的度都是偶数。

证明：

必要性：存在欧拉回路 \iff 各结点度为偶数

- 若 G 中有欧拉回路 C ，则 C 过每一条边一次且仅一次
- 对于任意一个结点 v 来说，如果 C 经过 e_i 进入 v ，则一定通过另外一条边 e_j 离开
- 因此任意一个结点的度均为偶数



欧拉道路与回路

充分性：各结点度为偶数 \Rightarrow 存在欧拉回路

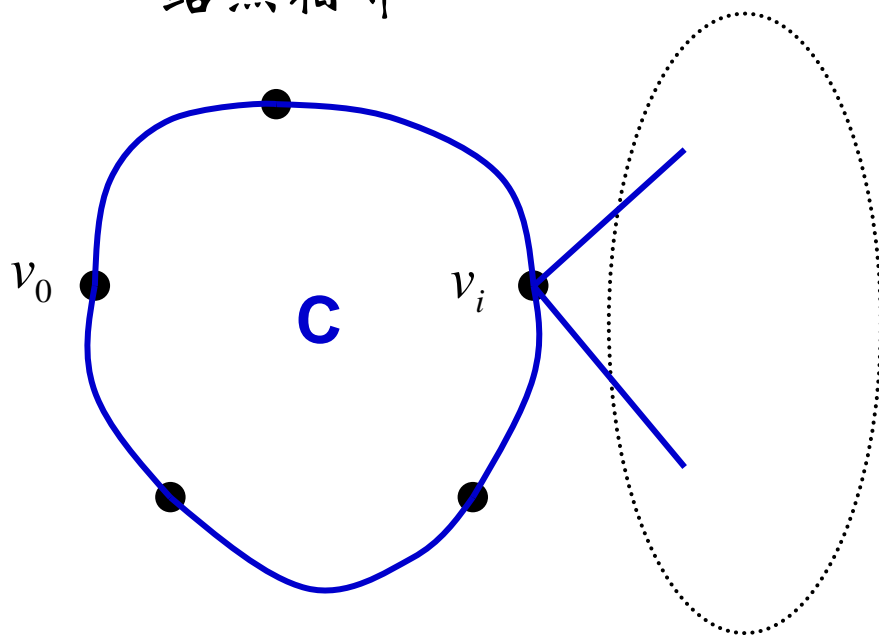
- 由于 G 为有穷图，因此从任意一结点 v_0 出发一定可以得到一条简单回路 C
 - \because 各结点的度均为偶数
 - \therefore 从 v_0 出发的简单道路可以不停留在 v_0 以外的其他任何结点始终向前延展
 - \because G 为有穷图
 - \therefore 该道路最终可以回到结点 v_0 形成简单回路 C
- 如果 $E(G)=E(C)$ ，则 C 就是欧拉回路。



欧拉道路与回路

— 如果 $E(G) \neq E(C)$, 则构造 $G_1 = G - C$

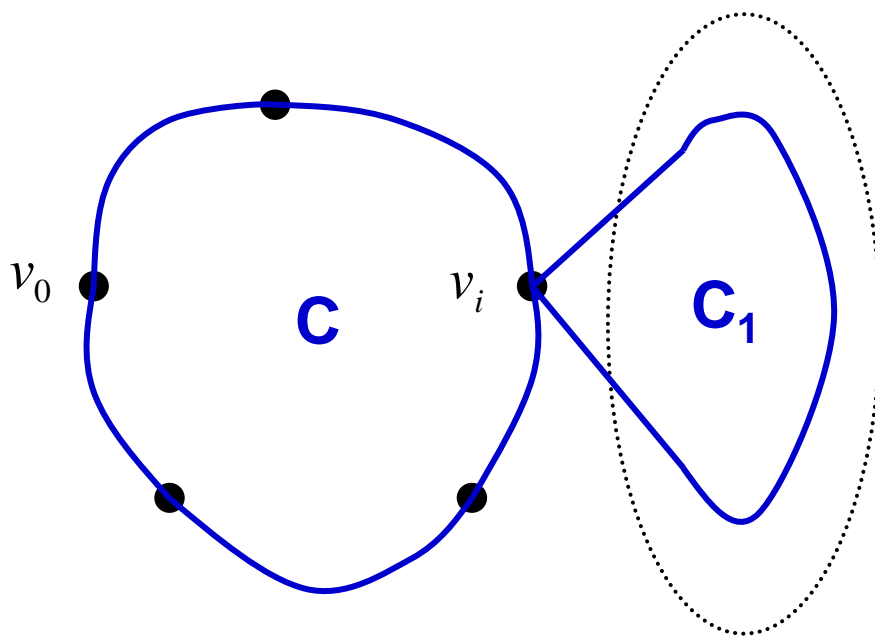
- G_1 中各点的度仍然都是偶数
- G_1 不一定是连通图
- 此时, G_1 中必定存在度非零的结点 $v_i \in C$, 它与其他结点相邻





