第八章 群Ⅲ

计算机系网络所：张小平

清華大學
Tsinghua University

主要内容

- 8.1 半群
- 8.2 群、群的基本性质
- 8.3 循环群 群的同构
- 8.4 变换群和置换群 Cayley定理
- 8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理
- **8.6 正规子群与商群**
- 8.7 群的同态、同态基本定理
- 8.8 群的直积

清華大學 Tsinghua University

正规子群与商群

- 如果存在群 G 的一个子群 H，根据它的左陪集可以完成群的分解。
- 事实上，子群 H 的右陪集，也有对称的性质
- 但是，在许多情况下，群 G 的子群的左右陪集并不相等
- 思考：
  - 任意给定一个群 G，它是否存在子群 H，使得其左右陪集相等？
  - 子群 $\{e\}$，子群 G

正规子群与商群

- **定义 8.6.1** 设H是G的一个子群，如果对任意的 $a\in G$，都有 $aH=Ha$，则称 H是 G的一个**正规子群**（亦称**不变子群**），用符号$H\lhd G$表示。

因此，对正规子群 H 就不必区分其左右陪集，而简称为 H 的**陪集**

Tsinghua University

正规子群与商群

- **定理 8.6.1** 设 H 是 G 的子群，则以下几个条件等价：

1. $H \lhd G$
2. $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$
3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$
4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

正规子群与商群

- 证明： $1. H \lhd G$ $\Rightarrow$ $2. \ \forall g \in G, gHg^{-1} = H$

  - 因为H为正规子群，因此 $\forall g \in G, \quad gH = Hg$
  - 因此

$$gHg^{-1} = (gH)g^{-1} = (Hg)g^{-1} = H(gg^{-1}) = He = H$$

Tsinghua University

正规子群与商群

- 证明： 2. $\forall g \in G, gHg^{-1}=H$ $\Rightarrow$ 3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$

  – $\forall g \in G \quad gHg^{-1} = H$

  $$\Downarrow$$

  $\forall g \in G \quad gHg^{-1} \subseteq H$

Tsinghua University

正规子群与商群

- **证明：** 3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$ $\Rightarrow$ 4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

  - $gHg^{-1} \subseteq H$

$$\Downarrow$$

$$\forall g \in G,\ \ h \in H \qquad\qquad ghg^{-1} \in H$$

清華大學 Tsinghua University

正规子群与商群

- 证明：4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$ $\Longrightarrow$ $1. H \lhd G$

  - 求证 $\forall g \in G,\quad gH = Hg$
  - 据已知条件，$\forall g \in G$，$\forall h \in H$，都有 $ghg^{-1} = h_1 \in H$
  - 即 $gh = h_1 g \in Hg$。因此 $\forall g \in G$，$gH \subseteq Hg$
  - 反之，易证 $\forall g \in G$，$Hg \subseteq gH$
  - 因此 $\forall g \in G$，$gH = Hg$

证毕！

正规子群与商群

- 定理 8.6.1 设 H 是 G 的子群，则以下几个条件等价：

  $1. H \triangleleft G$

  $2.\ \forall g \in G, gHg^{-1} = H$

  $3.\ \forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$

  $4.\ \forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

Tsinghua University

正规子群与商群

- **定理 8.6.2** 设 A, B 是 G 的两个子群

1. 若 $A \lhd G, B \lhd G$, 则 $A \bigcap B \lhd G, AB \lhd G$

2. 若 $A \lhd G, B \,\text{£}\, G$, 则 $A \bigcap B \lhd B, AB \leq G$

正规子群与商群

- 证明：1. 若 $A \lhd G, B \lhd G$ ，则 $A \cap B \lhd G, AB \lhd G$

  - $\forall h \in A \cap B \Rightarrow h \in A,\ \ h \in B$
  - $\forall g \in G$ ， $ghg^{-1} \in A,\ \ ghg^{-1} \in B$
  - $\forall g \in G, \forall h \in A \cap B$，$ghg^{-1} \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \lhd G$
  - $\forall h \in AB \Rightarrow h = ab,\ \ a \in A,\ \ b \in B$
  - $\forall g \in G$，$ghg^{-1} = gabg^{-1} = gag^{-1}gbg^{-1} = a'b' \in AB$
  - $AB \lhd G$

清華大學 Tsinghua University

正规子群与商群

- 证明：2. 若 $A \lhd G, B \le G$ ， 则 $A \cap B \lhd B, AB \le G$

  - $\forall h \in A \cap B \Rightarrow h \in A,\ \ h \in B$
  - $\forall g \in B \Rightarrow ghg^{-1} \in A,\ \ ghg^{-1} \in B$
  - $\forall g \in B, \forall h \in A \cap B$ ，$ghg^{-1} \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \lhd B$

清華大學 Tsinghua University

正规子群与商群

- 证明：2. 若 $A \lhd G, B$ £ G ，则 $A \cap B \lhd B, AB \leq G$

  - $e \in A,\ \ e \in B \Rightarrow e \in AB$ 单位元！ 结合律！
  - $\forall ab, a_1b_1 \in AB$ $\boxed{A \lhd G \Rightarrow bA = Ab \Rightarrow ba = a'b}$

    $(ab)(a_1b_1) = a(ba_1)b_1 = a(a_1'b)b_1 = (aa_1')(bb_1) \in AB$ 封闭性！
  - $\forall ab \in AB$ ，$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = (a^{-1})'b^{-1} \in AB$ 逆元素！
  - $AB \leq G$ 证毕！

清華大學 Tsinghua University

正规子群与商群

- **定理 8.6.2** 设 A, B 是 G 的两个子群

1. 若 $A \lhd G, B \lhd G$, 则 $A \cap B \lhd G, AB \lhd G$

2. 若 $A \lhd G, B \,\text{£}\, G$, 则 $A \cap B \lhd B, AB \leq G$

正规子群的交集仍然是正规子群!
正规子群的乘积仍然是正规子群!

正规子群与普通子群的交集是普通子群的正规子群!

正规子群与普通子群的乘积是普通子群!

