习 题

1、已知序列$x=[2,3,6,1,0,1]$，设x的 DTFT 为$X(\omega)$，求$\int_{-\pi}^{\pi}|X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$。

2、已知$f(t)$的频谱函数为$F(\omega)$，试证明：$T\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)$ ，其中$\omega_0=2\pi/T$。

3、设序列$x(n)$的 DTFT 为$X(\omega)$，试用$X(\omega)$表示序列$y(n)=x(2n+1)$的 DTFT。

4、设序列$x(n)$的 DTFT 为$X(\omega)$，试用$X(\omega)$表示序列$y(n)=x(3n+1)$的 DTFT。

5、已知序列$x(n)$和$y(n)$的 DTFT 分别为$X(\omega)$和$Y(\omega)$。对周期函数$X(\omega)$和$Y(\omega)$，定义相关函数$R_{xy}(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega'+\omega)Y^*(\omega')\mathrm{d}\omega'=\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega')Y^*(\omega'-\omega)\mathrm{d}\omega'$，记$R_{xy}(\omega)$的 IDTFT 为$r_{xy}(n)$，试用$x(n)$和$y(n)$表示$r_{xy}(n)$。

6、已知序列$x_1=[1,6,5,3]$，$x_2=[2,7,5,4,0,1]$。求它们的线卷积和 6 点圆卷积。

7、设序列$x(n)=[1,2,6,3]$，$x(n)$的 4 点 DFT 为$X(k)$，求$X^2(k)$的 4 点 IDFT。

8、已知序列$x(n)$的长度为N，$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$，其中$x_r(n)$和$x_i(n)$分别是$x(n)$的实部和虚部。设$x(n)$的N点 DFT 为$X(k)$，令$X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$，其中$X_{ep}(k)$是共轭对称序列，$X_{op}(k)$是共轭反对称序列，即

$$X_{ep}(k) = X_{ep}^*(N-k), \quad 0 \le k \le N-1$$

$$X_{op}(k) = -X_{op}^*(N-k), \quad 0 \le k \le N-1$$

为表示简便，本题中规定$X(N) = X(0)$，$X_{ep}(N) = X_{ep}(0)$，$X_{op}(N) = X_{op}(0)$。

（1）试用序列$X(k)$分别表示序列$X_{ep}(k)$和$X_{op}(k)$；

（2）证明：$\mathrm{DFT}[x_r(n)] = X_{ep}(k)$，$\mathrm{DFT}[jx_i(n)] = X_{op}(k)$，其中 DFT 点数均为$N$。

9、用符号语言表示命题“奇函数的 DFT 是奇函数”，并利用 DFT 的公式证明该命题。

10、本课程介绍了 DFT 的快速算法 FFT。相应地，可将N点 IDFT 运算递归地分解为$N/2$点，$N/4$点，…，2点 IDFT 运算，从而实现 IDFT 的快速运算。

（1）设序列$X(k)$的长度为N，N为偶数，$X(k)$的N点 IDFT 为$x(n)$。$G(k)$是$X(k)$中下标为偶数的元素组成的子序列，$H(k)$是$X(k)$中下标为奇数的元素组成的子序列，它们的长度是$N/2$，对应的$N/2$点 IDFT 分别是$g(n)$和$h(n)$。试用$g(n)$和$h(n)$表示$x(n)$。

（2）规定$X(k)$的m点子序列$[X(k_1), X(k_2), \dots, X(k_m)]$的$m$点 IDFT 可表示为$x_{k_1,k_2,\dots,k_m}(n)$。当$N = 8$时，试利用（1）中的结果，用若干组$X(k)$的 2 点子序列的 2 点 IDFT 表示$x(3)$。

11、利用 DFT 的公式计算$x(n) = \sin(\frac{2\pi}{N}mn)$的 N 点 DFT，其中$0 \le n \le N-1$， $0 < m < N$且$m \in Z$ 。

12、已知带限周期信号$f(t)$的傅里叶级数 FS 系数为F_n。对$f(t)$进行抽样，一个周期内采N个采样值，得到N点有限长序列$x(n)$，$x(n)$的N点离散傅里叶变换 DFT 为$\mathrm{X}(k)$。若抽样过程满足抽样定理要求，试用F_n表示$\mathrm{X}(k)$。要求：根据 FS 和 DFT 的相关定义式求解，求解过程中**不利用**傅里叶变换 FT。