欧拉道路与回路

- 同样的方法，图 G_1 中，从 v_i 出发，在 v_i 所在连通支内构造简单回路 C_1
- 显然， $C \cup C_1$ 仍然是 G 的一条简单回路，但包含的边数比 C 多。





欧拉道路与回路

- 继续以上构造方法，我们可以最终得到一条包含所有边的简单回路

$$C' = CUC_1U \cdots UC_k$$

C' 就是欧拉回路。充分性证毕！

证明的过程就是一个构造欧拉回路的过程



欧拉道路与回路

- 推论2.3.1 若无向连通图 G 中只有2个度为奇数的结点，则 G 存在欧拉道路

证明：

- （不妨）设 v_i 和 v_j 是两个结点度为奇数的结点。
- 构造 $G' = G + (v_i, v_j)$ ，则 G' 变为所有结点度均为偶数的图
- 因此 G' 中存在欧拉回路 C
- 令 $C' = C - (v_i, v_j)$ ，则 C' 正是经过了图 G 中所
有边的一条欧拉道路。

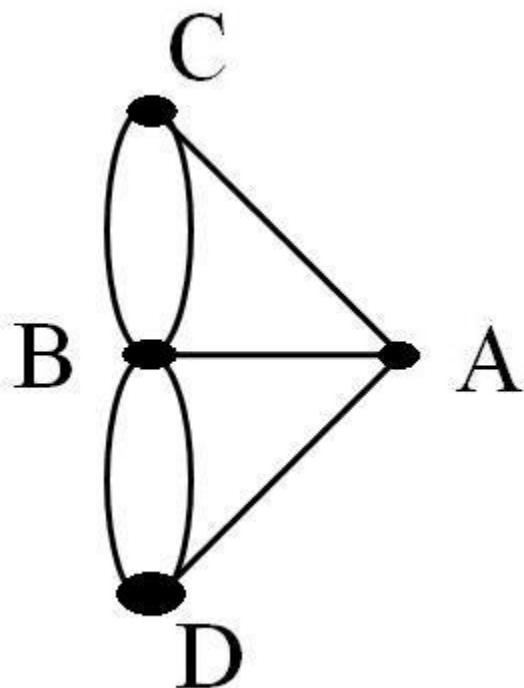
证毕！





欧拉道路与回路

- 七桥问题:



无解!



欧拉道路与回路

- 例：设连通图 $G=(V,E)$ 有 k 个度为奇数的结点，证明 $E(G)$ 可以划分成 $k/2$ 条简单道路。

证明：

- 由性质1.1.2知， k 一定为偶数。
- 在这 k 个结点间添加 $k/2$ 条边，使每个结点都与其中一条边关联，得到 G' 。
- G' 中存在欧拉回路 C ，这 $k/2$ 条边都在 C 上且不相邻接
- 删掉这些边，就得到 $k/2$ 条简单道路，它们包含了 G 的所有边。

证毕！





欧拉道路与回路

- 推论2.3.2 若有向连通图 G 中各结点的正、负度相等，则 G 存在有向欧拉回路
(课后练习)



主要内容

- 2.1 道路与回路
- 2.2 道路与回路的判定
- 2.3 欧拉道路与回路
- **2.4 哈密顿道路与回路**
- 2.5 旅行商问题
- 2.6 最短路径
- 2.7 关键路径
- 2.8 中国邮路问题



