椭圆曲线公钥密码体制(ECC)

清华大学计算机系
于红波
2023年5月17日

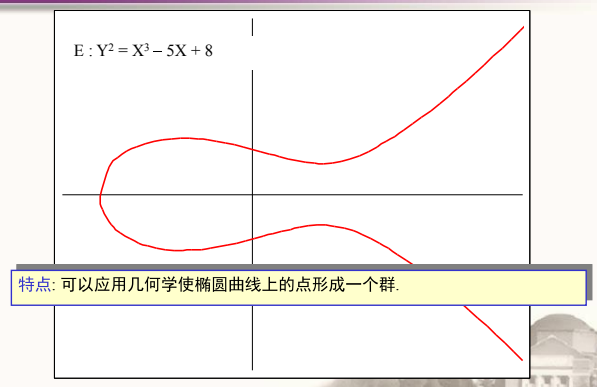
关于椭圆曲线

- 椭圆曲线问题的研究有150多年的历史
- 1985年
  - Washington 大学的Neal Koblitz
  - IBM 的Victor Miller
  - 把椭圆曲线应用于密码领域
- 目前，椭圆曲线和RSA算法是使用最广泛的公钥加密算法

实数域上的椭圆曲线

- 椭圆曲线并非椭圆，之所以称为椭圆曲线是因为它的曲线方程与计算椭圆周长的方程类似。一般来讲，椭圆曲线的曲线方程是以下形式的三次方程：
- $y^2+axy+by=x^3+cx^2+dx+e$
- 其中a，b，c，d，e是满足某些简单条件的实数。

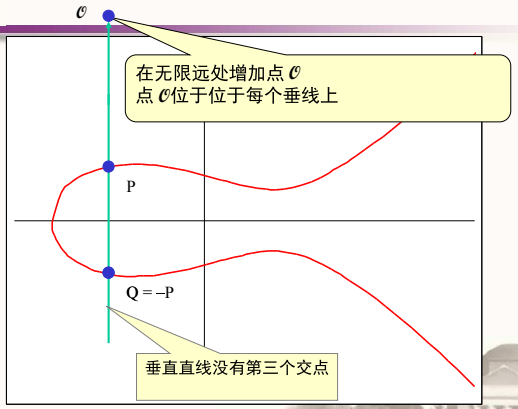
典型椭圆曲线



椭圆曲线的加法

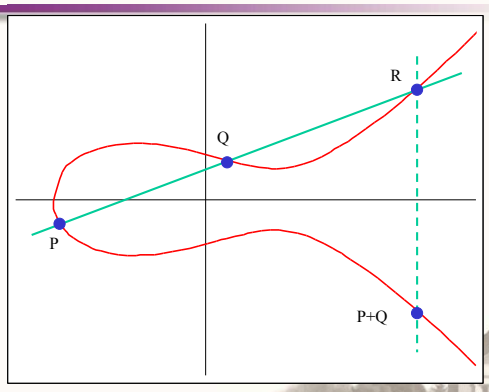
- 依据：
  如果在椭圆曲线上有三个点存在于一条直线上，则它们的和为无穷远点。
- 其中无穷远点记为$\mathcal{O}$

