跨章综合题

一、单选题：

1、（1305B40）D　　2、（1400B35）C　　3、（2758B35）A　　4、（4247A20）A

二、填空题：

1、（1548B35）　$2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g-(qE/m)}}$

2、（1777A15）　机械振动　；　简谐振动

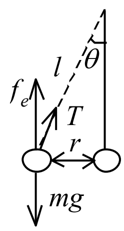
3、（4248A20）　14.6 nm　或 1.46 Å

4、（4766B35）　15.8×10^{4}

三、计算题：

1、（0319B35）

解：分析摆球受力如图：



沿切向列牛顿方程　　$-mg\sin\theta+f_e\sin\theta=ma$

当θ很小时　　$\sin\theta=r/l$　　2 分

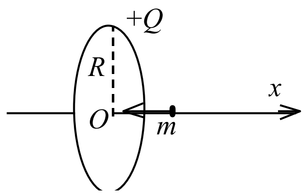
$$a=\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2=(-mg+f_e)\sin\theta/m$$

$$=(-mg+qE)r/(ml)=-(mg-qE)r/(ml)=-\omega^2r\qquad 1\text{ 分}$$

其中　$\omega^2=(mg-qE)/(ml)$　，　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{mg-qE}}$　　2 分

2、（1250B40）

解：把圆环轴线取作 x 轴，环心 O 点取作坐标原点．在离环心距离为 x 处，带电圆环的场强为：



$$E=Qx/[4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}]\qquad 4\text{ 分}$$

小珠受到的电场力为：

$$F=-qE=-qQx/[4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}]\qquad 2\text{ 分}$$

因 $x<<R$，故　　$F\approx-qQx/(4\pi\varepsilon_0R^3)=-kx$

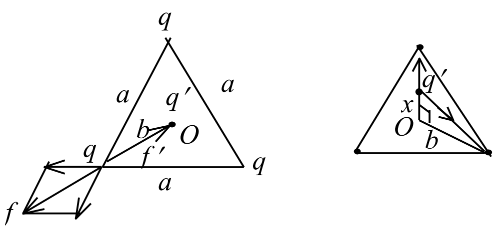
式中　　$k=qQ/(4\pi\varepsilon_0R^3)>0$　　2 分

所以小珠的运动是以 O 点为平衡位置的简谐振动．小珠的振动频率为：

$$\nu=\sqrt{k/m}/2\pi=[qQ/(16\pi^3R^3\varepsilon_0m)]^{1/2}\qquad 2\text{ 分}$$

3、（1549C70）

解：(1) 在 O 点放点电荷 q'，要使四个点电荷都受力平衡，必须考虑每一顶点上的点电荷 q 受其余三个点电荷作用力的合力为零．顶点之一的点电荷受其余二个顶点的点电荷作用的合力 f 为



$$f=2\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0a^2}\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\varepsilon_0a^2}\qquad 2\text{ 分}$$

而受到 q' 的作用力 f' 为

$$f' = qq'/4\pi\varepsilon_0 b^2 = 3qq'/4\pi\varepsilon_0 a^2 \qquad (b = a/\sqrt{3})$$ 2 分

由 $f + f' = 0$ 可得 $q' = -q/\sqrt{3}$ 1 分

q' 为 q 的异号电荷.

(2) 当 q' 垂直纸面作微小位移 x 时，受一回复力 F，按牛顿第二定律

$$3\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(b^2 + x^2)} \cdot \frac{x}{(b^2 + x^2)^{1/2}} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$ 4 分

考虑到 $x << b = a/\sqrt{3}$，得到 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{9q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3 m}x = 0$ 1 分

令 $\omega^2 = 9q^2/4\pi\varepsilon_0 a^3 m$，得到振动周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi a}{3q}\sqrt{\pi\varepsilon_0 am}$$ 2 分

4、(1868B35)

解：电偶极子在均匀电场中受力等于零，但受到一力偶矩 $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$