哈密顿道路与回路

- 十九世纪，英国数学家哈密顿(Willian Hamilton)给出了一个关于凸12面体的数学游戏：把12面体的20个顶点比做世界上20个城市，30条棱表示这些城市之间的交通线路。
- 问题：是否可以从任意一个城市出发，经过每个城市一次且只经过一次，最终返回出发地？
- 问题的实质是：一个连通图中，是否存在包含所有结点的初级回路(点一笔画问题)



哈密顿道路与回路

- 定义2.4.1 无向图 G 的一条过全部结点的初级回路(道路)称为 G 的哈密顿回路(道路), 简记为 H 回路(道路)
 - 欧拉回路的概念是简单回路
 - 哈密顿回路的概念是初级回路
 - 思考: 什么样的图欧拉回路和哈密顿回路相同
 - H 回路研究的是初级回路, 因此对于一般图 G , 删掉重边和自环, 不会影响 H 回路的存在性, 因此, 一般针对简单图研究 H 回路存在性问题





哈密顿道路与回路

- 定理2.4.1 如果简单图 G 中任意两结点 v_i, v_j 之间恒有 $d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1$, 则 G 中存在哈密顿道路

证明:

(1). 证明 G 为连通图 (反证法)

若 G 非连通, 则至少存在两个连通支 H_1, H_2 , 其结点数目分别为 n_1, n_2 , 从中各任取一个结点 v_i, v_j , 则 $d(v_i) \leq n_1 - 1$, $d(v_j) \leq n_2 - 1$,

故 $d(v_i) + d(v_j) < n - 1$

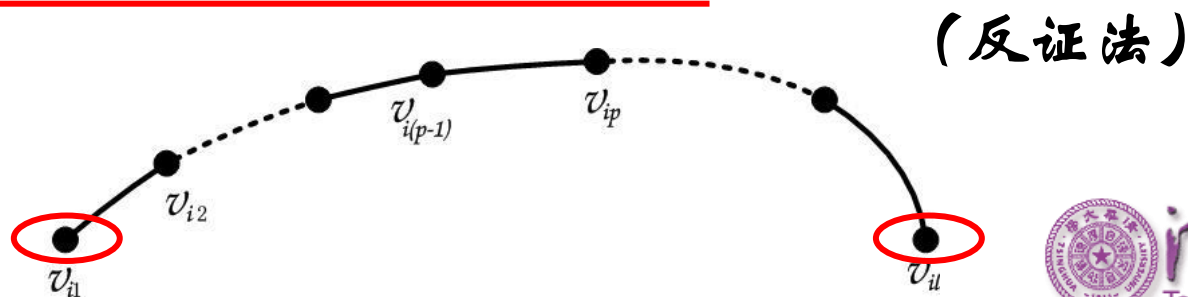


哈密顿道路与回路

(2)证明G存在H道路（构造法）：

- 设 $P = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{il})$ 是G中一条极长的初级道路
 - v_{i1}, v_{il} 的邻点都在P上
 - 否则可以继续延伸构造更长的初级道路
- 若 $l = n$ ，P就是一条H道路
- 若 $l < n$ ，则可证明G中一定存在经过结点