Tsinghua University

正规子群与商群

- 思考：
  - 普通子群和普通子群的交是否是普通子群？
  - 普通子群和普通子群的乘积是否是普通子群？

$$\forall ab, a_1b_1 \in AB \qquad \boxed{A \lhd G \Rightarrow bA = Ab \Rightarrow ba = a'b}$$

$$(ab)(a_1b_1) = a\,(ba_1)\,b_1 = a(a_1'b)b_1 = (aa_1')(bb_1) \in AB \quad \text{封闭性！}$$

正规子群与商群

- 定理 8.6.3 设H是G的一个正规子群，G/H 表示H的所有陪集构成的集合，即

$$G/H = \{gH | g \in G\}$$

则G/H关于陪集乘法作成群。称之为G关于H的商群

清華大学 Tsinghua University

代数系统的概念

- **定义7.3.1** 设A是非空集合，A^2到A的一个映射 f： $A^2 \to A$ 称为 A 的一个二元代数运算，简称**二元运算**

正规子群与商群

- 证明： 陪集乘法对于G/H是一个二元运算

  - $\forall aH, bH \in G/H$，$aHbH = \{ah_1bh_2 \mid h_1, h_2 \in H\}$
  - $bH = Hb \Rightarrow ah_1bh_2 = a(h_1b)h_2 = a(bh_1')h_2 = (ab)(h_1'h_2) \in abH$
  - 故 $aHbH \subseteq abH$
  - 又 $\forall h \in H, (ab)h \in abH$， $(ab)h = (ae)(bh) \in aHbH$
  - 故 $abH \subseteq aHbH$

二元运算！

  - 因此 $\forall aH, bH \in G/H$，$aHbH = abH \in G/H$

正规子群与商群

- 证明（续）： G/H对陪集乘法成群

  - $\forall aH, bH, cH \in G/H$ 结合律！

$$\left(aHbH\right)cH=\left(abH\right)cH=\left(ab\right)cH=a\left(bc\right)H=aH\left(bc\right)H=aH\left(bHcH\right)$$

  - $eHaH=eaH=aH$，$aHeH=aeH=aH \Rightarrow eH=H$是单位元

    单位元！

  - $a^{-1}HaH=aHa^{-1}H=eH$ ，因此 aH 的逆元为 $a^{-1}H$

    逆元素！

证毕！

正规子群与商群

- **定理 8.6.3** 设H是G的一个正规子群，G/H表示H的所有陪集构成的集合，即

$$G/H = \{gH | g \in G\}$$

则G/H关于陪集乘法作成群。称之为G关于H的商群。

思考：普通子群的陪集集合关于陪集乘法是否可以成群？

正规子群与商群-小结

- 正规子群
- 正规子群的等价性质
- 正规子群与子群的交、乘积性质
- 商群

主要内容

- 8.1 半群
- 8.2 群、群的基本性质
- 8.3 循环群 群的同构
- 8.4 变换群和置换群 Cayley定理
- 8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理
- 8.6 正规子群与商群
- **8.7 群的同态、同态基本定理**
- 8.8 群的直积

清華大學 Tsinghua University

循环群 群的同构

- 定义 8.3.2 设 $(G,\ \bullet)$ 和 $(G',\ *)$ 是两个群

  $f:\ G \to G'$ 是双射，如果 $\forall a,b \in G$ 都有

  $$f(ab) = f(a) * f(b)$$

  则称 f 是 G 到 G' 的一个同构，记作 $G \cong G'$

群的同态、同态基本定理

- **定义 8.7.1** 设G_1, G_2是两个群，f是G_1到G_2的一个映射。如果对任意的$a, b \in G_1$都有

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

则称 f 是 G_1 到 G_2 的一个**同态映射**，或简称**同态**。

群同态的充分条件：1. 映射 2. 保持运算！

Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- 若映射f 分别是单射、满射、双射时，分别称之为G_1到G_2的**单一同态**、**满同态**、**同构**
- 用 $G_1 \sim G_2$ 表示满同态，并称G_2是f作用下G_1的**同态象**

群的同态、同态基本定理

- **引理8.7.1**：设H是G的正规子群，$\forall a \in G$ 令 $f: a \to aH$，则f是G到G/H的满同态。

  证明：

  - 显然，f 是 G 到 G/H 的一个映射
  - 同时 $\forall aH \in G/H$，$\exists a \in G$，满足$f(a) = aH$
  - 因此 f 是 G 到 G/H 的一个满射

群的同态、同态基本定理

证明（续）：

- 由于$\forall a, b \in G$，$f(ab) = abH$
- 且 G/H 中的运算满足 $aHbH = abH$
- 故 $f(ab) = abH = aHbH = f(a)f(b)$ 保持运算！
- 因此 f 是 G 到 G/H 的满同态

证毕！

Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- **引理8.7.1**：设H是G的正规子群，$\forall a \in G$

  令 $f: a \rightarrow aH$，则 f 是G 到G/H的满同态。

群G可以和其任意一个商群构成满同态！

清華大學 Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- **定理 8.7.1** 若 f 是 G_1 到 G_2 的同态，g 是 G_2 到 G_3 的同态，则 gf 是 G_1 到 G_3 的同态。

证明：显然 gf 是 G_1 到 G_3 的映射，以下只证明它保持运算，$\forall a, b \in G_1$

$$gf(ab) = g(f(ab)) = g(f(a)f(b))$$

$$= g(f(a))g(f(b)) = gf(a)gf(b)$$

因此 gf 是 G_1 到 G_3 的同态。

清華大學 Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- **定理8.7.2** 设 G 是一个群，$(G',\cdot)$ 是一个有二元运算的代数系统，若 $f:G\rightarrow G'$ 是满射，且保持运算，则 G' 也是群，而且 $G\sim G'$

Tsinghua University

循环群 群的同构

- **定理 8.3.5** 设 G 是一个群，$(G', *)$ 是一个代数系统，如存在 G 到 G' 的双射 f，且保持运算，即 $\forall a,b \in G$，有 $f(ab)=f(a)*f(b)$，则 G' 也是一个群。

与群同构的代数系统，是群！

清華大学 Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- 定理8.7.2 设 G 是一个群，$(G',\cdot)$ 是一个有二元运算的代数系统，若 $f:G\to G'$ 是满射，且保持运算，则 G' 也是群，而且 $G\sim G'$

