形式语言与自动机 · 期末考

2021 秋　考题回忆版　by BoxWorld

一、判断题（1@2）

1. 存在可以接受对角语言 L_d 的多栈 PDA。
2. 在一个 DFA 中，设状态 r 和 s 通过某个输入符号 a 可分别转移到 p 和 q （即 $\delta(r,a)=p, \delta(s,a)=q$） 则有「$r$ 和 s 可区别 $\Rightarrow$ p 和 q 可区别」。
3. 若 L 是正规语言，a 是字母表中的符号，则 $a\backslash L=\{w|aw\in L\}$ 也是正规语言。
4. 对角语言 L_d 可以归约到通用语言 L_u 的补语言。
5. 正规表达式 $0+(\varepsilon+1)(\varepsilon+1)^*0$ 可简化为 1^*0。
6. 图灵机停机问题是一个 *NP-complete* 问题。
7. 「两个正规语言是否拥有至少一个公共串」是可判定的。
8. 如果被施加替换（*substitution*）运算的某个语言是上下文无关语言，则进行替换运算之后得到的语言也是上下文无关语言。

二、单项选择题（1@2）

1. 下列语言中，（）不是递归可枚举语言。

   A. 语言 L_u （课程定义的通用语言）

   B. 语言 L_H （课程中图灵机停机问题所定义的语言）

   C. 语言 L_H （课程中图灵机停机问题所定义的语言）的补语言

   D. 以上皆非

2. 下列问题中，（）是可判定的。

   A. 一个递归可枚举语言是否为空

   B. 一个递归可枚举语言是否为正规语言

   C. 一个递归可枚举语言是否为上下文无关语言

   D. 以上皆非

3. 下列语言中，（）不是任何 PDA 的语言。

   A. $\{ww|w\in\{a,b\}^*\}$

   B. $\{ww|w\in\{a,b\}^*\}$ 的补语言

   C. $\{ww^R|w\in\{a,b\}^*, w^R\text{为}w\text{的反向}\}$ 的补语言

   D. 以上皆非

4. 下列语言中，（）是某个 PDPA 的语言。

A. $\{cww^R|w \in \{a,b\}^*, w^R\text{为}w\text{的反向}\}$

B. $\{wcw^R|w \in \{a,b\}^*, w^R\text{为}w\text{的反向}\}$

C. $\{ww^Rc|w \in \{a,b\}^*, w^R\text{为}w\text{的反向}\}$

D. 以上皆非

5. 下列语言中，（）是某个空栈接受的 PDPA 的语言。

A. $\{ww^R|w \in \{a,b\}^*, w^R\text{为}w\text{的反向}\}$ 的补语言

B. $\{wcw^R|w \in \{a,b\}^*, w^R\text{为}w\text{的反向}\}$

C. $\{wcw^R|w \in \{a,b\}^*, w^R\text{为}w\text{的反向}\}$ 的补语言

D. 以上皆非

6. 下列语言中，（）不是任何 DFA 的语言

A. $\{wxw^R|w,x \in \{a,b\}^*, w^R\text{为}w\text{的反向}\}$

B. $\{wxw^R|w,x \in \{a,b\}^*, w^R\text{为}w\text{的反向}\}$ 的补语言

C. $\{wxw|w,x \in \{a,b\}^*\}$

D. 以上皆非

三、简答题

1. 【5 分】设 CFG $G = (\{S,A,B,C,D\},\{a,b,c\},P,S)$，其中 P 由下列产生式构成：

$$
\begin{gathered}
S \to AB|BC|\varepsilon \\
A \to AB|C \\
B \to Bb|a \\
C \to \varepsilon|Cc \\
D \to B|\varepsilon
\end{gathered}
$$

(a) 消去 P 中的 ε - 产生式得到产生式集合 P_1，构成 CFG G'，使得 $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$，求 P_1。