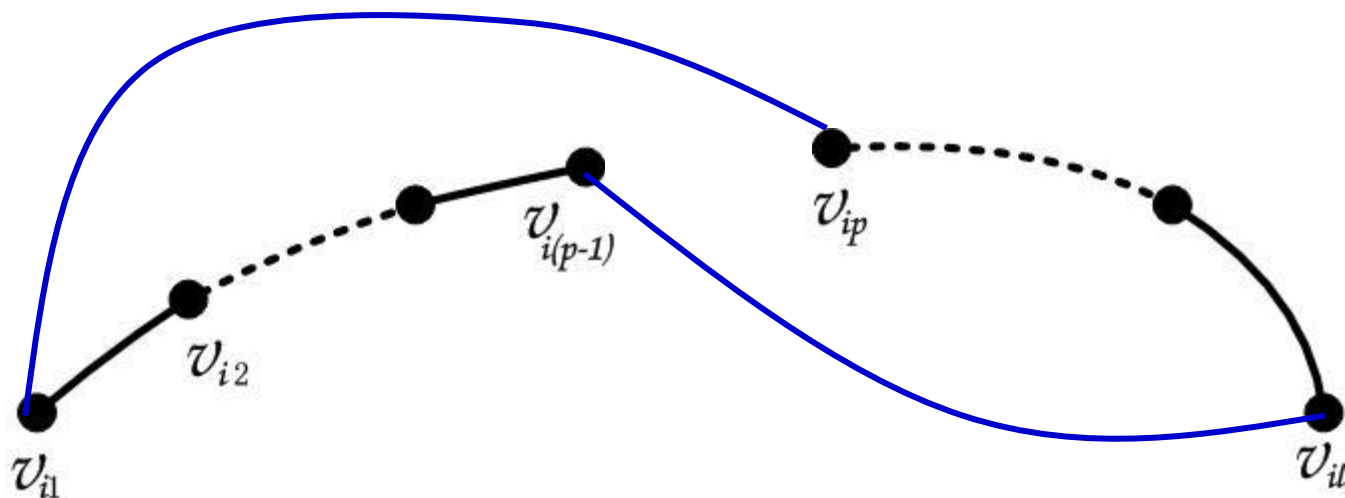
$v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{il}$ 的初级回路C





哈密顿道路与回路

- 假设 $l < n$, 且不存在经过结点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{il}$ 的初级回路。
 - P 为极长道路, 因此 v_{i1}, v_{il} 的邻点都在 P 上
 - 若边 $(v_{i1}, v_{ip}) \in E(G)$, 一定没有 $(v_{il}, v_{i(p-1)}) \in E(G)$





哈密顿道路与回路

- 我们设 $d(v_{i_1}) = k$, 则 $d(v_{i_l}) \leq l - 1 - k$
- 因此, $d(v_{i_1}) + d(v_{i_l}) \leq l - 1 < n - 1$
- 因此, 前提假设不成立
- 因此, G 中一定存在经过结点 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_l}$ 的初级回路

