第1章　习题解答

1. 判断下列语句是否是命题,并对命题确定其真值.

(1) 火星上有生命存在.

(2) 12 是质数.

(3) 香山比华山高.

(4) $x+y=2$.

(5) 这盆茉莉花真香!

(6) 结果对吗?

(7) 这句话是错的.

(8) 假如明天是星期天,那么学校放假.

解:

(1) 是命题.

(2) 是命题,真值为 F.

(3) 是命题,真值为 F.

(4) 不是命题

含有命题变项.

(5) 感叹句,不是命题.

(6) 疑问句,不是命题.

(7) 不是命题.

如果此句为真,说明这句话确实是错的,因而这句话应为假.若此句为假,可推出这句话所陈述的内容是错的,因而这句话应为真.像这样由假推出真,由真推出假,真值无法确定的句子称为悖论,悖论不是命题.

(8) 是命题.

2. P 表示今天很冷,Q 表示正在下雪.

(1) 将下列命题符号化:

　如果正在下雪,那么今天很冷.

　今天很冷当且仅当正在下雪.

正在下雪的必要条件是今天很冷.

(2) 用自然语句叙述下列公式:

$$\neg(P \wedge Q), \neg P \vee \neg Q, P \to Q, \neg P \vee Q, \neg\neg P, \neg P \leftrightarrow Q.$$

解:

(1) $Q \to P$

$P \leftrightarrow Q$

$Q \to P$

(2) 今天不是既很冷又下雪.

今天不很冷或者没有下雪.

如果今天很冷,那么正在下雪.

今天不很冷或者正在下雪.

今天并非不很冷.

今天不是很冷当且仅当正在下雪.

注意:“或”与“异或”是有区别的.

3. 对下列公式直观叙述在什么样的解释下为真,并列写出真值表来验证.

(1) $\neg(P \vee Q), \neg P \wedge \neg Q, \neg(P \wedge Q)$.

(2) $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q), (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

(3) $(P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)$.

(4) $P \to Q, \neg Q \to \neg P, \neg P \to \neg Q, Q \to P$.

(5) $P \to (Q \to R), P \wedge Q \to R$.

解:

(1)

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T

(2)

P	Q	$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

(3)

P	Q	$(P\to Q)\wedge\neg(P\leftrightarrow Q)$	P	Q	$(P\to Q)\wedge\neg(P\leftrightarrow Q)$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	F

(4)

P	Q	$P\to Q$	$\neg Q\to\neg P$	$\neg P\to\neg Q$	$Q\to P$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T

(5)

P	Q	R	$P\to(Q\to R)$	$P\wedge Q\to R$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

4. 下列公式哪个是重言式、永假式和可满足的，并用代入规则(对重言式)或真值表来验证.

(1) $P\to P$.

(2) $\neg((P\vee Q)\to(Q\vee P))$.

(3) $(Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R))$.

(4) $(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$.

(5) $(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$.

(6) $(P\wedge Q)\to(P\vee Q)$.

解：

(1) 重言式

P	$P\to P$	P	$P\to P$
T	T	F	T

(2) 永假式

由上题得知，$A \to A$ 为重言式，作代入$\frac{A}{P \vee Q}$，便知$((P \vee Q) \to (Q \vee P))$为重言式. 从而，$\neg((P \vee Q) \to (Q \vee P))$为永假式.

P	Q	$\neg((P \vee Q) \to (Q \vee P))$	P	Q	$\neg((P \vee Q) \to (Q \vee P))$
T	T	F	F	T	F
T	F	F	F	F	F

(3) 重言式

P	Q	R	$(Q \to R) \to ((P \vee Q) \to (P \vee R))$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

$$
\begin{aligned}
& (Q \to R) \to ((P \vee Q) \to (P \vee R)) \\
\Leftrightarrow & \neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee R)) \\
\Leftrightarrow & \neg(\neg Q \vee R) \vee ((\neg P \wedge \neg Q) \vee P \vee R) \\
\Leftrightarrow & \neg(\neg Q \vee R) \vee ((\neg Q \vee P) \vee R) \\
\Leftrightarrow & \neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg Q \vee P) \vee R \\
\Leftrightarrow & \mathrm{T} \vee R \\
\Leftrightarrow & \mathrm{T}
\end{aligned}
$$

从而，$(Q \to R) \to ((P \vee Q) \to (P \vee R))$为重言式.

(4) 重言式

P	Q	R	$(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

由(3)解得知，$(Q \to R) \to ((S \vee Q) \to (S \vee R))$为重言式，作代入$\frac{S}{\neg P}$，得

$$(Q\to R)\to((\neg P\vee Q)\to(\neg P\vee R))$$
$$\Leftrightarrow(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$$

$(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$为重言式

(5) 重言式

P	Q	$(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$	P	Q	$(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$
T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T

$$(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)\Leftrightarrow(P\to Q)\to(P\to Q)$$

由(1)解得知,$A\to A$ 为重言式,作代入$\dfrac{A}{P\to Q}$,便知$(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$为重言式.

(6) 重言式

P	Q	$(P\wedge Q)\to(P\vee Q)$	P	Q	$(P\wedge Q)\to(P\vee Q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T

5. 形式化下列自然语句:

(1) 他个子高而且很胖.

(2) 他个子高但不很胖.

(3) 并非"他个子高或很胖".

(4) 他个子不高也不胖.

(5) 他个子高或者他个子矮而很胖.

(6) 他个子矮或他不很胖都是不对的.

(7) 如果水是清的,那么或者张三能见到池底或者他是个近视眼.

(8) 如果嫦娥是虚构的,而如果圣诞老人也是虚构的,那么许多孩子受骗了.

解:

(1) 令 P 表示"他个子高",Q 表示"他很胖",于是可表示为 $P\wedge Q$.

(2) P,Q 含义同(1),可表示为 $P\wedge\neg Q$.

(3) P,Q 含义同(1),可表示为$\neg(P\vee Q)$.

(4) P,Q 含义同(1),可表示为$\neg P\wedge\neg Q$.

(5) P,Q 含义同(1),可表示为 $P\vee(\neg P\wedge Q)$或 $P\bar{\vee}(\neg P\wedge Q)$.

(6) P,Q 含义同(1),可表示为$\neg(\neg P\vee\neg Q)$.

(7) 令 P 表示"水是清的",Q 表示"张三能见到池底",R 表示"张三是个近视眼",于是可表示为 $P\to(Q\bar{\vee}R)$.

(8) 令 P 表示"嫦娥是虚构的",Q 表示"圣诞老人是虚构的",R 表示"许多孩子受骗了",于是可表示为$(P\wedge Q)\to R$ 或 $P\to(Q\to R)$.

注意:"或"与"异或"是有区别的.

6. 将下列公式写成波兰式和逆波兰式.

(1) $P \to Q \vee R \vee S$

(2) $P \wedge \neg R \leftrightarrow P \vee Q$

(3) $\neg\neg P \vee (W \wedge R) \vee \neg Q$

解:

(1) 波兰式：$\to P \vee \vee QRS$　　逆波兰式：$PQR \vee S \vee \to$

(2) 波兰式：$\leftrightarrow \wedge P \neg R \vee PQ$　　逆波兰式：$PR \neg \wedge PQ \vee \leftrightarrow$

(3) 波兰式：$\vee \vee \neg\neg P \wedge WR \neg Q$　　逆波兰式：$P \neg\neg WR \wedge \vee Q \neg \vee$

第2章 习题解答

1. 证明下列等值公式.

(1) $P\to(Q\wedge R)=(P\to Q)\wedge(P\to R)$

(2) $P\to Q=\neg Q\to\neg P$

(3) $((P\to\neg Q)\to(Q\to\neg P))\wedge R=R$

(4) $(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P))=P\wedge\neg P$

(5) $P\to(Q\to R)=(P\wedge Q)\to R$

(6) $\neg(P\leftrightarrow Q)=(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

证明:

(1)

$$P\to(Q\wedge R)=\neg P\vee(Q\wedge R)=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)=(P\to Q)\wedge(P\to R)$$

P	Q	R	$P\to(Q\wedge R)$	$(P\to Q)\wedge(P\to R)$
F	F	F	T	T
F	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	F	T	F	F
T	T	F	F	F
T	T	T	T	T

(2)

$$P\to Q=\neg P\vee Q=\neg\neg Q\vee\neg P=\neg Q\to\neg P$$

P	Q	$P\to Q$	$\neg Q\to\neg P$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	T

(3)

$$((P\to\neg Q)\to(Q\to\neg P))\wedge R=((\neg P\vee\neg Q)\to(\neg Q\vee\neg P))\wedge R=\mathrm{T}\wedge R=R$$

P	Q	R	$((P\to\neg Q)\to(Q\to\neg P))\wedge R$
F	F	F	F
F	F	T	T
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	T
T	T	F	F
T	T	T	T

(4)

$$
\begin{aligned}
&(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P))\\
=&(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow\neg\neg((P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P))\\
=&(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P))\\
=&(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)=\mathrm{F}=P\wedge\neg P
\end{aligned}
$$

P	Q	$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P))$	$P\wedge\neg P$
F	F	F	F
F	T	F	F
T	F	F	F
T	T	F	F

(5)

$$P\to(Q\to R)=\neg P\vee(\neg Q\vee R)=(\neg P\vee\neg Q)\vee R=\neg(P\wedge Q)\vee R=(P\wedge Q)\to R$$

P	Q	R	$P\to(Q\to R)$	$(P\wedge Q)\to R$
F	F	F	T	T
F	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	F	F
T	T	T	T	T

(6)

$$\neg(P\leftrightarrow Q)=\neg((\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q))=(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$$

(2) 用 $\downarrow$ 表示

$$\neg P = \neg(P \vee P) = P \downarrow P$$

$$P \wedge Q = \neg(\neg P \vee \neg Q) = (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$$

$$P \vee Q = \neg(\neg(P \vee Q)) = \neg(P \downarrow Q) = (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$$

$$P \to Q = \neg P \vee Q = ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &= (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) = \neg(\neg(P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q)) \\ &= \neg((P \downarrow (\neg Q)) \vee ((\neg P) \downarrow Q)) \\ &= ((P \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) = \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(P \vee Q) \\ &= (\neg P \downarrow \neg Q) \vee (P \downarrow Q) = ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \vee (P \downarrow Q) \\ &= (((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow (P \downarrow Q)) \downarrow (((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow (P \downarrow Q)) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &= (P \to Q) \wedge (Q \to P) \\ &= ((\neg P \downarrow Q) \downarrow (\neg P \downarrow Q)) \wedge ((\neg Q \downarrow P) \downarrow (\neg Q \downarrow P)) \\ &= ((((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)) \downarrow (((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q))) \\ &\quad \downarrow ((((Q \downarrow Q) \downarrow P) \downarrow ((Q \downarrow Q) \downarrow P)) \downarrow (((Q \downarrow Q) \downarrow P) \downarrow ((Q \downarrow Q) \downarrow P))) \end{aligned}$$

4. 证明

(1) $A \to B$ 与 $B^* \to A^*$ 同永真、同可满足

(2) $A \leftrightarrow B$ 与 $A^* \leftrightarrow B^*$ 同永真、同可满足

证明:

(1) 若 $A \to B$ 永真,则 $\neg B \to \neg A$ 永真.

由 $\neg A = A^{*-}$,$\neg B = B^{*-}$,得 $B^{*-} \to A^{*-}$ 永真.

即 $B^* \to A^*$ 永真.

反之,若 $B^* \to A^*$ 永真,则 $(A^*)^* \to (B^*)^*$ 永真.

由 $A = (A^*)^*$,$B = (B^*)^*$,得 $A \to B$ 永真.

因此,$A \to B$ 与 $B^* \to A^*$ 同永真.

显然,$A \to B$ 与 $B^* \to A^*$ 同可满足.

(2) 若 $A \leftrightarrow B$ 永真,则 $\neg A \leftrightarrow \neg B$ 永真.

由 $\neg A = A^{*-}$,$\neg B = B^{*-}$,得 $A^{*-} \leftrightarrow B^{*-}$ 永真.

即 $A^* \leftrightarrow B^*$ 永真.

反之,若 $B^* \leftrightarrow A^*$ 永真,则 $(A^*)^* \leftrightarrow (B^*)^*$ 永真.

由 $A = (A^*)^*$,$B = (B^*)^*$,得 $A \leftrightarrow B$ 永真.

因此,$A \leftrightarrow B$ 与 $A^* \leftrightarrow B^*$ 同永真.

显然,$A \leftrightarrow B$ 与 $A^* \leftrightarrow B^*$ 同可满足.

5. 给出下列各公式的合取范式、析取范式、主合取范式和主析取范式,并给出所有使公式为真的解释.

(1) $P \vee \neg P$

(2) $P \wedge \neg P$

(3) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$

(4) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

(5) $P \wedge (Q \vee (\neg P \wedge R))$

(6) $P \leftrightarrow (Q \to (Q \to P))$

(7) $P \to (Q \wedge (\neg P \leftrightarrow Q))$

(8) $(P \to Q) \vee ((Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P))$

解:

(1) 合取范式:$P \vee \neg P$

析取范式: $P \vee \neg P$

主合取范式:空

主析取范式: $P \vee \neg P = \vee_{0,1}$

在任何解释下该式均为真.

(2) 合取范式: $P \wedge \neg P$

析取范式: $P \wedge \neg P$

主合取范式: $P \wedge \neg P = \wedge_{0,1}$

主析取范式:空

在任何解释下该式都不为真.

(3) 合取范式:

$$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg\neg Q)$$

$$= (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$$

$$= P \vee Q$$

析取范式:

$$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$$= (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

主合取范式: $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = P \vee Q = \wedge_3$

主析取范式:

$$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) = \vee_{1,2,3}$$

在 $\begin{cases} P=\mathrm{T} \\ Q=\mathrm{T} \end{cases}$, $\begin{cases} P=\mathrm{T} \\ Q=\mathrm{F} \end{cases}$, $\begin{cases} P=\mathrm{F} \\ Q=\mathrm{T} \end{cases}$ 三种解释下该式为真.

(4) 合取范式:

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$= (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee Q) \wedge (Q \vee R)$$

$$= (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge Q \wedge (Q \vee R)$$

$$= (P \vee R) \wedge Q$$

析取范式: $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

主合取范式: $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) = \vee_{3,6,7} = \wedge_{2,3,5,6,7}$

主析取范式:

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\
=&(P \wedge Q) \wedge (R \vee \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\
=&(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\
=&\vee_{3,6,7}
\end{aligned}
$$

在 $\begin{cases}P=T\\Q=T\\R=T\end{cases}$，$\begin{cases}P=T\\Q=T\\R=F\end{cases}$，$\begin{cases}P=F\\Q-T\\R=T\end{cases}$ 三种解释下该式为真.

(5) 合取范式：

$$P\wedge(Q\vee(\neg P\wedge R))=P\wedge(\underline{Q\vee\neg P})\wedge(Q\vee R)=P\wedge \underline{Q}\wedge(Q\vee R)=P\wedge Q$$

析取范式：$P\wedge(Q\vee(\neg P\wedge R))=P\wedge Q=(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)$

主合取范式：$P\wedge(Q\vee(\neg P\wedge R))=\vee_{6,7}=\wedge_{2,3,4,5,6,7}$

主析取范式：$P\wedge(Q\vee(\neg P\wedge R))=P\wedge Q=(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)=\vee_{6,7}$

在 $\begin{cases}P=T\\Q=T\\R=T\end{cases}$，$\begin{cases}P=T\\Q=T\\R=F\end{cases}$ 两种解释下该式为真.

(6) 合取范式：$P\leftrightarrow(Q\rightarrow(Q\rightarrow P))=P\vee Q$

析取范式：

$$
\begin{aligned}
&P\leftrightarrow(Q\rightarrow(Q\rightarrow P)) \\
=&(P \wedge (\neg Q \vee (\neg Q \vee P))) \vee (\neg P \wedge \neg(\neg Q \vee (\neg Q \vee P))) \\
=&(P \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (\neg P \wedge \neg(\neg Q \vee P)) \\
=&(P \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg P) \\
=&(P \wedge \neg Q) \vee P \vee (\neg P \wedge Q) \\
=&(P \wedge \neg Q) \vee P \vee Q \\
=&P \vee Q
\end{aligned}
$$

主合取范式：$P\leftrightarrow(Q\rightarrow(Q\rightarrow P))=P\vee Q=\wedge_3$

主析取范式：$P\leftrightarrow(Q\rightarrow(Q\rightarrow P))=\wedge_3=\vee_{1,2,3}$

在 $\begin{cases}P=T\\Q=T\end{cases}$，$\begin{cases}P=T\\Q=F\end{cases}$，$\begin{cases}P=F\\Q=T\end{cases}$ 三种解释下该式为真.