(b) 消去 P_1 中的 Unit 产生式得到产生式集合 P_2，构成 CFG G''，使得 $L(G'') = L(G')$，求 P_2。

(c) 消去 P_2 中的无用符号得到产生式集合 P_3，构成 CFG G'''，使得 $L(G''') = L(G'')$，求 P_3。

(d) 根据 P_3 的结果，添加合适的非终结符，构造满足 Chomsky 范式要求的产生式集合 P_4，使得结果文法的语言与 $L(G''')$ 相等，求 P_4。

2. 【4 分】文法 G（S 为开始符号）的产生式集合为：

$$
\begin{gathered}
S \to AB \\
A \to SS|SA|b \\
B \to BA|b|a
\end{gathered}
$$

X_{13}		
X_{12}	X_{23}	
X_{11}	X_{22}	X_{33}
b	a	b

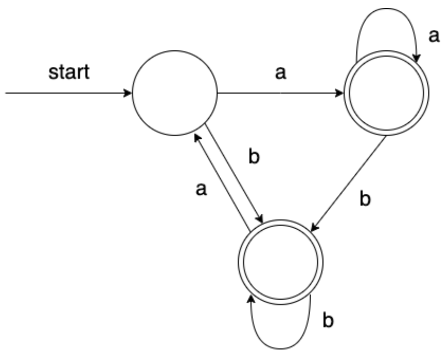
上图表示对于文法 G 和字符串 bab 应用 CYK 算法时所构造的表。

(a) 分别计算图中所有 X_{ij} $(1 \le i, j \le 3)$。

(b) 是否有 $bab \in L(G)$?

3. 【6 分】下图表示一个有限自动机 A：

（注：本题中多处出现有限自动机的描述，可以是也可以不是 DFA）



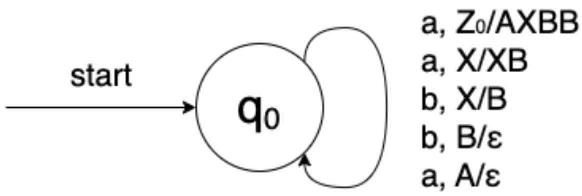
(a) 试采用课程中所介绍的方法，给出一个有限自动机 B，使得 $L(B) = (L(A))^R$。 （$(L(A))^R$ 为 $L(A)$ 的反向）

(b) 试采用课程中的方法，给出一个有限自动机 C，使得 $L(C) = \{a, b\}^* - L(A)$。

(c) 设映射 $h : \{0, 1\} \to \{a, b\}^*$ 定义为 $h(0) = ab, h(1) = ba$;

试构造一个有限自动机 D，使得 $L(D) = h^{-1}(L(A))$。

4. 【6 分】考虑如下 PDA 状态转移图：



该图刻画了 PDA $P = (\{q_0\}, \{a, b\}, \{Z_0, X, A, B\}, \delta, q_0, Z_0)$ 的转移规则。

(a) 试严格利用课程中介绍的从空栈接受的 PDA 到 CFG 的转换算法，定义一个与该 PDA 等价的 CFG，开始符号设为 S。

(b) 对于该 PDA 接收的语言 $L(P)$，是否有

$$L(P) \subseteq \{w | w = a^n b^m, \text{其中 } 0 \le m \le 2n \le 4m\}$$

(c) 该 PDA 接收的语言 $L(P)$ 是否为正规语言？结出结论即可。

5. 【6 分】若 G 为包含 p 个产生式的上下文无关文法，其中每个产生式的长度小于等于 n。假设存在推导 $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$ 则对于该推导存在推导步数的上界，使得一定存在一种推导方法的推导步数小于等于该上界。给定 n 和 p （$n, p \geq 1$），求出这一上界，并对于这一上界，给出推导步数达上界的上下文无关文法。

   例： 若 $n = 2, p = 2$ ，对应上界为 3，一个对应的 CFG 为 $A \Rightarrow BB, B \Rightarrow \epsilon$。

