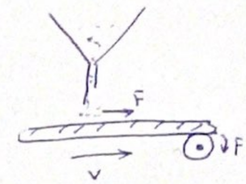
4.4. 已知：落砂流量 $q = 50\ kg/s$，传送带速度 $v = 1.5 m/s$



求：电动机拖动皮带功率 P. 单位时间内落砂所获动能 $\frac{dE_k}{dt}$.

解：观察 dt 时间内质量为 dm 的落砂，受摩擦力F而加速.

由动量定理： $F dt = dm(v-0)$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{dm}{dt}\cdot v = qv.$$

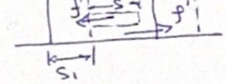
功率：$P = Fv = qv^2 = 50\times 1.5^2 = 113\ W$

单位时间落砂所获动能 $\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2}\frac{v^2 dm}{dt} = \frac{1}{2}qv^2 = \frac{1}{2}P$，与功率 P 不等.

这是由于砂子落到皮带时有部分能量转为热能.

4.6. 已知：木块质量 M，子弹质量 m，其初速为 v，木块移动 S_1，子弹在木块内移动了 S'.

求：摩擦力对子弹和木块做的功，证明木块和子弹机械能增量等于一对摩擦力之一沿相对位移 S' 做的功.



解：动量守恒： $mv = (M+m)V \Rightarrow V = \frac{mv}{M+m}$

摩擦力对子弹做功：$-f(S'+S_1) = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 - 1\right)$ ①

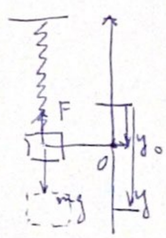
摩擦力对木块做功： $f' S_1 = \frac{1}{2}MV^2 - 0 = \frac{1}{2}Mv^2\left(\frac{m}{m+M}\right)^2$ ②

①, ②相加，注意到 $f = f'$，有：$-fS_1 = \left(\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2\right) - \frac{1}{2}mv^2$

上式证明摩擦力沿位移 S' 做功与机械能增量相等.

4.8 已知：劲度系数 k（设物体重 m）

求：坐标为 y 时，弹性势能与重力势能之和为 $\frac{1}{2}ky^2$.



解：设物体平衡时，弹簧被拉长 y_0，此时 $mg = ky_0$.

当物体向下移动，到达 y 位置，此时弹簧被拉长 $y_0 + y$.

弹性势能：$E_{P_1} = \frac{1}{2}k(y+y_0)^2 - \frac{1}{2}ky_0^2 = \frac{1}{2}ky^2 + ky\cdot y_0$ ①

重力势能：$E_{P_2} = -mgy = -ky_0 y$ ②

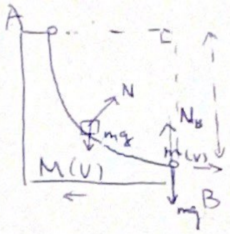
①+②： $E_{P_1} + E_{P_2} = \frac{1}{2}ky^2 + ky\cdot y_0 - ky_0\cdot y = \frac{1}{2}ky^2$

4.13 已知：物体质量为m，槽质量M，槽半径为R，张角$\frac{\pi}{2}$.

求：(1) 物体离开槽时，物体和槽的速度 v 和 V.

(2) 物体从 A 到 B 时，对槽做的功.

(3) 物体到 B 时，对槽压力.



解：(1) 设 B点为势能零点，由于系统不受外力，故机械能守恒，即

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

水平方向上 动量守恒： $mv = MV$

代 $V = \frac{m}{M}\cdot v$，有 $mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}\cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}$

$$V = \frac{m}{M}\cdot v = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}} = m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}}.$$

(2) 槽仅受物体 m 的压力，故槽受到的功 为其动能的增量.

$$W = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{m^2gR}{M+m}.$$

(3) 物体到B的时，槽不受水平方向力，以槽为参考系，则物体速度

$$V_B = v + V$$

对物体受力分析，有

$$N_B - mg = \frac{mV_B^2}{R}$$

$$\Rightarrow N_B = mg + \frac{m}{R}\cdot\left(\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}} + \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}\right)^2 = mg + \frac{m}{R}\cdot\frac{2MgR}{M+m}\cdot\left(\frac{M+m}{M}\right)^2 = \left(3+\frac{2m}{M}\right)mg.$$

物体对槽压力与槽对物体支持力相等，即 $N' = N_B = \left(3+\frac{2m}{M}\right)\cdot mg$.