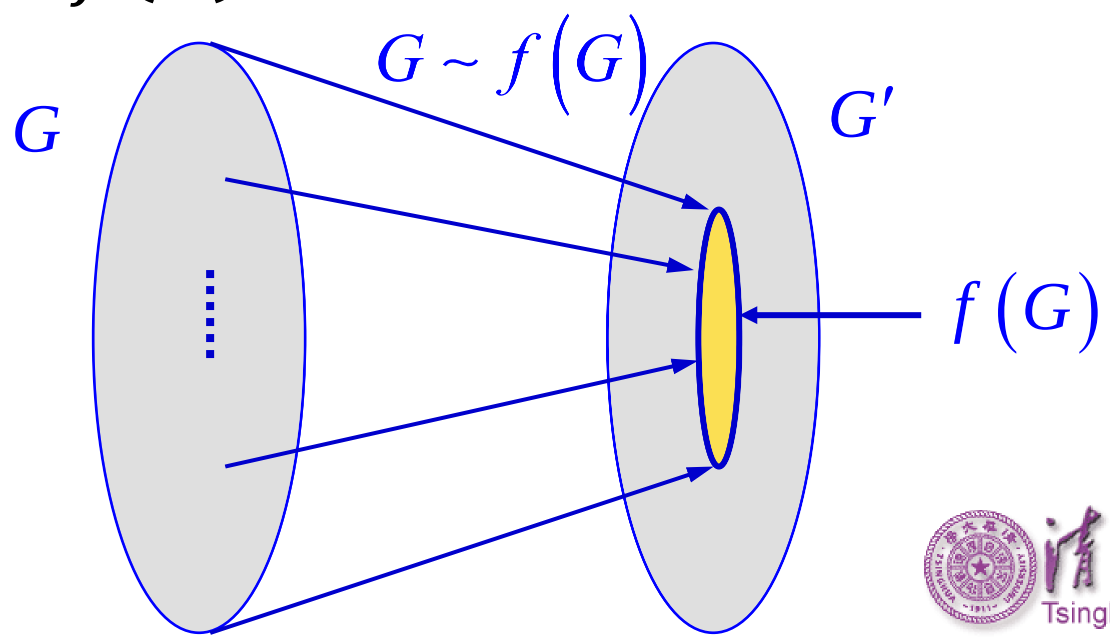
群的同态象，仍然是群！

Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- 引理 8.7.2 设 f 是 G 到 G' 的同态，则 G 的象集 $f(G)$ 是群 G' 的子群！

  且 f 是 G 到 $f(G)$ 的满同态



清華大學 Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- **定理 8.7.3** 设 f 是 G 到 G' 的同态，则

  1. 若 e 和 e' 分别是 G 和 G' 的单位元，则 $f(e) = e'$
  2. $\forall a \in G$， f 将 a 的逆元映射到 G' 中像的逆元，
     即 $f(a^{-1}) = f^{-1}(a)$
  3. 如果 H 是 G 的子群，则 H 在 f 下的象
     $f(H) = \{f(a)|a \in H\}$ 是 G' 的子群，且 $H \sim f(H)$

群的同态、同态基本定理

- 证明：1. e和e'分别是G和G'的单位元 $\Rightarrow f(e)=e'$
  - $f: G \to G'$，$\forall a, b \in G$，$f(ab) = f(a)f(b)$
  - 因此，$\forall a' \in f(G), \exists a \in G$，满足$a' = f(a)$

    $a'=f(a) = f(ae) = f(a)f(e) = a'f(e)$

  同理，$a'=f(e)\,a'$。$\therefore$ $f(e)$是$f(G)$的单位元

  因为单位元唯一，故$f(e) = e'$

群的同态、同态基本定理

- 证明：$\boxed{2.\quad \forall a \in G\ ,\ f(a^{-1}) = f^{-1}(a)}$
  - $\forall a \in G$，有 $a^{-1} \in G$
  - 因此，$f\left(aa^{-1}\right) = f\left(e\right) = e' = f\left(a\right) f\left(a^{-1}\right)$
  - 同理，$f\left(a^{-1}a\right) = f\left(e\right) = e' = f\left(a^{-1}\right) f\left(a\right)$
  - 故　　$f^{-1}\left(a\right) = f\left(a^{-1}\right)$

Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- 证明：3. $H \le G \Rightarrow f(H) \le G'$, 且 $H \sim f(H)$
  - $\forall a,b \in f(H)$，由于 f 为满射， 因此必定存在 $a',b' \in H$， 使得 $f(a') = a, f(b') = b$ 。
  - 则 $ab = f(a')f(b') = f(a'b') \in f(H)$ 封闭性！
  - $e \in H \Rightarrow f(e) \in f(H)$ 单位元！

群的同态、同态基本定理

- 证明：3. $H \le G \Rightarrow f(H) \le G'$，且 $H \sim f(H)$
  - $\forall a \in f(H)$，由于 f 为满射，因此必定 $\exists a' \in H$，使得 $f(a') = a$
  - 显然 $(a')^{-1} \in H$，则 $f\left((a')^{-1}\right) \in f(H)$
  - $f\left((a')^{-1}\right)a = f\left((a')^{-1}\right)f(a') = f\left((a')^{-1}(a')\right) = f(e) = e'$
  - 同理，$af\left((a')^{-1}\right) = e'$　　逆元素！
  - 即 $\forall a \in f(H)$，在 $f(H)$ 中有逆元素

Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- **证明：** 3. $H \le G \Rightarrow f(H) \le G'$，且 $H \sim f(H)$
  - $\forall a \in f(H)$，根据 $f(H)$ 的定义，必定存在 $a' \in H$，使得 $f(a') = a$ 满射！
  - 说明 f 是从 H 到 $f(H)$ 的满射！
  - $\forall a,b \in H$，$f(ab) = f(a)f(b) \in f(H)$ 保持运算！
  - 故 $H \sim f(H)$ 证毕！

