第三章 树 I

计算机系网络所：张小平

主要内容

- **3.1 树的有关定义**
- 3.2 基本关联矩阵及其性质
- 3.3 支撑树的计数
- 3.4 回路矩阵与割集矩阵
- 3.5 支撑树的生成
- 3.6 Huffman树
- 3.7 最短树
- 3.8 最大分枝

Tsinghua University

树的有关定义

- 1857年，英国数学家亚瑟.凯莱就用树去计数化合物的同分异构体，这是比较早的用树的基本性质解决科学分支里的问题。
- 树的模型很多：
  - 家谱
  - 赛程安排
  - 股权关系
  - 还有.....

树的有关定义

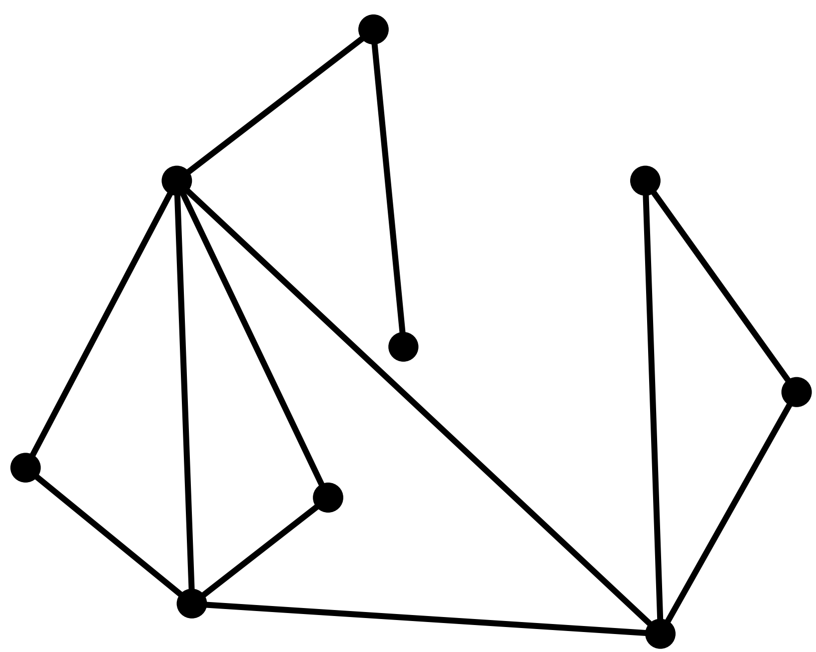
- 树在计算机科学里特别有用！
  - 文件系统
  - 用树构造有效编码以节省数据存储成本
  - 通过搜索法可系统遍历图的顶点，同时构造出一棵图的支撑树
  - 用树来研究棋类这样的博弈问题
  - …

树的有关定义

- 定义3.1.1 一个不含任何回路的连通图称为**树**，用T表示。T中的边称为**树枝**，度为1的结点称为**树叶**。

树的有关定义

- 定义3.1.2 设e是G的一条边，若$G' = G - e$比G的连通支数增加，则称e是G的一条**割边**。



树的有关定义

- 定理3.1.1 $e=(u,v)$是割边，当且仅当e不属于G的任何回路。

  证明：

  – 必要性(反证法)：若$e=(u,v)$属于G的某个回路，则$G'=G-e$中仍存在u到v的道路，故结点u和v属于同一连通支，e不是割边。

  – 充分性(反证法)：反之，若e不是割边，则G'和G的连通支数一样，因此u和v仍然处在同一个连通支，因此在图G'中存在道路$P(u,v)$ $P(u,v)+e$就是图G中的一个回路。

树的有关定义

- 定理3.1.1 $e=(u,v)$是割边，当且仅当e不属于G的任何回路。

树的每条边都不属于任何回路

因此树的每条边都是割边！

树是边数最少的连通图！

Tsinghua University

树的有关定义

- 定理3.1.2 设T是结点数为$\boldsymbol{n} \geq 2$的树，则下列性质等价：
  - (1) T连通且无回路
  - (2) T连通且每条边都是割边
  - (3) T连通且有$n-1$条边
  - (4) T有$n-1$条边且无回路
  - (5) T的任意两结点间有唯一道路
  - (6) T无回路，但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路