点P和点-P相加



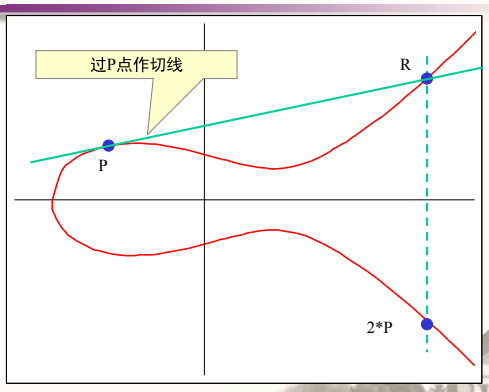
点P和点-P相加的和为无穷远点

点P和点Q相加



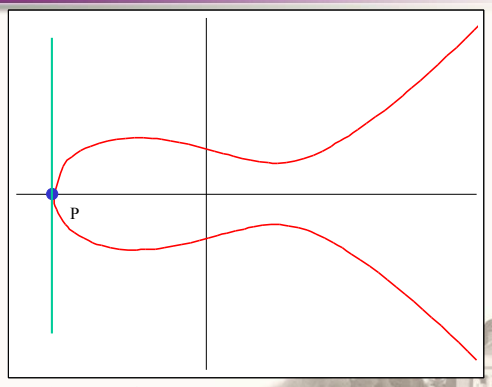
设连接点P和Q的直线，交椭圆曲线于点R, 则点P和Q的和为点-R

求点P的二倍



通过点P作曲线的切线，交曲线于另一点R, 则2P=-R

求点P的二倍的特例



若点P的切线的斜率是0，则2P=O, 3P=P,4P=O,5P=P……

有限域上的椭圆曲线

定义：

对于曲线

$y^2 = x^3 + ax + b \pmod p$，a, b为小于p的整数，当$4a^3 + 27b^2 \pmod p$不为零时构成有限域$F_p$上的椭圆曲线群。记为$E_p(a,b)$

有限域中椭圆曲线的运算

假设 E 是一个非奇异椭圆曲线。我们在 E 上定义一个二元运算，使其成为一个阿贝尔群。这个二元运算通常用加法表示。无穷远点 O 是单位元。

因此有 P+O = O+P = P，对于所有 P ∈ E。

假设 P,Q ∈ E，其中 $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q)$。

分三种情形讨论：

1) $x_P \neq x_Q$

2) $x_P = x_Q$，且 $y_P = y_Q$

3) $x_P = x_Q$，且 $y_P = -y_Q$

有限域上的两个点的加法

1) 若 $P = (x_P, y_P)$，$Q = (x_Q, y_Q)$.

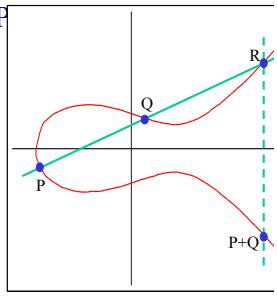
若 P 和 Q 是不同的点且 Q 不是 -P

P + Q =- R 按如下方法计算：

$\lambda = (y_P - y_Q) / (x_P - x_Q) \bmod p$

$x_R = \lambda^2 - x_P - x_Q \bmod p$

$y_R = -y_P + \lambda(x_P - x_R) \bmod p$



例题

仍以$E_{23}(1, 1)$为例，设P=(3, 10)，Q=(9, 7)，求P+Q

$$\lambda = \frac{7-10}{9-3} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \equiv 11 \bmod 23$$

$$x_3 = 11^2 - 3 - 9 = 109 \equiv 17 \bmod 23$$

$$y_3 = 11(3-17) - 10 = -164 \equiv 20 \bmod 23$$

所以P+Q=（17, 20），仍为$E_{23}(1, 1)$中的点。

求点P的2倍

2）若 $P = (x_P, y_P)$

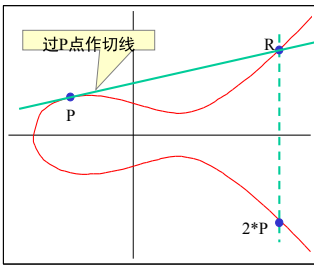
若 y_P 不为 0

2P = -R 按如下方法计算：

$\lambda = (3x_P^2 + a) / (2y_P) \bmod p$

$x_R = \lambda^2 - 2x_P \bmod p$

$y_R = -y_P + \lambda(x_P - x_R) \bmod p$



例题

仍以$E_{23}(1, 1)$为例，设P=(3, 10)，求2P

$$\lambda = \frac{3 \cdot 3^2 + 1}{2 \times 10} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \equiv 6 \bmod 23$$

