清華大學 TSINGHUA UNIVERSITY **数学作业纸**

班级：计01　姓名：容逸朗　编号：2020010869　科目：信原　第 1 页

1. $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W_N^{nk}\ ,\ (0\le k\le N-1)$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\sin\left(\frac{2\pi}{N}mn\right)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}mn}-e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}}{2j}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$=\frac{1}{2j}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n(m-k)}-e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-m)}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot N(m-k)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)}}-\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot N(k-m)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}[0-0]$$

$$=0\qquad(k=0,1,2\dots N-1)$$

2. (1) 考虑 $X^*(N-k)=[X_{ep}(N-k)+X_{op}(N-k)]^*$

$$=X_{ep}^*(N-k)+X_{op}^*(N-k)$$

$$=X_{ep}(k)-X_{op}(k)\qquad ①$$

结合 $X(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k)$ ②

由 ①+② 得：$X_{ep}(k)=\dfrac{X(k)+X^*(N-k)}{2}$

②-① 得：$X_{op}(k)=\dfrac{X(k)-X^*(N-k)}{2}$

(2) 由DFT公式知：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\qquad ③$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x_r(n)W_N^{nk}+\sum_{n=0}^{N-1}jx_i(n)W_N^{nk}$$

$$X^*(N-k)=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)\cdot W_N^{-n(N-k)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)\cdot W_N^{-nN}\cdot W_N^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x_r(n)W_N^{nk}-\sum_{n=0}^{N-1}jx_i(n)W_N^{nk}\qquad ④$$

③+④ 得：$DFT[x_r(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x_r(n)W_N^{nk}$

$$=\frac{X(k)+X^*(N-k)}{2}=X_{ep}(k)$$

③-④ 得：$DFT[jx_i(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}jx_i(n)W_N^{nk}$

$$=\frac{X(k)-X^*(N-k)}{2}=X_{op}(k)$$

3. $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot W_N^{nk}$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2n)W_N^{2nk}+\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2n+1)W_N^{(2n+1)k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}g(n)\cdot W_{\frac{N}{2}}^{nk}+\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)W_{\frac{N}{2}}^{nk}\cdot W_N^{k}$$

$$=G(k)+W_N^k\cdot H(k)\ ,\ k=0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

$$X\left(\frac{N}{2}+k\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot W_N^{n\cdot(\frac{N}{2}+k)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(2n)\cdot W_N^{2n\cdot(\frac{N}{2}+k)}+\sum_{n=0}^{N-1}x(2n+1)W_N^{(2n+1)(\frac{N}{2}+k)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}g(n)\cdot W_N^{nN}\cdot W_N^{2nk}+\sum_{n=0}^{N-1}h(n)W_N^{nN}\cdot W_N^{\frac{N}{2}}\cdot W_N^{2nk}W_N^{k}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left(g(n)\cdot W_{\frac{N}{2}}^{nk}\right)+\sum_{n=0}^{N-1}\left(h(n)\cdot W_{\frac{N}{2}}^{nk}\right)W_N^k\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}}$$

$$=G(k)-W_N^kH(k)\ ,\ k=0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

4. (a) $X'(k)=\sum_{n=0}^{MN-1}\tilde{x}(n)W_{MN}^{nk}$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\tilde{x}(mN+n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{MN}(mN+n)k}$$

$$=\sum_{m=0}^{M-1}e^{-j\frac{2\pi}{M}mk}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{n}{M}k}$$

注意到 $\frac{k}{M}\in Z$ 时，$\sum_{m=0}^{M-1}e^{-j\frac{2\pi}{M}mk}=\sum_{m=0}^{M-1}1=M$

而 $\frac{k}{M}\notin Z$ 时，$\sum_{m=0}^{M-1}e^{-j\frac{2\pi}{M}mk}=\dfrac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{M}k}}=0$

故 $X'(k)=\begin{cases}MX(\frac{k}{M}), & \frac{k}{M}\in Z\\ 0, & \frac{k}{M}\notin Z\end{cases}\quad k=0,1,\cdots,MN-1$

(b) $X''(k)=\sum_{n=0}^{MN-1}y(n)W_{MN}^{nk}$ （令 $k=Nk_N+k'$，即 $k'=k\bmod N$）

$$=\sum_{n=0}^{N-1}y(Mn)W_{MN}^{Mnk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot W_{MN}^{Mn\cdot Nk_N}\cdot W_{MN}^{Mnk'}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk'}=X(k')=X(k\bmod N)$$

$k=0,1,\cdots,MN-1$

(c) $X'''(k)=\sum_{n=0}^{MN-1}y(n)W_{MN}^{nk}$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{\frac{n}{M}k}$$

$$=\begin{cases}X(\frac{k}{M}), & \frac{k}{M}\in Z\\ 未定义, & \frac{k}{M}\notin Z\end{cases}\quad k=0,1,\cdots MN-1$$

这是因为 $X(k)$ 只包含 k 为整数的点，其余取值的结果是未知的。