群的同态、同态基本定理

- **定理 8.7.3** 设 f 是 G 到 G' 的同态，则

1. 若 e 和 e' 分别是 G 和 G' 的单位元，则 $f(e)=e'$

   在同态映射下，单位元的象仍然是单位元

2. $\forall a \in G$，f 将 a 的逆元映射到 G' 中像的逆元，

   即 $f(a^{-1})=f^{-1}(a)$ 在同态映射下，逆元素的象是象的逆元素

3. 如果 H 是 G 的子群，则 H 在 f 下的象

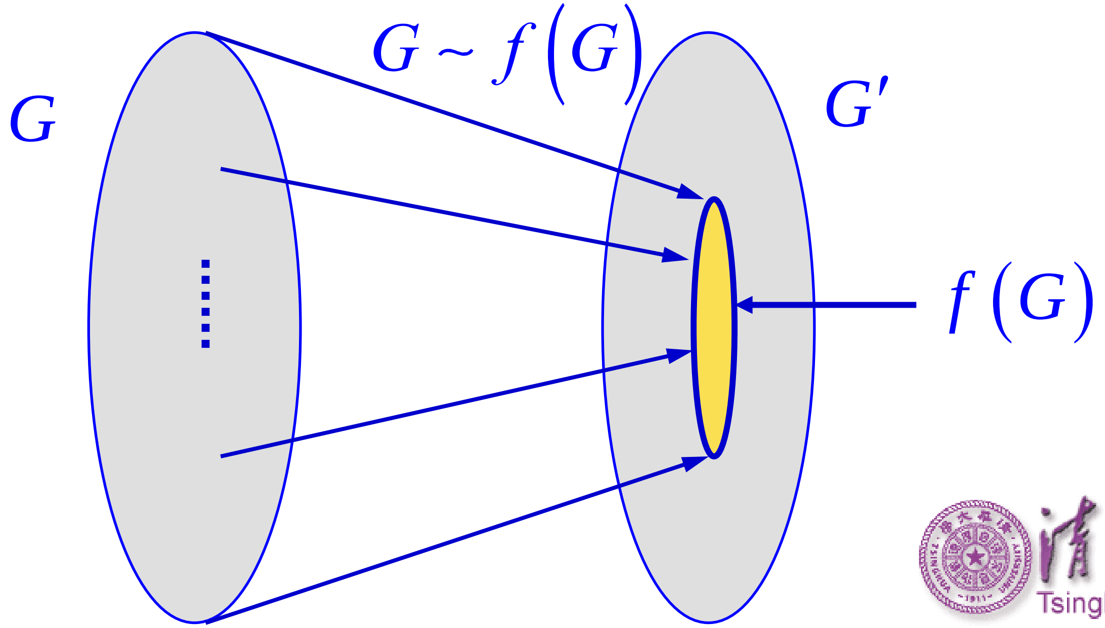
   $f(H)=\{f(a)|a \in H\}$ 是 G' 的子群，且 $H \sim f\left(H\right)$

   在同态映射下，子群的象仍然是子群，且该同态映射形成二者之间的满同态

群的同态、同态基本定理

- 引理 8.7.2 设f是G到G'的同态，则G的象集$f(G)$是群G'的子群！

  且f是G到$f(G)$的满同态



群的同态、同态基本定理

- **定理 8.7.5** 设 f 是 G 到 G' 的同态，e 是 G 的单位元，令 $K=\{a\in G|f(a)=f(e)\}$，则 K 是 G 的正规子群，K 称为同态 f 的核，记作 $\mathrm{Ker}\ f$

清華大學 Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- **证明：** $\boxed{K=\{a\in G|f(a)=f(e)\} \quad \Rightarrow \quad K \lhd G}$
  - 显然，e 为 K 中的元素
  - 由于 f 是同态，因此 $f(e)=e'$ 是 G' 的单位元
  - $\forall k,k_1 \in K$，$f(kk_1)=f(k)f(k_1)=f(e)f(e)=e'=f(e)$
  - $\forall k \in K$，$f(k^{-1})=f^{-1}(k)=f^{-1}(e)=e'=f(e)$

    $\Rightarrow$ $k^{-1}\in K$

  - 因此，K 为 G 的 子群。

清華大學 Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- 证明：
  - $\forall g \in G, \forall k \in K$

$$f(g^{-1}kg) = f(g^{-1})f(k)f(g) = f^{-1}(g)f(k)f(g)$$
$$= f^{-1}(g)f(g) = e' = f(e)$$

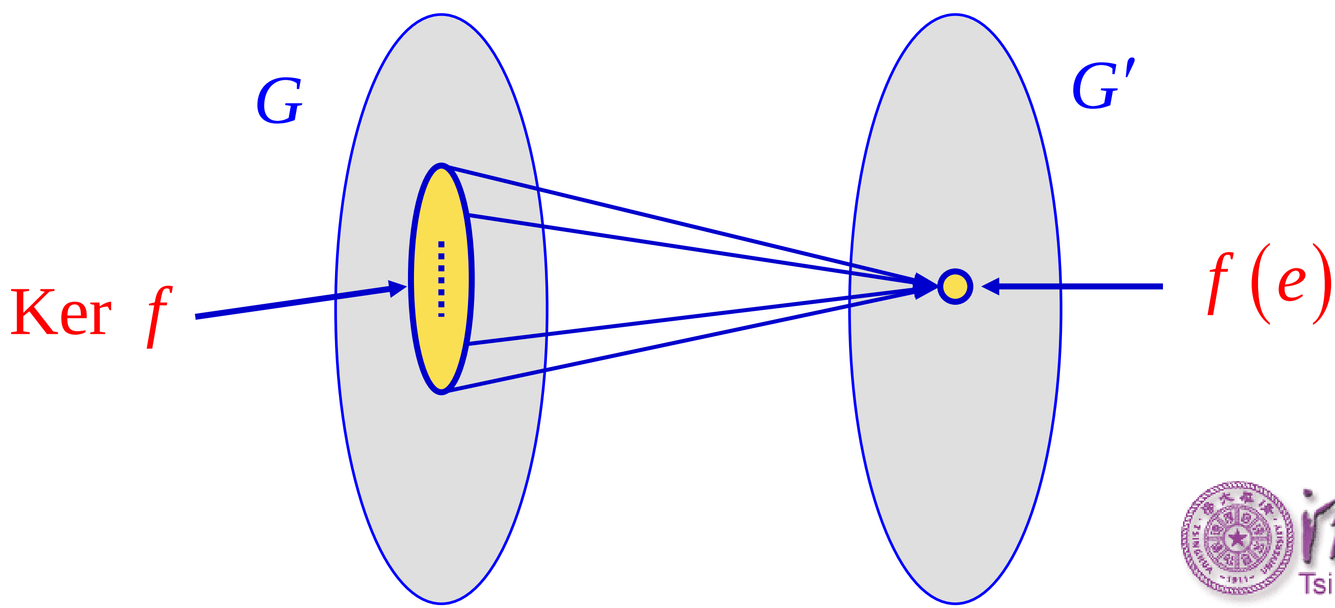
  - 即 $\forall g \in G, \forall k \in K$， $g^{-1}kg \in K$
  - 因此， $K \lhd G$

证毕！

清華大學 Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- **定理 8.7.5** 设 f 是 G 到 G' 的同态，e 是 G 的单位元，令 $K = \{a \in G | f(a) = f(e)\}$，则 K 是 G 的正规子群，K 称为同态 f 的核，记作 $\mathrm{Ker}\ f$