其大小为 $M = pE\sin\theta \approx pE\theta$ 3 分

由转动定律可知，$-pE\theta = J\beta$ （β为角加速度）

即 $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{pE}{J}\theta = 0$$ 3 分

可见，电偶极子将作角谐振动．其角频率为

$$\omega = \sqrt{pE/J}$$ 1 分

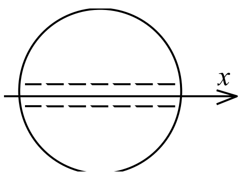
电偶极子从静止出发，转动到第一次使 $\vec{p}$ 与 $\vec{E}$ 方向一致，需用四分之一周期的时间，

即 $$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{J}{pE}}$$ 3 分

5、(1869B40)

解：按高斯定理求得球体内的电场强度分布为

$$E = \rho\, r/3\varepsilon_0$$



如图选 x 轴沿通道方向，原点在球心上，则通道内场强分布为 $E = \rho x/3\varepsilon_0$

电子在通道内任一位置受电场力为

$$f = -eE = -e\rho x/(3\varepsilon_0)$$ 3 分

按牛顿第二定律，其动力学方程为 $-e\rho x/(3\varepsilon_0) = ma$

即 $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{e\rho}{3\varepsilon_0 m}x = 0$$

可见电子将作简谐振动. 2 分

电子从静止出发，由通道口一端运动到另一端需历时半个周期.

$$\omega = \sqrt{e\rho/(3\varepsilon_0 m)}$$

则 $$t = T/2 = \pi/\omega = \pi\sqrt{3\varepsilon_0 m/(e\rho)}$$ 3 分

6、(1871B40)

解：用场强叠加或电势梯度可求出圆环轴线上 x 的场强为

$$E = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

在 $x << R$ 处，场强近似为 $E \approx \dfrac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ 3 分

小珠在该处受到电场力为 $F = \dfrac{-qQx}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -kx$

式中 k 为正值($k = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$)，负号表示小珠受力方向与位移方向相反，

因而小珠作简谐振动． 2 分

由牛顿第二定律，有 $-kx = ma$

得到 $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 2 分

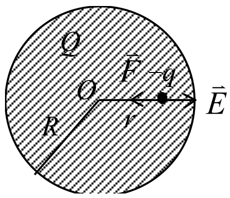
其解为 $x = A\cos(\omega t + \phi)$

由初始条件 $x_0 = b$ 、$\upsilon_0 = 0$ 可知 $A = b$ ，$\phi = 0$

∴ $x = b\cos\sqrt{\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}}\,t$ 3 分

7、（5683B40）

证：由高斯定理求得球内场强为



$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$$

粒子受力： $F = -qE = -\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$

由牛顿第二定律： $F = ma$

∴ $-\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r = m\dfrac{d^2 r}{dt^2}$ ， $\dfrac{d^2 r}{dt^2} + \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 m R^3} r = 0$ 3 分

粒子沿径向作简谐振动，其频率：

$\omega^2 = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}$ ， $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$ 2 分

8、（0583B35）

解：设小磁针的等效磁矩为 $\vec{p}_m$，则小磁针所受力矩为

$M = -p_m B\sin\theta \approx -p_m B\theta$ 1 分

式中 θ 为 $\vec{p}_m$ 与 $\vec{B}$ 间的夹角，负号表示该磁力矩为恢复力矩，由定轴转动定律

$M = J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ 1 分

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{p_m B}{J}\theta$ 1 分

$\omega^2 = \dfrac{p_m B}{J}$， $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{p_m B}}$ 1 分

解出 $p_m = \dfrac{J}{B}(\dfrac{2\pi}{T}) = 2.63\times10^{-2}$ A • m^2 1 分

9、（2236B35）

解： $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ $M = p_m B\sin\theta$ 1 分

$$p_m B\sin\theta = -J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$ 2 分

在微小振动时 $\sin\theta\approx\theta$， $p_m = \pi R^2 I$，代入上式有：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{I\pi R^2 B}{J}\theta = 0$$

∴ $\omega = \frac{\sqrt{I\pi R^2 B}}{\sqrt{J}}$， $T = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{J\pi}{IB}}$ 2 分