(7) 合取范式：$P\rightarrow(Q\wedge(\neg P\leftrightarrow Q))=\neg P$

析取范式：

$$
\begin{aligned}
&P \rightarrow (Q \wedge (\neg P\leftrightarrow Q)) \\
=&\neg P \vee (Q \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) = \neg P \vee (Q \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \\
=&\neg P \vee (Q \wedge \neg P) = \neg P
\end{aligned}
$$

主合取范式：$P\rightarrow(Q\wedge(\neg P\leftrightarrow Q))=\vee_{0,1}=\wedge_{0,1}$

主析取范式：$P\rightarrow(Q\wedge(\neg P\leftrightarrow Q))=\neg P=\vee_{0,1}$

在 $\begin{cases}P=F\\Q=T\end{cases}$，$\begin{cases}P=F\\Q=F\end{cases}$ 两种解释下该式为真.

(8) $(P\rightarrow Q)\vee(Q\wedge P)\leftrightarrow(Q\leftrightarrow\neg P)$

合取范式：$(P\rightarrow Q)\vee(Q\wedge P)\leftrightarrow(Q\leftrightarrow\neg P)=\neg P\vee Q$

析取范式：

$$
\begin{aligned}
&(P \to Q) \vee (Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P) \\
=&(P \to Q) \vee (Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P) \\
=&(\neg P \vee Q) \vee ((Q \wedge P) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee P)) \\
&\vee (\neg (Q \wedge P) \wedge \neg ((Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge P))) \\
=&\neg P \vee Q \vee (Q \wedge P \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee ((\neg Q \vee \neg P) \\
&\wedge (\neg Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg P)) \\
=&\neg P \vee Q \vee ((\neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg P)) \\
=&\neg P \vee Q
\end{aligned}
$$

主合取范式：$(P \to Q) \vee (Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P) = \neg P \vee Q = \wedge_1$

主析取范式：$(P \to Q) \vee (Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P) = \wedge_1 = \vee_{0,1,3}$

在 $\begin{cases} P=\mathrm{T} \\ Q=\mathrm{T} \end{cases}$, $\begin{cases} P=\mathrm{F} \\ Q=\mathrm{T} \end{cases}$, $\begin{cases} P=\mathrm{F} \\ Q=\mathrm{F} \end{cases}$ 三种解释下该式为真.

注意：合取范式和析取范式不唯一.

6. 分别以 $A \to B$ 永真，$A \wedge \neg B$ 永假以及解释法来证明下列各重言蕴涵式 $A \Rightarrow B$.

(1) $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \to Q)$

(2) $(P \to (Q \to R)) \Rightarrow (P \to Q) \to (P \to R)$

(3) $(P \to Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$

(4) $(P \wedge Q) \to R \Rightarrow P \to (Q \to R)$

证明：

(1)

① $A \to B$ 永真法

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \to (P \to Q) \\
=&\neg (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q) = (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee Q) \\
=&\neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee Q = \mathrm{T}
\end{aligned}
$$

② $A \wedge \neg B$ 永假法

$$(P \wedge Q) \wedge \neg (P \to Q) = (P \wedge Q) \wedge (P \wedge \neg Q) = P \wedge Q \wedge P \wedge \neg Q = \mathrm{F}$$

③ 解释法

设 $P \wedge Q = \mathrm{T}$，从而有 $P = \mathrm{T}, Q = \mathrm{T}$

因此，$P \to Q = \mathrm{T}$，故该蕴涵式成立.

(2)

① $A \to B$ 永真法

$$
\begin{aligned}
&(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)) \\
=&(P \to (Q \to R)) \to (P \to (Q \to R)) \\
=&\mathrm{T}
\end{aligned}
$$

② $A \wedge \neg B$ 永假法

$$
\begin{aligned}
&(P \to (Q \to R)) \wedge \neg ((P \to Q) \to (P \to R)) \\
=&(P \to (Q \to R)) \wedge \neg (P \to (Q \to R)) = \mathrm{F}
\end{aligned}
$$

③ 解释法

设 $P\to(Q\to R)=\mathrm{T}$,

一方面,若 $P=\mathrm{T}$,必有 $Q\to R=\mathrm{T}$,

若 $Q=\mathrm{T}$,必有 $R=\mathrm{T}$,

从而 $P\to Q=\mathrm{T}, P\to R=\mathrm{T}$,

因此,$(P\to Q)\to(P\to R)=\mathrm{T}$.

若 $Q=\mathrm{F}$,则 $P\to Q=\mathrm{F}$,

因此,$(P\to Q)\to(P\to R)=\mathrm{T}$.

另一方面,若 $P=\mathrm{F}$,则 $P\to Q=\mathrm{T}, P\to R=\mathrm{T}$,

因此,$(P\to Q)\to(P\to R)=\mathrm{T}$.

故该蕴涵式成立.

(3)

① $A\to B$ 永真法

$$\begin{aligned}(P\to Q)\wedge\neg Q\to\neg P &=\neg((\neg P\vee Q)\wedge\neg Q)\vee\neg P=(P\wedge\neg Q)\vee Q\vee\neg P\\ &=P\vee Q\vee\neg P=\mathrm{T}\end{aligned}$$

② $A\wedge\neg B$ 永假法

$$(P\to Q)\wedge\neg Q\wedge\neg(\neg P)=(\neg P\vee Q)\wedge\neg Q\wedge P=\neg P\wedge\neg Q\wedge P=\mathrm{F}$$

③ 解释法

设 $(P\to Q)\wedge\neg Q=\mathrm{T}$,从而有 $P\to Q=\mathrm{T}, Q=\mathrm{F}$

故 $P=\mathrm{F}$,因此 $\neg P=\mathrm{T}$. 故该蕴涵式成立.

(4)

① $A\to B$ 永真法

$$\begin{aligned}&(P\wedge Q)\to R\to(P\to(Q\to R))\\ =&(\neg(P\wedge Q)\vee R)\to(P\to(\neg Q\vee R))\\ =&(\neg P\vee\neg Q\vee R)\to(\neg P\vee\neg Q\vee R)\\ =&\mathrm{T}\end{aligned}$$

② $A\wedge\neg B$ 永假法

$$\begin{aligned}&(P\wedge Q)\to R\wedge\neg(P\to(Q\to R))\\ =&(\neg(P\wedge Q)\vee R)\wedge\neg(P\to(\neg Q\vee R))\\ =&(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge\neg(\neg P\vee\neg Q\vee R)\\ =&\mathrm{F}\end{aligned}$$

③ 解释法

设 $(P\wedge Q)\to R=\mathrm{T}$,

若 $R=\mathrm{T}$,则 $Q\to R=\mathrm{T}$,从而 $P\to(Q\to R)=\mathrm{T}$.

若 $R=\mathrm{F}$,则 $P\wedge Q=\mathrm{F}$,

若 $P=\mathrm{F}$,则 $P\to(Q\to R)=\mathrm{T}$.

若 $Q=\mathrm{F}$,则 $Q\to R=\mathrm{T}$,从而 $P\to(Q\to R)=\mathrm{T}$.

故该蕴涵式成立.

7. 判断下列推理式是否正确?

(1) $(P\to Q)\Rightarrow((P\land R)\to Q)$

(2) $(P\to Q)\Rightarrow(P\to(Q\lor R))$

(3) $P\Rightarrow\neg P\lor Q$

(4) $(P\lor Q)\land(P\to Q)\Rightarrow(Q\to P)$

(5) $P\Rightarrow(\neg Q\land P)\to R$

(6) $(P\to Q)\land(Q\to P)\Rightarrow P\lor Q$

(7) $(P\lor Q)\to(P\lor\neg Q)\Rightarrow\neg P\lor Q$

(8) $(P\land Q)\lor(P\to Q)\Rightarrow P\to Q$

(9) $(P\land Q)\to R\Rightarrow(P\to R)\land(Q\to R)$

(10) $((P\land Q)\to R)\land((P\lor Q)\to\neg R)\Rightarrow P\land Q\land R$

(11) $P\to Q\Rightarrow(P\to R)\to(Q\to R)$

(12) $(P\lor Q\lor R)\Rightarrow\neg P\to((Q\lor R)\land\neg P)$

(13) $\neg(P\to Q)\land(Q\to P)\Rightarrow P\land\neg Q$

(14) $(P\to Q)\to(Q\to R)\Rightarrow(R\to P)\to(Q\to P)$

(15) $(P\to Q)\land(R\to Q)\land(S\to Q)\Rightarrow(P\land R\land\neg S\to Q)$

证明:

(1) 正确

$$
\begin{aligned}
&(P\to Q)\to((P\land R)\to Q)\\
&=(P\to Q)\to(R\to(P\to Q))=R\to((P\to Q)\to(P\to Q))\\
&=R\to \mathrm{T}=\mathrm{T}
\end{aligned}
$$

(2) 正确

$$
\begin{aligned}
&(P\to Q)\to(P\to(Q\lor R))\\
&=(P\to Q)\to(\neg P\lor(Q\lor R))=(P\to Q)\to((P\to Q)\lor R)\\
&=\mathrm{T}
\end{aligned}
$$

(3) 不正确

$$P\to(\neg P\lor Q)=P\to(P\to Q)=P\to Q\neq \mathrm{T}$$

(4) 不正确

$$
\begin{aligned}
((P\lor Q)\land(P\to Q))\to(Q\to P)&=(\neg P\land\neg Q)\lor(P\land\neg Q)\lor(\neg Q\lor P)\\
&=P\lor\neg Q\neq \mathrm{T}
\end{aligned}
$$

(5) 不正确

$$P\to((\neg Q\land P)\to R)=\neg P\lor(\neg(\neg Q\land P)\lor R)=\neg P\lor Q\lor R\neq \mathrm{T}$$

(6) 不正确

$$
\begin{aligned}
&((P\to Q)\land(Q\to P))\to(P\lor Q)\\
&=\neg((\neg P\lor Q)\land(\neg Q\lor P))\lor(P\lor Q)\\
&=(P\land\neg Q)\lor(Q\land\neg P)\lor P\lor Q\\
&=P\lor Q\neq \mathrm{T}
\end{aligned}
$$

(7) 不正确

$$((P \vee Q) \to (P \vee \neg Q)) \to (\neg P \vee Q)$$
$$= \neg(\neg(P \vee Q) \vee (P \vee \neg Q)) \vee (\neg P \vee Q)$$
$$= (P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q)$$
$$= (\neg P \wedge Q) \vee \neg P \vee Q$$
$$= \neg P \vee Q \neq \mathrm{T}$$

(8) 正确

$$((P \wedge Q) \vee (P \to Q)) \to (P \to Q)$$
$$= ((P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q) \wedge P) \to Q = ((P \wedge Q) \vee \neg P \vee Q \vee P) \to Q$$
$$= (P \wedge Q) \to Q = \mathrm{T}$$

(9) 不正确

$$(P \wedge Q \to R) \to ((P \to R) \wedge (Q \to R)) = ((P \wedge Q) \to R) \to ((P \vee Q) \to R)$$

当 $P=\mathrm{T}, Q=\mathrm{F}, R=\mathrm{F}$，有 $(P \wedge Q) \to R = \mathrm{T}$，$(P \vee Q) \to R = \mathrm{F}$.

因此，上式不永真.

(10) 不正确

$$(((P \wedge Q) \to R) \wedge ((P \vee Q) \to \neg R)) \to (P \wedge Q \wedge R)$$
$$= \neg((\neg(P \wedge Q) \vee R) \wedge (\neg(P \vee Q) \vee \neg R)) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$
$$= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$
$$= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$
$$= P \wedge (Q \vee R) \vee (Q \wedge R)$$

当 $P=\mathrm{F}, Q=\mathrm{F}$，上式为 F，不永真.

(11) 不正确

$$(P \to Q) \to ((P \to R) \to (Q \to R))$$
$$= \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \to ((P \to R) \to R))$$
$$= (P \wedge \neg Q) \vee \neg Q \vee P \vee R$$
$$= P \vee \neg Q \vee R \neq \mathrm{T}$$

(12) 正确

$$(P \vee Q \vee R) \to (\neg P \to ((Q \vee R) \wedge \neg P))$$
$$= (P \vee Q \vee R) \to (P \vee ((Q \vee R) \wedge \neg P))$$
$$= (P \vee Q \vee R) \to (P \vee Q \vee R)$$
$$= \mathrm{T}$$

(13) 正确

$$(\neg(P \to Q) \wedge (Q \to P)) \to (P \wedge \neg Q)$$
$$= (P \wedge \neg Q \wedge (\neg Q \vee P)) \to (P \wedge \neg Q) = (P \wedge \neg Q) \to (P \wedge \neg Q)$$
$$= \mathrm{T}$$

(14) 正确

$$((P \to Q) \to (Q \to R)) \to ((R \to P) \to (Q \to P))$$
$$= (\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg Q \vee R)) \to (\neg(\neg R \vee P) \vee (\neg Q \vee P))$$
$$= ((P \wedge \neg Q) \vee \neg Q \vee R) \to ((R \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee P)$$
$$= (\neg Q \vee R) \to (\neg Q \vee R \vee P) = \mathrm{T}$$

(15) 正确

$$((P \to Q) \wedge (R \to Q) \wedge (S \to Q)) \to (P \wedge R \wedge \neg S \to Q)$$
$$=((P \vee R \vee S) \to Q) \to (P \wedge R \wedge \neg S \to Q)$$
$$=(\neg(P \vee R \vee S) \vee Q) \to (\neg(P \wedge R \wedge \neg S) \vee Q)$$
$$=((P \vee R \vee S) \wedge \neg Q) \vee \neg P \vee \neg R \vee S \vee Q$$
$$=(P \vee R \vee S \vee Q) \vee \neg P \vee \neg R \vee S$$
$$=T$$

8. 使用推理规则证明

(1) $P \vee Q, P \to S, Q \to R \Rightarrow S \vee R$

(2) $\neg P \vee Q, \neg Q \vee R, R \to S \Rightarrow P \to S$

(3) $P \to (Q \to R), \neg S \vee P, Q \Rightarrow S \to R$

(4) $P \vee Q \to R \wedge S, S \vee E \to U \Rightarrow P \to U$

(5) $\neg R \vee S, S \to Q, \neg Q \Rightarrow Q \leftrightarrow R$

(6) $\neg Q \vee S, (E \to \neg U) \to \neg S \Rightarrow Q \to E$

证明：

(1) $P \vee Q, P \to S, Q \to R \Rightarrow S \vee R$

① $P \vee Q$	前提引入
② $\neg P \to Q$	①置换
③ $Q \to R$	前提引入
④ $\neg P \to R$	②③三段论
⑤ $\neg R \to P$	④置换
⑥ $P \to S$	前提引入
⑦ $\neg R \to S$	⑤⑥三段论
⑧ $S \vee R$	⑦置换

(2) $\neg P \vee Q, \neg Q \vee R, R \to S \Rightarrow P \to S$

① $\neg P \vee Q$	前提引入
② $P \to Q$	①置换
③ $\neg Q \vee R$	前提引入
④ $Q \to R$	③置换
⑤ $P \to R$	②④三段论
⑥ $R \to S$	前提引入
⑦ $P \to S$	⑤⑥三段论

(3) $P \to (Q \to R), \neg S \vee P, Q \Rightarrow S \to R$

① $P \to (Q \to R)$	前提引入
② $Q \to (P \to R)$	①置换
③ Q	前提引入
④ $P \to R$	②③分离
⑤ $\neg S \vee P$	前提引入

⑥ $S \to P$ ⑤置换

⑦ $S \to R$ ④⑥三段论

(4) $P \vee Q \to R \wedge S, S \vee E \to U \Rightarrow P \to U$

① $P \vee Q \to R \wedge S$ 前提引入

② P 附加前提引入

③ $R \wedge S$ ①②分离

④ S ③

⑤ $S \vee E \to U$ 前提引入

⑥ U ④⑤分离

⑦ $P \to U$ 条件证明规则

(5) $\neg R \vee S, S \to Q, \neg Q \Rightarrow Q \leftrightarrow R$

① $S \to Q$ 前提引入

② $\neg Q \to \neg S$ ①置换

③ $\neg Q$ 前提引入

④ $\neg S$ ②③分离

⑤ $\neg R \vee S$ $R \to S$ 前提引入

⑥ $\neg S \to \neg R$ ① ⑤置换

⑦ $\neg R$ ④⑥分离

⑧ $Q \leftrightarrow R$ ④⑦

(6) $\neg Q \vee S, (E \to \neg U) \to \neg S \Rightarrow Q \to E$

① $\neg Q \vee S$ 前提引入

② $Q \to S$ ①置换

③ $(E \to \neg U) \to \neg S$ 前提引入

④ $S \to (E \wedge U)$ ③置换

⑤ $Q \to (E \wedge U)$ ②④三段论

⑥ Q 附加前提引入

⑦ $E \wedge U$ ⑤⑥分离

⑧ E ⑦

⑨ $Q \to E$ 条件证明规则

9. 证明下列推理关系

(1) 在大城市球赛中，如果北京队第三，那么如果上海队第二，那么天津队第四. 沈阳队不是第一或北京队第三. 上海队第二. 从而知，如果沈阳队第一，那么天津队第四.