Tsinghua University

证明：

(1) T连通且无回路

$\Downarrow$

(2) T连通且每条边都是割边

根据定理3.1.1，显然

证明：

(2) T 连通且每条边都是割边

$\Downarrow$

(3) T 连通且有 $\boldsymbol{n}-1$ 条边

采用数学归纳法：对结点数 $\boldsymbol{n}$ 进行归纳。

$m(T)$：树 T 的边数
$n(T)$：树 T 的结点数

$\boldsymbol{n}=2$ 时，结论显然成立；

设 $\boldsymbol{n} \leq k$ 时，$\boldsymbol{m}(T)=\boldsymbol{n}(T)-1$ 成立

当 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}+1$ 时，由于每条边都是割边，因此

$G'=G-e$ 有两个连通支 T_1 和 T_2。根据假设，

$$\left.\begin{aligned} m(T_1)=n(T_1)-1 \\ m(T_2)=n(T_2)-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m(T)=m(T_1)+m(T_2)+1=n(T)-1$$

证毕！

证明：

(3) T连通且有$n-1$条边

$\Downarrow$

(4) T有$n-1$条边且无回路

采用反证法：假定T有回路

设C为其中一条含有k个结点的初级回路。

考察C以外的$n-k$个结点，为保持T的连通性，

至少需要C以外的$n-k$条边。

所以T的边数至少为$k+(n-k)=n$条

与前提矛盾。

证毕！

证明：

(4) T有$n-1$条边且无回路

(5) T的任意两结点间有唯一道路

T连通且无回路

⇨ T的每条边都是割边

⇨ T连通且有n-1条边

首先证明任意两结点间道路的存在性(反证法)：

- 设u,v是T的任意两结点，假设不存在道路$P(u,v)$
- 则u,v属于两个连通支T_1,T_2。
- 由于$m=n-1$，则至少有一个连通支的边数不少于结点数。不妨设为T_1，$m(T_1) \geq n(T_1)$
- 可证，此时该连通支必存在回路，矛盾！
- 因此，$P(u,v)$存在。

证明：

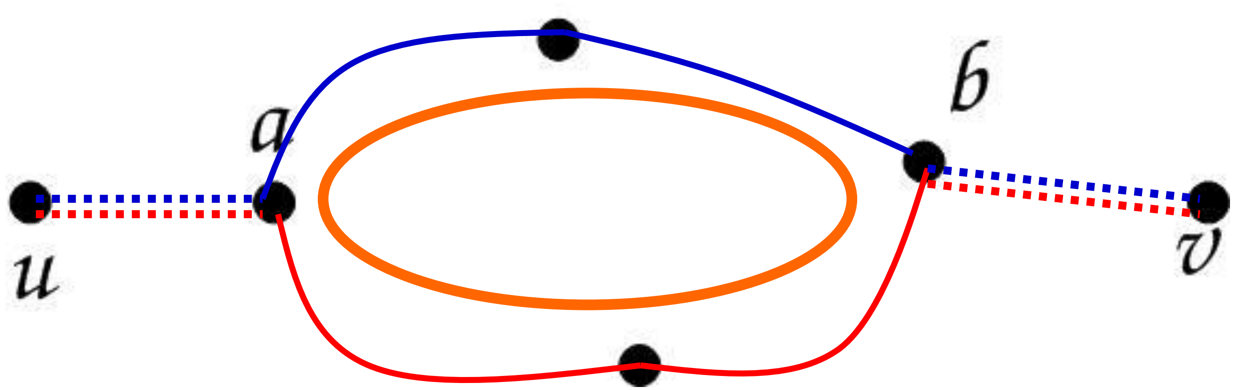
(4) T有$n-1$条边且无回路

$\Downarrow$

(5) T的任意两结点间有唯一道路

其次证明任意两结点间道路的唯一性：

- 如图，若存在两条不同的道路$P(u,v)$，$P'(u,v)$



- 与假设矛盾。因此$P(u,v)$唯一。

证毕！

证明：

(5) T的任意两结点间有唯一道路

$\Downarrow$

(6) T无回路，但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路

T无回路？

显然！

在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路？

显然！

证毕！

证明：

(6) T无回路，但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路

$\Downarrow$

(1) T连通且无回路

T无回路？

显然！

T连通？

显然！

证毕！

树的有关定义

- 定理3.1.2 设T是结点数为$n \geq 2$的树，则下列性质等价：
  - (1) T连通且无回路
  - (2) T连通且每条边都是割边
  - (3) T连通且有$n-1$条边
  - (4) T有$n-1$条边且无回路
  - (5) T的任意两结点间有唯一道路
  - (6) T无回路，但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路