10、（2475B40）

解：磁矩 $p_m = IS = I\pi R^2$

受磁力矩 $M = p_m B\sin\theta = I\pi R^2 B\sin\theta$ 2 分

按定轴转动定律 $M = J\beta$

细环以直径为轴转动惯量 $J = mR^2/2$

$$M = mR^2\beta/2 = mR^2\ddot{\theta}/2$$ 2 分

把磁力矩代入转动定律 $mR^2\ddot{\theta}/2 = -I\pi R^2 B\sin\theta$

式中的负号是因为磁力矩总是转向θ变小方向．小扭转时，$\theta<5°$，$\sin\theta=\theta$

即 $\ddot{\theta} = -\frac{2\pi IB}{m}\theta$ 3 分

这是扭转振动微分方程，振动圆频率

$$\omega = \frac{\sqrt{2\pi IB}}{\sqrt{m}}，\quad 周期\quad T = \sqrt{\frac{2\pi m}{IB}}$$

∴ $B = \frac{2\pi m}{IT^2} = \frac{2\pi\times 2\times 10^{-3}}{2\times 1.0^2} = 6.28\times 10^{-3}\ \mathrm{T}$ 3 分

11、（2633B40）

解：设线框边长 l，那么它的转动惯量为

$$J = 2\times\frac{1}{12}\times\frac{m}{4}l^2 + 2\frac{m}{4}(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{6}ml^2$$ 2 分

通电后的磁矩为 $p_m = NI\,l^2$

在磁场中受到的磁力矩为 $M = p_m B\sin\theta$ 2 分

作微小扭转时 $\sin\theta\approx\theta$， $M = p_m B\theta = NI\,l^2 B\theta$ 1 分

由转动定律 $M = J\beta$ 可得， $NI\,l^2 B\theta = -ml^2\ddot{\theta}/6$ 2 分

负号是因为力矩是转向θ 变小的方向．上式表明，线圈是作扭转谐振动，振动圆频率可由下式得出 $\omega^2 = 6NIB/m$

周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{6NIB}}$ 2 分

$= 1.05\ \mathrm{s}$ 1 分

12、（2698B35）

证： $|\vec{M}| = |\vec{p}_m\times\vec{B}| = iSB\sin\theta$ 2 分

由转动定律 $J\ddot{\theta} = -iSB\sin\theta$ 2 分

当θ很小时 $J\ddot{\theta} + iSB\theta = 0$ 1 分

式中 $J = \frac{1}{2}mR^2$， $S = \pi R^2$

∴ $$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} + i\pi R^2 B\theta = 0$$ 1 分

$$\ddot{\theta} + \frac{2i\pi B}{m}\theta = 0 \quad , \qquad \omega^2 = \frac{2i\pi B}{m}$$ 2 分

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2\pi m}{iB}}$$ 2 分

可见若 m 一定线圈摆动的周期与线圈半径无关.

13、(2771C50)

解：当线圈平面从图中位置转过小角度α时，穿过线圈的磁通量为:

$$\Phi = BA\sin\alpha$$

α变化时线圈中感应电动势为 $$= \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BA\cos\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

感应电流 $$i = \frac{}{R} = \frac{BA}{R}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cos\alpha$$ 3 分

磁矩 $$m = iA = \frac{BA^2}{R}\cos\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

所受磁力矩 $$M_m = \frac{B^2A^2}{R}\cos^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$ 3 分

线圈还受到细丝弹性恢复力矩 $M_K = K\alpha$，两者均阻碍线圈运动.

