汇编语言程序设计

第3节 浮　点　数

C程序在硬件层面的表示

- 数据
  - 整数（第二讲）
  - 浮点数（第三讲）
  - 数组、结构（第八讲）
- 代码
  - 基本概念/基本指令/寻址方式（第五讲）
  - 程序控制流与相关指令（第六讲）
  - 函数调用与相关指令（第七讲）

```
int array[2] = {1, 2};
int main()
{
    int val = sum(array, 2);
    return val;
}
```
main.c

编译

```
0000000000000000 <array>:
 0:   01 00                   add    %eax,(%rax)
 2:   00 00                   add    %al,(%rax)
 4:   02 00                   add    (%rax),%al
0000000000000000 <main>:
 0:   48 83 ec 08             sub    $0x8,%rsp
 4:   be 02 00 00 00          mov    $0x2,%esi
 9:   bf 00 00 00 00          mov    $0x0,%edi
                      a: R_X86_64_32 array
 e:   e8 00 00 00 00          callq  13 <main+0x13>
                      f: R_X86_64_PC32 sum-0x4
 13:   48 83 c4 08            add    $0x8,%rsp
 17:   c3                     retq
```
main.o

汇编指令

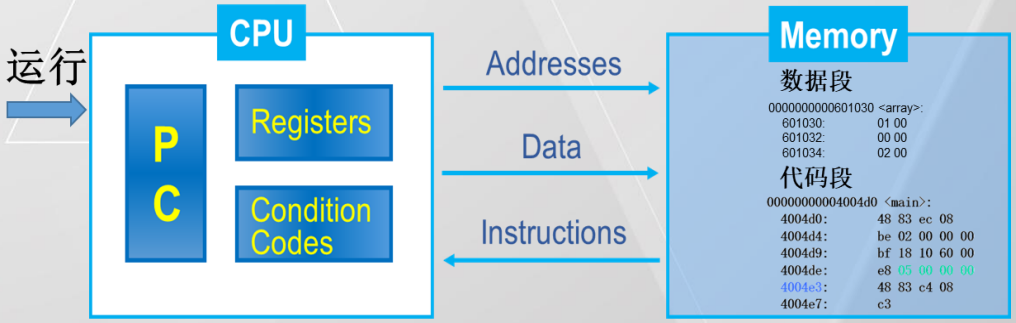
机器指令

链接

内存地址

```
00000000004004d0 <main>:
  4004d0:       48 83 ec 08
  4004d4:       be 02 00 00 00
  4004d9:       bf 18 10 60 00
  4004de:       e8 05 00 00 00
  4004e3:       48 83 c4 08
  4004e7:       c3
00000000004004e8 <sum>:
  4004e8:       b8 00 00 00 00
  4004ed:       ba 00 00 00 00
  4004f2:       eb 09
  4004f4:       48 63 ca
  4004f7:       03 04 8f
  4004fa:       83 c2 01
  4004fd:       39 f2
  4004ff:       7c f3
  400501:       f3 c3          #<array>没有给出
```