4.17 已知：行星轨道近日点 r_1，远日点 r_2，太阳质量 M，行星质量 m（设在近日点速度 v_1，远日点 v_2）.

求：行星在轨道上总能量 $E = -\frac{GMm}{r_1+r_2}$

解：行星在轨道运行时，对太阳角速度相等，即 $mr_1v_1 = mr_2v_2$.

对太阳－行星系统而言，机械能守恒：$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$

$$\Rightarrow v_1^2 - v_2^2 = \frac{2GM}{r_1} - \frac{2GM}{r_2}$$

$$\Rightarrow r_1r_2\left(v_1^2 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\cdot v_1^2\right) = 2GM(r_2 - r_1)$$

$$\Rightarrow v_1^2 = \frac{2GM\cdot r_2}{r_1(r_1+r_2)}$$

故能量 $E = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{mMGr_2}{r_1(r_1+r_2)} - \frac{(r_1+r_2)GMm}{r_1(r_1+r_2)} = -\frac{GMm}{r_1+r_2}$.

4.18 已知：霍曼轨道近地点 $r_1 = 1400 + 6378 = 7778\ km$，远地点 $r_2 = 36000 + 6378 = 42378\ km$，卫星质量 $m = 500kg$，地球 $M = 5.98\times10^{24}kg$

求：(1) 火箭推力给予卫星的能量，(2) 先后两次推力使卫星增加的速率

解：(1) 由4.17知，在停泊轨道上卫星能量为 $E_A = -\frac{GMm}{r_1+r_1}$，在霍曼轨道能量 $E_B = -\frac{GMm}{r_1+r_2}$

在同步轨道的能量 $E_C = -\frac{GM}{r_2+r_2}$

故，第一次卫星得到能量 $\Delta E_1 = E_B - E_A = -GMm\left(\frac{1}{r_1+r_2} - \frac{1}{2r_1}\right)$

$$= -6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times500\times\left(\frac{1}{(7778+42378)\times10^3} - \frac{1}{2\times7778\times10^3}\right)$$

$$= 8.84\times10^9\ J$$

第二次卫星得到能量 $\Delta E_2 = E_C - E_B = -GMm\left(\frac{1}{2r_2} - \frac{1}{r_1+r_2}\right)$

$$= -6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times500\times\left(\frac{1}{2\times42378\times10^3} - \frac{1}{(7778+42378)\times10^3}\right)$$

$$= 1.62\times10^9\ J$$

(2) 卫星在停泊轨道速度 $V_A = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = \sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}}{7778\times10^3}} = 7.16\times10^3\ m/s$

设卫星在霍曼轨道近地点速度为 V_{21}，则有

$$\frac{1}{2}mV_{B1}^2 - \frac{GMm}{r_1} = -\frac{GMm}{r_1+r_2}$$

即 $V_{B1} = \sqrt{\frac{2GM\cdot r_2}{r_1(r_1+r_2)}} = \sqrt{\frac{2\times6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times42378\times10^3}{7778\times10^3\times(7778+42378)\times10^3}} = 9.31\times10^3\ m/s$

同理可得远地点速度 $V_{B2} = \sqrt{\frac{2GMr_1}{r_2(r_1+r_2)}} = \sqrt{\frac{2\times6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times7778\times10^3}{42378\times10^3\times(7778+42378)\times10^3}} = 1.71\times10^3\ m/s$

卫星在同步轨道速度 $V_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} = \sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}}{42378\times10^3}} = 3.07\times10^3\ m/s$.