∴ $$\frac{B^2A^2\cos^2\alpha}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + K\alpha = -I\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}$$ 3 分

∵ $\alpha \le \theta \quad \theta \approx 0$ ∴ $\cos\alpha \approx 1$

∴ $$I\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \frac{B^2A^2}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + K\alpha = 0$$

其通解为: $$\alpha = \mathrm{e}^{-\beta t}(A_1\cos rt + A_2\sin rt)$$

其中 $$\beta = \frac{B^2A^2}{2IR} \qquad r = \sqrt{\frac{K}{I} - \beta^2}$$

利用初始条件: $$\alpha\big|_{t=0} = \theta \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$

可得 $A_1 = \theta$， $A_2 = 0$ $\alpha = \theta\,\mathrm{e}^{-\beta t}\cos rt$ 3 分

14、(4545C60)

解：沿管长方向取坐标 x，设平衡位置 $x = 0$，塞子位移为 x 时所受合力为

$$F = \mathrm{d}p \cdot S$$ 1 分

绝热过程 $$pV^{\gamma} = C$$ 1 分

$$\mathrm{d}p \cdot V^{\gamma} + p\gamma V^{\gamma-1}\mathrm{d}V = 0$$

得 $$\mathrm{d}p = -(p\gamma/V)\mathrm{d}V = -(p\gamma/V)Sx$$

∴ $$F = \mathrm{d}p \cdot S = -(p\gamma/V)S^2x$$ 2 分

动力学方程: $$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -(p\gamma/V)S^2x$$ 2 分

即 $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{p\gamma S^2x}{mV} = 0$$

此式为简谐振动的动力学方程式．圆频率为 $\omega = (p\gamma S^2/(mV))^{1/2}$ 2 分

∴　振动周期　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{S}\sqrt{\dfrac{mV}{p\gamma}}$　2 分

15、（0576C55）

解：铝不产生光电效应．钠在光照下，发射光电子，它们的最大初动能为

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2=hc/\lambda-hc/\lambda_m \quad ① \qquad 2\text{ 分}$$

这些光电子聚集在铝膜上，使钠棒和铝膜分别带上正、负电荷 Q，当它们间的电势差

ΔU 达到　$e\Delta U=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2$　②　2 分

时，系统达到平衡．

由高斯定理，忽略边缘效应情况下，可求出钠棒与铝膜间电场

$$E=Q/(2\pi\varepsilon_0 lr) \quad ③ \qquad 1\text{ 分}$$

$$\Delta U=\int_{r_1}^{r_2}E\,\mathrm{d}\,r=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r_2}{r_1}1 \quad ④ \qquad 2\text{ 分}$$

由式①、②、④得　$e\Delta U=e\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2=hc/\lambda-hc/\lambda_m$

∴　$Q=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 lhc}{e\ln(r_2/r_1)}(\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda_m})$　2 分

$=4.01\times10^{-11}$ C　1 分

16、（0577B30）

解：　$e\upsilon B=(m/R)\upsilon^2$　①　1 分

$h\nu=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2+A$　②　1 分

由①　$\upsilon=(eBR)/m$　1 分

代入②　$A=h\nu-\dfrac{1}{2}m\upsilon^2=\dfrac{hc}{\lambda}-\dfrac{(eBR)^2}{2m}$

$=4.66\times10^{-19}$ J $=2.91$ eV　2 分

17、（4249A20）

解：氢原子基态能量　$E_1=-13.6$ eV　1 分

第一激发态能量　$E_2=E_1/n^2=E_1/2^2=-3.4$ eV　1 分

假设温度为 T，则　$\overline{w}=(3/2)kT$　1 分

据题意　$\overline{w}=E_2-E_1$　1 分

$T=\dfrac{2(E_2-E_1)}{3k}=7.88\times10^4$ K　1 分

18、（4447A20）

解：光子的能量　$E=h\nu=hc/\lambda$　1 分

若　$\overline{w}=\dfrac{3}{2}kT=E$　1 分

则　$T=2E/(3K)=2hc/(3k\lambda)=2.4\times10^4$ K　3 分

19、（4448B25）

解：当加热到温度 T 时，氢原子的平均动能　$E=\dfrac{3}{2}kT$

碰撞时可交出动能 $\frac{1}{2}E=\frac{3}{2}kT\times\frac{1}{2}$ 2 分

因此用加热的方式使之激发，则要求温度 T_1 满足

$$\frac{1}{2}\frac{3}{2}kT_1\ge E_2-E_1$$

式中， $E_1=-13.6$ eV ， $E_2=E_1/2^2=-3.4$ eV

$$T_1\ge(4/3)(E_2-E_1)/k$$

即 $T_1\ge1.6\times10^5$ K 3 分

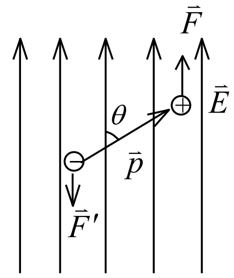
四、证明题：

1、(1550B35)