运行

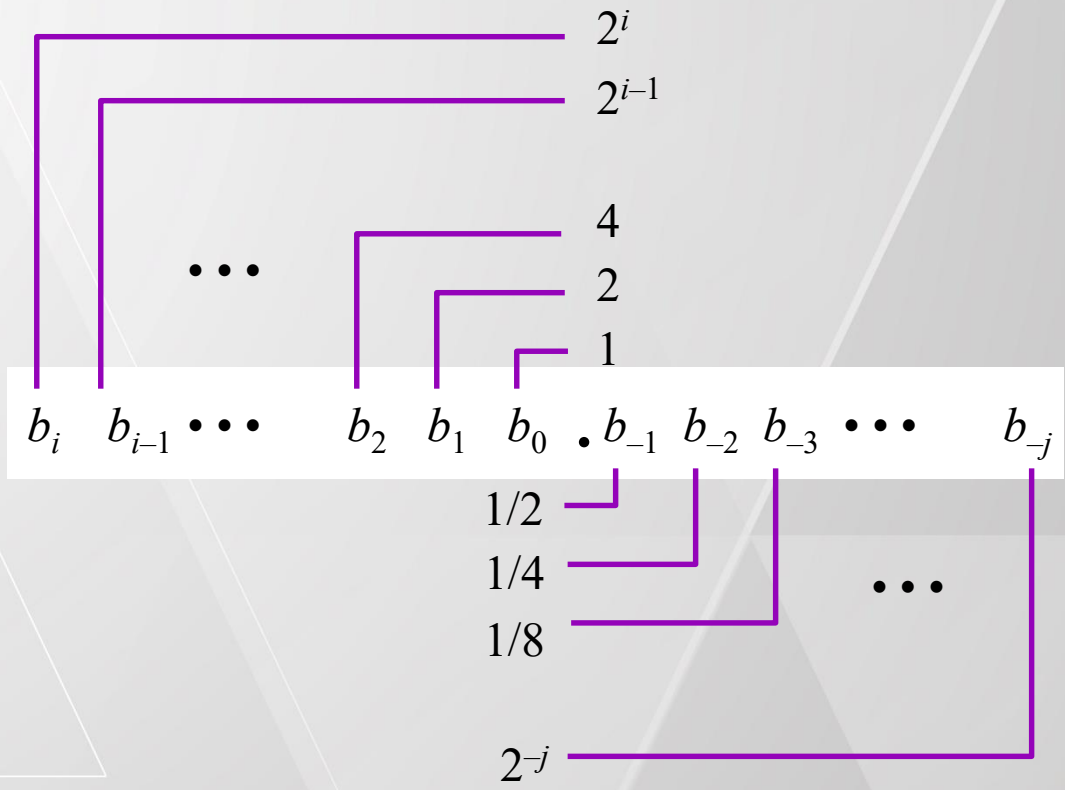


程序在机器层面的表示与运行

目录

IEEE Floating Point

- IEEE的754标准
  - 1985年建立



- 二进制表示方式

$$\sum_{k=-j}^{i} b_k \cdot 2^k$$

浮点数示例

值	二进制表示
5.3/4	101.11_2
2.7/8	10.111_2
0.63/64	0.111111_2

- **局限性**
  - 只能精确地表示$X/2^k$这类形式的数据

值	二进制表示
1/3	$0.0101010101[01]\ldots_2$
1/5	$0.001100110011[0011]\ldots_2$
1/10	$0.0001100110011[0011]\ldots_2$

计算机中的浮点数二进制表示

- **数字形式**
  - $(-1)^s\ M\ 2^E$
    - 符号：s
    - 尾数：M， 是一个位于区间[1.0,2.0)内的小数
    - 阶码：E
- **编码**

  - exp域：*E*
  - frac域：*M*

编码

- **单精度浮点数: exp域宽度为8 bits, frac域宽度为23 bits 总共32 bits。**

- **双精度浮点数: exp域宽度为11 bits, frac域宽度为52bits 总共64 bits。**

扩展精度浮点数: exp域宽度为15 bits, frac域宽度为63bits
总共80 bits。 *(1 bit 无用)*

半精度浮点数： exp域宽度为5 bits, frac域宽度为10 bits

浮点数的类型

- 规格化浮点数
- 非规格化浮点数
- 一些特殊值

规格化浮点数 （Normalized）

- **满足条件：** exp ≠ 000…0 且 exp ≠ 111…1
- **真实的阶码值需要减去一个偏置（biased）量**
  - **E = Exp – Bias**
    - Exp：exp域所表示的无符号数值
    - Bias的取值
      - 单精度数: 127 (Exp: 1…254, E: -126…127)
      - 双精度数: 1023 (Exp: 1…2046, E: -1022…1023)
        - Bias = $2^{e-1} - 1$, e = exp域的位数
- **frac域的第一位隐含为1**
  - **M = 1.xxx…x_2**
    - 因此，第一位的“1”可以省去，xxx…x: bits of frac
    - Minimum when 000…0 (M = 1.0)
    - Maximum when 111…1 (M = 2.0 – ε)

规格化浮点数示例

- **Float F = 15213.0**
  - $15213_{10} = 11101101101101_2 = 1.1101101101101_2 \times 2^{13}$
  - 尾数

    $M = 1.\underline{1101101101101}_2$

    $frac = \underline{1101101101101}0000000000_2$
  - 阶码

    $E = 13$

    $Bias = 127 \quad (2^{e-1}-1) \quad //e=8$

    $Exp = 140 = 10001100_2$

Hex:	4	6	6	D	B	4	0	0
Binary:	0100	0110	0110	1101	1011	0100	0000	0000
140:		100	0110	0				
15213:				*1*110	1101	1011	01	

