Slide11 必做题

Exercise 7.2.1(b)

用 *CFL* 泵引理来证明下面的语言都不是上下文无关的:

b) $\{a^n b^n c^i \mid i \leq n\}$。

参考解答:

对于任意的 $n > 0$，存在 $z=a^n b^n c^n$ 属于该语言.

令 $z=uvwxy$，其中，$|vwx| \leq n$， $vx \neq \varepsilon$，

若 vwx 不包含 c，取 $k=0$；若 vwx 包含 c，取 $k=2$；这样就有 $uv^k wx^k y$ 不属于该语言(因为其中 c 的数目至少多于 a，b 之一)，

因此由 *pumping* 引理，该语言不是上下文无关语言.

**!Exercise 7.2.1(d)*

用 *CFL* 泵引理来证明下面的语言都不是上下文无关的:

b) $\{0^i 1^j \mid j = i^2\}$。

参考解答:

从"课程文件"中下载网页文件，从中找到参考解答。

**!Exercise 7.3.1(b)*

参考解答:

从"课程文件"中下载网页文件，从中找到参考解答。

Exercise 7.3.2 考虑以下两个语言：

$$L_1 = \{a^n b^{2n} c^m \mid n, m \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^{2m} \mid n, m \geq 0\}$$

a) 通过分别给出上述语言的文法来证明这些语言都是上下文无关的。

! b) $L_1 \cap L_2$ 是 CFG 吗？证明你的结论的正确性。

参考解答：

a）定义文法 G_1 的产生式集合为：

$$S \to AB$$
$$A \to aAbb \mid \varepsilon$$
$$B \to cB \mid \varepsilon$$

定义文法 G_2 的产生式集合为：

$$S \to AB$$
$$A \to aA \mid \varepsilon$$
$$B \to bBcc \mid \varepsilon$$

可以证明 $L_1=L(G_1)$，$L_2=L(G_2)$.

b）$L_1 \cap L_2 = \{ a^n b^{2n} c^{4n} \mid n \geq 0\}$ 不是 CFG. 可以用 *Pumping* 引理证明之.

对于任意的 n，存在 $z=a^n b^{2n} c^{4n}$ 属于该语言.

令 $z=uvwxy$，其中，$|vwx| \leq n$，$vx \neq \varepsilon$，

若取 $k=0$，则 $uv^k wx^k y$ 不属于该语言(分析略)，因此该语言不是上下文无关语言.

Exercise 7.3.6 形式化地证明定理 7.25：CFL 在反向运算下是封闭的。

(附：**定理 7.25：**如果 L 是 CFL，则 L^R 也是。)

参考解答：

做 $L=L(G)$，$G=(V, T, P, S)$. 构造 $G^R=(V, T, P^R, S)$，其中 P^R 的每一产生式是 P 中的产生式的反向，即 “$A \to \alpha^R$” $\in P^R$ iff “$A \to \alpha$” $\in P$.

下面将证明，对任意 $w \in T^*$, $S \Rightarrow^*_G w$ iff $S \Rightarrow^*_{G^R} w^R$.

假设 $S \Rightarrow^*_G w$，归纳于该推导的长度 n.

$n=1$ 时，$S \to w$ 为 G 中的一个产生式，因而 $S \to w^R$ 为 G^R 中的一个产生式，所以 $S \Rightarrow^*_G w^R$;

$n>1$ 时，设第一步推导使用了产生式 $S \to X_1X_2\ldots X_k$，其中 $X_i \in V \cup T$，($1\le i \le K$）. 若 $X_i \in V$，则存在 $w_i \in T^*$，使得在少于 n 步内 $X_i \Rightarrow^*_G w_i$，由归纳假设，$X_i \Rightarrow^*_{G^R} w_i^R$；若 $X_i \in T$，则令 $w_i= X_i$，自然有 $X_i \Rightarrow^*_{G^R} w_i^R$. 同时，$w=w_1w_2\ldots w_k$. 又根据构造方法，$G^R$ 中包含产生式 $S \to X_kX_{k-1}\ldots X_1$. 这样，我们有

$$S \Rightarrow_{G^R} X_kX_{k-1}\ldots X_1 \Rightarrow^*_{G^R} w_k^R X_{k-1}\ldots X_1 \Rightarrow^*_{G^R} w_k^R w^R_{k-1}\ldots X_1. \Rightarrow^*_{G^R}\ldots\Rightarrow^*_{G^R} w_k^R w^R_{k-1}\ldots w_1^R=(w_1w_2\ldots w_k)^R = w^R$$

同理可证，如果 $S \Rightarrow^*_{G^R} w^R$，则有 $S \Rightarrow^*_G w$.

由此可知，$L^R=L(G^R)$. 所以，L^R 是上下文无关语言.

Exercise 7.4.3

对于例 7.34 种的文法 G，用 CYK 算法来确定下列的串是否属于 L(G)：

c) aabab。

（附：**例 7.34：** 如下是一个 CNF 文法 G 的产生式：

S → AB | BC

A → BA | a

B → CC | b

C → AB | a

）

参考解答：

由 CYK 算法构造的针对 aabab 的表如下:

$\{S, C\}$				
$\{S, A, C\}$	$\{B\}$			
$\{B\}$	$\{B\}$	$\{S, C\}$		
$\{B\}$	$\{S, C\}$	$\{S, A\}$	$\{S, C\}$	
$\{A, C\}$	$\{A, C\}$	$\{B\}$	$\{A, C\}$	$\{B\}$
a	a	b	a	b

由于 ***S*∈*X*₁₅**（参见下表），所以 ***aabab* ∈*L*(*G*).**

X_{15}				
X_{14}	X_{25}			
X_{13}	X_{24}	X_{35}		
X_{12}	X_{23}	X_{34}	X_{45}	
X_{11}	X_{22}	X_{33}	X_{44}	X_{45}
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

第十一讲思考题

!Exercise 7.2.1（f）

参考解答:

对于任意的 n，存在 $z=0^n110^n0^n1$ 属于该语言.

令 $z=uvwxy$，其中，$|vwx| \leq n$， $vx\neq\varepsilon$，

取 $k=0$，有 uv^kwx^ky 不属于该语言（原因不详述了，请同学们自己补充吧）。

因此由 *pumping* 引理，该语言不是上下文无关语言.