群的同态、同态基本定理

- 定理 8.7.6 设 f 是 G 到 G' 的同态，K 是同态的核，那么对任意的 $a,b \in G$，$f(a) = f(b)$ 的充要条件是 $b \in aK$

群的同态、同态基本定理

- 证明：
  - 充分性：已知 $b\in aK$ $\Longrightarrow$ $\forall a,b\in G$，$f(a)=f(b)$
  - $\exists k\in K$，使得 $b=ak$

    $$f(b)=f(ak)=f(a)f(k)=f(a)f(e)=f(a)$$

  - 必要性：已知 $\forall a,b\in G$，$f(a)=f(b)$ $\Longrightarrow$ $b\in aK$

    $$e'=f^{-1}(a)f(a)=f^{-1}(a)f(b)=f\left(a^{-1}\right)f(b)=f\left(a^{-1}b\right)$$

  - 说明 $a^{-1}b\in K$，即 $b\in aK$ 证毕！

群的同态、同态基本定理

- 定理 8.7.6设 f 是 G 到 G' 的同态，K 是同态的核，那么对任意的$a,b \in G$，$f(a) = f(b)$的充要条件是 $b \in aK$　　$a \in bK$

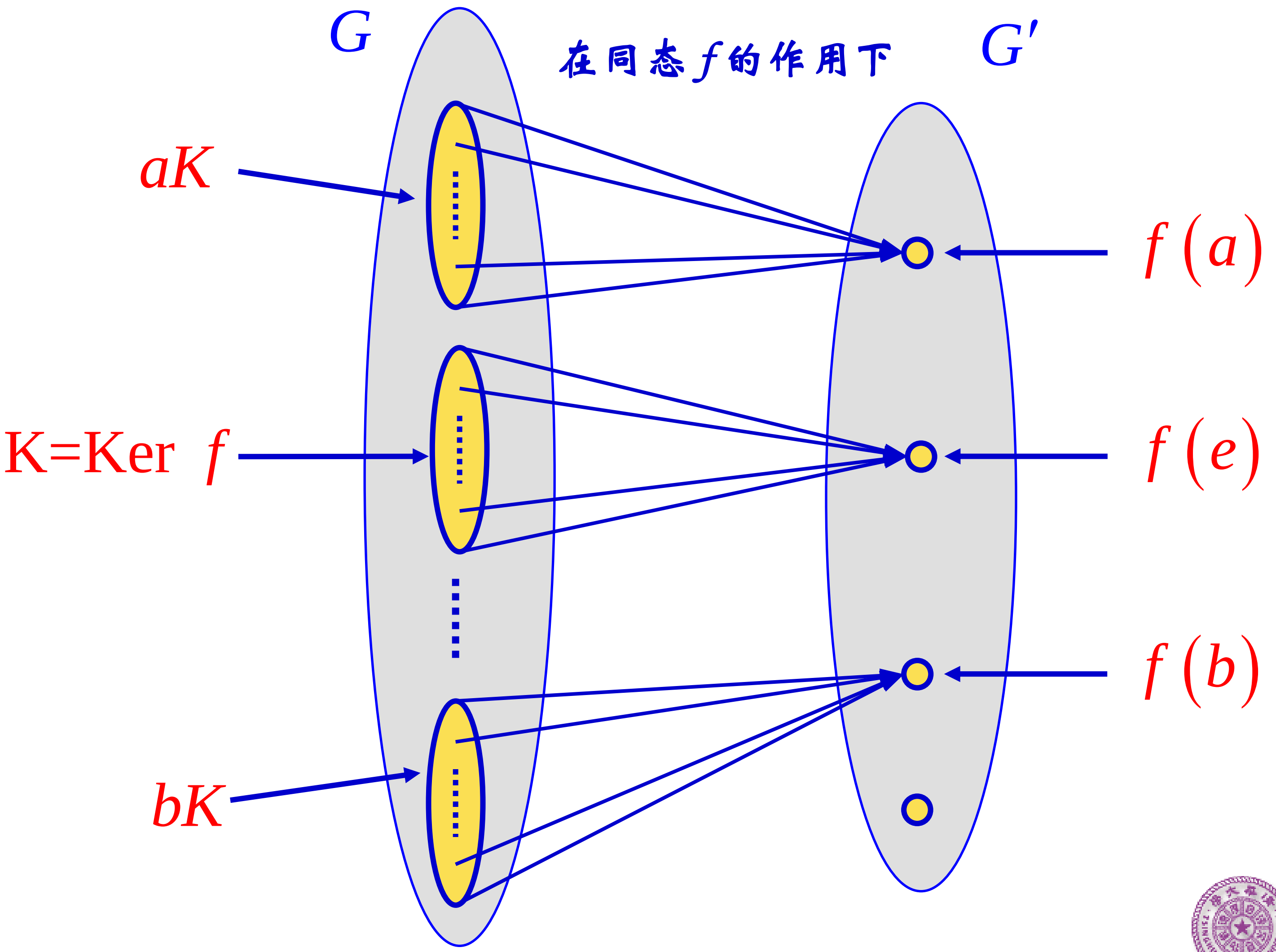
$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow b \in aK \Leftrightarrow bK = aK$$

同态核的　陪集所有元素映射到一个象！

同态核不同　陪集的象一定不同！

Tsinghua University

群的同态、同态基本定理



群的同态、同态基本定理

- 定理 8.7.7 设 f 是 G 到 G' 的同态，则 f 是单同态的充要条件是 $\operatorname{Ker} f = \{e\}$

群的同态、同态基本定理

- 证明：
  - 必要性：已知 f 为单同态 ⇨ $\operatorname{Ker} f = \{e\}$
  - G' 中单位元 e' 在 G 中只有一个原象 e，即 $\operatorname{Ker} f = \{e\}$
  - 充分性：已知 $\operatorname{Ker} f = \{e\}$ ⇨ f 为单同态
  - $\forall a, b \in G$，若 $f(a) = f(b)$

    $$f(a)f^{-1}(b) = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) = f(b)f^{-1}(b) = e'$$
  - 由已知条件，$ab^{-1} = e$ ⇨ $a = b$　　　证毕！