   注：不需要对推导步数的上界给出对应的证明。

6. 【4 分】定义两个语言 L 和 M 的对称差 $SD(L, M)$ 为所有仅被语言 L 或 M 中的一个所包含的字符串组成的集合。例如，若 $L = \{aa, bb\}, M = \{bb, aab\}$，则 $SD(L, M) = \{aa, aab\}$。

   (a) 给出 $SD(L, M)$ 的形式化描述。例：L^+ 的形式化描述为 $L^+ = L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots$

   (b) 若 L, M 均为 CFL，$SD(L, M)$ 是否一定是 CFL？给出证明或给出反例。

7. 【4 分】对于语言

$$L = \{ss^R s | s \in \{0,1\}^*, s^R \text{ 为 } s \text{ 的反向}\}$$

   可以利用 Pumping 引理证明 L 不是上下文无关语言，以下是一个证明概要：

   对于任意的 $n \geq 1$，取 $s =$ ① $\in \{0,1\}^*$，令 $z = ss^R s$，则 $z \in L$。
   对任意满足条件 $z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq n$ 的 u, v, w, x, y，取 $k =$ ②，有 $uv^k wx^k y \notin L$。

   试在其中 ① 和 ② 处填写适当的内容。

四、设计题

1. 【5 分】构造接受下列语言 L 的一个有限自动机（DFA，NFA，ε-NFA 均可），要求状态数不超过 8， 且用状态转移图的方式给出答案：

$$L = \{w | w = a^n b^m,\ m, n \geq 0 \text{ ,且 } w \text{ 中既不包含子串 } aaabb \text{，也不包含子串 } aabbbb\}$$

   注：要求状态数不超过 8，并不意味状态数一定会达到 8，后面的题目亦然。

2. 【5 分】给出下列正规语言 L 的一个正规表达式：

$$L = \{w | w = a^n b^m,\ m, n \geq 0 \text{ ,且 } w \text{ 中既不包含子串 } aaabb \text{，也不包含子串 } aabbbb\}$$

3. 【5 分】给出下列语言 L 的一个上下文无关文法 G，要求 G 的非终结符只有一个 S。用你的文法 G 验证：对于任意串 $w = a^n b^m \in L$，w 可被 G 接受。

$$L = \{w | w = a^n b^m, \text{其中 } 0 \leq m \leq 2n \leq 4m\}$$

4. 【5 分】试构造接受下列语言 L 的一个 PDA（终态接受和空栈接受均可，必要时给出设计思路），要求该 PDA 的堆栈符号数不超过 3，且用状态转移图描述你的设计：

$$L = \{w | w \in \{a, b\}^*, \text{其中 } |w| \text{ 为偶数 ，且 } w \text{ 不为 } a^n b^n \text{ 的形式，其中 } n \geq 0\}$$

5. 【5 分】试设计一个可停机图灵机 $M=(Q,\{0,1\},\{0,1...,B\},\delta,q_0,B,\{q_f\})$ 可以将串 $w\in\{0,1\}^*$ 作为输入，当到达终态 q_f 时，带上的内容为将 w 从小到大排序后的结果。 **例：** 如输入串为 101010，则到达终态时，带上的内容应为 000111。如输入串为 1000，则到达终态时，带上的内容应为 0001。如输入串全为 0 或全为 1，则到达终态时带上的内容不变。该图灵机的状态数不超过 7。到达 q_f 时，对读写头在何处不作要求。用状态转移图描述你所设计的图灵机。

五、证明题

- 要求证明严谨，步骤明确。

1. 【4 分】已知语言 $L_{01}=\{0^k1^k|k\geq 0\}$ 不是正规语言，试利用该结论及正规语言的封闭运算，证明如下语言 L 不是正规语言：

$$L=\{w|w=a^nb^m,\text{其中 }0\leq 3n=2m\}$$

2. 【6 分】设有语言 $L=\{w|w=a^nb^m,\text{其中 }0\leq m\leq 2n\leq 4m\}$。试问，$L$ 是否存在一个非有穷子集是正规语言？如存在这样的非有穷子集，请给出一个例子；如不存在，请给出证明。