树的有关定义

- 定理3.1.3 树T中一定存在树叶结点

证明：

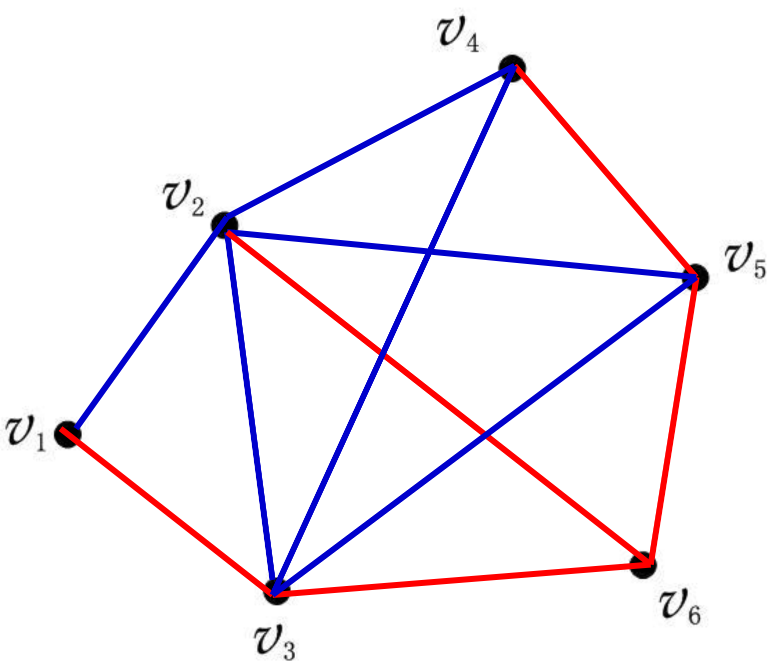
- T为连通图，故不存在度为零的结点
- 假设T中不存在树叶结点，则意味着不存在度为1的结点，则所有结点度均不小于2。

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{v \in V(G)} d(v) \Rightarrow m \geq \frac{1}{2} \cdot 2n = n > n-1$$

- 矛盾！　　　　证毕！

树的有关定义

- 定义3.1.3 如果T是图G的支撑子图，而且又是一棵树，则称T是G的一棵**支撑树**，或称**生成树**，又简称为G的树。



G中删掉T的各边后子图称为T的**余树**

$$\overline{T}$$

树的有关定义－小结

- 树的基本定义
- 树的等价性质（要非常熟悉）
- 余树的概念

主要内容

- 3.1 树的有关定义
- **3.2 基本关联矩阵及其性质**
- 3.3 支撑树的计数
- 3.4 回路矩阵与割集矩阵
- 3.5 支撑树的生成
- 3.6 Huffman树
- 3.7 最短树
- 3.8 最大分枝

Tsinghua University

向量及矩阵基本概念回顾

- 定义：数域F上的n个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$构成的有序数组，称为数域F上的一个n维向量（或n元向量），记为

$$\alpha=\left[a_1,a_2,\cdots,a_n\right]$$

其中 a_i 称为 α 的第 i 个分量

数域F上全体n维向量组成的集合记为F^n

Tsinghua University

向量及矩阵基本概念回顾

- 定义：设$V(F)$是一个线性空间，如果对于m个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in V$，如果存在不全为零的m个数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m \in F$，使得

$$\lambda_1 \cdot \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \cdot \alpha_m = O_n$$

成立，则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$**线性相关**；

否则，称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$**线性不相关**；

向量及矩阵基本概念回顾

- 性质：如果一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性不相关，则每个向量添加s个分量之后，得到的m个向量仍然线性不相关。

- 性质：如果一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则每个向量删除第$i$个分量之后，得到的m个向量仍然线性相关。