证：当电矩 $\vec{p}$ 与场强 $\vec{E}$ 夹角为 θ 时，电偶极子受到一个力偶矩 $\vec{M}$ 作用，其大小为

$$M=qEl\sin\theta=pE\sin\theta\approx pE\theta$$ 3 分

此力偶矩是与 θ 角反向的，是回复力矩，按转动定律得：



$$-pE\theta=I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

即 $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{pE}{I}\theta=0$$

令 $$\omega^2=pE/I$$

则 $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0$$ 5 分

此即角谐振动的微分方程．其振动频率为

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}$$ 2 分

2、(2477C50)

证： 沿径向单位长度有 n 匝导线， $n=N/(R_2-R_1)$

故 dr 宽度有电流 $\mathrm{d}I=nI\,\mathrm{d}r$

它的磁矩 $$\mathrm{d}p_m=\pi nIr^2\,\mathrm{d}r=\pi r^2\frac{NI}{R_2-R_1}\mathrm{d}r$$ 2 分

总磁矩 $$P_m=\int\mathrm{d}p_m=\frac{\pi NI}{R_2-R_1}\int_{R_1}^{R_2}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{\pi NI}{R_2-R_1}\frac{1}{3}(R_2^3-R_1^3)$$

$$=\frac{\pi NI}{3}(R_2^2+R_1R_2+R_1^2)$$ 2 分

在磁场 B 中受的磁力矩 $M=P_mB\sin\theta$ 2 分

由转动定律 $M=J\beta=J\ddot{\theta}$ 即 $J\ddot{\theta}=-P_mB\sin\theta$

式中负号是因为力矩转向 θ 变小的方向．在小角度情况下 $\sin\theta=\theta$

$$\ddot{\theta}=-\frac{P_mB}{J}\theta$$ 2 分

这是振动微分方程, 所以说线圈作扭转简谐振动．其振动圆频率为

$$\omega=\frac{\sqrt{P_mB}}{\sqrt{J}}$$ 2 分

振动的振幅 θ_0 和初相 ϕ_0 由初始条件决定．

$$\theta = \theta_0 \cos(\frac{\sqrt{P_m B}}{\sqrt{J}} t + \phi_0)$$ 2 分

3、（4238C60）

证：活塞离开平衡位置时，所受的回复力 $F = -\Delta p \bullet A$ 2 分

由于瓶内气体是作绝热过程，故有 $pV^{\gamma} = C$ 2 分

两边微分： $V^{\gamma}\Delta p + p\gamma V^{\gamma-1}\Delta V = 0$

∴ $\Delta p = -\gamma p\, \Delta V / V$

$= \gamma p A y / V$ （y 为活塞位移, $\Delta V = -Ay$） 2 分

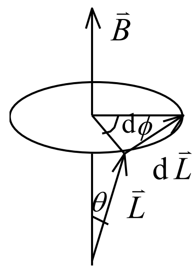
故 $F = -\gamma p A^2 y / V$ 2 分

即回复力 F 与位移 y 大小成正比而反向，故活塞作简谐振动． 2 分

4、（5308C65）

证：原子磁矩在外磁场中所受的力矩为

$$M = p_m B \sin\theta = \frac{e}{2m_e} LB \sin\theta$$ 2 分



在力矩作用下，角动量将发生改变.根据角动量定理有

$$M = \left|\frac{\mathrm{d}\,\vec{L}}{\mathrm{d}\,t}\right| = L\sin\theta \frac{\mathrm{d}\,\phi}{\mathrm{d}\,t} = L\sin\theta \cdot \omega$$ 4 分

由以上两式有 $\omega = \dfrac{eB}{2m_e}$ 2 分