(2) 如果国家不对农产品给予补贴，那么国家就要对农产品进行控制. 如果对农产品进行控制，农产品就不会短缺. 或者农产品短缺或农产品过剩. 事实上农产品不过剩. 从而国家对农产品给予了补贴.

证明:

(1) 令 P:北京队第三

Q:上海队第二

R:天津队第四

S:沈阳队第一.

即证 $P\to(Q\to R),\neg S\vee P,Q\Rightarrow S\to R$

① $P\to(Q\to R)$	前提引入
② $Q\to(P\to R)$	①置换
③ Q	前提引入
④ $P\to R$	②③分离
⑤ $\neg S\vee P$	前提引入
⑥ $S\to P$	⑤置换
⑦ $S\to R$	④⑥三段论

(2) 方法一:

令P:国家对农产品给予补贴

Q:国家就要对农产品进行控制

R:农产品短缺

S:农产品过剩.

证$\neg P\to Q,Q\to\neg R,(R\wedge\neg S)\vee(\neg R\wedge S),\neg S\Rightarrow P$

即证$\neg P\to Q,Q\to\neg R,R\vee S,\neg R\vee\neg S,\neg S\Rightarrow P$

① $\neg P\to Q$	前提引入
② $Q\to\neg R$	前提引入
③ $\neg P\to\neg R$	①②三段论
④ $R\to P$	③置换
⑤ $R\vee S$	前提引入
⑥ $\neg S\to R$	⑤置换
⑦ $\neg S\to P$	④⑥三段论
⑧ $\neg S$	前提引入
⑨ P	⑦⑧分离

方法二:

令P:国家对农产品给予补贴

Q:国家就要对农产品进行控制

R:农产品短缺.

即证$\neg P\to Q,Q\to\neg R,\quad R\Rightarrow P$

① $\neg P\to Q$	前提引入
② $Q\to\neg R$	前提引入
③ $\neg P\to\neg R$	①②三段论
④ $R\to P$	③置换
⑤ R	前提引入
⑥ P	④⑤分离

10. 如果合同是有效的,那么张三应受罚.如果张三应受罚,他将破产.如果银行给张三

贷款，他就不会破产．事实上，合同有效并且银行给张三贷款了．验证这些前提是否有矛盾．

证明： 令P：合同有效

Q:张三应受罚

R:张三破产

S:银行给张三贷款

即前提为：$P\to Q, Q\to R, S\to\neg R, P\wedge S$

① $P\to Q$	前提引入
② $Q\to R$	前提引入
③ $P\to R$	①②三段论
④ $S\to\neg R$	前提引入
⑤ $R\to\neg S$	④置换
⑥ $P\to\neg S$	③⑤三段论
⑦ $\neg(P\wedge S)$	⑥置换
⑧ $P\wedge S$	前提引入
⑨ $(\neg(P\wedge S))\wedge(P\wedge S)$	⑦⑧
⑩ 矛盾	⑨

11. 若 $P_i\to Q_i(i=1,\cdots,n)$为真．

$P_1\vee P_2\vee\cdots\vee P_n$ 和$\neg(Q_i\wedge Q_j)$ $(i\neq j)$也为真．

试证明必有 $Q_i\to P_i(i=1,\cdots,n)$为真．

证明：(1) 推理法：

即证 $P_i\to Q_i|_{i=1,\cdots,n}, P_1\vee P_2\vee\cdots\vee P_n, \neg(Q_i\wedge Q_j)|_{i\neq j}\Rightarrow Q_i\to P_i|_{i=1,\cdots,n}$

① $\neg(Q_i\wedge Q_j)|_{i\neq j}$	前提引入
② $Q_i\to\neg Q_j|_{i\neq j}$	①置换
③ $P_j\to Q_j|_{i\neq j}$	前提引入
④ $\neg Q_j\to\neg P_j|_{i\neq j}$	③置换
⑤ $Q_i\to\neg P_j|_{i\neq j}$	②④三段论
⑥ Q_i	附加前提引入
⑦ $\neg P_j|_{i\neq j}$	⑤⑥分离
⑧ $\neg P_1\wedge\cdots\wedge\neg P_{i-1}\wedge\neg P_{i+1}\wedge\cdots\wedge\neg P_n$	⑦
⑨ $\neg(P_1\vee\cdots\vee P_{i-1}\vee P_{i+1}\vee\cdots\vee P_n)$	⑧置换
⑩ $P_1\vee P_2\vee\cdots\vee P_n$	前提引入
⑪ $\neg(P_1\vee\cdots\vee P_{i-1}\vee P_{i+1}\vee\cdots\vee P_n)\to P_i$	⑩置换
⑫ P_i	⑨⑪分离
⑬ $Q_i\to P_i$	条件证明规则

(2) 归结法：

先将$(P_i\to Q_i|_{i=1,\cdots,n})\wedge(P_1\vee P_2\vee\cdots\vee P_n)\wedge(\neg(Q_i\wedge Q_j)|_{i\neq j})\wedge(\neg(Q_i\to P_i)|_{i=1,\cdots,n})$
化为合取范式得，

$$(\neg P_i\vee Q_i)\wedge(P_1\vee P_2\vee\cdots\vee P_n)\wedge(\neg Q_i\vee\neg Q_j)\wedge(Q_i\wedge\neg P_i)$$

$$i = 1, \cdots, n, i \neq j$$

建立子句集

$S = \{\neg P_i \vee Q_i, P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n, \neg Q_i \vee \neg Q_j, Q_i, \neg P_i\}$ $\quad i = 1, \cdots, n, i \neq j$

归结过程：

① $\neg P_i \vee Q_i$

② $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$

③ $\neg Q_i \vee \neg Q_j$

④ Q_i

⑤ $\neg P_i$

⑥ $\neg P_i \vee \neg Q_j$ ①③归结

⑦ $P_1 \vee \cdots \vee P_{i-1} \vee P_{i+1} \vee \cdots \vee P_n \vee \neg Q_j$ ②⑥归结

⑧ $P_j \vee \neg Q_j$ 重复上述操作

⑨ P_i ④⑧归结

⑩ $\square$ ⑤⑨归结

12. 利用归结法证明

(1) $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$

(2) $(S \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow Q) \wedge (R \vee S) \wedge (R \rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P$

(3) $\neg (P \wedge \neg Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R \Rightarrow \neg P$

证明：

(1) 先将$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge \neg R$ 化成合取范式得

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R$$

建立子句集 $S = \{P \vee Q, \neg P \vee R, \neg Q \vee R, \neg R\}$

归结过程：

① $P \vee Q$

② $\neg P \vee R$

③ $\neg Q \vee R$

④ $\neg R$

⑤ $Q \vee R$ ①②归结

⑥ R ③⑤归结

⑦ $\square$ ④⑥归结

(2) 先将$(S \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow Q) \wedge (R \vee S) \wedge (R \rightarrow \neg Q) \wedge \neg\neg P$ 化成合取范式得

$$(\neg S \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (R \vee S) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P$$

建立子句集 $S = \{\neg S \vee \neg Q, \neg P \vee Q, R \vee S, \neg R \vee \neg Q, P\}$

归结过程：

① $\neg S \vee \neg Q$

② $\neg P \vee Q$

③ $R \vee S$

④ $\neg R \vee \neg Q$

⑤ P

⑥ $R \vee \neg Q$　　①③归结

⑦ $\neg Q$　　④⑥归结

⑧ $\neg P$　　②⑦归结

⑨ □　　⑤⑧归结

(3) 先将$\neg(P \wedge \neg Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R \wedge \neg\neg P$ 化成合取范式得

$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R \wedge P$$

建立子句集　$S=\{\neg P \vee Q, \neg Q \vee R, \neg R, P\}$

归结过程:

① $\neg P \vee Q$

② $\neg Q \vee R$

③ $\neg R$

④ P

⑤ Q　　①④归结

⑥ R　　②⑤归结

⑦ □　　③⑥归结

第3章 习题解答

1. 依公理系统证明

(1) $\vdash \neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$

(2) $\vdash (\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P \wedge Q)$

(3) $\vdash P \to (Q \vee P)$

(4) $\vdash Q \to (P \to Q)$

证明：

(1)

① $\vdash \neg\neg P \to P$　　定理 3.2.6

② $\vdash \neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$　　① 代入$\dfrac{P}{\neg P \vee \neg Q}$

③ $\vdash \neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$　　② 定义 2

(2)

① $\vdash P \to \neg\neg P$　　定理 3.2.5

② $\vdash (\neg P \vee \neg Q) \to \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$　　① 代入$\dfrac{P}{\neg P \vee \neg Q}$

③ $\vdash (\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P \wedge Q)$　　② 定义 2

(3)

① $\vdash (Q \to R) \to (P \to Q) \to (P \to R)$　　定理 3.2.1

② $\vdash ((P \vee Q) \to (Q \vee P)) \to (P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))$

　　① 代入$\dfrac{Q}{P \vee Q}, \dfrac{R}{Q \vee P}$

③ $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$　　公理 3

④ $\vdash (P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))$　　②③分离

⑤ $\vdash P \to (P \vee Q)$　　公理 2

⑥ $\vdash P \to (Q \vee P)$　　④⑤分离

(4)

① $\vdash P \to (Q \vee P)$　　上题结论

② $\vdash Q \to (\neg P \vee Q)$　　① 代入$\dfrac{P}{Q}, \dfrac{Q}{\neg P}$

③ $\vdash Q \to (P \to Q)$　　② 定义 1

2. 依王浩算法判断下述蕴涵式是否正确

(1) $\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$

(2) $(P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow \neg P \vee \neg R$

(3) $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$

证明:

(1)

① $\neg Q \land (P \to Q) \overset{s}{\Rightarrow} \neg P$ （写成相继式）

② $\neg Q, P \to Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P$ （$\land \Rightarrow$）

③ $P \to Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, Q$ （$\neg \Rightarrow$）

④ $Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, Q$ 而且

$\overset{s}{\Rightarrow} \neg P, Q, P$ （$\to \Rightarrow$）

⑤ $P, Q \overset{s}{\Rightarrow} Q$ 而且

$P \overset{s}{\Rightarrow} Q, P$ （$\Rightarrow \neg$）

由⑤中的两个相继式均已无联结词，而且在$\overset{s}{\Rightarrow}$的两端都有共同命题变项，从而都是公理. 定理得证.

(2)

① $(P \to Q) \land (R \to S) \land (\neg Q \lor \neg S) \overset{s}{\Rightarrow} \neg P \lor \neg R$ （写成相继式）

② $P \to Q, R \to S, \neg Q \lor \neg S \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$ （$\land \Rightarrow$）

③′ $P \to Q, R \to S, \neg Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$

③″ $P \to Q, R \to S, \neg S \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$ （$\lor \Rightarrow$）

④′ $P \to Q, S, \neg Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$

④″ $P \to Q, \neg Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, R$ （③′$\to \Rightarrow$）

⑤′ $P \to Q, S, \neg S \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$

⑤″ $P \to Q, \neg S \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, R$ （③″$\to \Rightarrow$）

⑥′ $Q, S, \neg Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$

⑥″ $S, \neg Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, P$ （④′$\to \Rightarrow$）

⑦′ $Q, \neg Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, R$

⑦″ $\neg Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, R, P$ （④″$\to \Rightarrow$）

⑧′ $Q, S, \neg S \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R$

⑧″ $S, \neg S \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, P$ （⑤′$\to \Rightarrow$）

⑨′ $Q, \neg S \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, R$

⑨″ $\neg S \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, R, P$ （⑤″$\to \Rightarrow$）

⑩′ $Q, S \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, Q$ （⑥′$\neg \Rightarrow$）

⑩″ $S \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, P, Q$ （⑥″$\neg \Rightarrow$）

⑪′ $Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, R, Q$ （⑦′$\neg \Rightarrow$）

⑪″ $\overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, R, P, Q$ （⑦″$\neg \Rightarrow$）

⑫′ $Q, S \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, \neg R, S$ （⑧′$\neg \Rightarrow$）

⑫″ $S\stackrel{s}{\Rightarrow}\neg P,\neg R,P,S$ (⑧″$\neg\Rightarrow$)

⑬′ $Q\stackrel{s}{\Rightarrow}\neg P,\neg R,R,S$ (⑨′$\neg\Rightarrow$)

⑬″ $\stackrel{s}{\Rightarrow}\neg P,\neg R,R,P,S$ (⑨″$\neg\Rightarrow$)

⑭′ $P,R,Q,S\stackrel{s}{\Rightarrow}Q$ (⑩′$\Rightarrow\neg$)

⑭″ $P,R,S\stackrel{s}{\Rightarrow}P,Q$ (⑩″$\Rightarrow\neg$)

⑮′ $P,R,Q\stackrel{s}{\Rightarrow}R,Q$ (⑪′$\Rightarrow\neg$)

⑮″ $P,R\stackrel{s}{\Rightarrow}R,P,Q$ (⑪″$\Rightarrow\neg$)

⑯′ $P,R,Q,S\stackrel{s}{\Rightarrow}S$ (⑫′$\Rightarrow\neg$)

⑯″ $P,R,S\stackrel{s}{\Rightarrow}P,S$ (⑫″$\Rightarrow\neg$)

⑰′ $P,R,Q\stackrel{s}{\Rightarrow}R,S$ (⑬′$\Rightarrow\neg$)

⑰″ $P,R\stackrel{s}{\Rightarrow}R,P,S$ (⑬″$\Rightarrow\neg$)

⑩′～⑰″均为公理，从而定理成立.

(3)

① $\neg(P\wedge Q)\stackrel{s}{\Rightarrow}\neg P\vee\neg Q$ (写成相继式)

② $\stackrel{s}{\Rightarrow}\neg P,\neg Q,P\wedge Q$ ($\neg\Rightarrow$)

③ $P,Q\stackrel{s}{\Rightarrow}P\wedge Q$ ($\Rightarrow\neg$)

④′ $P,Q\stackrel{s}{\Rightarrow}P$

④″ $P,Q\stackrel{s}{\Rightarrow}Q$ ($\Rightarrow\wedge$)

④′④″均为公理，从而定理成立.

3. 依自然演绎系统证明

(1) $\neg A\vdash A\to B$

(2) $A\to B,\neg B\vdash\neg A$

(3) $A\to B,A\to\neg B\vdash\neg A$

(4) $\neg(A\to B)\vdash A$

证明：

(1)

① $\neg A,A,\neg B\vdash\neg A$ 规则 1

② $\neg A,A,\neg B\vdash A$ 规则 1

③ $\neg A,A\vdash B$ 规则 3 和①②

④ $\neg A\vdash A\to B$ 规则 5

(2)

① $A\to B,\neg B,A\vdash A$ 规则 1

② $A\to B,\neg B,A\vdash A\to B$ 规则 1

③ $A\to B,A\vdash B$ 规则 4

④ $A\to B,\neg B,A\vdash B$	规则 2 和①②③
⑤ $A\to B,\neg B,A\vdash\neg B$	规则 1
⑥ $A\to B,\neg B\vdash A$	规则 3 和④⑤

(3)

① $A\to B,A\to\neg B,A\vdash A\to B$	规则 1
② $A\to B,A\to\neg B,A\vdash A$	规则 1
③ $A\to B,A\vdash B$	规则 4
④ $A\to B,A\to\neg B,A\vdash B$	规则 2 和①②③
⑤ $A\to B,A\to\neg B,A\vdash A\to\neg B$	规则 1
⑥ $A\to\neg B,A\vdash\neg B$	规则 4
⑦ $A\to B,A\to\neg B,A\vdash\neg B$	规则 2 和②⑤⑥
⑧ $A\to B,A\to\neg B\vdash\neg A$	规则 3 和①②

(4)

① $\neg(A\to B),\neg A\vdash\neg A$	规则 1
② $\neg A\vdash A\to B$	题 3 中(1)结论
③ $\neg(A\to B),\neg A\vdash A\to B$	规则 2 和①②
④ $\neg(A\to B),\neg A\vdash\neg(A\to B)$	规则 1
⑤ $\neg(A\to B)\vdash A$	规则 3 和③④

第4章 习题解答

1. 判断下列各式是否合式公式

(1) $P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$

(3) $(\exists x)(\forall x)P(x)$

(4) $(\exists x)P(y,z)$

(5) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)Q(x,y))$

(6) $(\forall x)(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \wedge Q(x))$

(7) $(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \wedge (\exists x)R(x) \wedge S(x)$

(8) $(\exists x)((\forall y)P(y) \rightarrow Q(x,y))$

(9) $(\exists x)(\exists y)(P(x,y,z) \rightarrow S(u,v))$

(10) $(\forall x)P(x,y) \wedge Q(z)$

解:

(2),(5),(9),(10)是合式公式.

