清華大學 TSINGHUA UNIVERSITY **数学作业纸**

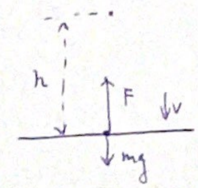
班级：计01 姓名：容逸朗 编号：2020010869 科目：大物 第 1 页

3.1. 已知：弹力 $F=-kx$，位移 $x=A\cos\omega t$

求：$t=0$ 到 $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 内小球受到的冲量.

解：
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} F\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} -kA\cos\omega t\,dt = -\frac{kA}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\cos(\omega t)\,d(\omega t) = -\frac{kA}{\omega}\sin(\omega t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2\omega}} = -\frac{kA}{\omega}$$

3.3. 已知：高度 $h=5m$，质量 $m=150kg$ $\Delta t=0.3s$



求：人对水的力 F'

解：到达水面时速度 $v=\sqrt{2gh}$

由牛顿第二定律，有：

$$F-mg = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{0-(-v)}{\Delta t} = \frac{mv}{\Delta t} = \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}$$

即 $$F = mg+\frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t} = 150\times9.8+\frac{150\times\sqrt{2\times9.8\times5}}{0.3} = 6.42\times10^3\,N.$$

故人对水施力 $F'=F= 6.42\times10^3\,N$.

3.13. 已知：火箭喷出的废气静止.

求：火箭质量减少与初质量之比 $\frac{M_i-M_f}{M_f}$

解：由火箭喷出速度为 u 且静止知(喷气后)火箭速度也为 u，即 $V_f=u$

又 $V_f-V_i=u\ln\frac{M_i}{M_f} \Rightarrow u-0=u\ln\frac{M_i}{M_f} \Rightarrow \ln\frac{M_i}{M_f}=1 \Rightarrow \frac{M_i}{M_f}=e$

故 $\frac{M_i-M_f}{M_i}=1-\frac{1}{e}=0.632$.

3.15 已知：$V=210m/s$，$\frac{dm}{dt}=75kg/s$，$\frac{dM}{dt}=-3kg/s$，$u=490m/s$

求：发动机对飞机推力 F.

解：由于动量守恒：$Mv+dm\cdot0=(M+dM)\cdot(v+dv)+(dm-dM)\cdot(v-u)$

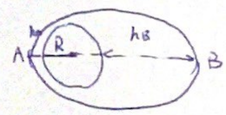
化简得：$Mdv=(u-v)dm-udM$

$$F=M\cdot\frac{dv}{dt}=(u-v)\cdot\frac{dm}{dt}-u\cdot\frac{dM}{dt}=(490-210)\times75-490\times(-3)=2.25\times10^4\,N.$$

3.22 已知：$h_A=205.5km$，$h_B=35835.7km$，地球半径 $R=6378km$. 过近地点(A)速率 $v=10.2km/s$.

求：过远地点速率 V_B，运行周期 T.

解：由于卫星地地心角动量守恒，故



$$L_A=L_B \Rightarrow mV_Ar_A=mV_Br_B \Rightarrow V_B=\frac{V_Ar_A}{r_B}=\frac{V_A(R+h_A)}{R+h_B}$$
$$=\frac{10.2\times(6378+205.5)}{6378+35835.7}=1.59\,km/h.$$

椭圆面积：$S=\pi ab=\pi\,\frac{r_A+r_B}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{r_A+r_B}{2}\right)^2-\left(\frac{r_B-r_A}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\pi(r_A+r_B)\cdot\sqrt{r_A\cdot r_B}$.

掠面面积：$\frac{dS}{dt}=\frac{L}{2m}=\frac{m r_A V_A}{2m}=\frac{r_A V_A}{2}$

周期 $T=\frac{S}{\frac{dS}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\pi(r_A+r_B)\sqrt{r_A\cdot r_B}}{\frac{1}{2}\cdot r_A\ V_A}=\frac{\pi(r_A+r_B)}{V_A}\cdot\sqrt{\frac{r_B}{r_A}}=\frac{\pi(h_A+h_B+2R)}{V_A}\cdot\sqrt{\frac{h_B+R}{h_A+R}}$

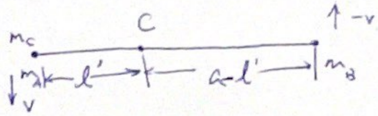
$=\frac{\pi\times(205.5+35835.7+6378\times2)}{10.2}\cdot\sqrt{\frac{35835.7+6378}{205.5+6378}}=3.81\times10^4\,S$

3.24 已知：杆长 $l=a$，质点重 m，以角速度 ω 运行.

求：(1) 碰撞前质点的质心及其速度 V_C

(2) 碰撞前及碰撞后，三个质点对质心的角动量 L 及 L'

(3) 碰撞后，整个系统绕质心转动的角速度 ω'



解：(1) 以 C 表质心，则有 $2m\cdot l'=m(a-l')\Rightarrow l'=\frac{a}{3}$

速度 $V_C=\frac{m\cdot v+m(-v)+m\cdot0}{3m}=0$

(2) 碰撞前：杆两端质点速度 $v=\frac{a}{2}\cdot\omega$

故 $L=\frac{a}{3}\cdot m\cdot\frac{a}{2}\omega+\frac{2a}{3}m\cdot\frac{a}{2}\omega+\frac{a}{3}m\cdot0=\frac{1}{2}a^2m\omega$.

无外力作用，碰撞后角动量守恒 $L'=\frac{1}{2}a^2m\omega$.

(3) 设 ω' 为系统绕 C 的角速度，有

$$L=\frac{a}{3}\cdot2m\cdot\frac{a}{3}\omega'+\frac{2a}{3}\cdot m\cdot\frac{2a}{3}\omega'=\frac{1}{2}a^2m\omega$$

$$\Rightarrow\quad \frac{2}{3}a^2m\omega'=\frac{1}{2}a^2m\omega$$

$$\omega'=\frac{3}{4}\omega.$$