非规格化浮点数（Denormalized）

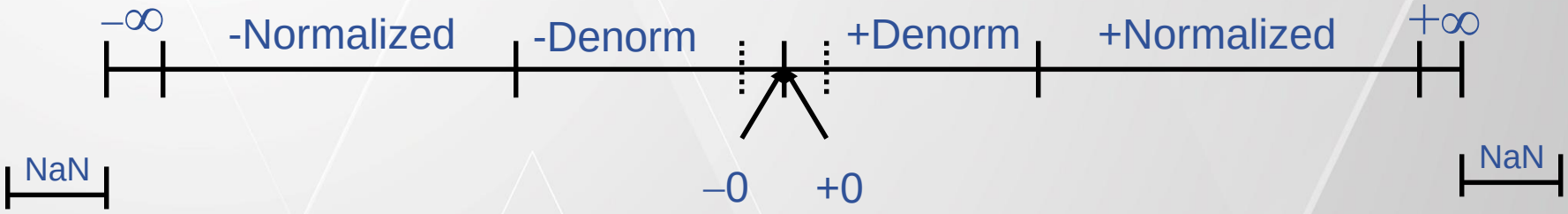
- **满足条件**
  - exp = 000…0
- **其它域的取值**
  - $E = 1 - Bias$
  - $M = 0.xxx\ldots x_2$
    - xxx…x: bits of frac
- **具体示例**
  - exp = 000…0, frac = 000…0
    - 表示0
    - 注意有 +0 与 -0
  - exp = 000…0, frac ≠ 000…0
    - 表示“非常接近”于0的浮点数
    - 会逐步丧失精度
      - 称为“Gradual underflow”

Bias = $2^{e-1} - 1$, e = exp域的位数（注：对规格化数而言**E = Exp – Bias**）

一些特殊值

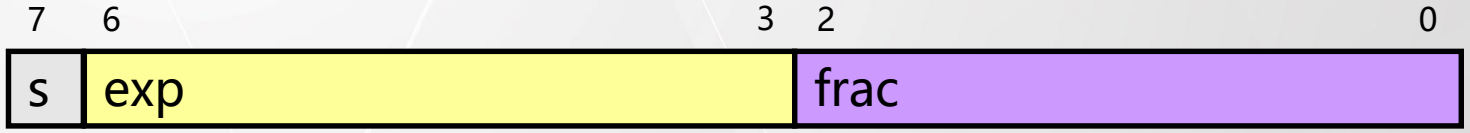
- **满足条件**
  - exp = 111…1
- **具体示例**
  - exp = 111…1, frac = 000…0
    - 表示无穷
      - 可用于表示数值的溢出
    - 有 正无穷与负无穷
    - E.g., 1.0/0.0 = +∞, -1.0/0.0 =-∞
  - exp = 111…1, frac ≠ 000…0
    - Not-a-Number (NaN)
    - E.g., sqrt(–1), ∞ – ∞, ∞ * 0

各种浮点数类型在数轴上的相对位置



一种“小”浮点数实例

- **8位浮点数表示**
  - exp域宽度为4 bits, frac域宽度为3bits



偏置的值是多少?

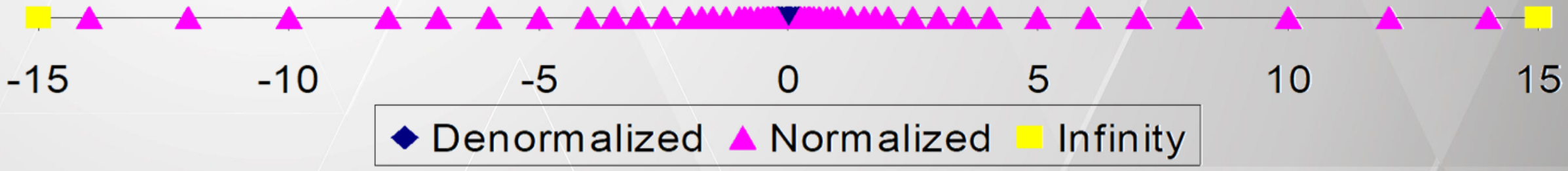
- **其他规则符合IEEE 754规范**
  - 规格化 / 非规格化
  - 表示0, NaN与无穷

