5.1.1(b)

$S \to AD \mid CB$

$A \to aAb \mid aC \mid E$

$B \to bBc \mid cD \mid E$

$C \to aC \mid \varepsilon$

$D \to cD \mid \varepsilon$

$E \to bE \mid b$

解释：E生成全为b且长大于零，C生成a串，D生成c串。
A中aC生成至少一个a的全a串，因此A生成所有a,b个数不等的串
同理B可生成所有b,c个数不等的串
S中 AD 代表包含abc且ab不等的串
CB 代表包含abc且bc不等的串。

此时 $G=(\{S,A,B,C,D,E\},\{a,b,c,\varepsilon\},P,S)$，其中P表示上方5条产生式的集合

5.1.2(c) 最左推导：$S \underset{lm}{\Rightarrow} A1B \underset{lm}{\Rightarrow} 0A1B \underset{lm}{\Rightarrow} 00A1B \underset{lm}{\Rightarrow} 000A1B \underset{lm}{\Rightarrow} 0001B \underset{lm}{\Rightarrow} 00011B \underset{lm}{\Rightarrow} 00011$.

最右推导：$S \underset{rm}{\Rightarrow} A1B \underset{rm}{\Rightarrow} A11B \underset{rm}{\Rightarrow} A11 \underset{rm}{\Rightarrow} 0A11 \underset{rm}{\Rightarrow} 00A11 \underset{rm}{\Rightarrow} 000A11 \underset{rm}{\Rightarrow} 00011$

5.1.6(b) 基础：$\beta \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$ 步数为0，此时 $\beta=\gamma$，因为 $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta$，故 $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$

归纳：设 $\beta \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$ 步数大于0，则 $\beta \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$ 的推导过程为 $\beta \overset{*}{\Rightarrow} \beta'$，$\beta' \Rightarrow \gamma$。
(其中 $\beta \overset{*}{\Rightarrow} \beta'$ 的步数小于 $\beta \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$ 的步数) 由于归纳假设，有 $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta'$
结合 $\beta' \Rightarrow \gamma$ 得 $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$。

5.1.8 证明：串w中包含相同个数a和b，当且仅当 $w \in L(G)$

(当) 假定w中a,b个数相等，对 $|w|$ 归纳.

基础：$|w|=0$，此时 $w=\varepsilon$ 由于产生式包含 $S \to \varepsilon$，故 $\varepsilon \in L(G)$

归纳：若 $|w| \geq 1$，假设w的首字符为a，由于w包含相同个数的a和b，故可将w表示为
$w=aw_1bw_2$ (其中 w_1,w_2 包含相同个数的a和b)，
由归纳假设知 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，$S \overset{*}{\Rightarrow} w_2$，故 $S \Rightarrow aSbS \overset{*}{\Rightarrow} aw_1bw_2$，因此 $w \in L(G)$，首字母为b亦然.

(仅当) 假设 $w \in L(G)$，即 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$，证串w中a,b个数相等，对推导步数归纳.

基础：$S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 步数为1，此时只能用产生式 $S \to \varepsilon$，故 $w=\varepsilon$，包含相等(0)个数的a和b.

归纳：若 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 步数为 $k+1$ ($k \geq 1$)，且对任意 i ($i \leq k$) 步内完成的推导都满足条件(a和b的个数相等)

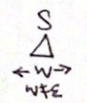
不妨设w中首字母为a (若为b，只需对下列证明中a,b互换)

对于此k+1步推导，必定有 $S \Rightarrow aSbS \overset{*}{\Rightarrow} w$

此时存在 w_1,w_2 使得 $w=aw_1bw_2$，而且 $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$，$S \overset{*}{\Rightarrow} w_2$ (步数小于k)

由归纳假设知 w_1,w_2 中包含相同个数的a和b，故w也包含相同个数的a和b.

5.2.2 证明：归纳 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 的步数 m

基础：m=1时，必有产生式 $S \Rightarrow w$，故存在分析树  (包含 n+1 个结点).

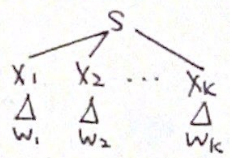
归纳：若 m>1，则设第一步用了产生式 $S \to X_1X_2\cdots X_k$ (X_i 为终结符或变元)，此时 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ 分解为
$S \Rightarrow X_1X_2\cdots X_k \overset{*}{\Rightarrow} w$，将w分为 $w=w_1w_2\cdots w_k$，若

① X_i 为终结符，则 $X_i=w_i$，则 $X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i$ 所用步数 $m_i=0$.

② X_i 为非终结符，则 $X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i$，所用步数 m_i 小于 m (至少包括 $S \Rightarrow X_1X_2\cdots X_k$)，由归纳假设知存在根结点为 X_i 的分析树，结点数为 $|w_i|+m_i$

(下续)

5.2.2（续） 故 $m=\sum_{i=1}^{k} m_i+1$ ，此时存在分析树如下，结点数为 $1+\sum_{i=1}^{k}(|w_i|+m_i)=(1+\sum_{i=1}^{k}m_i)+\sum_{i=1}^{k}|w_i|=m+n$

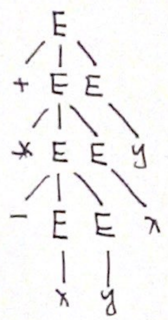


5.4.7(a) 由于文法无二义，故最左、最右推导和分析树唯一.