(1),(3),(4),(6),(7),(8)不是合式公式

2. 作如何的具体设定下列公式方为命题

(1) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge r$

(2) $(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

(3) $(\forall x)(\exists y)P(x,f(y,a)) \wedge Q(z)$

解:

仅当谓词变项取定为某个谓词常项,并且个体词取定为个体常项时,上述公式方为命题.

3. 指出下列公式中的自由变元和约束变元,并指出各量词的辖域

(1) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow ((\forall x)R(x) \wedge Q(z))$

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists y)Q(y)) \vee ((\forall x)P(x) \rightarrow Q(z))$

(3) $(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \wedge (\exists y)R(y) \wedge S(z))$

解:

(1) z 为自由变元,x 为约束变元.

$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$中,$P(x) \wedge Q(x)$是 x 的辖域.

$(\forall x)R(x) \wedge Q(z)$中,$R(x)$是 x 的辖域.

(2) z 为自由变元,x 和 y 为约束变元.

$(\forall x)(P(x) \wedge (\exists y)Q(y))$中,$P(x) \wedge (\exists y)Q(y)$是 x 的辖域.

$(\forall x)(P(x) \wedge (\exists y)Q(y))$中,$Q(y)$是 y 的辖域.

$(\forall x)P(x)\to Q(z)$ 中，$P(x)$ 是 x 的辖域.

(3) z 为自由变元，x 和 y 为约束变元.

$(\forall x)(P(x)\leftrightarrow Q(x))$ 中，$P(x)\leftrightarrow Q(x)$ 是 x 的辖域.

$(\exists y)R(y)\wedge S(z)$ 中，$R(y)$ 是 y 的辖域.

4. 求下列各式的真值

(1) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$. 论域为 $\{1,2\}$，$P(x)$ 表 $x=1$，$Q(x)$ 表 $x=2$.

(2) $(\forall x)(P\to Q(x))\vee R(a)$. 论域为 $\{-2,1,2,3,5,6\}$，P 表 $2>1$，$Q(x)$ 表 $x\leqslant 3$，$R(x)$ 表 $x>5$，$a=3$.

(3) $(\exists x)(P(x)\to Q(x))$. 论域为 $\{0,1,2\}$，$P(x)$ 表 $x>2$，$Q(x)$ 表 $x=0$.

解:

(1) $P(1)=\mathrm{T}, P(2)=\mathrm{F}, Q(1)=\mathrm{F}, Q(2)=\mathrm{T}$

在这种解释下，$(\forall x)P(x)\vee Q(x)=\mathrm{T}$. 因为当 $x=1$ 有 $P(1)\vee Q(1)=\mathrm{T}$，同理当 $x=2$ 有 $P(2)\vee Q(2)=\mathrm{T}$.

(2) $Q(-2)=\mathrm{T}, Q(1)=\mathrm{T}, Q(2)=\mathrm{T}, Q(3)=\mathrm{T}, Q(5)=\mathrm{F}, Q(6)=\mathrm{F}$

在这种解释下，$(\forall x)(P\to Q(x))\vee R(a)=\mathrm{F}$. 因为对 $x=5$ 有 $(P\to Q(5))\vee R(3)=\mathrm{F}$.

(3) $P(0)=\mathrm{F}, P(1)=\mathrm{F}, P(2)=\mathrm{F}, Q(0)=\mathrm{T}, Q(1)=\mathrm{F}, Q(2)=\mathrm{F}$

在这种解释下，$(\exists x)(P(x)\to Q(x))=\mathrm{T}$. 因为对 $x=0$ 有 $P(0)\to Q(0)=\mathrm{T}$.

5. 将下列语句符号化

(1) 一切事物都是发展的.

(2) 凡有理数都可写成分数.

(3) 所有的油脂都不溶于水.

(4) 存在着会说话的机器人.

(5) 过平面上的两个点，有且仅有一条直线通过.

(6) 凡实数都能比较大小.

(7) 在北京工作的人未必都是北京人.

(8) 只有一个北京.

(9) 任何金属都可以溶解在某种液体里.

(10) 如果明天天气好，有些学生将去香山.

解:

(1) 若以 $P(x)$ 表示 x 是事物，$Q(x)$ 表示 x 是发展的，那么这句话可以符号化为 $(\forall x)(P(x)\to Q(x))$.

(2) 若以 $P(x)$ 表示 x 是有理数，$Q(x)$ 表示 x 是分数，那么这句话可以符号化为 $(\forall x)(P(x)\to Q(x))$.

(3) 若以 $P(x)$ 表示 x 是油脂，$Q(x)$ 表示 x 溶于水，那么这句话可以符号化为 $(\forall x)(P(x)\to\neg Q(x))$.

(4) 若以 $P(x)$ 表示 x 是机器人，$Q(x)$ 表示 x 会说话，那么这句话可以符号化为 $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$.

(5) 若以 $P(x)$ 表示 x 是平面上的点，$Q(x,y,u)$ 表示 u 是过 x 和 y 的直线，$EP(x,y)$ 表示 x 和 y 为同一点，$EQ(u,v)$ 表示 u 和 v 为同一条直线，那么这句话可以符号化为

$$(\forall x)(\forall y)\begin{pmatrix} P(x)\wedge P(y)\wedge\neg EP(x,y) \\ \to(\exists u)(Q(x,y,u)\wedge(\forall v)(Q(x,y,v)\to EQ(u,v))) \end{pmatrix}.$$

(6) 若以 $P(x)$ 表示 x 是实数，$Q(x,y)$ 表示 x 和 y 可比较大小，那么这句话可以符号化为 $(\forall x)(\forall y)(P(x)\wedge P(y)\to Q(x,y))$.

(7) 若以 $P(x)$ 表示 x 是在北京工作，$Q(x)$ 表示 x 是北京人，那么这句话可以符号化为 $(\exists x)(P(x)\wedge\neg Q(x))$ 或 $\neg(\forall x)(P(x)\to Q(x))$.

(8) 若以 $P(x)$ 表示 x 是北京，$E(x,y)$ 表示 x 和 y 是同一城市，那么这句话可以符号化为 $(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(P(y)\to E(x,y)))$.

(9) 若以 $P(x)$ 表示 x 是金属，$Q(x)$ 表示 x 是液体，$R(x,y)$ 表示 x 可以溶解在 y 中，那么这句话可以符号化为 $(\forall x)(P(x)\to(\exists y)(Q(y)\wedge R(x,y)))$.

(10) 若以 r 表示明天天气好，$P(x)$ 表示 x 是学生，$Q(x)$ 表示 x 去香山，那么这句话可以符号化为 $r\to(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$.

6. 设 $P(x)$ 表示 x 是有理数，$Q(x)$ 表示 x 是实数，$R(x)$ 表示 x 是无理数，$I(x)$ 表示 x 是正整数，$S(x)$ 表示 x 是偶数，$W(x)$ 表示 x 是奇数，试将下列公式翻译成自然语句.

(1) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))$

(2) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$

(3) $\neg(\forall x)(Q(x)\to P(x))$

(4) $(\forall x)(Q(x)\to P(x)\bar{\vee} R(x))$

(5) $(\forall x)(I(x)\to(P(x)\wedge Q(x)))$

(6) $(\forall x)(I(x)\to(S(x)\vee W(x)))$

(7) $\neg(\exists x)(I(x)\wedge S(x)\wedge W(x))$

(8) $\neg(\exists x)(I(x)\wedge\neg S(x)\wedge\neg W(x))$

(9) $(\forall x)(I(x)\to P(x))\wedge\neg(\forall x)(P(x)\to I(x))$

(10) $R(\pi)\wedge R(e)$

解：

(1) 任何有理数都是实数.

(2) 有的实数是有理数.

(3) 并非所有的实数都是有理数.

(4) 任一实数，不是有理数就是无理数.

(5) 任一正整数，既是有理数又是实数.

(6) 任一正整数，不是奇数就是偶数.

(7) 不存在这样一个正整数，既是奇数又是偶数.

(8) 不存在这样一个正整数，既非奇数又非偶数.

(9) 任何正整数都是有理数，并非所有的有理数都是正整数.

(10) π 和 e 都是无理数.

7. 设个体域为$\{a,b,c\}$，试将下列公式写成命题逻辑公式

(1) $(\forall x)P(x)$

(2) $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

(3) $(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

(4) $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$

(5) $(\forall x)\neg P(x) \vee (\forall x)P(x)$

(6) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$

(7) $(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \to Q(x,y))$

(8) $(\forall x)P(x) \to (\exists y)Q(y)$

(9) $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$

(10) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \to (\forall x)Q(x,y))$

解：

(1) $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$

(2) $(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \wedge (Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c))$

(3) $(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \wedge (Q(a) \vee Q(b) \vee Q(c))$

(4) $(P(a) \to Q(a)) \wedge (P(b) \to Q(b)) \wedge (P(c) \to Q(c))$

(5) $(\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c)) \vee (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$

(6) $(P(a,a) \wedge P(a,b) \wedge P(a,c)) \vee (P(b,a) \wedge P(b,b) \wedge P(b,c)) \vee$
$(P(c,a) \wedge P(c,b) \wedge P(c,c))$

(7) $(P(a,a) \to Q(a,a)) \vee (P(a,b) \to Q(a,b)) \vee (P(a,c) \to Q(a,c)) \wedge$
$(P(b,a) \to Q(b,a)) \vee (P(b,b) \to Q(b,b)) \vee (P(b,c) \to Q(b,c)) \wedge$
$(P(c,a) \to Q(c,a)) \vee (P(c,b) \to Q(c,b)) \vee (P(c,c) \to Q(c,c))$

(8) $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \to Q(a) \vee Q(b) \vee Q(c)$

(9) $(P(a,a) \vee P(a,b) \vee P(a,c)) \vee (P(b,a) \vee P(b,b) \vee P(b,c)) \vee$
$(P(c,a) \vee P(c,b) \vee P(c,c))$

(10) $(P(a,a) \vee P(b,a) \vee P(c,a) \to Q(a,a) \wedge Q(b,a) \wedge Q(c,a)) \wedge$
$(P(a,b) \vee P(b,b) \vee P(c,b) \to Q(a,b) \wedge Q(b,b) \wedge Q(c,b)) \wedge$
$(P(a,c) \vee P(b,c) \vee P(c,c) \to Q(a,c) \wedge Q(b,c) \wedge Q(c,c))$

8. 判断下列公式是普遍有效的，不可满足的还是可满足的？

(1) $(\forall x)P(x) \to P(y)$

(2) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x))$

(3) $(\forall x)P(x)$

(4) $(\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$

(5) $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$

(6) $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$

(7) $((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)) \to (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

解：

普遍有效：(1)，(2)，(6)

不可满足：(4)
可满足的：(3)，(5)，(7)

9. 给出一个公式，使其在{1,2}域上是可满足的，而在{1}域上是不可满足的.

解：

(1) $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$，其中 $P(x,y)$表示 $x<y$.

(2) $(\exists x)P(x)\wedge(\exists y)\neg P(y)$，其中 $P(x)$表示 $x>1$.

(3) $(\exists x)P(x)$，其中 $P(x)$表示 $x>1$.

10. 设个体域为$\{a,b\}$，并对 $P(x,y)$设定为 $P(a,a)=\mathrm{T}$，$P(a,b)=\mathrm{F}$，$P(b,a)=\mathrm{F}$，$P(b,b)=\mathrm{T}$ 计算下列公式的真值.

(1) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$

(2) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$

(3) $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$

(4) $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$

(5) $(\exists y)\neg P(a,y)$

(6) $(\forall x)P(x,x)$

(7) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\rightarrow P(y,x))$

(8) $(\exists y)(\forall x)P(x,y)$

解：

(1) T

(2) F

(3) F

(4) T

(5) T

(6) T

(7) T

(8) F

第5章　习题解答

1. 证明下列等值式和蕴涵式

(1) $\neg(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge P(y)\wedge Q(x)\wedge Q(y)\wedge R(x,y))$
$=(\forall x)(\forall y)((P(x)\wedge P(y)\wedge Q(x)\wedge Q(y))\to\neg R(x,y))$

(2) $\neg(\forall x)(\exists y)((P(x,y)\vee Q(x,y))\wedge(R(x,y)\vee S(x,y)))$
$=(\exists x)(\forall y)(P(x,y)\vee Q(x,y))\to(\neg R(x,y)\wedge\neg S(x,y))$

(3) $(\forall x)(P(x)\vee q)\to(\exists x)(P(x)\wedge q)=((\exists x)\neg P(x)\wedge\neg q)\vee((\exists x)P(x)\wedge q)$

(4) $(\forall y)(\exists x)((P(x)\to q)\vee S(y)=((\forall x)P(x)\to q)\vee(\forall y)S(y)$

(5) $(\forall x)P(x)\to q=(\exists x)(P(x)\to q)$

(6) $(\exists x)(P(x)\to Q(x))=(\forall x)P(x)\to(\exists x)Q(x)$

(7) $(\exists x)P(x)\to(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\to Q(x))$

(8) $(\exists x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$

(9) $((\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\wedge(\exists x)R(x))\vee((\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\wedge(\exists x)S(x))$
$=(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\wedge(\exists x)(R(x)\vee S(x))$

(10) $(\exists z)(\exists y)(\exists x)(P(x,z)\to Q(x,z))\vee(R(y,z)\to S(y,z))$
$=((\forall z)(\forall x)P(x,z)\to(\exists z)(\exists x)Q(x,z))\vee((\forall z)(\forall y)R(y,z)\to(\exists z)(\exists y)S(y,z))$

证明：

(1)

$$\begin{aligned}&\neg(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge P(y)\wedge Q(x)\wedge Q(y)\wedge R(x,y))\\&=(\forall x)(\forall y)\neg(P(x)\wedge P(y)\wedge Q(x)\wedge Q(y)\wedge R(x,y))\\&=(\forall x)(\forall y)(\neg(P(x)\wedge P(y)\wedge Q(x)\wedge Q(y))\vee\neg R(x,y))\\&=(\forall x)(\forall y)((P(x)\wedge P(y)\wedge Q(x)\wedge Q(y))\to\neg R(x,y))\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\neg(\forall x)(\exists y)(P(x,y)\vee Q(x,y))\wedge(R(x,y)\vee S(x,y))\\&=(\exists x)(\forall y)\neg(P(x,y)\vee Q(x,y))\vee\neg(R(x,y)\vee S(x,y))\\&=(\exists x)(\forall y)\neg(P(x,y)\vee Q(x,y))\vee(\neg R(x,y)\wedge\neg S(x,y))\\&=(\exists x)(\forall y)(P(x,y)\vee Q(x,y))\to(\neg R(x,y)\wedge\neg S(x,y))\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&(\forall x)(P(x)\vee q)\to(\exists x)(P(x)\wedge q)\\&=\neg(\forall x)(P(x)\vee q)\vee(\exists x)(P(x)\wedge q)\\&=(\exists x)\neg(P(x)\vee q)\vee(\exists x)(P(x)\wedge q)\\&=((\exists x)\neg P(x)\wedge\neg q)\vee(\exists x)(P(x)\wedge q)\end{aligned}$$

(4)

$$(\forall y)(\exists x)(P(x)\to q)\vee S(y)$$

$=(\exists x)(P(x)\to q)\vee(\forall y)S(y)$

$=((\forall x)P(x)\to q)\vee(\forall y)S(y)$

(5)

$(\forall x)(P(x)\to q)$

$=(\exists x)P(x)\to q$

(6)

$(\exists x)(P(x)\to Q(x))$

$=(\exists x)(\neg P(x)\vee Q(x))$

$=\neg(\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$

$=(\forall x)P(x)\to(\exists x)Q(x)$

(7)

$(\exists x)P(x)\to(\forall x)Q(x)$

$=\neg(\exists x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$

$=(\forall x)\neg P(x)\vee(\forall x)Q(x)$

$\Rightarrow(\forall x)(\neg P(x)\vee Q(x))$

$=(\forall x)(P(x)\to Q(x))$

(8)

$(\exists x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$

$=(\exists x)P(x)\wedge(\forall y)Q(y)$

$=(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)Q(y))$

$\Rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$

(9)

$((\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\wedge(\exists x)R(x))\vee((\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\wedge(\exists x)S(x))$

$=((\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\wedge(\exists x)R(x))\vee(\underline{(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\wedge(\exists x)S(x)})$

$=(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\wedge(\underline{(\exists x)R(x)\vee(\exists x)S(x)})$

$=(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\wedge(\exists x)(R(x)\vee S(x))$

(10)

$(\exists z)(\exists y)(\exists x)(P(x,z)\to Q(x,z))\vee(R(y,z)\to S(y,z))$

$=(\exists z)(\exists x)(P(x,z)\to Q(x,z))\vee(\exists z)(\exists y)(R(y,z)\to S(y,z))$

$=(\exists z)(\exists x)(\neg P(x,z)\vee Q(x,z))\vee(\exists z)(\exists y)(\neg R(y,z)\vee S(y,z))$

$=((\exists z)(\exists x)\neg P(x,z)\vee(\exists z)(\exists x)Q(x,z))\vee((\exists z)(\exists y)\neg R(y,z)\vee(\exists z)(\exists y)S(y,z))$

$=(\neg(\forall z)(\forall x)P(x,z)\vee(\exists z)(\exists x)Q(x,z))\vee(\neg(\forall z)(\forall y)R(y,z)\vee(\exists z)(\exists y)S(y,z))$

$=((\forall z)(\forall x)P(x,z)\to(\exists z)(\exists x)Q(x,z))\vee((\forall z)(\forall y)R(y,z)\to(\exists z)(\exists y)S(y,z))$

2. 判断下列各公式哪些是普遍有效的并给出证明，不是普遍有效的举出反例.