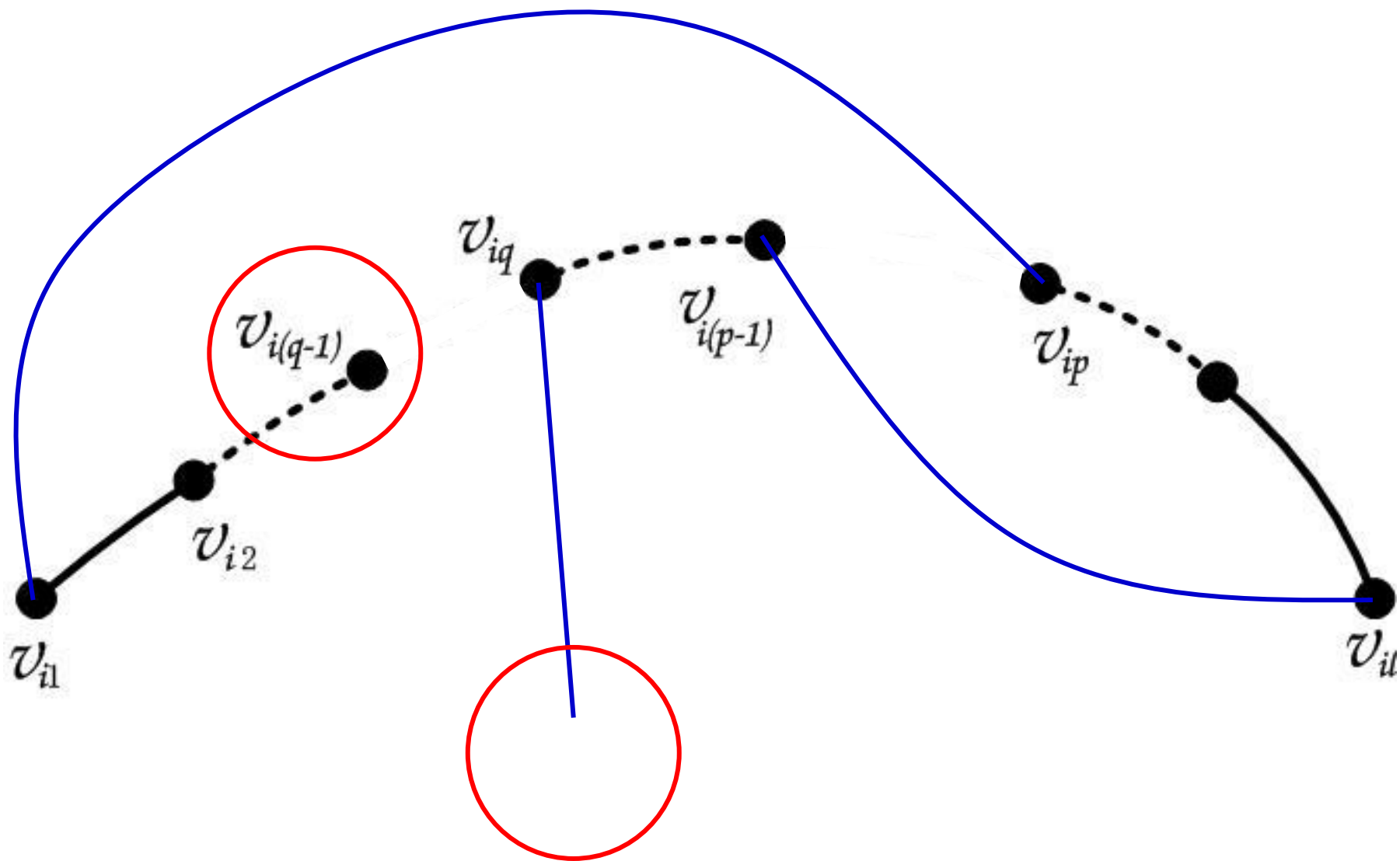


哈密顿道路与回路

(2)证明G存在H道路:

- 设 $P = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{il})$ 是G中一条极长的初级道路, 即 v_{i1}, v_{il} 的邻点都在P上 (否则可以继续延伸构造更长的初级道路)
- 若 $l = n$, P就是一条H道路
- 若 $l < n$, 则可证明G中一定存在经过结点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{il}$ 的初级回路C

思考: 这条回路是什么样的?





哈密顿道路与回路

– 由于 G 连通，因此存在 C 之外的结点 v_t 与 C 中的某点 v_{iq} 相邻。

– 删掉 $(v_{i(q-1)}, v_{iq})$ ，则得到

– $P' = (v_{it}, v_{iq}, \dots, v_{i(p-1)}, v_{il}, \dots, v_{i(q-1)})$

是 G 中一条比 P 更长的初级道路

– 以 P' 的两个端点继续扩充，可以得到比 P 更长的极长初级道路。

– 重复上述过程，因为 G 为有穷图，因此最终一定可以得到一条包含 G 中全部结点的初级道路，即 H 道路。

证毕！





哈密顿道路与回路

- 证明回顾： $d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1 \Rightarrow$ 存在H道路
 - 在前提条件下，图G一定是连通图
 - 构造一条极长道路P
 - 一定存在经过道路P的回路C
 - C之外还有相邻结点，加入，构造更长道路P'
 - 如此不断构造，最终可得到H道路



哈密顿道路与回路

- 定理2.4.1 如果简单图 G 中任意两结点 v_i, v_j 之间恒有 $d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1$, 则 G 中存在哈密顿道路