$$x_3 = 6^2 - 3 - 3 = 30 \equiv 7 \bmod 23$$

$$y_3 = 6(3-7) - 10 = -34 \equiv 12 \bmod 23$$

所以2P=(7, 12)。

3) $x_P = x_Q$，且 $y_P = -y_Q$

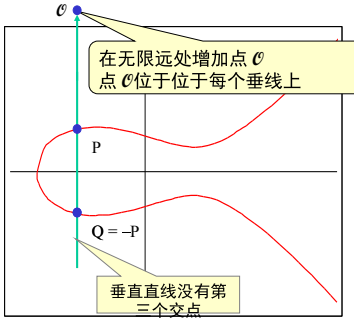
当 $x_P = x_Q, y_P = -y_Q$ 时

定义

(x,y)+ (x,-y) = O,

(x,y) ∈ E

因此 (x,y) 与 (x,-y) 是关于椭圆曲线加法运算互逆的。



有限域F_p上的椭圆曲线群

加法运算的下列性质应该是明确的:

1. 加法在集合 E 上是封闭的。
2. 加法是可交换的。
3. O 是加法的单位元。
4. E 上每一点有关于加法的逆元。
5. 要证明 (E,+) 是阿贝尔群，还须证明加法满足结合律。（此部分略）

有限域上的椭圆曲线的点的构造

1. 对于每一个x (0<=x<p),
   计算$z=x^3+ax+b(\mod p)$;
2. 若z不是模p的平方根，
   则没有具有x值的$E_p(a,b)$点；
   若z是模p的平方根，
   则存在满足条件的两个点。

模素数的椭圆曲线

Example

设 E 是 $\mathbb{Z}_{11}$ 上的椭圆曲线 $y^2=x^3+x+6$。我们首先确定 E 的点。这可以通过对每个 $x\in\mathbb{Z}_{11}$，计算 $x^3+x+6 \mod 11$，试着解方程 (5) 求 y。

对于给定的 x，可以利用 Euler 判别法来测试是否 $z=x^3+x+6 \mod 11$ 是一个二次剩余。我们知道，对素数 $p\equiv 3(\mod 4)$，有个现成的公式计算模 p 的剩余。利用这个公式，二次剩余 z 的平方根是:

$$\pm z^{\frac{11+1}{4}} \mod 11 = \pm z^3 \mod 11$$

椭圆曲线$E_{11}(1,6)$ 的点的构造

即$y^2=x^3+x+6$在有限域F_{11}上的点的构造

x	$x^3+x+6 \mod 11$	是否为二次剩余	y
0	6	否	
1	8	否	
2	5	是	4, 7
3	3	是	5, 6
4	8	否	
5	4	是	2, 9
6	8	否	
7	4	是	2, 9
8	9	是	3, 8
9	7	否	
10	4	是	2, 9

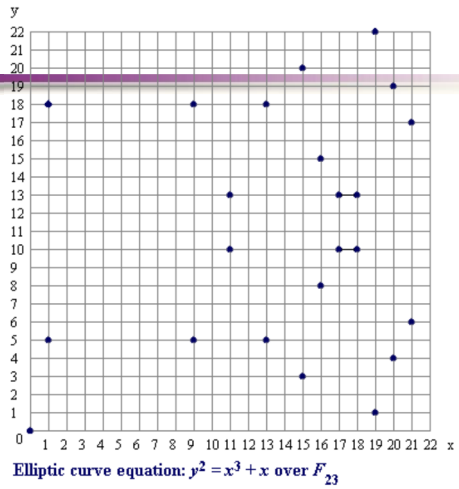
椭圆曲线$E_{23}(1,0)$ 的点的构造

即$y^2=x^3+x$在有限域F_{23}上的点的构造

椭圆曲线$E_{23}(1,0)$ 的点的构造

满足条件的23个点是:

(0,0) (1,5) (1,18) (9,5) (9,18)
(11,10) (11,13) (13,5) (13,18) (15,3)
(15,20) (16,8) (16,15) (17,10) (17,13)
(18,10) (18,13) (19,1) (19,22) (20,4)
(20,19) (21,6) (21,17)