(1) $(\exists x)(P(x)\leftrightarrow Q(x))\to((\exists x)P(x)\leftrightarrow(\exists x)Q(x))$

(2) $((\exists x)P(x)\leftrightarrow(\exists x)Q(x))\rightarrow(\exists x)(P(x)\leftrightarrow Q(x))$

(3) $((\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))\rightarrow(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

(4) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow((\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$

(5) $((\exists x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x))\rightarrow(\exists x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

(6) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\rightarrow((\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x))$

(7) $((\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x))\rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$

(8) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)\rightarrow(\exists y)(\forall x)P(x,y)$

解:

(1) 不是普遍有效

在$\{1,2\}$域上分析,若 $P(1)=P(2)=Q(1)=\mathrm{F},Q(2)=\mathrm{T}$,该式为假.

(2) 不是普遍有效

在$\{1,2\}$域上分析,若 $P(1)=Q(2)=\mathrm{F},P(2)=Q(1)=\mathrm{T}$,该式为假.

(3) 普遍有效

$((\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))\rightarrow(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

$=(\neg(\exists x)P(x)\vee(\forall x)Q(x))\rightarrow(\forall x)(\neg P(x)\vee Q(x))$

$=((\forall x)\neg P(x)\vee(\forall x)Q(x))\rightarrow(\forall x)(\neg P(x)\vee Q(x))$

$=\mathrm{T}$

(4) 不是普遍有效

在$\{1,2\}$域上分析,若 $P(1)=Q(1)=\mathrm{F},P(2)=Q(2)=\mathrm{T}$,该式为假.

(5) 普遍有效

$((\exists x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x))\rightarrow(\exists x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

$=\neg(\neg(\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x))\vee(\exists x)(\neg P(x)\vee Q(x))$

$=(\neg\neg(\exists x)P(x)\wedge\neg(\exists x)Q(x))\vee(\exists x)\neg P(x)\vee(\exists x)Q(x)$

$=(((\exists x)P(x)\vee(\exists x)\neg P(x))\wedge(\neg(\exists x)Q(x)\vee(\exists x)\neg P(x)))\vee(\exists x)Q(x)$

$=\neg(\exists x)Q(x)\vee(\exists x)\neg P(x)\vee(\exists x)Q(x)$

$=\mathrm{T}$

(6) 不是普遍有效

在$\{1,2\}$域上分析,若 $P(1)=Q(2)=\mathrm{F},P(2)=Q(1)=\mathrm{T}$,该式为假.

(7) 不是普遍有效

在$\{1,2\}$域上分析,若 $P(1)=Q(2)=\mathrm{F},P(2)=Q(1)=\mathrm{T}$,该式为假.

(8) 不是普遍有效

在$\{1,2\}$域上分析,若 $P(1,2)=P(2,1)=\mathrm{F},P(1,1)=P(2,2)=\mathrm{T}$,该式为假.

3. 指出下列各推演中的错误,并改正之.

(1) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))=\mathrm{T}$

当且仅当对任一 $x\in D$,有

$P(x)=\mathrm{T},Q(x)=\mathrm{T}$

(2) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))=\mathrm{F}$

当且仅当有一个 $x_0\in D$ 使得

$P(x)=\mathrm{F},Q(x)=\mathrm{F}$

(3) $(\forall x)P(x)=\mathrm{F}$

当且仅当对任一 $x\in D$,有

$P(x)=\mathrm{F}$

(4) $(\forall x)P(x)=\mathrm{F}$

$(\forall x)P(x)\Rightarrow(\exists x)P(x)$

必有$(\exists x)P(x)=\mathrm{F}$

(5) $(\forall x)P(x)\rightarrow Q(x)$

有 $P(x)\rightarrow Q(x)$

(6) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$

有 $P(a)\vee Q(b)$

(7) $P(x)\rightarrow Q(x)$

有$(\exists x)P(x)\rightarrow Q(x)$

(8) $P(a)\rightarrow Q(b)$

有$(\exists x)P(x)\rightarrow Q(x)$

(9) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$

有$(\exists y)P(a,y)$

有 $P(a,b)$

$(\forall x)P(x,b)$

$P(b,b)$

$(\forall x)P(x,x)$

(10) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$

$=\neg(\exists x)\neg(P(x)\vee Q(x))$

$=\neg(\exists x)(\neg P(x)\wedge\neg Q(x))$

$\Rightarrow\neg((\exists x)\neg P(x)\wedge(\exists x)\neg Q(x))$

$=\neg(\exists x)\neg P(x)\vee\neg(\exists x)\neg Q(x)$

$=(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$

(11) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$ 前提

有 $P(c)\rightarrow Q(c)$

$(\exists x)P(x)$ 前提

有 $P(c)$

$Q(c)$ 分离

$(\exists x)Q(x)$

(12) $P(x)\rightarrow Q(x)$

有$\neg P(x)\rightarrow\neg Q(x)$

解:

(1) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))=\mathrm{T}$

当且仅当对任一 $x\in D$,有

$P(x)\rightarrow Q(x)=\mathrm{T}$

即 $P(x)=\mathrm{F}$ 或 $Q(x)=\mathrm{T}$

(2) $(\exists x)(P(x)\land Q(x))=\mathrm{F}$

当且仅当对任意的 $x\in D$ 使得

$P(x)\land Q(x)=\mathrm{F}$

$P(x)=\mathrm{F}$ 或 $Q(x)=\mathrm{F}$

(3) $(\forall x)P(x)=\mathrm{F}$

当且仅当有一个 $x_0\in D$ 使得

$P(x_0)=\mathrm{F}$

(4) $(\forall x)P(x)=\mathrm{F}$

不一定有$(\exists x)P(x)=\mathrm{F}$

或

$(\exists x)P(x)=\mathrm{F}$

$(\forall x)P(x)\Rightarrow(\exists x)P(x)$

必有$(\forall x)P(x)=\mathrm{F}$

(5) $(\forall x)P(x)\to Q(x)$非合式公式

(6) $(\forall x)(P(x)\lor Q(x))$

有 $P(a)\lor Q(a)$

(7) $(\exists x)P(x)\to Q(x)$非合式公式

(8) $P(a)\to Q(b)$

有$(\exists x)P(x)\to(\exists x)Q(x)$

(9) $(\exists y)P(a,y)$中 y 与 a 有关

$P(a,b)$并非对任一 b 都成立

$P(a,b)$不能推出$(\forall x)P(x,b)$

$P(b,b)$不能推出$(\forall x)P(x,x)$

(10) $\neg(\exists x)(\neg P(x)\land\neg Q(x))\Rightarrow\neg((\exists x)\neg P(x)\land(\exists x)\neg Q(x))$不成立

(11) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))$　　前提

$(\exists x)P(x)$　　前提

有 $P(c)$

有 $P(c)\to Q(c)$

$Q(c)$　　分离

$(\exists x)Q(x)$

(12) $P(x)\to Q(x)$

有$\neg Q(x)\to\neg P(x)$

4. 求下列(1)到(5)的前束范式，(6)，(7)，(8)的∃前束范式，(9)，(10)的 Skolem 范式(只含∀)

(1) $(\forall x)(P(x)\to(\exists y)Q(x,y))$

(2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y,z)\land((\exists u)Q(x,u)\to(\exists w)Q(y,w)))$

(3) $(\exists x)P(x,y)\leftrightarrow(\forall z)Q(z)$

(4) $(\neg(\exists x)P(x)\lor(\forall y)Q(y))\to(\forall z)R(z)$

(5) $(\forall x)(P(x)\to(\forall y)((P(y)\to(Q(x)\to Q(y)))(\forall z)P(z)))$

(6) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)\to(\forall y)(\exists x)P(x,y)$

(7) $(\exists x)(\exists y)P(x,y)\to(\exists y)(\exists x)P(x,y)$

(8) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))\to((\exists x)P(x)\to(\exists x)Q(x))$

(9) $(\forall x)(P(x)\to(\exists y)Q(x,y))\lor(\forall z)R(z)$

(10) $(\exists y)(\forall x)(\forall z)(\exists u)(\forall v)P(x,y,z,u,v)$

解：

(1)

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)(P(x)\to(\exists y)Q(x,y))\\
&=(\forall x)(\neg P(x)\lor(\exists y)Q(x,y))\\
&=(\forall x)(\exists y)(\neg P(x)\lor Q(x,y))
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y,z)\land((\exists u)Q(x,u)\to(\exists w)Q(y,w)))\\
&=(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y,z)\land(\neg(\exists u)Q(x,u)\lor(\exists w)Q(y,w)))\\
&=(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y,z)\land((\forall u)\neg Q(x,u)\lor(\exists w)Q(y,w)))\\
&=(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\exists w)(P(x,y,z)\land(\neg Q(x,u)\lor Q(y,w)))
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&(\exists x)P(x,y)\leftrightarrow(\forall z)Q(z)\\
&=((\exists x)P(x,y)\land(\forall z)Q(z))\lor(\neg(\exists x)P(x,y)\land\neg(\forall z)Q(z))\\
&=((\forall x)\neg P(x,y)\lor(\forall z)Q(z))\land((\exists x)P(x,y)\lor(\exists z)\neg Q(z))\\
&=((\forall x)\neg P(x,y)\lor(\forall z)Q(z))\land((\exists u)P(u,y)\lor(\exists v)\neg Q(v))\\
&=(\forall x)(\forall z)(\exists u)(\exists v)(\neg P(x,y)\lor Q(z))\land(P(u,y)\lor\neg Q(v))
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&(\neg(\exists x)P(x)\lor(\forall y)Q(y))\to(\forall z)R(z)\\
&=\neg(\neg(\exists x)P(x)\lor(\forall y)Q(y))\lor(\forall z)R(z)\\
&=(\neg\neg(\exists x)P(x)\land\neg(\forall y)Q(y))\lor(\forall z)R(z)\\
&=((\exists x)P(x)\land(\exists y)\neg Q(y))\lor(\forall z)R(z)\\
&=(\exists x)(\exists y)(\forall z)((P(x)\land\neg Q(y))\lor R(z))
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)(P(x)\to(\forall y)((P(y)\to(Q(x)\to Q(y)))\lor(\forall z)P(z)))\\
&=(\forall x)(\neg P(x)\lor(\forall y)((\neg P(y)\lor(\neg Q(x)\lor Q(y)))\lor(\forall z)P(z)))\\
&=(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\neg P(x)\lor\neg P(y)\lor\neg Q(x)\lor Q(y)\lor P(z))
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
&(\exists x)(\forall y)P(x,y)\to(\forall y)(\exists x)P(x,y)\\
&=\neg(\exists x)(\forall y)P(x,y)\lor(\forall y)(\exists x)P(x,y)\\
&=(\forall x)(\exists y)\neg P(x,y)\lor(\forall u)(\exists v)P(v,u)\\
&=(\forall x)(\exists y)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x,y)\lor P(v,u))
\end{aligned}
$$

∃前束

$$(\forall x)(\exists y)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x,y)\vee P(v,u))$$

$$\Rightarrow(\exists x)(\exists y)(\forall u)(\exists v)(((\neg P(x,y)\vee P(v,u))\wedge\neg S(x))\vee(\forall m)S(m))$$

$$\Rightarrow(\exists x)(\exists y)(\forall u)(\exists v)(\forall m)(((\neg P(x,y)\vee P(v,u))\wedge\neg S(x))\vee S(m))$$

$$\Rightarrow(\exists x)(\exists y)(\exists u)(\exists v)(\forall m)$$

$$(((((\neg P(x,y)\vee P(v,u))\wedge\neg S(x))\vee S(m))\wedge\neg T(x,y,u))\vee(\forall n)T(x,y,n))$$

$$\Rightarrow(\exists x)(\exists y)(\exists u)(\exists v)(\forall m)(\forall n)$$

$$(((((\neg P(x,y)\vee P(v,u))\wedge\neg S(x))\vee S(m))\wedge\neg T(x,y,u))\vee T(x,y,n))$$

(7)

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y)\rightarrow(\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

$$=\neg(\exists x)(\exists y)P(x,y)\vee(\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

$$=(\forall x)(\forall y)\neg P(x,y)\vee(\exists u)(\exists v)P(v,u)$$

$$=(\exists u)(\exists v)(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y)\vee P(v,u))$$

(8)

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow((\exists x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x))$$

$$=\neg(\forall x)(\neg P(x)\vee Q(x))\vee(\neg((\exists x)P(x))\vee(\exists x)Q(x))$$

$$=(\exists x)\neg(\neg P(x)\vee Q(x))\vee((\forall x)\neg P(x)\vee(\exists x)Q(x))$$

$$=(\exists x)(P(x)\wedge\neg Q(x))\vee(\forall y)\neg P(y)\vee(\exists z)Q(z)$$

$$=(\exists x)(\exists z)(\forall y)(P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\neg P(y)\vee Q(z)$$

(9)

看清括号范围

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)Q(x,y))\vee(\forall z)R(z)$$

$$=(\forall x)(\neg P(x)\vee(\exists y)Q(x,y))\vee(\forall z)R(z)$$

$$=(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\neg P(x)\vee Q(x,y)\vee R(z))$$

Skolem 范式

$$(\forall x)(\forall z)(\neg P(x)\vee Q(x,f(x))\vee R(z))$$

(10)

$$(\exists y)(\forall x)(\forall z)(\exists u)(\forall v)P(x,y,z,u,v)$$

Skolem 范式

$$(\forall x)(\forall z)(\forall v)P(x,a,z,f(x,z),v)$$

5. 使用推理规则和归结法作推理演算

(1) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\wedge(\forall x)(Q(x)\rightarrow\neg R(x))\Rightarrow(\exists x)(R(x)\rightarrow P(x))$

(2) $(\forall x)(\neg P(x)\rightarrow Q(x))\wedge(\forall x)\neg Q(x)\Rightarrow P(a)$

(3) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\wedge(\forall x)(Q(x)\rightarrow\neg R(x))\wedge(\forall x)R(x)\Rightarrow(\forall x)P(x)$

(4) 大学里的学生不是本科生就是研究生，有的学生是高材生，John 不是研究生但是高材生，从而如果 John 是学生必是本科生.