向量及矩阵基本概念回顾

- 定理：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，而 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则β可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，且表示法唯一。

$$k\cdot\beta+k_1\cdot\alpha_1+k_2\cdot\alpha_2+\cdots+k_r\cdot\alpha_r=O$$

$$\beta=-\left(\frac{k_1}{k}\cdot\alpha_1+\frac{k_2}{k}\cdot\alpha_2+\cdots+\frac{k_r}{k}\cdot\alpha_r\right)$$

向量及矩阵基本概念回顾

- 定理：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中有一部分向量线性相关，则该向量组线性相关

$$k_1\cdot\alpha_1+k_2\cdot\alpha_2+\cdots+k_r\cdot\alpha_r=O$$

$$k_1\cdot\alpha_1+k_2\cdot\alpha_2+\cdots+k_r\cdot\alpha_r+0\cdot\alpha_{r+1}+\cdots+0\cdot\alpha_m=O$$

- 推论：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性不相关，则该向量组中任意一部分向量都线性不相关

向量及矩阵基本概念回顾

- 定义：如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中存在$r$个线性无关的向量，且其中任何一个向量可由这$r$个线性无关的向量线性表示，则数$r$称为向量组的秩，记做 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=r$

$$\Updownarrow$$

- 定义：若向量组中存在r个线性无关的向量，且任意$r+1$个向量都线性相关，就称数r为向量组的秩。

Tsinghua University

向量及矩阵基本概念回顾

- 对于矩阵A，我们把它的每一行称为一个行向量，把A的行向量组的秩称为A的行秩；同理，把A的列向量组的秩称为A的列秩。

- 对于一个$m \times n$的矩阵A，有m个行向量，n个列向量，则：
  - 行秩 $\leq m$
  - 列秩 $\leq n$

Tsinghua University

向量及矩阵基本概念回顾

- 例：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行秩＝3

列秩＝3

向量及矩阵基本概念回顾

- 定理：初等变换不改变矩阵的行秩和列秩。

- 定理：矩阵的行秩等于其列秩

- 定义：矩阵A的行秩的数值称为矩阵A的秩

  记做 秩(A) 或 r(A) 或 ran (A)

向量及矩阵基本概念回顾

- **行列式**：数域 F 中的 n^2 个元素 $a_{ij}\ (i,j=1,\cdots,n)$，排成n行n列并在两边作两条直线的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为数域 F上的n阶行列式，它表示从集合

$F^n \times F^n \times \cdots \times F^n$ 到 F 的一个映射

向量及矩阵基本概念回顾

- 行列式的计算：

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

向量及矩阵基本概念回顾

- 行列式的计算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \quad ?$$

向量及矩阵基本概念回顾

- 定义：在n阶行列式 $D=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$ 中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的所有元素而得到的n-1阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记做 M_{ij}

  并把数

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

  称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**

向量及矩阵基本概念回顾

- 定理：设 $D=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$，则

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\cdot A_{kj}=a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}\cdot A_{2j}+\cdots+a_{nj}\cdot A_{nj}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Tsinghua University

向量及矩阵基本概念回顾

- 定理：设 $D=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$ ，则

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot A_{ik}=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+\cdots+a_{in}\cdot A_{in}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Tsinghua University