群的同态、同态基本定理

- **定理 8.7.7** 设 f 是 G 到 G' 的同态，则 f 是单同态的充要条件是 $\mathrm{Ker}\, f = \{e\}$

- **推论：** 设 f 是 G 到 G' 的满同态，则 f 为同构的充要条件是 $\mathrm{Ker}\, f = \{e\}$

清華大學 Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- 同态基本定理：设 G 是一个群，则 G 的任一商群都是 G 的同态象；反之，若 G' 是 G 的同态象，f 是 G 到 G' 的满同态，则 $G' \cong G/K$ 其中 $K = Ker\ f$

Tsinghua University

群的同态、

> **引理8.7.1**：设 H 是 G 的正规子群，$\forall a \in G$
> 令 f：$a \to aH$，则 f 是 G 到 G/H 的满同态。
>
> 群G可以和其任意一个商群构成满同态！

- 证明：$G \sim G/H$
  - G/H 为任一商群，则 $H \lhd G$
  - 则可构造映射 g：$a \to aH \ (\forall a \in G)$
  - 由引理8.7.1可知，g 为满同态。
  - 而 G/H 为 G 在 g 下的同态象
  - 即 $G \sim G/H$

Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- 证明： f 是 G 到 G' 的满同态 $\Rightarrow$ $G/K \cong G' \quad (K = Ker\ f)$
  - 令 $\varphi: aK \to f(a)$，显然符合映射条件
  - $\forall x \in G'$，由于 f 是满同态，因此必定 $\exists a \in G$，

    使得 $f(a) = x$ ，即 $\varphi(aK) = f(a) = x$
  - 因此 φ 是 G/K 到 G' 的满射
  - 据定理8.7.6， $\begin{matrix} \varphi(aK) = \varphi(bK) \\ f(a) = f(b) \end{matrix} \Leftrightarrow aK = bK$
  - 因此 φ 是 G/K 到 G' 的单射

Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- 证明： f 是 G 到 G' 的满同态 ⇨ $G/K \cong G' \quad (K = Ker\ f)$
  - $\varphi(aKbK) = \varphi(abK) = f(ab) = f(a)f(b) = \varphi(aK)\varphi(bK)$
  - 因此 φ 是 G/K 到 G' 的同构映射，即 $G/K \cong G'$。

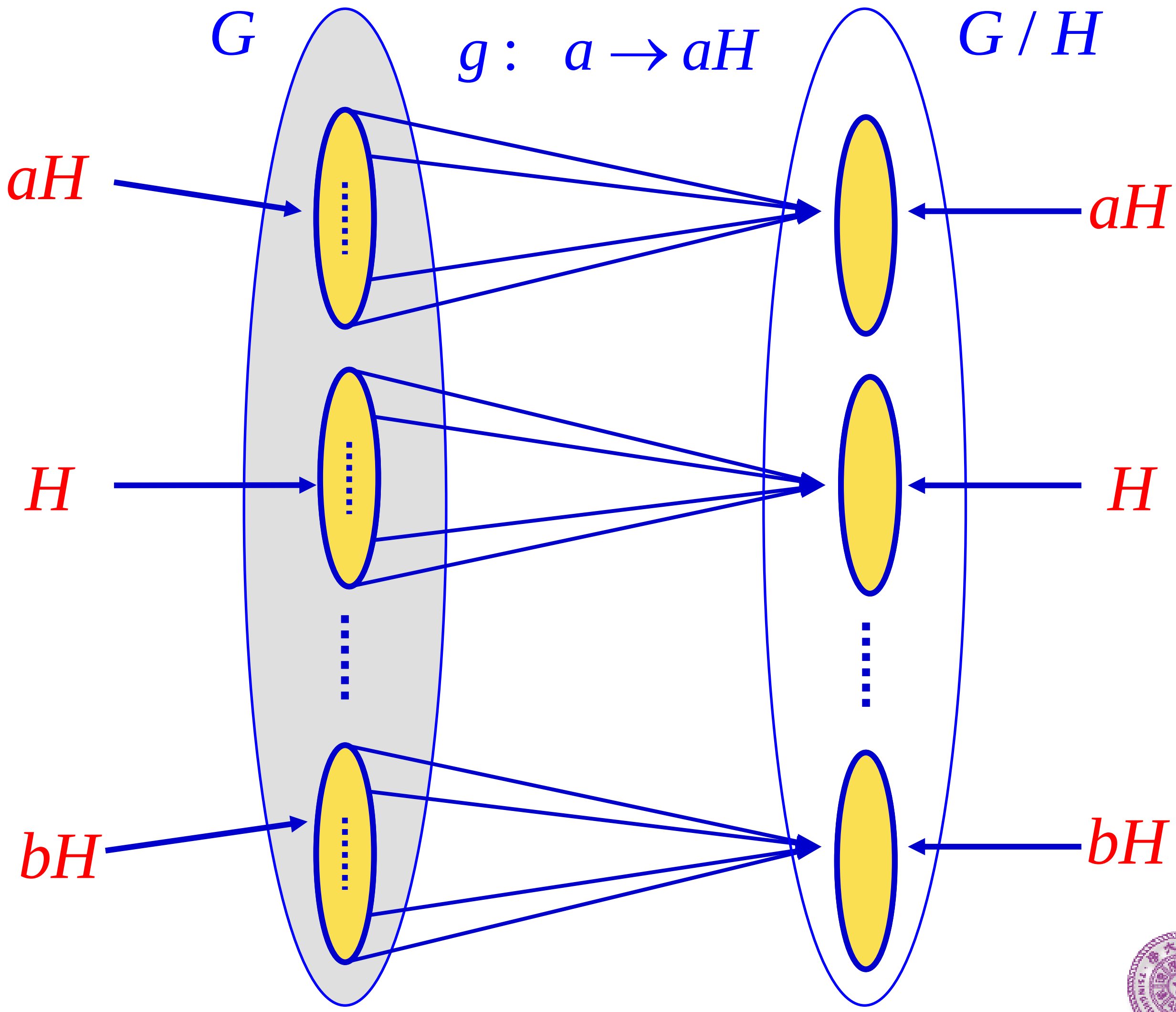
Tsinghua University

群的同态、同态基本定理

- 同态基本定理：设G是一个群，则G的任一商群都是G的同态象；反之，若G'是G的同态象，f是G到G'的满同态，则$G' \cong G/K$ 其中$K = Ker\ f$