Exp	exp	E	2^E	
0	*0000*	*-6*	*1/64*	*(非规格化数)*
1	0001	-6	1/64	
2	0010	-5	1/32	
3	0011	-4	1/16	
4	0100	-3	1/8	
5	0101	-2	1/4	
6	0110	-1	1/2	
7	0111	0	1	
8	1000	+1	2	
9	1001	+2	4	
10	1010	+3	8	
11	1011	+4	16	
12	1100	+5	32	
13	1101	+6	64	
14	1110	+7	128	
15	*1111*	*n/a*		*(inf, NaN)*

取值范围

	s	exp	frac	E	Value	
Denormalized numbers	0	0000	000	-6	0	
	0	0000	001	-6	1/8*1/64 = 1/512	← closest to zero
	0	0000	010	-6	2/8*1/64 = 2/512	
	...					
	0	0000	110	-6	6/8*1/64 = 6/512	
	0	0000	111	-6	7/8*1/64 = 7/512	← largest denorm
	0	0001	000	-6	8/8*1/64 = 8/512	← smallest norm
	0	0001	001	-6	9/8*1/64 = 9/512	
	...					
	0	0110	110	-1	14/8*1/2 = 14/16	
	0	0110	111	-1	15/8*1/2 = 15/16	← closest to 1 below
	0	0111	000	0	8/8*1 = 1	
Normalized numbers	0	0111	001	0	9/8*1 = 9/8	← closest to 1 above
	0	0111	010	0	10/8*1 = 10/8	
	...					
	0	1110	110	7	14/8*128 = 224	
	0	1110	111	7	15/8*128 = 240	← largest norm
	0	1111	000	n/a	inf	

数轴上的分布



一些特例

Description	exp	frac	Numeric Value
Zero	00…00	00…00	0.0
Smallest Pos. Denorm.	00…00	00…01	$2^{-\{23,52\}} \times 2^{-\{126,1022\}}$
◦ Single ≈ 1.4×10^{-45}			
◦ Double ≈ 4.9×10^{-324}			
Largest Denormalized	00…00	11…11	$(1.0 - \varepsilon) \times 2^{-\{126,1022\}}$
◦ Single ≈ 1.18×10^{-38}			
◦ Double ≈ 2.2×10^{-308}			
Smallest Pos. Normalized	00…01	00…00	$1.0 \times 2^{-\{126,1022\}}$
◦ Just larger than largest denormalized			
One	01…11	00…00	1.0
Largest Normalized	11…10	11…11	$(2.0 - \varepsilon) \times 2^{\{127,1023\}}$
◦ Single ≈ 3.4×10^{38}			
◦ Double ≈ 1.8×10^{308}			

浮点数的一些编码特性

- **（几乎）可以直接使用无符号整数的比较方式**
  - 反例：
    - 必须先比较符号位
    - 考虑+0、-0的特例
    - 还有NaN的问题...
      - (不考虑符号位的话)，NaN比其他值都大
      - 实际的比较结果如何?
  - 其他情况都可以直接使用无符号整数的比较方式
    - 规格化 vs. 非规格化
    - 规格化 vs. 无穷

Denormalized numbers

Normalized numbers

s	exp	frac	E	Value	
0	0000	000	-6	0	
0	0000	001	-6	1/8*1/64 = 1/512	← closest to zero
0	0000	010	-6	2/8*1/64 = 2/512	
…					
0	0000	110	-6	6/8*1/64 = 6/512	
0	0000	111	-6	7/8*1/64 = 7/512	← largest denorm
0	0001	000	-6	8/8*1/64 = 8/512	← smallest norm
0	0001	001	-6	9/8*1/64 = 9/512	
…					
0	0110	110	-1	14/8*1/2 = 14/16	
0	0110	111	-1	15/8*1/2 = 15/16	← closest to 1 below
0	0111	000	0	8/8*1 = 1	
0	0111	001	0	9/8*1 = 9/8	← closest to 1 above
0	0111	010	0	10/8*1 = 10/8	
…					
0	1110	110	7	14/8*128 = 224	
0	1110	111	7	15/8*128 = 240	← largest norm
0	1111	000	n/a	inf	

给定一个实数，如何给出其浮点数表示?