解：

(1) 推理规则法：

① $(\forall x)(P(x)\lor Q(x))$　前提
② $(\forall x)(Q(x)\to\neg R(x))$　前提
③ $P(x)\lor Q(x)$　① 全称量词消去
④ $Q(x)\to\neg R(x)$　② 全称量词消去
⑤ $\neg Q(x)\to P(x)$　③ 置换
⑥ $R(x)\to\neg Q(x)$　④ 置换
⑦ $R(x)\to P(x)$　⑤⑥ 三段论
⑧ $(\exists x)(R(x)\to P(x))$　⑦ 存在量词引入

归结法：

建立子句集$\{P(x)\lor Q(x),\neg Q(x)\lor\neg R(x),R(x),\neg P(x)\}$

① $P(x)\lor Q(x)$
② $\neg Q(x)\lor\neg R(x)$
③ $R(x)$
④ $\neg P(x)$
⑤ $Q(x)$　①④ 归结
⑥ $\neg Q(x)$　②③ 归结
⑦ $\square$　⑤⑥ 归结

(2) 推理规则法：

① $(\forall x)(\neg P(x)\to Q(x))$　前提
② $(\forall x)\neg Q(x)$　前提
③ $\neg P(x)\to Q(x)$　① 全称量词消去
④ $\neg Q(x)$　② 全称量词消去
⑤ $\neg Q(x)\to P(x)$　③ 置换
⑥ $P(x)$　④⑤ 分离
⑦ $(\forall x)P(x)$　⑥ 全称量词引入
⑧ $P(a)$　⑦ 全称量词消去

归结法：

建立子句集$\{P(x)\lor Q(x),\neg Q(x),\neg P(a)\}$

① $P(x)\lor Q(x)$
② $\neg Q(x)$
③ $\neg P(a)$
④ $Q(a)$　①③ 归结
⑤ $\square$　②④ 归结

(3) 推理规则法：

① $(\forall x)(P(x)\lor Q(x))$　前提
② $(\forall x)(Q(x)\to\neg R(x))$　前提
③ $(\forall x)R(x)$　前提
④ $P(x)\lor Q(x)$　① 全称量词消去
⑤ $Q(x)\to\neg R(x)$　② 全称量词消去

⑥ $R(x)$ ③ 全称量词消去

⑦ $\neg Q(x) \rightarrow P(x)$ ④ 置换

⑧ $R(x) \rightarrow \neg Q(x)$ ⑤ 置换

⑨ $R(x) \rightarrow P(x)$ ⑦⑧ 三段论

⑩ $P(x)$ ⑥⑨ 分离

⑪ $(\forall x)P(x)$ ⑩ 全称量词引入

归结法：

建立子句集 $\{P(x) \vee Q(x), \neg Q(x) \vee \neg R(x), R(x), \neg P(a)\}$

① $P(x) \vee Q(x)$

② $\neg Q(x) \vee \neg R(x)$

③ $R(x)$

④ $\neg P(a)$

⑤ $Q(a)$ ①④ 归结

⑥ $\neg R(a)$ ②⑤ 归结

⑦ $\square$ ③⑥ 归结

(4) $P(x)$：x 是学生，$Q(x)$：x 是本科生，$R(x)$：x 是研究生，$S(x)$：x 是高材生

即证

$$(\forall x)\left(P(x) \rightarrow Q(x) \overline{\vee} R(x)\right) \wedge (\exists x)(P(x) \wedge S(x)) \wedge (\neg R(\text{John}) \wedge S(\text{John}))$$

$$\Rightarrow P(\text{John}) \rightarrow Q(\text{John})$$

推理规则法：

① $(\forall x)\left(P(x) \rightarrow Q(x) \overline{\vee} R(x)\right)$ 前提

② $\neg R(\text{John})$ 前提

③ $P(x) \rightarrow Q(x) \overline{\vee} R(x)$ ① 全称量词消去

④ $P(\text{John})$ 附加前提引入

⑤ $Q(\text{John}) \overline{\vee} R(\text{John})$ ③④ 分离

⑥ $Q(\text{John})$ ②⑤ 分离

⑦ $P(\text{John}) \rightarrow Q(\text{John})$ 条件证明规则

归结法：

建立子句集

$$\left\{\begin{array}{l}\neg P(x) \vee (Q(x) \overline{\vee} R(x)), P(a), S(a), \\ \neg R(\text{John}), S(\text{John}), P(\text{John}), \neg Q(\text{John})\end{array}\right\}$$

① $\neg P(x) \vee (Q(x) \overline{\vee} R(x))$

② $P(a)$

③ $S(a)$

④ $\neg R(\text{John})$

⑤ $S(\text{John})$

⑥ $P(\text{John})$

⑦ $\neg Q(\text{John})$

⑧ $\left(Q(\text{John})\overline{\vee}R(\text{John})\right)$　　①⑥ 归结

⑨ $Q(\text{John})$　　④⑧ 归结

⑩ $\square$　　⑦⑨ 归结

第6章 习题解答

1. 依公理系统证明

(1) $\vdash(\exists x)\neg P(x)\leftrightarrow\neg(\forall x)P(x)$

(2) $\vdash\neg(\exists x)\neg P(x)\leftrightarrow(\forall x)P(x)$

(3) $\vdash(\forall x)(P(x)\to Q(x))\to((\exists x)P(x)\to(\exists x)Q(x))$

(4) $\vdash(\forall x)(P\vee P(x))\leftrightarrow P\vee(\forall x)P(x)$

证明:

(1) 先证→

① $\vdash(\forall x)P(x)\to P(y)$	公理
② $\vdash\neg P(y)\to\neg(\forall x)P(x)$	假言易位
③ $\vdash(\exists y)\neg P(y)\to\neg(\forall x)P(x)$	前件存在
④ $\vdash(\exists x)\neg P(x)\to\neg(\forall x)P(x)$	变项易名

再证←

① $\vdash P(y)\to(\exists x)P(x)$	公理
② $\vdash\neg P(y)\to(\exists x)\neg P(x)$	代入$\frac{P(\Delta)}{\neg P(\Delta)}$
③ $\vdash\neg(\exists x)\neg P(x)\to\neg\neg P(y)$	假言易位
④ $\vdash\neg(\exists x)\neg P(x)\to P(y)$	双重否定
⑤ $\vdash\neg(\exists x)\neg P(x)\to(\forall y)P(y)$	后件概括
⑥ $\vdash\neg(\forall y)P(y)\to\neg\neg(\exists x)\neg P(x)$	假言易位
⑦ $\vdash\neg(\forall y)P(y)\to(\exists x)\neg P(x)$	双重否定
⑧ $\vdash\neg(\forall x)P(x)\to(\exists x)\neg P(x)$	变项易名

(2) 先证→

① $\vdash P(y)\to(\exists x)P(x)$	公理
② $\vdash\neg P(y)\to(\exists x)\neg P(x)$	代入$\frac{P(\Delta)}{\neg P(\Delta)}$
③ $\vdash\neg(\exists x)\neg P(x)\to\neg\neg P(y)$	假言易位
④ $\vdash\neg(\exists x)\neg P(x)\to P(y)$	双重否定
⑤ $\vdash\neg(\exists x)\neg P(x)\to(\forall y)P(y)$	后件概括
⑥ $\vdash\neg(\exists x)\neg P(x)\to(\forall x)P(x)$	变元易名

再证←

① $\vdash(\forall x)P(x)\to P(y)$	公理
② $\vdash\neg P(y)\to\neg(\forall x)P(x)$	假言易位
③ $\vdash(\exists y)\neg P(y)\to\neg(\forall x)P(x)$	前件存在
④ $\vdash\neg\neg(\forall x)P(x)\to\neg(\exists y)\neg P(y)$	假言易位

⑤ $\vdash (\forall x)P(x)\to\neg(\exists y)\neg P(y)$　　双重否定

⑥ $\vdash (\forall x)P(x)\to\neg(\exists x)\neg P(x)$　　变元易名

(3)

① $\vdash (\forall x)P(x)\to P(y)$　　公理

② $\vdash (\forall x)(P(x)\to Q(x))\to(P(y)\to Q(y))$　　代入$\dfrac{P(\Delta)}{P(\Delta)\to Q(\Delta)}$

③ $\vdash (\forall x)(P(x)\to Q(x))\land P(y)\to Q(y)$　　条件合取

④ $\vdash Q(y)\to(\exists z)Q(z)$　　公理

⑤ $\vdash (\forall x)(P(x)\to Q(x))\land P(y)\to(\exists z)Q(z)$　　③④ 三段论

⑥ $\vdash P(y)\to((\forall x)(P(x)\to Q(x))\to(\exists z)Q(z))$　　条件互易

⑦ $\vdash (\exists y)P(y)\to((\forall x)(P(x)\to Q(x))\to(\exists z)Q(z))$　　前件存在

⑧ $\vdash (\forall x)(P(x)\to Q(x))\to((\exists y)P(y)\to(\exists z)Q(z))$　　条件互易

⑨ $\vdash (\forall x)(P(x)\to Q(x))\to((\exists x)P(x)\to(\exists x)Q(x))$　　变元易名

(4) 先证$\to$

① $\vdash (\forall x)P(x)\to P(y)$　　公理

② $\vdash (\forall x)(P\lor P(x))\to P\lor P(y)$　　代入$\dfrac{P(\Delta)}{P\lor P(\Delta)}$

③ $\vdash (\forall x)(P\lor P(x))\to(\neg P\to P(y))$　　定义

④ $\vdash (\forall x)(P\lor P(x))\land\neg P\to P(y)$　　条件合取

⑤ $\vdash (\forall x)(P\lor P(x))\land\neg P\to(\forall y)P(y)$　　后件概括

⑥ $\vdash (\forall x)(P\lor P(x))\land\neg P\to(\forall x)P(x)$　　变元易名

⑦ $\vdash (\forall x)(P\lor P(x))\to(\neg P\to(\forall x)P(x))$　　逆条件合取

⑧ $\vdash (\forall x)(P\lor P(x))\to P\lor(\forall x)P(x)$　　定义

再证$\leftarrow$

① $\vdash (\forall x)P(x)\to P(y)$　　公理

② $\vdash P\lor(\forall x)P(x)\to P\lor P(y)$　　公理

③ $\vdash P\lor(\forall x)P(x)\to(\forall y)(P\lor P(y))$　　后件概括

④ $\vdash P\lor(\forall x)P(x)\to(\forall x)(P\lor P(x))$　　变元异名

2. 依自然演绎系统证明

(1) $(\exists x)A(x)\vdash(\exists y)A(y)$

(2) $(\exists x)A(x)\vdash\neg(\forall x)\neg A(x)$

(3) $(\forall x)\neg A(x)\vdash\neg(\exists x)A(x)$

(4) $(\forall x)(A(x)\to B(x)),(\forall x)A(x)\vdash(\forall x)B(x)$

证明:

(1)

① $A(a)$　　取 a 为不在 $A(x)$ 中出现

② $(\exists y)A(y)$　　规则 15

③ $(\exists x)A(x)$　　前提

④ $(\exists y)A(y)$ 规则 14,因 $1\vdash 2$ 有 $3\vdash 4$

(2)

① $A(a)$ 取 a 为不在 $A(x)$ 中出现

② $(\forall x)\neg A(x)$

③ $A(a)$ 由①②依规则 1

④ $\neg A(a)$ 由②依规则 12

⑤ $\neg(\forall x)\neg A(x)$ 由 $1,2\vdash 3,4$ 依规则 3

⑥ $(\exists x)A(x)$ 前提

⑦ $\neg(\forall x)\neg A(x)$ 因 $1\vdash 5$,依规则 14 有 $6\vdash 7$

(3)

① $(\forall x)\neg A(x)$ 前提

② $A(a)$ 取 a 为不在 $A(x)$ 中出现

③ $\neg A(a)$ 由①依规则 12

④ $\neg(\exists x)A(x)$ 由②③依 $A,\neg A\vdash B$

⑤ $(\exists x)A(x)$

⑥ $\neg(\exists x)A(x)$ 因 $2\vdash 4$,由规则 14 有 $5\vdash 6$

⑦ $\neg(\exists x)A(x)$ 由 $1,5\vdash 5,6$,依规则 3 有 $1\vdash 7$

(4)

$(\forall x)(A(x)\to B(x)),(\forall x)A(x)\vdash(\forall x)B(x)$

① $(\forall x)(A(x)\to B(x))$ 前提

② $A(a)\to B(a)$ 由 1 依规则 12

③ $(\forall x)A(x)$ 前提

④ $A(a)$ 由 3 依规则 12

⑤ $B(a)$ 由 2,4 依规则 8

⑥ $(\forall x)B(x)$ 因 $1\vdash 5$,依规则 13 有 $1\vdash 5$

第9章 习题解答

1. 列出下列各集合所有的元素

(1) $A_1=\{x|x\in\mathbf{Z}\wedge 3<x<9\}$；

(2) $A_2=\{x|x$ 是十进制数中的一位数字$\}$；

(3) $A_3=\{x|x=2\vee x=5\}$；

(4) $A_4=\{z|z=\{x,y\}\wedge x\in\mathbf{Z}\wedge y\in\mathbf{Z}\wedge 0\leqslant x\leqslant 2\wedge -2\leqslant y\leqslant 1\}$.

解：

(1) $A_1=\{4,5,6,7,8\}$

(2) $A_2=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

(3) $A_3=\{2,5\}$

(4) $A_4=\left\{\begin{array}{l}\{0,-2\},\{0,-1\},\{0,0\},\{0,1\},\\ \{1,-2\},\{1,-1\},\{1,1\},\\ \{2,-2\},\{2,-1\},\{2,0\},\{2,1\}\end{array}\right\}$

2. 写出下列集合的表达式

(1) 小于5的非负整数的集合.

(2) 10的整数倍的集合.

(3) 奇整数的集合.

(4) $\{3,5,7,11,13,17,19,23,29,\cdots\}$.

解：

(1) $A=\{x|x\in\mathbf{Z}\wedge 0\leqslant x<5\}$

(2) $A=\{x|x=10k\wedge k\in\mathbf{Z}\}$

(3) $A=\{x|x=2k+1\wedge k\in\mathbf{Z}\}$

(4) $A=\{x|x\neq 2\wedge x$ 为质数$\}$

或 $A=\left\{x\,\middle|\,\begin{array}{l}x>2\wedge x\in N\wedge\neg(\exists m)(\exists n)\\ (x=mn\wedge m\geqslant 2\wedge n\geqslant 2\wedge m\neq n\wedge m\in N\wedge n\in N)\end{array}\right\}$

或 $A=\left\{x|x\in N\wedge(\forall y)((y\in N\wedge y>2)\to(x/y\notin N-\{1\}))\right\}$

3. 给出集合 A、B 和 C 的例子，使 $A\in B,B\in C$ 但 $A\notin C$.

解： 例如 $A=\{1\},B=\{\{1\},2\},C=\{\{\{1\},2\},2\}$

满足 $A\in B,B\in C$ 但 $A\notin C$.

4. 给出集合 A、B 和 C 的例子，使 $A\in B,B\in C$ 且 $A\in C$.

解： 例如 $A=\{1\}, B=\{\{1\},2\}, C=\{\{\{1\},2\},\{1\}\}$

满足 $A\in B, B\in C$ 且 $A\in C$.

5. 确定下列命题是否为真

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$.

(2) $\varnothing\in\varnothing$.

(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$.

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

(5) $\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing\}$.

(6) $\{\varnothing\}\in\{\varnothing\}$.

(7) $\{\varnothing\}\subseteq\{\{\varnothing\}\}$.

(8) $\{\varnothing\}\in\{\{\varnothing\}\}$.

(9) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$.

(10) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$.

(11) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{\{a,b\}\}\}$.

(12) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{\{a,b\}\}\}$.

解： 上述命题中(1)(3)(4)(5)(8)(9)(11)为真.

6. 对任意的集合 A、B 和 C，下列命题是否为真. 若真则证明之，若假则举出反例.

(1) 若 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\in C$.

(2) 若 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

(3) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$，则 $A\in C$.

(4) 若 $A\in B$ 且 $B\not\subseteq C$，则 $A\notin C$.

解：

(1) 该命题为真

证明：

方法一：

由 $B\subseteq C$ 得，

$(\forall x)(x\in B\rightarrow x\in C)$

而 $A\in B$

所以 $A\in C$.

方法二：

$A\in B\wedge B\subseteq C$

$\Rightarrow A\in B\wedge(\forall x)(x\in B\rightarrow x\in C)$

$\Rightarrow A\in C$

(2) 该命题为假

例如，$A=\{1\}, B=\{\{1\},2\}, C=\{\{1\},2,3\}$

满足 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$，但 $A\not\subseteq C$.

(3) 该命题为假

例如，$A=\{1\},B=\{1,2\},C=\{\{1,2\},3\}$

满足 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$，但 $A\notin C$.

(4) 该命题为假

例如，$A=\{1\},B=\{\{1\},2\},C=\{\{1\},3\}$

若 $A\in B$ 且 $B\not\subseteq C$，但 $A\in C$.

7. 写出下列集合的幂集和笛卡儿积

(1) $\{\{a\},a\}$的幂集.

(2) $\{\{1,\{2\}\}\}$的幂集.

(3) $\{\varnothing,a,\{b\}\}$的幂集.

(4) $\{a,b,c\}\times\{a,b\}$.

(5) $P(P(\varnothing))\times P(P\varnothing))$.

解：

(1) $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{\{a\},a\}\}$

(2) $P(A)=\{\varnothing,\{\{1,\{2\}\}\}\}$

(3) $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\{b\}\},\{\varnothing,a\},\{\varnothing,\{b\}\},\{a,\{b\}\},\{\varnothing,a,\{b\}\}\}$

(4) $P(A)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle$

(5) $P(P(\varnothing))\times P(P(\varnothing))$

$=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\times\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$=\{\langle\varnothing,\varnothing\rangle,\langle\varnothing,\{\varnothing\}\rangle,\langle\{\varnothing\},\varnothing\rangle,\langle\{\varnothing\},\{\varnothing\}\rangle\}$

8. 设 $B=P(P(P(\varnothing)))$

(1) 是否$\varnothing\in B$? 是否$\varnothing\subseteq B$?

(2) 是否$\{\varnothing\}\in B$? 是否$\{\varnothing\}\subseteq B$?

(3) 是否$\{\{\varnothing\}\}\in B$? 是否$\{\{\varnothing\}\}\subseteq B$?

解：

$B=P(P(P(\varnothing)))$

$=P(P(\{\varnothing\}))$

$=P(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})$

$=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

(1) $\varnothing\in B,\varnothing\subseteq B$

(2) $\{\varnothing\}\in B,\{\varnothing\}\subseteq B$

(3) $\{\{\varnothing\}\}\in B,\{\{\varnothing\}\}\subseteq B$

9. 画出下列集合的文氏图

(1) $(-A)\cap(-B)$.

(2) $A\cap(-B\cup -C)$.

(3) $A\oplus(B\cup C)$.