故 卫星进入霍曼轨道时速度增大 $\Delta V_1 = V_{B1} - V_A = 2.15\times10^3\ m/s$

卫星进入同步轨道时速度增大 $\Delta V_2 = V_C - V_{B2} = 1.36\times10^3\ m/s$

4.24. 已知：设质点量 m_1, m_2，速度 v_1, v_2，质心速度 v_c.

求：一质点在另一质点参考系中动能等于两点内动能.

解：约化动能

$$E = \frac{1}{2}\mu v_{21}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot(v_2-v_1)^2$$

内动能

$$E_内 = \frac{1}{2}m_1(v_1-v_c)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2-v_c)^2$$

又因为 $v_c = \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$

$$E_内 = \frac{1}{2}m_1\cdot\frac{m_2^2(v_1-v_2)^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{1}{2}m_2\cdot\frac{m_1^2(v_2-v_1)^2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot(v_2-v_1)^2 = E.$$

清华大学 数学作业纸

TSINGHUA UNIVERSITY

班级：计01　姓名：容远朗　编号：2020010869　科目：大物　第 4 页

4.25 已知：物体质量分别为 M, m，m 初速度 v_0

求：弹簧最大压缩长度 x

解：机械能守恒：$\frac{1}{2}\mu v_{mM}^2 = \frac{1}{2}kx^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}\cdot(v_m - v_M)^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

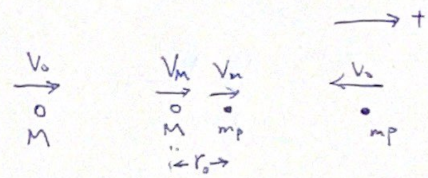
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}\cdot(v_0 - 0)^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}\cdot v_0$$

4.26 已知：质子 m_p，氦核 $M=4m_p$，速率均为 v_0

求：两者能达到的最近距离 r_0

解：动量守恒：



$$Mv_0 - m_p v_0 = Mv_M + m_p v_m$$

$$\Rightarrow v_M = \frac{Mv_0 - m_p(v_0+v_m)}{M}$$

动能守恒：

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}m_p v_0^2 = \frac{k\cdot e\cdot e}{r} + \frac{kee}{r} + \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}m_p v_m^2 = \frac{2ke^2}{r} + \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}m_p v_m^2 \quad ①$$

由于等号左边为定值，要使 r 最小，则需要 $\frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}m_p v_m^2$ 最小.

由 $\frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}m_p v_m^2 = \frac{1}{2}\frac{[Mv_0 - m_p(v_0+v_m)]^2}{M} + \frac{1}{2}m_p v_m^2$

上式唯一变量为 v_m，故对上式中 v_m 求导，要使和最小，则需要导数为0，即.

$$\frac{1}{M}(Mv_0 - m_p(v_0+v_m))(-m_p) + m_p v_m = 0$$

$$\Rightarrow v_m = \frac{M-m_p}{M+m_p}\cdot v_0$$

此时 $v_M = \frac{Mv_0 - m_p(v_0+v_m)}{M} = \frac{M-m_p}{M}\cdot v_0 - \frac{m_p}{M}\cdot\frac{M-m_p}{M+m_p}v_0 = \frac{M-m_p}{M+m_p}v_0 = v_m$

即两粒子速度相等时距离最近，此时速度 $v_M = v_m = \frac{M-m_p}{M+m_p}v_0 = \frac{4m_p-m_p}{4m_p+m_p}v_0 = \frac{3}{5}v_0$

代入①式得 $\frac{1}{2}\cdot 4m_p v_0^2 + \frac{1}{2}m_p v_0^2 = \frac{2ke^2}{r_0} + \frac{1}{2}\cdot 4m_p\cdot\left(\frac{3}{5}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot m_p\cdot\left(\frac{3}{5}v_0\right)^2$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{5ke^2}{4m_p v_0^2}$$