最左推导： $E \underset{lm}{\Rightarrow} +EE \underset{lm}{\Rightarrow} +*EEE \underset{lm}{\Rightarrow} +*-EEEE \underset{lm}{\Rightarrow} +*-xEEE \underset{lm}{\Rightarrow} +*-xyEE \underset{lm}{\Rightarrow} +*-xyxE \underset{lm}{\Rightarrow} +*-xyxy$

最右推导： $E \underset{rm}{\Rightarrow} +EE \underset{rm}{\Rightarrow} +Ey \underset{rm}{\Rightarrow} +*EEy \underset{rm}{\Rightarrow} +*Exy \underset{rm}{\Rightarrow} +*-EExy \underset{rm}{\Rightarrow} +*-Eyxy \underset{rm}{\Rightarrow} +*-xyxy$.

分析树：



附加1. (1)

$S \to AB$

$A \to aAbb \mid \varepsilon$

$B \to cB \mid \varepsilon$

此时 CFG $G=(\{S,A,B\},\{a,b,c,\varepsilon\},P,S)$ ，P表示上方三条产生式的集合。

(2) 产生式集合P如下：

$S \to AB$

$A \to aAb \mid \varepsilon$

$B \to bBc \mid \varepsilon$

此时. CFG $G=(\{S,A,B\},\{a,b,c,\varepsilon\},P,S)$ 满足条件.

(3) 首先，观察 $a^m b^n c^p d^q=\begin{cases} a^q(a^{m-q}b^n c^p)d^q & (m\ge q) \\ a^m(b^n c^p d^{q-m})d^m & (m<q) \end{cases}$

对于 $a^{m-q}b^n c^p$ ，由 $m+n=p+q$ 知 $a^{m-q}b^n c^p=a^{p-n}b^n c^p$ ，即a和b的个数和等于c的个数，可由 $A\to aAc \mid C$ ， $C\to bCc \mid \varepsilon$ 生成（后者 bc 个数相等，前者 a,b 与 c 个数相等）

对于 $b^n c^p d^{q-m}=b^n c^p d^{m-p}$ 同理可由 $B\to bBd \mid C$ （其中 $C\to bCc\mid\varepsilon$ ）生成

因此， $a^m b^n c^p d^q$ 可由 $S\to aSd \mid A \mid B$ 生成.

产生式集合P如下：

$S\to aSd \mid A \mid B$

$A\to aAc \mid C$

$B\to bBd \mid C$

$C\to bCc \mid \varepsilon$

CFG $G=(\{S,A,B,C\},\{a,b,c,d,\varepsilon\},P,S)$ 满足条件.

附加1. (4) ①若 $n \geq i$ ($j \geq m$) 则 $a^n b^i c^j d^m = a^{n-i}(ab)^i c^{j-m}(cd)^m = a^{n-i}(ab)^i c^{n-i}(cd)^m$

②若 $n < i$ ($j < m$), 则 $a^n b^i c^j d^m = (ab)^n b^{i-n}(cd)^j \cdot d^{m-j} = (ab)^n b^{m-j}(cd)^j d^{m-j}$

对于①, 我们先生成 $(ab)^i$, 再生成 $a^{n-i}(ab)^i c^{n-i}$, 最后加上 $(cd)^m$ 即可, ②亦同理.

CFG $G = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c, d, \varepsilon\}, P, S)$, P如下所示:

$S \to A \mid B$
$A \to AF \mid C$
$B \to EB \mid D$
$C \to aCc \mid E$
$D \to bDd \mid F$
$E \to aEb \mid \varepsilon$
$F \to cFd \mid \varepsilon$

(5) $uawb = (uaw)b$, 要使 uaw 中 $|u| = |w|$, 相当于每一次操作都在字串两侧加上字符 a 或 b.
因此我们有 CFG $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, P如下所示:

$S \to Ab$
$A \to BAB \mid a$
$B \to a \mid b$

(6) CFG $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c, \varepsilon\}, P, S)$, P如下所示:

$S \to AC \mid ABC \mid D$
$A \to aA \mid \varepsilon$
$B \to bB \mid bb$
$C \to cC \mid \varepsilon$
$D \to aDc \mid b$

「解释: AC产生所有 $a^i c^k$ 字串 (b个数为0)
D产生所有 $a^i b c^i$ 字串 (b个数为1, 此时 $i = k$)
ABC产生所有 $a^i b^j c^k$ 字串 (b个数大于等于2)」

附加2. 非二义文法: 先生成形如 $a^{2i} b^i$ 的串, 再在左侧加上a
此时 CFG $G_1 = (\{S, A\}, \{a, b, \varepsilon\}, P, S)$, P如下所示:

$S \to aS \mid A$
$A \to aaAb \mid \varepsilon$

二义文法: 每一步要么加上a, 要么左右加上aa和b:
此时 CFG $G_2 = (\{S\}, \{a, b, \varepsilon\}, \{S \to aS \mid aaSb \mid \varepsilon\}, S)$

附加3. 对 a, b, c 分配优先级, 此时有

$S \to SaS \mid A$
$A \to AbA \mid B$
$B \to BcB \mid d$

进一步, 我们可以将上式改为左结合的, 即

$S \to SaC \mid C$
$C \to CbD \mid D$
$D \to DcE \mid E$
$E \to d$

此时文法无二义.

附加 4. 归纳 $S \overset{m}{\Rightarrow} w$ 的步数 m，此时产生的串 w 为 $w=(01)^{m-1}$.

基础：若 $m=1$，则必有产生式 $S \Rightarrow \varepsilon$，故 $w=\varepsilon=(01)^0 \in L$

若 $m=2$，则有 $S \Rightarrow 0T1 \Rightarrow 01$，$w=01=(01)^1 \in L$.

归纳：若 $m \geq 3$，则必有 $S \Rightarrow 0T1 \Rightarrow 01w_101 \overset{*}{\Rightarrow} w$

其中 w_1 由 $m-2$ 步推导生成，由归纳假设知 $w_1=(01)^{m-2-1}=(01)^{m-3}$.

故 $w=01w_101=(01)^{m-1} \in L$.