Elliptic curve equation: $y^2=x^3+x$ over F_{23}

椭圆曲线的离散对数问题

- 给定椭圆曲线上的点 P 和点 Q，
  寻找数 k 使得 kP = Q，
  其中k称为Q基于P的离散对数。
- 例如:
  对于椭圆曲线：
  $y^2=x^3+9x+17$ over F_{23},
  求点$Q=(4,5)$ 基于点 $P=(16,5)$的离散对数k

椭圆曲线的离散对数问题的遍历求法

计算kP, 直到的到Q为止

P = (16,5)　2P = (20,20)

3P = (14,14)　4P = (19,20)

5P = (13,10)　6P = (7,3)

7P = (8,7)　8P = (12,17)

9P = (4,5)

离散对数为k = 9.

群 Z_p^* 和$E(F_p)$ 的比较

群	Z_p^*	$E(F_p)$
群元素	整数 {1, 2, …, *p*-1}	坐标属于F_p 的椭圆曲线上的点的集合加上*O*
群上的运算	模 *p*乘法	点的加法
表示	元素：*g, h* 乘法：*g•h* 逆：g^{-1} 除法：*g / h* 幂：g^a	元素：*P, Q* 加法：*P+Q* 逆：*-P* 减法：*P-Q* 乘：*aP*
离散对数问题	已知 $g \in Z_p^*$ 和 $h = g^a \bmod p$, 求 *a*	已知 $P \in E(Z_p)$ 和 *Q = aP*, 求 *a*

椭圆曲线上的Diffie-Hellman密钥交换

步骤：

1. Alice和Bob共享一个椭圆曲线$E_q(a,b)$, 以及一个基点G，$E_q(a,b)$的阶是n.
2. Alice秘密随机选取正整数n_A<n, 计算 $P_A = n_A \square G$
   同时Bob选择随机数n_B<n, 计算 $P_B = n_B \square G$
3. Alice发送P_A给Bob，且Bob发送P_B给Alice（Eve也知道P_A和P_B）。
4. Alice计算$K_A = n_A \square P_B$，Bob计算 $K_b = n_B \square P_A$；则

$$K_A = n_A \square P_B = n_A \square (n_B \square G) = n_B \square (n_A \square G) = n_B \square P_A = K_B$$

ECElGamal加密体制

主要参数：

1. 选取有限域F_p、椭圆曲线E_p及基点$P \in E(p)$
   (这些参数可由一组用户公用).
2. 选取随机数a, 计算Q=aP.
3. Q作为公钥, a作为私钥

ECElGamal加密体制的加/解密过程

- 加密：

  Bob发送秘密消息m给Alice：：

  1. 将消息m转化为椭圆曲线上的点M;
  2. 随机选取正整数k.
  3. 计算kP, kQ=(x, y), 若x=0或y=0返回第2步, 直到 $x \neq 0, y \neq 0$.

  发送C=(kP,M+kQ)给Alice.

- 解密：

  收到密文C后,

  Alice计算a(kP)=kQ,得到M,进而的到明文m

举例

取p=751，$E_p(-1,188)$，

即椭圆曲线为$y^2 \equiv x^3 - x + 188$,

$E_p(-1,188)$的一个生成元是G=(0,376)，

A的公开钥为P_A=(201,5)。

假定B已将欲发往A的消息嵌入到椭圆曲线上的点P_m=(562,201)，

B选取随机数k=386，由

kG=386(0,376)=(676,558)，$P_m + kP_A$=(562，201)+386(201,5)=(385,328)，

得密文为{(676,558),(385,328)}。

练习

已知ECElGamal加密算法中

的椭圆曲线为T： (q=11, a=1, b=6, G=(2，7))