群的商群可以成为其同态象！

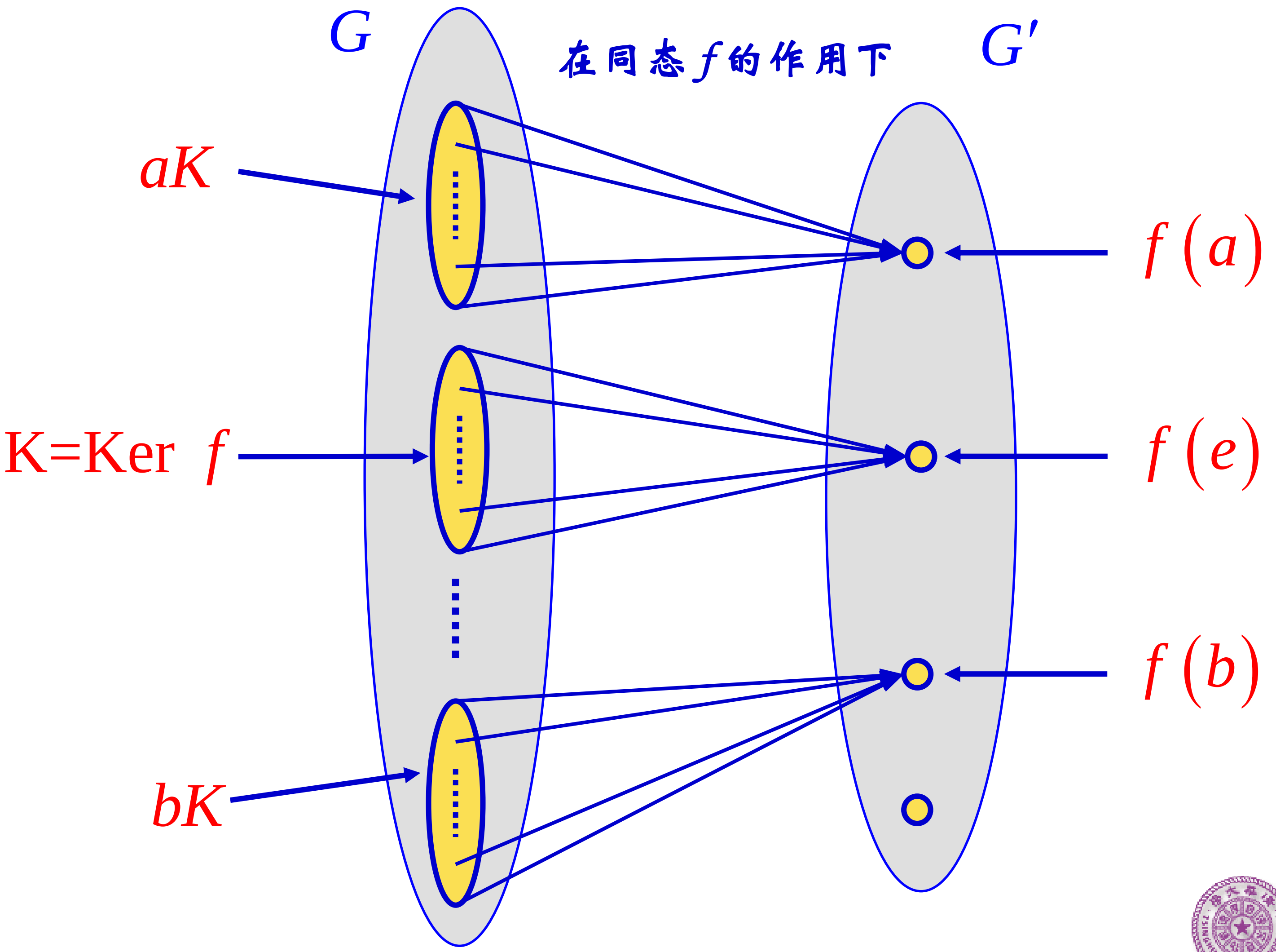
群的同态、同态基本定理



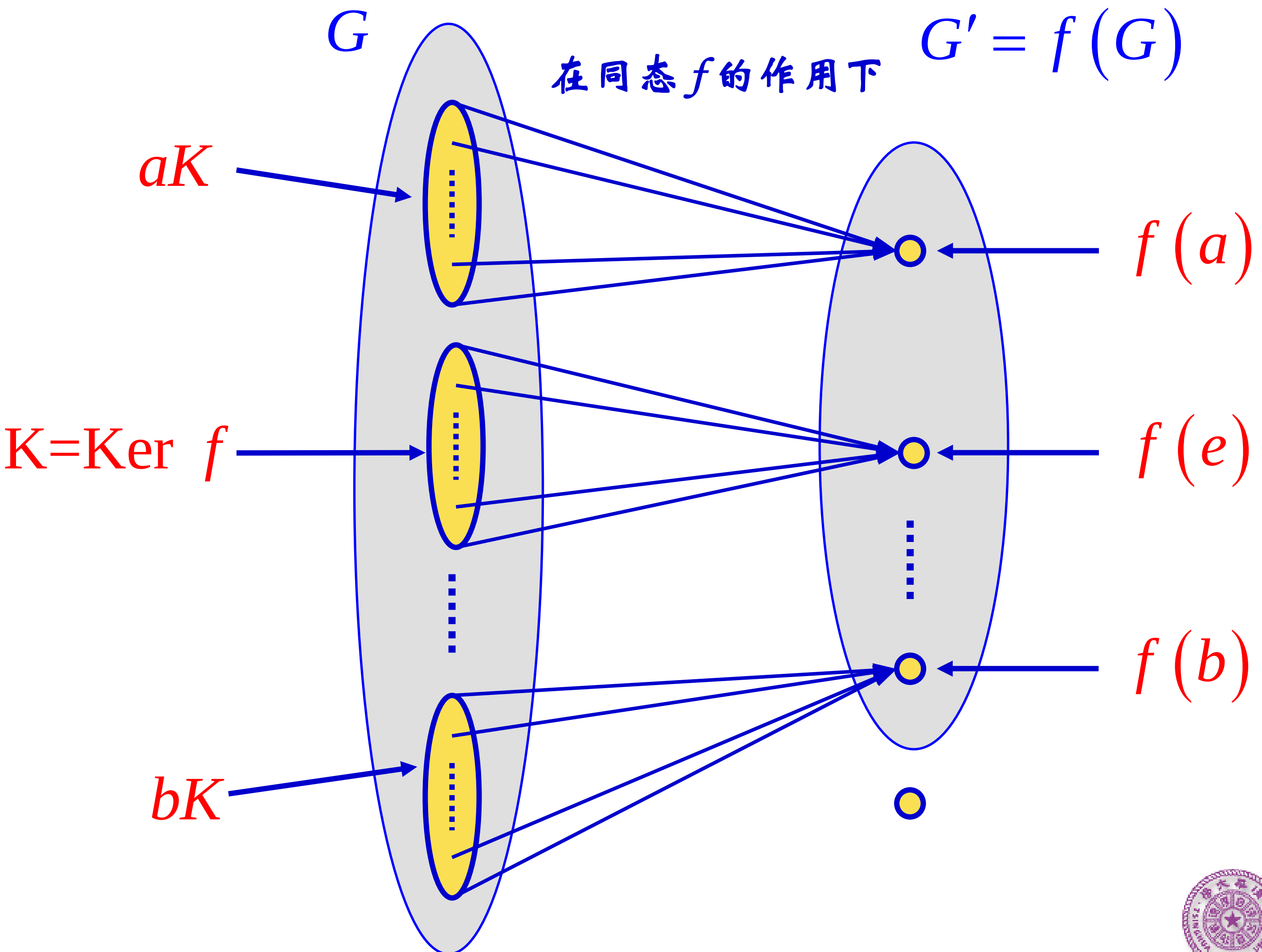
群的同态、同态基本定理

- **同态基本定理**：设 G 是一个群，则 G 的任一商群都是 G 的同态象；反之，若 G' 是 G 的同态象，f 是 G 到 G' 的满同态，则 $G' \cong G/K$ 其中 $K = Ker\ f$

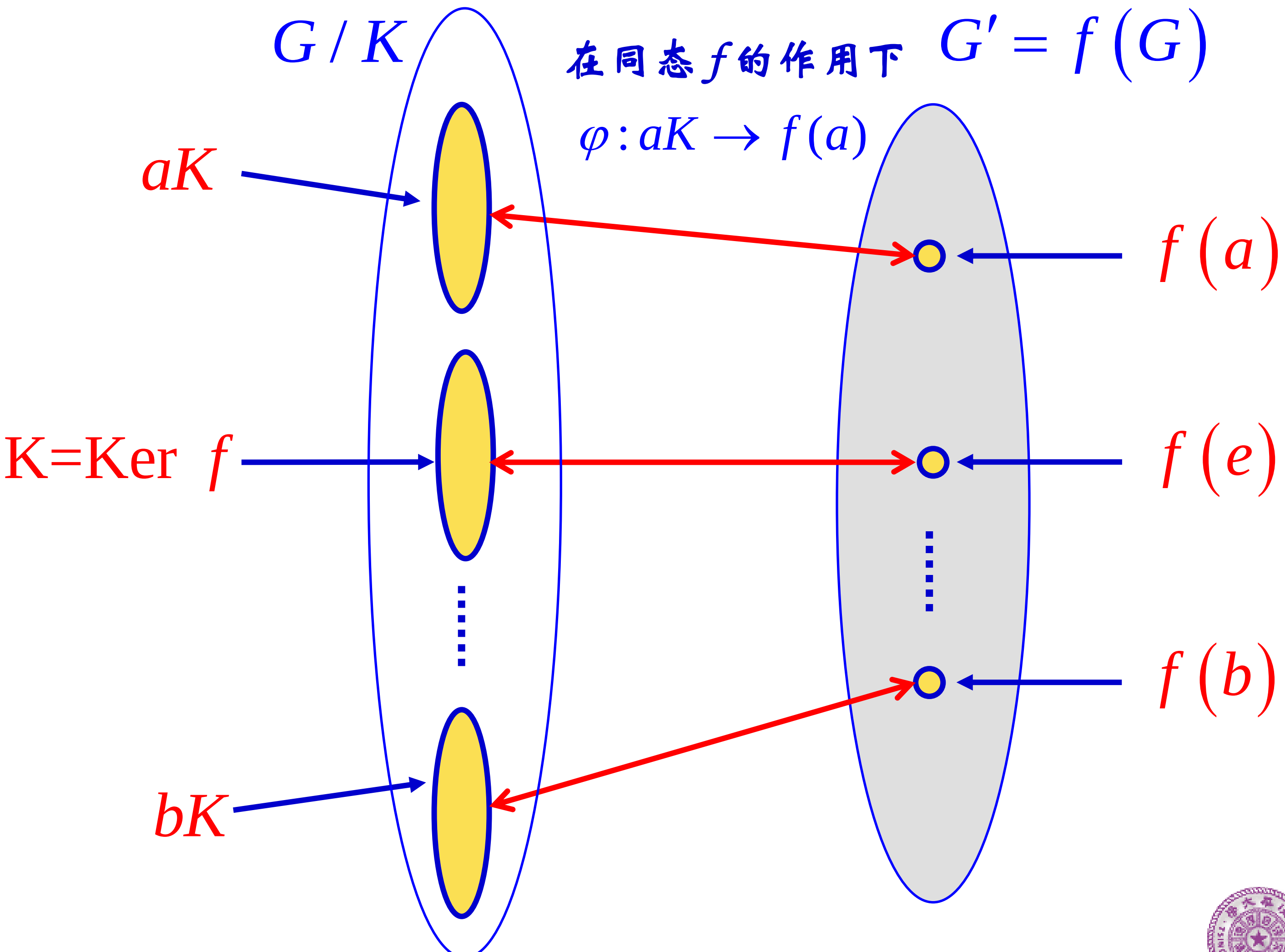
群的同态、同态基本定理



群的同态、同态基本定理



群的同态、同态基本定理



群的同态象与该同态核的商群同构！

群的同态、同态基本定理-小结

- 群的同态、同态象
- 同态性质：单位元、逆元、子群
- 同态核，同态核性质
- 同态基本定理

主要内容

- 8.1 半群
- 8.2 群、群的基本性质
- 8.3 循环群 群的同构
- 8.4 变换群和置换群 Cayley定理
- 8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理
- 8.6 正规子群与商群
- 8.7 群的同态、同态基本定理
- 8.8 群的直积

清華大學 Tsinghua University

作业

总 复 习

练习题

- 若G为非交换群，则G中存在着非单位元a和b

  $a \neq b$，且 $ab = ba$

- 群 G_1 到 G_2 存在满同态映射，H是 G_1 的子群，若

  $|H|$ 与 $|G_2|$ 互素，证明 $H \subseteq \ker\varphi$

清華大學 Tsinghua University