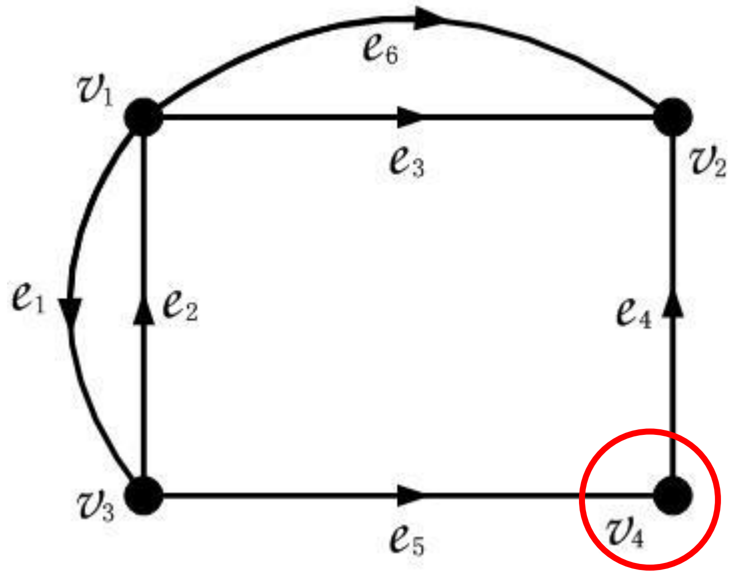
向量及矩阵基本概念回顾

- 矩阵行列式的计算：
  - 对于一个n阶矩阵A，我们可以计算它的行列式，其值可表示为det(A)
  - 思考：
    - 如果n阶矩阵有一行（列）全为零，行列式值为多少？
    - 如果n阶矩阵的秩小于n，则其行列式值为多少？
    - 如果n阶矩阵有m行线性相关，则其秩的值为多少？

主要内容

基本关联矩阵及其性质

- 定义3.2.1 在有向连通图G=(V，E)的关联矩阵中划去任意结点$\boldsymbol{v_k}$所对应的行，得到一个$(\boldsymbol{n}-1)\times\boldsymbol{m}$的矩阵$B_{\boldsymbol{k}}$，$B_{\boldsymbol{k}}$称为G的一个 基本关联矩阵



$$B_4 = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \end{array}$$

基本关联矩阵及其性质

- 定理3.2.1 有向图G＝(V，E)关联矩阵B的秩

$$ran\quad B < n$$

证明：

- 关联矩阵特点：每一列都只有一个1和－1
- n行全部相加
- 即 n 个行向量线性相关，因此

$$ran\quad B < n$$

证毕！

Tsinghua University

基本关联矩阵及其性质

- 定理3.2.2 设 B_0 是有向图 G 关联矩阵 B 的任意一 k 阶子方阵，则 $\det(B_0)$ 为0，1或 -1

证明：

- 若 B_0 某列全零，则 $\det(B_0)=0$
- 若 B_0 每列都有两个非零元，则 $\det(B_0)=0$
- 若 B_0 存在某列只有一个非零元，则按该列展开可知 $\det(B_0)=\pm\det(B_1)$
- 依次类推，可证！

Tsinghua University

基本关联矩阵及其性质

- 定理3.2.3 设B是有向连通图G的关联矩阵，则

$$ran\quad B = n - 1$$

证明：

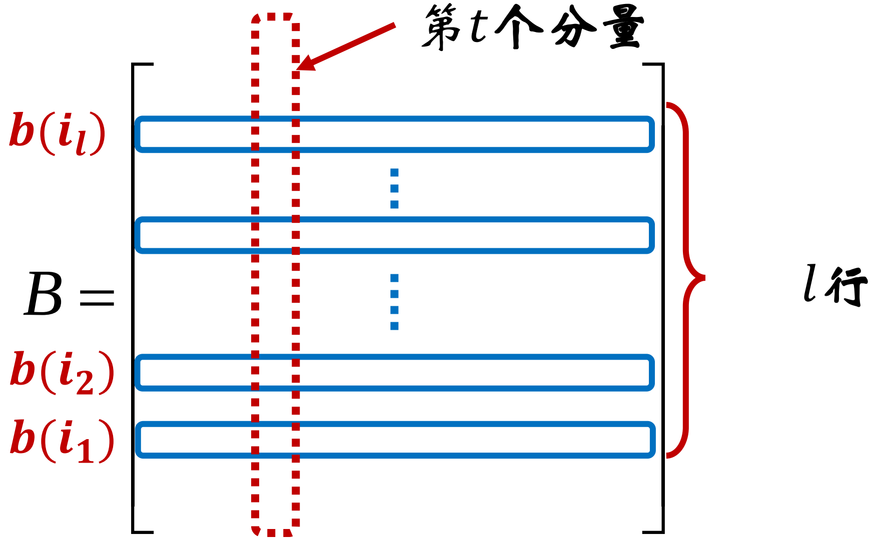
– 设B中最少的线性相关行数为$\boldsymbol{l}$

– 则$\boldsymbol{l} \le \boldsymbol{n}$，其对应图中结点$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{i}_1), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{i}_2), \dots, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{i}_l)$

$$k_1 \cdot b(i_1) + k_2 \cdot b(i_2) + \cdots + k_l \cdot b(i_l) = O_m \qquad (k_j \ne 0, j = 1, 2, \cdots, l)$$