解:

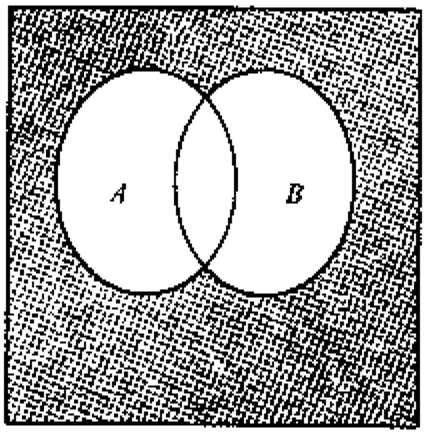


图 9.9.1

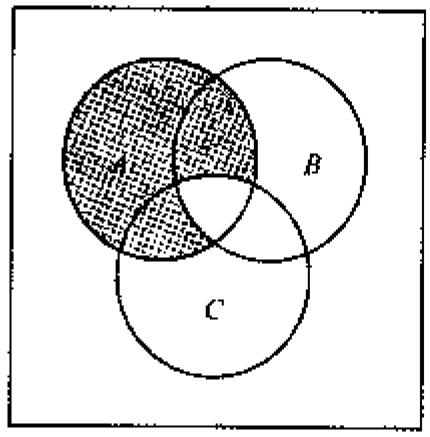


图 9.9.2

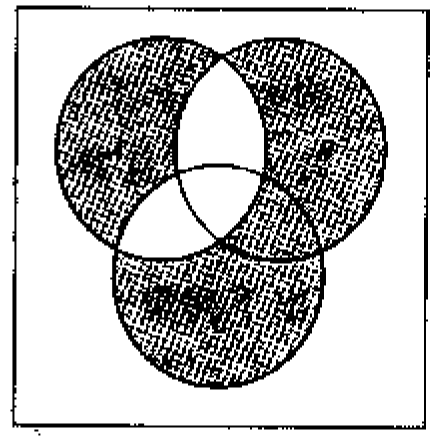


图 9.9.3

10. 用公式表示下列文氏图中的集合

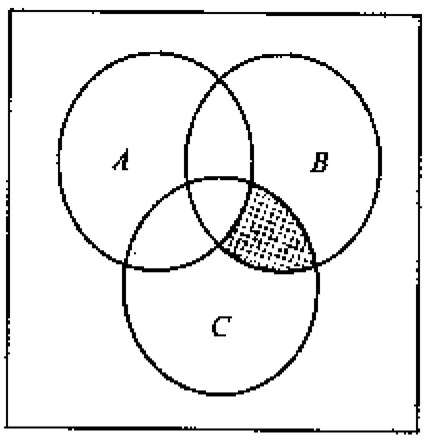


图 9.10.1

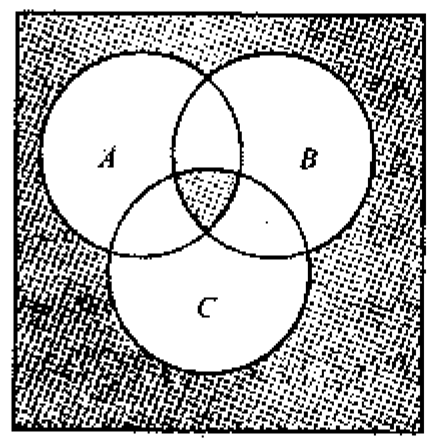


图 9.10.2

解:

(1) $(B\cap C)-A$

(2) $(A\cap B\cap C)\cup-(A\cup B\cup C)$

或$(A\cap B\cap C)\cup(-A\cap -B\cap -C)$

或$-(A\cup B\cup C-A\cap B\cap C)$

11. 化简下列各式

(1) $\varnothing\cap\{\varnothing\}$.

(2) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\varnothing$.

(3) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\varnothing\}$.

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\{\varnothing\}\}$.

解:

(1) $\varnothing\cap\{\varnothing\}=\varnothing$

(2) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\varnothing=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

(3) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\varnothing\}=\{\{\varnothing\}\}$

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing\}$

12. 设全集 $E=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$. 求下列集合.

(1) $A\cap -B$.

(2) $(A\cap B)\cup -C$.

(3) $-(A\cap B)$.

(4) $P(A)\cap P(B)$.

(5) $P(A)-P(B)$.

解:

(1) $A\cap -B=\{1,4\}\cap\{3,4\}=\{4\}$

(2) $(A\cap B)\cup -C=(\{1,4\}\cap\{1,2,5\})\cup\{1,3,5\}=\{1,3,5\}$

(3) $-(A\cap B)=-(\{1,4\}\cap\{1,2,5\})=\{2,3,4,5\}$

(4) $P(A)\cap P(B)$

$=\{\varnothing,\{1\},\{4\},\{1,4\}\}\cap\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{5\},\{1,2\},\{1,5\},\{2,5\},\{1,2,5\}\}$

$=\{\varnothing,\{1\}\}$

(5) $P(A)-P(B)$

$=\{\varnothing,\{1\},\{4\},\{1,4\}\}-\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{5\},\{1,2\},\{1,5\},\{2,5\},\{1,2,5\}\}$

$=\{\{4\},\{1,4\}\}$

13. 给定 $\mathbf{N}$ 的下列子集 A、B、C、D 为

$A=\{1,2,7,8\}$,

$B=\{x\mid x^2<50\}$,

$C=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 20\land x$ 可被 3 整除$\}$,

$D=\{x\mid x=2^k\land K\in\mathbf{N}\land 0\leqslant K\leqslant 5\}$.

列出下列集合的所有元素。

(1) $A\cup(B\cup(C\cup D))$.

(2) $A\cap(B\cap(C\cap D))$.

(3) $B-(A\cup C)$.

(4) $(B-A)\cup D$.

解:

$A=\{1,2,7,8\}$

$B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$C=\{0,3,6,9,12,15,18\}$

$D=\{1,2,4,8,16,32\}$

(1) $A\cup(B\cup(C\cup D))=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,16,18,32\}$

(2) $A\cap(B\cap(C\cap D))=\varnothing$

(3) $B-(A\cup C)=\{4,5\}$

(4) $(B-A)\cup D=\{0,1,2,3,4,5,6,8,16,32\}$

14. 写出下列集合

(1) $\bigcup\{\{3,4\},\{\{3\},\{4\}\},\{3,\{4\}\},\{\{3\},4\}\}$.

(2) $\bigcap\{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\}\}$.

解:

(1) $\bigcup\{\{3,4\},\{\{3\},\{4\}\},\{3,\{4\}\},\{\{3\},4\}\}=\{3,4,\{3\},\{4\}\}$.

(2) $\bigcap\{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\}\}=\{3\}$

15. 写出下列集合. 其中:$PP(A)=P(P(A))$,$PPP(A)=P(P(P(A)))$.

(1) $\bigcup\{PPP\{\varnothing\},PP\{\varnothing\},P\{\varnothing\},\varnothing\}$.

(2) $\bigcap\{PPP\{\varnothing\},PP\{\varnothing\},P\{\varnothing\}\}$.

解:

$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$

$PP(\varnothing)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$PPP(\varnothing)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

(1) $\bigcup\{PPP\{\varnothing\},PP\{\varnothing\},P\{\varnothing\},\varnothing\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

(2) $\bigcap\{PPP\{\varnothing\},PP\{\varnothing\},P\{\varnothing\}\}=\{\varnothing\}$

16. 设 $A=\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$. 写出集合

(1) $P(A)$和$\bigcup P(A)$.

(2) $\bigcup A$ 和 $P(\bigcup A)$.

解:

(1) $P(A)=\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\},\{\{\{\varnothing\}\}\},\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}\}$

$\bigcup P(A)=\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$

(2) $\bigcup A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$P(\bigcup A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

17. 设 A、B 和 C 是任意的集合,证明:

(1) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$.

(2) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.

(3) $A=B\Leftrightarrow A\oplus B=\varnothing$.

(4) $A\subseteq C\wedge B\subseteq C\Leftrightarrow A\cup B\subseteq C$.

(5) $C\subseteq A\wedge C\subseteq B\Leftrightarrow C\subseteq A\cap B$.

(6) $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subseteq -B\Leftrightarrow B\subseteq -A$.

证明:

(1) 方法一:

$$(A-B)-C=A\cap -B\cap -C$$
$$=A\cap -(B\cup C)$$
$$=A-(B\cup C)$$

方法二：

对于任意的 x

$$x\in (A-B)-C=x\in A\wedge x\in -B\wedge x\in -C$$
$$=x\in A\wedge x\in -B\cap -C$$
$$=x\in A\wedge x\in -(B\cup C)$$
$$=x\in A-(B\cup C)$$

(2)

$$(A-C)-(B-C)=(A\cap -C)\cap -(B\cap -C)$$
$$=A\cap -C\cap (-B\cup C)$$
$$=(A\cap -C\cap -B)\cup (A\cap -C\cap C)$$
$$=((A-B)-C)\cup\varnothing$$
$$=(A-B)-C$$

(3)

$$A=B\Rightarrow A\oplus B=(A-B)\cup (B-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$$
$$A\oplus B=\varnothing\Leftrightarrow (A-B)\cup (B-A)=\varnothing$$
$$\Leftrightarrow A-B=\varnothing\wedge B-A=\varnothing$$
$$\Leftrightarrow A=B$$

(4) 方法一：

① 设 $A\subseteq C\wedge B\subseteq C$,对任意的 x

$x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B\Rightarrow x\in C$

所以,$A\cup B\subseteq C$.

② 设 $A\cup B\subseteq C$,

对任意的 x,$x\in A\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in C$,所以 $A\subseteq C$.

对任意的 x,$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in C$,所以 $B\subseteq C$.

因此,$A\subseteq C\wedge B\subseteq C$.

从而,$A\subseteq C\wedge B\subseteq C\Leftrightarrow A\cup B\subseteq C$ 得证.

方法二：

$$A\subseteq C\wedge B\subseteq C\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\rightarrow x\in C)\wedge (\forall x)(x\in B\rightarrow x\in C)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\rightarrow x\in C)\wedge (x\in B\rightarrow x\in C)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)((x\in A\vee x\in B)\rightarrow x\in C)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\cup B\rightarrow x\in C)$$
$$\Leftrightarrow A\cup B\subseteq C$$

方法三：

$A\subseteq C\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\cup B\subseteq C\cup C\Rightarrow A\cup B\subseteq C$

$A\cup B\subseteq C \Rightarrow ((A\cup B)\cap A\subseteq C\cap A)\wedge((A\cup B)\cap B\subseteq C\cap B)$

$\Rightarrow(A\subseteq C\cap A)\wedge(B\subseteq C\cap B)$

$\Rightarrow A\subseteq C\wedge B\subseteq C$

(5) 方法一：

① 设 $C\subseteq A\wedge C\subseteq B$,对任意的 x

$x\in C\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in A\cap B$

所以,$C\subseteq A\cap B$.

② 设 $C\subseteq A\cap B$,对任意的 x

$x\in C\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow x\in A\wedge x\in B$

所以,$C\subseteq A\wedge C\subseteq B$.

从而,$C\subseteq A\wedge C\subseteq B\Leftrightarrow C\subseteq A\cap B$ 得证.

方法二：

$C\subseteq A\wedge C\subseteq B\Leftrightarrow(\forall x)(x\in C\rightarrow x\in A)\wedge(\forall x)(x\in C\rightarrow x\in B)$

$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in C\rightarrow x\in A)\wedge(x\in C\rightarrow x\in B)$

$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in C\rightarrow(x\in A\wedge(x\in B))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in C\rightarrow x\in A\cap B)$

$\Leftrightarrow C\subseteq A\cap B$

(6)

① 设 $A\cap B=\varnothing$,对任意的 x

$x\in A\Rightarrow x\in A-\varnothing\Rightarrow x\in A-A\cap B\Rightarrow x\in -(A\cap B)\Rightarrow x\in -B$

所以,$A\subseteq -B$.

② 设 $A\subseteq -B$,对任意的 x

$x\in B\Rightarrow x\notin -B\Rightarrow x\notin A\Rightarrow x\in -A$

所以,$B\subseteq -A$.

③ 设 $B\subseteq -A$,对任意的 x

$x\in A\Rightarrow x\notin -A\Rightarrow x\notin B\Rightarrow x\in A\cap B$

所以,$A\cap B=\varnothing$.

从而,$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subseteq -B\Leftrightarrow B\subseteq -A$ 得证.

18. 满足下列条件的集合 A 和 B 有什么关系?

(1) $A-B=B$.

(2) $A-B=B-A$.

(3) $A\cap B=B\cup A$.

(4) $A\oplus B=A$.

解:

(1) $A=B=\varnothing$

(2) $A=B$

(3) $A=B$

(4) $B=\varnothing$

19. 给出下列命题成立的充要条件

(1) $(A-B)\cup(A-C)=A$,

(2) $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$,

(3) $(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$,

(4) $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$.

解:

(1) 证明:充要条件为 $A\cap B\cap C=\varnothing$或 $A\subseteq-(B\cap C)$

① 设$(A-B)\cup(A-C)=A$,对任意的 x

$$\begin{aligned} x\in A &\Rightarrow x\in A-B\vee x\in A-C \\ &\Rightarrow x\in A\cap -B\vee x\in A\cap -C \\ &\Rightarrow x\in -B\vee x\in -C \\ &\Rightarrow x\in -B\cup -C \\ &\Rightarrow x\notin B\cap C \end{aligned}$$

所以,$A\cap B\cap C=\varnothing$.

② 设 $A\cap B\cap C=\varnothing$,

对任意的 x

$$\begin{aligned} x\in A &\Rightarrow x\notin B\vee x\notin C \\ &\Rightarrow x\in -B\vee x\in -C \\ &\Rightarrow x\in A\cap -B\vee x\in A\cap -C \\ &\Rightarrow x\in A-B\vee x\in A-C \\ &\Rightarrow x\in (A-B)\cup(A-C) \end{aligned}$$

所以,$A\subseteq(A-B)\cup(A-C)$.

对任意的 x

$$\begin{aligned} x\in (A-B)\cup(A-C) &\Rightarrow x\in A-B\vee x\in A-C \\ &\Rightarrow x\in A\cap -B\vee x\in A\cap -C \\ &\Rightarrow x\in A \end{aligned}$$

所以,$(A-B)\cup(A-C)=A$.

从而,$(A-B)\cup(A-C)=A\Leftrightarrow A\cap B\cap C=\varnothing$得证.

(2) 证明:充要条件为 $A\subseteq B\cap C$

$$\begin{aligned} &(A-B)\cup(A-C)=\varnothing \\ &\Leftrightarrow A-B=\varnothing\wedge A-C=\varnothing \\ &\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\subseteq C \\ &\Leftrightarrow A\subseteq B\cap C \end{aligned}$$

(3) 证明:充要条件为 $A\subseteq B\cup C$

① 设$(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$,对任意的 x

$x\in A\Rightarrow x\notin A-B\vee x\notin A-C$

$\Rightarrow x\in B\cup -A\vee x\in C\cup -A$

$\Rightarrow x\in B\vee x\in C$

$\Rightarrow x\in B\cup C$

所以,$A\subseteq B\cup C$.

② $A\subseteq B\cup C$

$\Rightarrow A\subseteq B\vee A\subseteq C$

$\Rightarrow A-B=\varnothing\vee A-C=\varnothing$

$\Rightarrow (A-B)\cap(A-C)=\varnothing$

从而,$(A-B)\cap(A-C)=\varnothing\Leftrightarrow A\subseteq B\cup C$ 得证。

(4) 证明:充要条件为 $A-B=A-C$ 或 $A\cap B=A\cap C$

$(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$

$\Leftrightarrow((A-B)-(A-C))\cup((A-C)-(A-B))=\varnothing$

$\Leftrightarrow(A-B)\subseteq(A-C)\wedge(A-C)\subseteq(A-B)$

$\Leftrightarrow(A-B)\subseteq(A-C)\wedge(A-C)\subseteq(A-B)$

$\Leftrightarrow A-B=A-C$

20. 给出集合 A 和 B 的例子,使$(\bigcap A)\cap(\bigcap B)\neq\bigcap(A\cap B)$.

解:

$A=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$,$B=\{\{1,2,3\}\}$

$\bigcap A=\{1\}$,$\bigcap B=\{1,2,3\}$

$(\bigcap A)\cap(\bigcap B)=\{1\}\cap\{1,2,3\}=\{1\}$

$\bigcap(A\cap B)=\bigcap\{\{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$

所以,$(\bigcap A)\cap(\bigcap B)\neq\bigcap(A\cap B)$

21. 对非空的集合的集合 A,证明 $A\subseteq P(\bigcup A)$.

解: 对非空的集合的集合 A,对任意的 $x\in A$

若 $x=\Phi$,则必有 $x\in P(\bigcup A)$

若 $x\neq\Phi$,则

$\forall y, y\in x\wedge y\in\bigcup A$

$\Rightarrow x\subseteq\bigcup A$

$\Rightarrow x\in P(\bigcup A)$

因此,有$(\forall x)(x\in A\rightarrow x\in P(\bigcup A))\Rightarrow A\subseteq P(\bigcup A)$

22. 证明集合 A 是传递集合当且仅当$\bigcup A\subseteq A$.