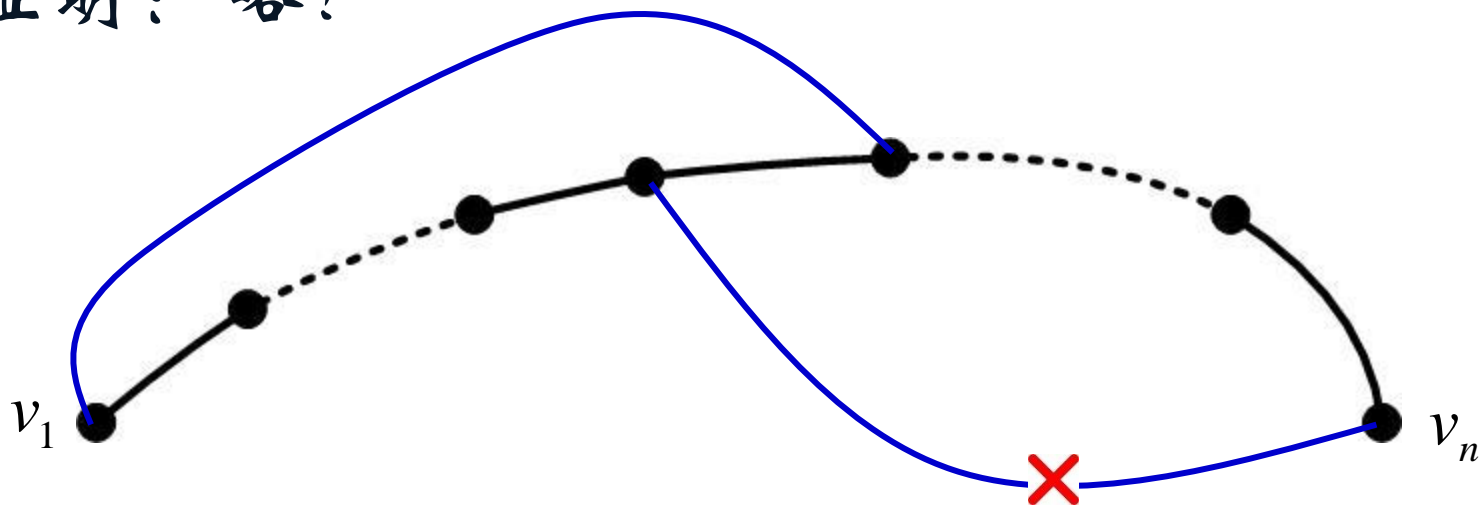


哈密顿道路与回路

- 引理2.4.0 若简单图G中存在H道路，但不存在H回路，不妨设其H道路的两端点为 v_1 和 v_n ，则

$$d(v_1) + d(v_n) \leq n - 1$$

证明：略！





哈密顿道路与回路

- 推论2.4.1 若简单图 G 的任意两结点 v_i, v_j 之间恒有 $d(v_i) + d(v_j) \geq n$ ，则 G 中存在哈密顿回路

证明：

- 由定理2.4.1， G 有H道路。
- 不妨设其两端点为 v_1 和 v_n
- 若 G 不存在H回路，据引理2.4.0，必然有
$$d(v_1) + d(v_n) \leq n - 1 < n$$
- 产生矛盾！

证毕！





哈密顿道路与回路

- 推论2.4.2 若简单图 G 每个结点的度都大于等于 $n/2$ ，则 G 有H回路

证明：

据推论2.4.1，结论显然。



哈密顿道路与回路

- 引理2.4.1 设 G 为简单图, v_i, v_j 不相邻, 且满足 $d(v_i) + d(v_j) \geq n$ 。则 G 存在H回路的充要条件是 $G + (v_i, v_j)$ 有H回路。

证明:

必要性:

G 存在H回路 $\Rightarrow G + (v_i, v_j)$ 有H回路

显然。



哈密顿道路与回路

充分性：

$G + (v_i, v_j)$ 有H回路 \implies G 存在H回路

- 假定 G 不存在H回路，则 $G + (v_i, v_j)$ 的H回路一定经过边 (v_i, v_j)
- 删去 (v_i, v_j) ，即 G 中存在一条以 v_i, v_j 为端点的H道路，根据引理2.4.0，有