- 所有$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{i}_j)$中，第$\boldsymbol{t}$ ($\boldsymbol{t} = 1,2, \dots \boldsymbol{m}$)个分量可能有两个非零元。
- 所有$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{i}_j)$中，第$\boldsymbol{t}$ ($\boldsymbol{t} = 1,2, \dots \boldsymbol{m}$)个分量可能全零。
- 所有$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{i}_j)$中，第$\boldsymbol{t}$ ($\boldsymbol{t} = 1,2, \dots \boldsymbol{m}$)个分量不可能只有一个非零元。否则，该分量最终不可能为0。

基本关联矩阵及其性质



基本关联矩阵及其性质

- 这样，我们可以对矩阵 B 进行行、列交换，使前 $\boldsymbol{l}$ 行为线性相关的各行
- 再针对这 $\boldsymbol{l}$ 行中，有两个非零元的列换到前 $\boldsymbol{r}$ 列则此 $\boldsymbol{l}$ 行中，其余$(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r})$列将均为零元
- 此时矩阵 B 将变为 B'

$$B' = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} & \begin{array}{c} l \\ n-l \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & \quad m-r \end{array} & \end{array} \qquad ran \quad B = ran \quad B'$$

- 若$\boldsymbol{l} < \boldsymbol{n}$，则从 B' 可清楚看出，图G为两个连通支，这与图G为连通图矛盾！
- 因此，一定有$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{n}$。