3. 【5 分】证明若 L 为上下文无关语言，R 为正规语言，则 L 和 R 的交 $L\cap R$ 为上下文无关语言。

   提示： 考虑 L 对应的 PDA $P=(Q_P,\Sigma,\Gamma,\delta_P,q_p,Z_0,F_P)$ ，和 R 对应的 DFA $A=(Q_A,\Sigma,\delta_A,q_A,F_A)$，构造 $L\cap R$ 对应的自动机并进行证明。

六、附加题

- 5 分，直接加入总评成绩；共两题，任选一题。
- **注意：** 附加题只有能呈现出核心思路才有可能得到部分分数，建议大家在前面题目已做完且进行充分检查之后，再看是否有时间考虑下列题目之一。

1. 对于 CFG $G=(V,T,P,S)$，我们先定义如下两个概念：活前缀（*viable prefix*）和增广文法（*augmented grammar*）。

   若 $S\Rightarrow^*_{rm}\alpha Aw$ 且 $A\Rightarrow\beta$，其中 $\alpha,\beta\in(V\cup T)^*$，$w\in T^*$，$\Rightarrow^*_{rm}$ 表示最右推导（多步），则 $\alpha\beta$ 的任何前缀 γ 都是文法 G 的活前缀。

   若增加产生式 $S'\to S$，其中 $S'\notin V\cup T$，得到 G 的增广文法 $G=(V,T,P,S')$。

   现在，针对增广文法 G'，集合 *Prefix* 可归纳定义如下：

   (a) 令 $S\in Prefix$；
   (b) 若 $v\in Prefix$，则 v 的任一前缀 u 都满足 $u\in Prefix$；
   (c) 若 $v\in Prefix$，且 v 中至少包含一个非终结符，即可以将 v 写成 $\alpha\beta\gamma$，其中 B 为非终符。若有产生式 $B\to\beta$ ，则 $\alpha\beta$ 的任一前缀 u 都满足 $u\in Prefix$；
   (d) *Prefix* 中的元素只能通过上述步骤产生。

   试证明，*Prefix* 可以表示增广文法 G' 所有活前缀的集合。

2. 在空栈接受的扩展 PDA 基础上，我们引入一种便于自底向上分析的自动机。一个归约自动机（*Recursive Automaton*，简称 *RA*），是一个六元组：

$$R = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$$

其中，Q, Σ, Γ 及 q_0 与 PDA 的含义一致，但 δ 定义为:

$$\delta = Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma - \{Z_\varepsilon\})^* \to 2^{Q \times \Gamma}$$

$Z_\varepsilon \in \Gamma$ 是终栈符（*end stack symbol*）。定义与 PDA 中类似的 ID，形如（q, w, γ）。不同的是，栈顶在最右边。定义 ID 间的二元关系 $\vdash_R$:

$$(q, aw, \gamma\alpha) \vdash_R (p, w, \gamma X) \text{ 当且仅当 } (p, X) \in \delta(q, a, \alpha)$$

其中，$p, q \in Q$，$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$，$w \in \Sigma^*$，$X \in \Gamma$，$\alpha, \gamma \in \Gamma^*$。

上述 *ID* 间二元关系 $\vdash_R$ 的自反传递闭包表示为 $\vdash_R^*$。定义 R 的语言

$$L(R) = \{w | (q_0, w, \varepsilon) \vdash_R^* (q, \varepsilon, Z_\varepsilon), \text{ 其中}, q \in Q\}$$

试证明：对任一归约自动机 $R = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_\varepsilon)$，存在某个上下文无关文法 G，使得 $L(G) = L(R)$。