- **基本流程**
  - 首先计算出精确值
  - 然后将其转换为所需的精度
    - 可能会溢出（如果指数绝对值很大）
    - 可能需要完成舍入(rounding)操作

- **各种舍入模式**

	$1.40	$1.60	$1.50	$2.50	–$1.50
Zero	$1	$1	$1	$2	–$1
Round down	$1	$1	$1	$2	–$2
Round up	$2	$2	$2	$3	–$1
Nearest Even	$1	$2	$2	$2	–$2

向偶数舍入(Round-To-Even)

- **这是计算机内默认的舍入方式，也称为“向最接近值的舍入”**
  - 其它方式会产生统计误差（statistically biased）
- **关键的设计决策的是确定两个可能结果的中间数值的舍入**
  - 确保舍入后的最低有效数字是偶数
  - E.g., round to nearest hundredth
    - 1.2349999　　1.23 (Less than half way)
    - 1.2350001　　1.24 (Greater than half way)
    - 1.2350000　　1.24 (Half way—round up)
    - 1.2450000　　1.24 (Half way—round down)

向偶数舍入(Round-To-Even)

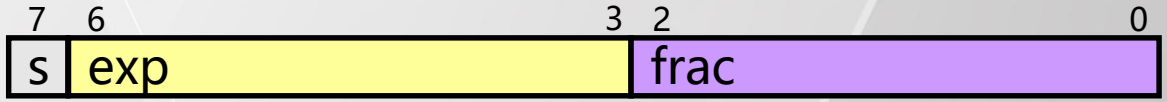
- **对于二进制数而言**
  - “Even” 意味着最低有效数字需为0
  - 而最低有效数字右侧的位串为100...

- **实例**
  - 舍入到小数点后2位

Value	Binary	Rounded	Action	Rounded Value
2 3/32	10.00011_2	10.00_2	(<1/2—down)	2
2 3/16	10.00110_2	10.01_2	(>1/2—up)	2 1/4
2 7/8	10.11100_2	11.00_2	(1/2—up)	3
2 5/8	10.10100_2	10.10_2	(1/2—down)	2 1/2

步骤

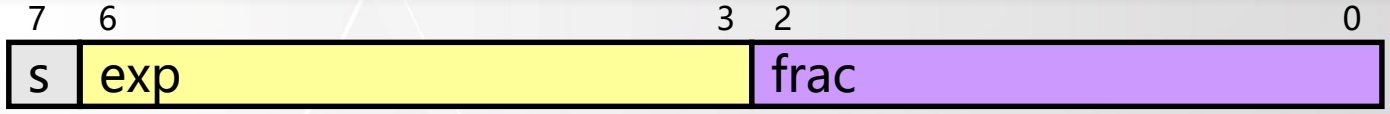
- **具体步骤**
  - 将数值规格化（前导1）
  - 舍入（round to even）以便符合尾数的位数需求
  - 后调整



- **实例**
  - 将8位无符号数转换为8位浮点数（exp域宽度为4 bits, frac域宽度为3bits）

128	10000000
15	00001111
17	00010001
19	00010011
138	10001010
63	00111111

规格化



Value	Binary	Fraction	Exponent
128	10000000	1.0000000	7
15	00001111	1.1110000	3
17	00010001	1.0001000	4
19	00010011	1.0011000	4
138	10001010	1.0001010	7
63	00111111	1.1111100	5

舍入

Value	Fraction	Incr?	Rounded
128	1.0000000	N	1.000
15	1.1110000	N	1.111
17	1.0001000	N	1.000
19	1.0011000	Y	1.010
138	1.0001010	Y	1.001
63	1.1111100	Y	10.000

调整（Postnormalize）

- 舍入操作可能引起溢出

Value	Rounded	E	Adjusted	Result
128	1.000	7		128
15	1.111	3		15
17	1.000	4		16
19	1.010	4		20
138	1.001	7		144
63	10.000	5	1.000/6	64

C语言中的浮点数

float **单精度浮点数**
double **双精度浮点数**

- **类型转换**
  - 当int（32位宽）, float, 与double等类型间进行转换时，基本的原则如下:
  - double 或float 转换为 int
    - 尾数部分截断
    - 如果溢出或者浮点数是NaN，则转换结果没有定义
      - 通常置为 Tmin or Tmax
  - int转换为double
    - 能够精确转换
  - int转换为float
    - 不会溢出，但是可能被舍入

Floating Point Puzzles

- 以下判断是否成立，如不成立请给出反例。

```
int x = ...;
float f = ...;
double d = ...;
```

假设d 与 f 都不是 NaN

- x == (int)(float) x
- x == (int)(double) x
- f == (float)(double) f
- d == (float) d
- f == -(-f);
- 2/3 == 2/3.0
- d < 0.0 → ((d*2) < 0.0)
- d > f → -f > -d
- d * d >= 0.0
- (d+f)-d == f