证毕！

Tsinghua University

基本关联矩阵及其性质

- 定理3.2.3 设B是有向连通图G的关联矩阵，则

$$ran\ \ B = n-1$$

- 定理3.2.4 连通图G基本关联矩阵B_k的秩

$$ran\ \ B_k = n-1$$

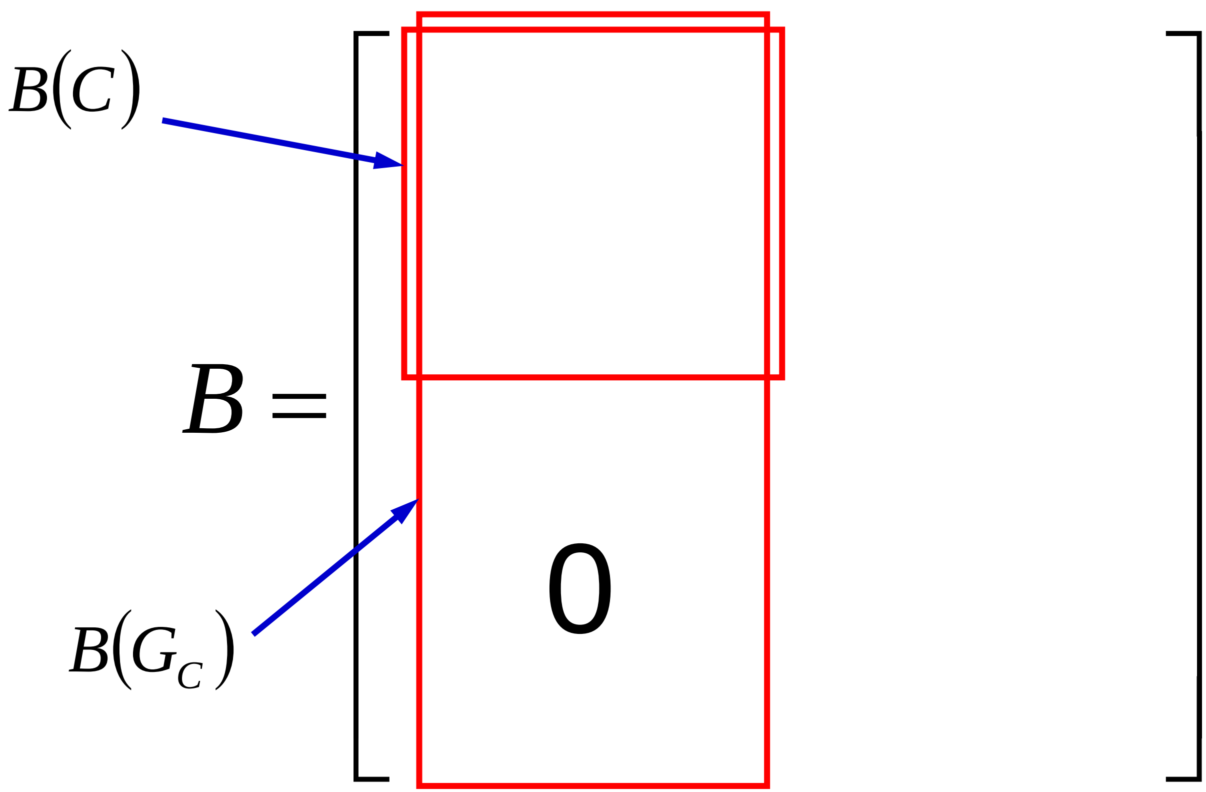
基本关联矩阵及其性质

- 定理3.2.5 设B_k为有向连通图G的基本关联矩阵，C为G中的一个回路。则C中各边所对应B_k的各列线性相关。

证明：

  - 只需针对C为初级回路进行讨论即可
  - 设C中含$\boldsymbol{l}$个结点与$\boldsymbol{l}$条边 $(\boldsymbol{l} < \boldsymbol{n})$，这$\boldsymbol{l}$条边对应关联矩阵$B$中的$\boldsymbol{l}$列，它们构成子阵$B(G_c)$

基本关联矩阵及其性质



思考：此时B的所有列向量是否线性相关？

基本关联矩阵及其性质

- C的关联矩阵为$\boldsymbol{l}$阶方阵$B(C)$，据定理3.2.3

$$ran\quad B(C)=l-1$$

- 说明$B(C)$的$\boldsymbol{l}$列线性相关
- 观察$B(C)$与$B(G_C)$的关系：
  - $B(C)$为$B(G_C)$的子阵，列数相同，行数不同
  - C中各边只经过$B(C)$中的各结点，因此$B(G_C)$中其他结点对应各行均为零
- 因此，$B(G_C)$的各列也线性相关！

证毕！

- 因此，在B_k中，C对应各列也线性相关！

基本关联矩阵及其性质

- 定理3.2.5 设B_k为有向连通图G的基本关联矩阵，C为G中的一个回路。则C中各边所对应B_k的各列线性相关。

基本关联矩阵及其性质

- 推论3.2.2 设H为连通图G的子图，如果H含有回路，则H的**诸边**对应的G的基本关联矩阵各列线性相关。

$$B=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}H\\ \hline 0\end{matrix}} & \quad\quad\quad\end{bmatrix}$$

基本关联矩阵及其性质

思考：

- 有向连通图的基本关联矩阵，哪些列线性相关？
- 有向连通图的基本关联矩阵，如果一些列线性不相关，会说明什么？

基本关联矩阵及其性质

- 定理3.2.6 令B_k是有向连通图G的基本关联矩阵，那么B_k的任意$n-1$阶子阵行列式非零的充要条件是其各列所对应的边构成G的一棵支撑树。

证明：

- 必要性：如果B_k的某个$n-1$阶子阵$B_k(GT)$的行列式非零，则由推论3.2.2可知，子图T中不含回路，含n个结点，$n-1$条边，根据树的等价定义，T为G的一棵树，且为支撑树。

基本关联矩阵及其性质

充分性：

- 设T为G的支撑树
- 子图T的基本关联矩阵$B_k(T)$是$n-1$阶子方阵

  它的秩为$n-1$

  这意味着其行列式非零。
- 该子方阵恰好就是B_k的某个$n-1$阶子阵
- 即B_k所对应的该$n-1$阶行列式非零。

证毕！

基本关联矩阵及其性质

- 定理3.2.6 令 B_k 是有向连通图G的基本关联矩阵，那么 B_k 的任意 $n-1$ 阶子阵行列式非零的充要条件是其各列所对应的边构成G的一棵支撑树。

基本关联矩阵及其性质

- 小结：
  - 有向连通图关联矩阵的秩
  - 有向连通图基本关联矩阵各列的线性相关性
  - 有向连通图基本关联矩阵同支撑树的关系

作业

- 课后

1、2

- 选作

3

本周开始接受第一次习题课交流报名