$$d(v_i) + d(v_j) \leq n - 1$$

产生矛盾。

证毕！



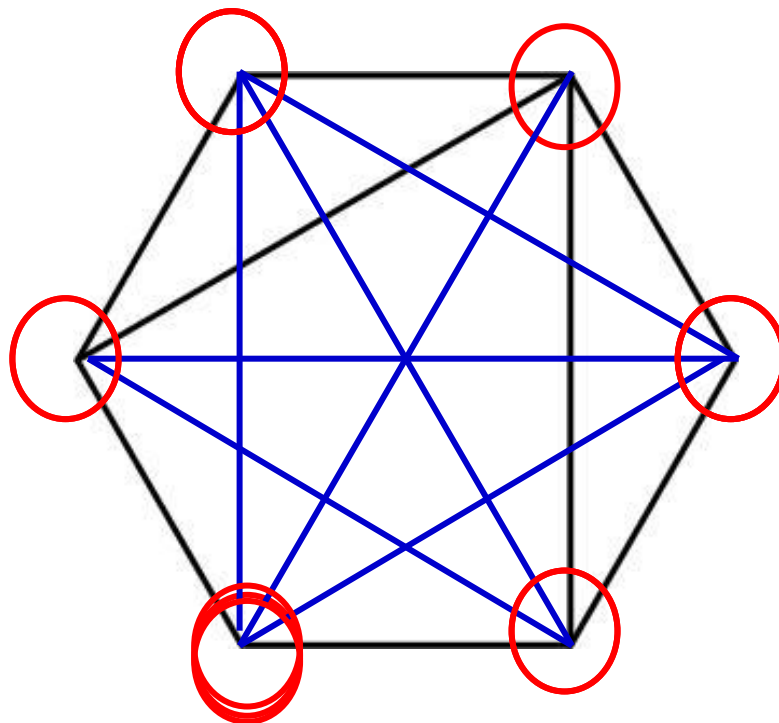


哈密顿道路与回路

- 引理2.4.1 设 G 为简单图， v_i, v_j 不相邻，且满足 $d(v_i) + d(v_j) \geq n$ 。则 G 存在H回路的充要条件是 $G + (v_i, v_j)$ 有H回路。
- 定义2.4.2 若 v_i 和 v_j 是简单图 G 的不相邻结点，且满足 $d(v_i) + d(v_j) \geq n$ ，则令 $G' = G + (v_i, v_j)$ ，对 G' 重复上述过程，直至不再有这样的结点对为止。最终得到的图称为 G 的**闭合图**，记做 $C(G)$ 。



哈密顿道路与回路





哈密顿道路与回路

- 引理2.4.3 简单图 G 的闭合图 $C(G)$ 是唯一的

证明：

- 设 $C_1(G)$ 和 $C_2(G)$ 是 G 的两个闭合图
- 边集合 $L_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ 和 $L_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ 分别是 $C_1(G)$ 和 $C_2(G)$ 中新加入的边集合。
- 显然，如果 $L_1=L_2$ ，则必然会有 $C_1(G) = C_2(G)$ 。
- 不失一般性，设 $e_{i+1} = (u, v) \in L_1$ 是构造 $C_1(G)$ 时第一条不属于 L_2 的边，亦即 $e_{i+1} \notin C_2(G)$



哈密顿道路与回路

- 令 $H = G \cup \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 。此时 H 是 $C_1(G)$ 同时也是 $C_2(G)$ 的子图。
 - 由于构造 $C_1(G)$ 的过程中需要加入 e_{i+1} ，显然说明 H 中满足 $d(u) + d(v) \geq n$ ，但依据假设， $(u, v) \notin C_2(G)$ 。这与 $C_2(G)$ 是 G 的闭合图矛盾
- 证毕！

• 引理2.4.3 简单图 G 的闭合图 $C(G)$ 是唯一的



哈密顿道路与回路

- 定理2.4.2 简单图 G 存在哈密顿回路的充要条件是其闭合同图存在哈密顿回路

证明：设 $C(G) = G \cup L_1$, $L_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_t\}$

由引理2.4.1, G 有H回路的充要条件是 $G + e_1$

有H回路; $G + e_1$ 有H回路的充要条件是

$G + e_1 + e_2$ 有H回路;

闭合同图唯一, 故得证!



哈密顿道路与回路

- 推论2.4.3 设 $G(n \geq 3)$ 为简单图，若 $C(G)$ 为完全图，则 G 有H回路。



哈密顿道路与回路

- 小结：
 - G 存在 H 道路的充分条件定理
 - 定理的证明方法
 - 闭合图在判定 H 回路存在时的作用



作业

- 课后 1, 5, 6, 10, 12

- 选做:

11

- 练习题: 有向图如图所示: 求其中 v_1 到 v_4 的长度为 1, 2, 3, 4 的通路各是多少条?