B的私钥为n_B=7

1. 确定B的公钥
2. A要加密消息P_m=(10,9), 并且选择了随机数K=3,

   确定A发送给B的密文

SM2加密算法

- SM2 椭圆曲线公钥密码算法（简称 SM2）于 2010 年由国家密码管理局发布， 2012 年成为密码行业标准， 2016 年转化为国家标准
- SM2 算法的国家标准包括总则、数字签名算法、密钥交换协议、公钥加密算法、参数定义共 5 个部分
- 其中 SM2 数字签名算法于 2017 年被 ISO 采纳成为国际标准

SM2加密算法

- 系统参数：(p,a,b,G,n) 定义了椭圆曲线

$$E(\mathbb{F}_p) \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{F}_p : y^2 = x^3 + ax + b\}$$

及一个 n 阶元 $G \in E(\mathbb{F}_p)$。其中，p,n 均为大素数，KDF 和 H 为公开的密钥派生算法和哈希算法（均可由 SM3 加适当填充和编码规则来实例化），细节略（可参考标准文档）。

- 公私钥：私钥 $d \xleftarrow{\$} [1,n-2]$，公钥 $P \leftarrow dG$
- 加密算法：对消息 m 的加密为密文 $C = (C_1, C_2, C_3)$，计算如下：
  - $k \xleftarrow{\$} [1,n-1]$, $C_1 \leftarrow kG \triangleq (x_1, y_1)$, $T \leftarrow kP \triangleq (x_2, y_2)$
  - $e = \mathrm{KDF}(x_2 \| y_2, |m|)$, $C_2 \leftarrow m \oplus e$, $C_3 \leftarrow H(x_2 \| m \| y_2)$
- 解密算法：请同学们思考

公钥密码系统中ECC与RSA的对比

- *RSA*算法的特点之一是数学原理简单、在工程应用中比较易于实现，但它的单位安全强度相对较低。
- 一般数域筛(*NFS*)方法去破译和攻击*RSA*算法，它的破译或求解难度是亚指数级的。
- *ECC*算法的数学理论非常深奥和复杂，在工程应用中比较难于实现，但它的单位安全强度相对较高。
- *Pollard rho*方法去破译和攻击*ECC*算法，它的破译或求解难度基本上是指数级的。

- Elliptic curve logarithm using Pollard's rho algorithm

Key size: p	MIPS-year
150	3.8×10^{10}
205	7.1×10^{18}
234	1.6×10^{28}

- Integer factorization using generalized number field sieve

Key size: n	MIPS-year
512	3×10^{4}
768	2×10^{8}
1024	3×10^{11}
1280	1×10^{14}
1536	3×10^{16}
2048	3×10^{20}

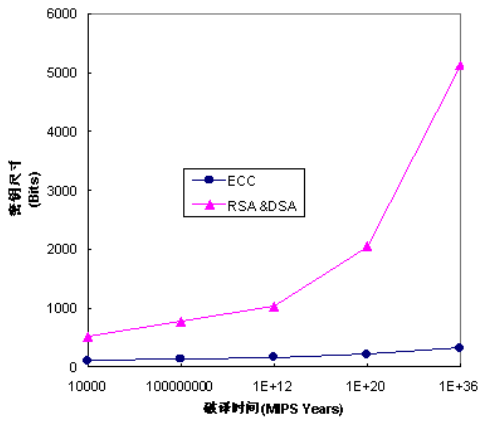


表1. RSA和ECC安全模长的比较

攻破时间 MIPS年	RSA/DSA 密钥长度	ECC密钥长度	RSA/ECC 密钥长度比
10^4	512	106	5:1
10^8	768	132	6:1
10^{11}	1024	160	7:1
10^{20}	2048	210	10:1
10^{78}	21000	600	35:1

表2. RSA和ECC速度比较

功能	Security Builder 1.2 163位ECC (ms)	BSAFE 3.0 1,024位RSA (ms)
密钥对生成	3.8	4,708.3
签名	2.1 (ECNRA)	228.4
	3.0 (ECDSA)	
认证	9.9 (ECNRA)	12.7
	10.7 (ECDSA)	
Diffie--Hellman 密钥交换	7.3	1,654.0

谢谢！