解: 方法一:

(1) 设 A 是传递集合，由定理 9.5.14 得 $\bigcup A$ 也是传递集合.

对任意的 x，$x \in \bigcup A \Rightarrow x \subseteq \bigcup A \Rightarrow x \in A$

所以，$\bigcup A \subseteq A$.

(2) 设 $\bigcup A \subseteq A$，对任意的 x 和 y

$x \in y \wedge y \in \bigcup A \Rightarrow x \in y \wedge (y \subseteq A \vee y \in A) \Rightarrow x \in A$

所以，A 是传递集合.

从而，集合 A 是传递集合当且仅当 $\bigcup A \subseteq A$ 得证.

方法二：

A 是传递集合

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in y \wedge y \in A \rightarrow x \in A)$

$\Leftrightarrow (\forall x)((\exists y)(x \in y \wedge y \in A \rightarrow x \in A))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in \bigcup A \rightarrow x \in A)$

$\Leftrightarrow \bigcup A \subseteq A$

23. 设 $A=\{a,b\}$，写出集合 $P(A) \times A$.

解：

$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$$P(A) \times A = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\} \times \{a,b\}$$
$$=\{\langle\varnothing,a\rangle,\langle\varnothing,b\rangle,\langle\{a\},a\rangle,\langle\{a\},b\rangle,\langle\{b\},a\rangle,\langle\{b\},b\rangle,\langle\{a,b\},a\rangle,\langle\{a,b\},b\rangle\}$$

24. 下列各式是否成立？成立的证明之，不成立的举反例.

(1) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

(2) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.

(3) $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$.

(4) $(A \oplus B) \times (C \oplus D) = (A \times C) \oplus (B \times D)$.

(5) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

(6) $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$.

解：

(1) 成立.

证明：对任意的$\langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle \in (A \cap B) \times (C \cap D)$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D)$

$\Leftrightarrow (\langle x,y\rangle \in A \times C) \wedge (\langle x,y\rangle \in B \times D)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in (A \times C) \cap (B \times D)$

(2) 不成立.

例如,$A=\{1\},B=\{2\},C=\{3\},D=\{4\}$

$(A\cup B)\times(C\cup D)=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

$(A\times C)\cup(B\times D)=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

(3) 不成立.

例如,$A=\{1,2\},B=\{1\},C=\{2,3\},D=\{3\}$

$(A-B)\times(C-D)=\{\langle 2,2\rangle\}$

$(A\times C)-(B\times D)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$

(4) 不成立.

例如,$A=\{1,2\},B=\{1\},C=\{2,3\},D=\{3\}$

$(A\oplus B)\times(C\oplus D)=\{\langle 2,2\rangle\}$

$(A\times C)\oplus(B\times D)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$

(5) 成立.

证明:对任意的$\langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle\in(A-B)\times C$

$\Leftrightarrow x\in A-B\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow x\in A\cap -B\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in -B)\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge -(x\in B\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\in A\times C)\wedge -(\langle x,y\rangle\in B\times C)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)-(B\times C)$

(6) 成立.

证明:

$(A\oplus B)\times C$

$=((A-B)\cup(B-A))\times C$

$=((A-B)\times C)\cup((B-A)\times C)$

$=((A\times C)-(B\times C))\cup((B\times C)-(A\times C))$

$=(A\times C)\oplus(B\times C)$

25. 证明:若 $A\times B=A\times C$ 且 $A\neq\varnothing$,则 $B=C$.

证明:

$A\times B=A\times C\wedge A\neq\varnothing$

$\Leftrightarrow(A\times B\subseteq A\times C\wedge A\neq\varnothing)\wedge(A\times B\supseteq A\times C\wedge A\neq\varnothing)$

$\Rightarrow B\subseteq C\wedge B\supseteq C$

$\Leftrightarrow B=C$

26.

(1) 若 $A\times B=\varnothing$，则 A 和 B 应满足什么条件.

(2) 对集合 A，是否可能 $A=A\times A$

解：

(1) $A\times B=\varnothing$

$\Rightarrow\{\langle x,y\rangle\mid x\in A,y\in B\}=\varnothing$

$\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing$

(2) 当 $A=\varnothing$ 时，$A=A\times A$.

当 $A\neq\varnothing$ 时，$A\neq A\times A$.

27. 足球队有 38 人，篮球队有 15 人，排球队有 20 人，三个队队员共 58 人，其中 3 人同时参加三个队，问同时参加两个队的人有几个.

解： 设 A、B、C 分别表示足球队、篮球队和排球队成员的集合. 则有

$$|A|=38,|B|=15,|C|=20,|A\cup B\cup C|=58,|A\cap B\cap C|=3$$

同时参加(包括同时参加三个队)两个队的人数为：

$$\begin{aligned}&|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-2|A\cap B\cap C|\\&=|A|+|B|+|C|-|A\cup B\cup C|-|A\cap B\cap C|\\&=38+15+20-58-3\\&=12\end{aligned}$$

同时参加(不包括同时参加三个队)两个队的人数为：

$$\begin{aligned}&|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-3|A\cap B\cap C|\\&=|A|+|B|+|C|-|A\cup B\cup C|-2|A\cap B\cap C|\\&=38+15+20-58-6\\&=9\end{aligned}$$

28. 求 1 到 250 之间能被 2、3、5 中任何一个整除的整数的个数.

解： 设 A、B、C 表示 1 到 250 之间分别能被 2、3、5 整除的整数的个数. 则有

$$|A|=125,|B|=83,|C|=50$$

$$|A\cap B|=41,|A\cap C|=25,|B\cap C|=16,|A\cap B\cap C|=8$$

$$\begin{aligned}&|A\cup B\cup C|\\&=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\\&=125+83+50-41-25-16+8\\&=184\end{aligned}$$

29. 设 A 是集合，不使用无序对集合存在公理证明 $\{A\}$ 是集合.

证明： 由空集存在公理知 Φ 是集合，再由幂集公理知 $P(\Phi)=\{\Phi\}$ 是集合，令集合 $t=\{\Phi\}$，定义谓词公式 $P(x,y)$ 为 $P(\Phi,A)=T$，则 t 和 $P(x,y)$ 满足替换公理的前

提，由替换公理可得存在由 A 组成的集合 $\{A\}$.

30. 证明不存在集合 A_1,A_2,A_3,A_4 使

$A_4\in A_3\wedge A_3\in A_2\wedge A_2\in A_1\wedge A_1\in A_4$.

证明： 利用反证法，若存在集合 A_1、A_2、A_3、A_4 满足条件，由无序对集合存在公理可知 $\{A_1,A_2\}$，$\{A_3,A_4\}$ 均为集合，再次使用该定理可知 $\{\{A_1,A_2\},\{A_3,A_4\}\}$ 为集合，再由并集合公理可知 $B=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ 为集合，由 $A_1\in A_4$ 及 $A_1\in B$ 可知 $A_1\in A_4\cap B$，即 $A_4\cap B\neq\Phi$，同理 $A_1\cap B\neq\Phi$，$A_2\cap B\neq\Phi$，$A_3\cap B\neq\Phi$，显然与正则公理矛盾. 所以前提不成立，即不存在这样的 A_1、A_2、A_3、A_4.

31. 证明不存在由所有单元素集合组成的集合.

证明： 利用反证法，假设存在由所有单元素集合组成的集合，设其为 A，由无序对集合存在公理可知 $\{A\}$ 为集合，同理可知 $\{A,\{A\}\}$ 为集合，设其为 B，有 $A\in B$，$A\in\{A\}$，则 $\{A\}\cap B\neq\Phi$，同理，有 $\{A\}\in A$，$\{A\}\in B$，$A\cap B\neq\Phi$，显然与正则公理矛盾，所以前提不成立，即不存在由所有单元素集合组成的集合.

32. 证明存在所有素数组成的集合.

证明： 由无穷公理可知存在自然数集 N，设谓词公式 $P(x)$ 表示"x 为素数"，由子集公理 $(\exists A)(\forall x)(x\in A\leftrightarrow x\in N\wedge P(x))$，即存在集合 $A=\{x\mid x \text{ 为素数}, x\in N\}$，即存在由所有素数组成的集合.

33. 证明若 A 是传递集合，则 A^+ 是传递集合.

证明： 由 $A^+=A\cup\{A\}$，对于任意的 x

$$
\begin{aligned}
x\in A^+ &\Rightarrow x\in A\vee x\in\{A\}\\
&\Rightarrow x\subseteq A\vee x=A\\
&\Rightarrow x\subseteq A^+
\end{aligned}
$$

所以，A^+ 是传递集合，原题得证.

34. 判断下列集合是否传递集合，是否有三岐性.

(1) $\{1,2,3\}$.

(2) $\{0,1,\{1\}\}$.

解：

(1) 因为 $0\notin\{1,2,3\}$，所以 $\{1,2,3\}$ 不是传递集合.

因为 $1\in 2$，$2\in 3$，$1\in 3$，所以 $\{1,2,3\}$ 有三岐性.

(2) 因为 $0\in\{0,1,\{1\}\}$，所以 $\{0,1,\{1\}\}$ 为传递集合.

因为 $0\notin\{1\}$，$\{1\}\notin 0$，$\{1\}\neq 0$，所以 $\{0,1,\{1\}\}$ 无三岐性.

第10章　习题解答

1. 列出下列关系 R 的元素.

(1) $A=\{0,1,2\}, B=\{0,2,4\}, R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\cap B\}$.

(2) $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{1,2,3\}, R=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\land y\in B\land x=y^2\}$.

解:

(1) $R=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

(2) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

2. 设 $A=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}, B=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$.

求 $A\cup B, A\cap B, \mathrm{dom}(A), \mathrm{dom}(B), \mathrm{ran}(A), \mathrm{ran}(B), \mathrm{dom}(A\cup B), \mathrm{ran}(A\cap B)$.

解: $A\cup B=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

$A\cap B=\{\langle 2,4\rangle\}$

$\mathrm{dom}(A)=\{1,2,3\}$

$\mathrm{dom}(B)=\{1,2,4\}$

$\mathrm{ran}(A)=\{2,3,4\}$

$\mathrm{ran}(B)=\{2,3,4\}$

$\mathrm{dom}(A\cup B)=\{1,2,3,4\}$

$\mathrm{ran}(A\cap B)=\{4\}$

3. 证明: $\mathrm{dom}(R\cup S)=\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{dom}(S)$,

$\mathrm{dom}(R\cap S)\subseteq\mathrm{dom}(R)\cap\mathrm{dom}(S)$.

证明: 对任意的 x

$$\begin{aligned}
x\in\mathrm{dom}(R\cup S) &\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle\in R\cup S)\\
&\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle\in R\lor\langle x,y\rangle\in S)\\
&\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle\in R)\lor(\exists y)(\langle x,y\rangle\in S)\\
&\Leftrightarrow x\in\mathrm{dom}(R)\lor x\in\mathrm{dom}(S)\\
&\Leftrightarrow x\in\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{dom}(S)
\end{aligned}$$

所以, $\mathrm{dom}(R\cup S)=\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{dom}(S)$.

对任意的 x

$$\begin{aligned}
x\in\mathrm{dom}(R\cap S) &\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle\in R\cap S)\\
&\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle\in R\land\langle x,y\rangle\in S)\\
&\Rightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle\in R)\land(\exists y)(\langle x,y\rangle\in S)\\
&\Leftrightarrow x\in\mathrm{dom}(R)\land x\in\mathrm{dom}(S)\\
&\Leftrightarrow x\in\mathrm{dom}(R)\cap\mathrm{dom}(S)
\end{aligned}$$

所以, $\mathrm{dom}(R\cap S)\subseteq\mathrm{dom}(R)\cap\mathrm{dom}(S)$.

4. 设 $A=\{1,2,3\}$，在 A 上有多少不同的关系？设 $|A|=n$，在 A 上有多少不同的关系？

解：$A=\{1,2,3\}$时，A 上不同的关系有 $2^{3^2}=512$ 种.

$|A|=n$ 时，A 上不同的关系有 2^{n^2} 种.

5. 列出所有从 $A=\{a,b,c\}$到 $B=\{d\}$的关系.

解：$A\times B=\{\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$

$R_1=\varnothing$

$R_2=\{\langle a,d\rangle\}$

$R_3=\{\langle b,d\rangle\}$

$R_4=\{\langle c,d\rangle\}$

$R_5=\{\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle\}$

$R_6=\{\langle a,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$

$R_7=\{\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$

$R_8=\{\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$

6. 对 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n>2$，用二元关系定义 n 元关系.

解：$\langle x_1,x_2,x_3\rangle=\langle\langle x_1,x_2\rangle,x_3\rangle$

$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle=\langle\langle x_1,\cdots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle$

7. 对 $A=\{0,1,2,3,4\}$上的下列关系，给出关系图和关系矩阵.

(1) $R_1=\{\langle x,y\rangle\mid 2\leqslant x\land y\leqslant 2\}$，

(2) $R_2=\{\langle x,y\rangle\mid 0\leqslant x-y<3\}$，

(3) $R_3=\{\langle x,y\rangle\mid x$ 和 y 是互质的$\}$，

(4) $R_4=\{\langle x,y\rangle\mid x<y$ 或 x 是质数$\}$.

解：

(1) $\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\end{bmatrix}$

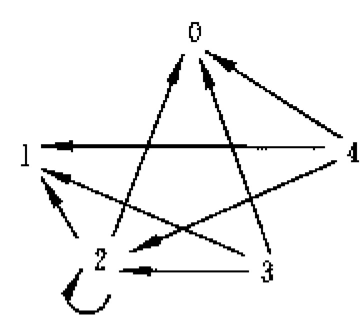


图 10.7.1

(2) $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$

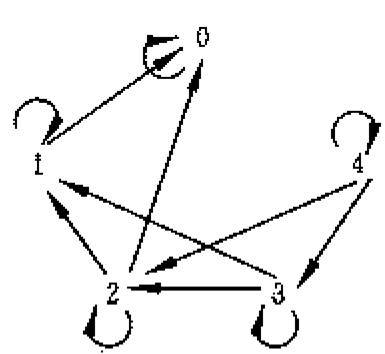


图 10.7.2

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

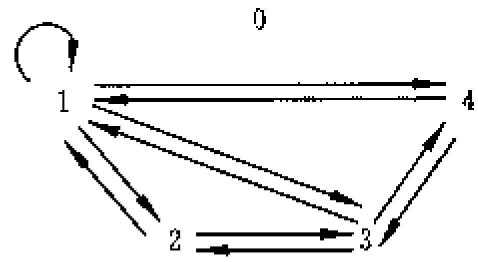


图 10.7.3

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

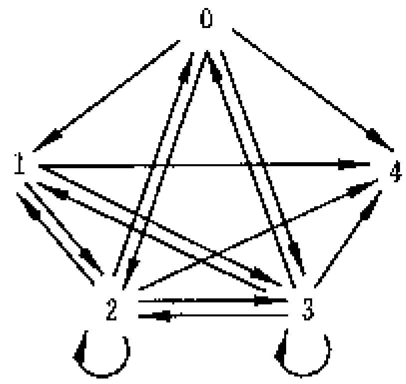


图 10.7.4

8. 设 $R=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$.

写出 $R\circ R, R\upharpoonright\{1\}, R^{-1}\upharpoonright\{1\}, R[\{1\}], R^{-1}[\{1\}]$.

解: $R\circ R=\{\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

$R\upharpoonright\{1\}=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

$R^{-1}\upharpoonright\{1\}=\{\langle 1,0\rangle\}$

$R[\{1\}]=\{2,3\}$

$R^{-1}[\{1\}]=\{0\}$

9. 设 $A=\{\langle\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\rangle,\langle\{\varnothing\},\varnothing\rangle\}$. 写出 $A\circ A, A^{-1}, A\upharpoonright\varnothing, A\upharpoonright\{\varnothing\}, A\upharpoonright\{\varnothing,\{\varnothing\}\}, A[\varnothing], A[\{\varnothing\}], A[\{\varnothing,\{\varnothing\}\}]$.

解: $A\circ A=\{\langle\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\rangle\}$

$A^{-1}=\{\langle\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\varnothing\rangle,\langle\varnothing,\{\varnothing\}\rangle\}$

$A\upharpoonright\varnothing=\varnothing$

$A\upharpoonright\{\varnothing\}=\{\langle\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\rangle\}$

$A\upharpoonright\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=\{\langle\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\rangle,\langle\{\varnothing\},\varnothing\rangle\}$

$A[\varnothing]=\varnothing$

$A[\{\varnothing\}]=\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

$A[\{\varnothing,\{\varnothing\}\}]=\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\varnothing\}$

10. 设 R,S 和 T 是 A 上的关系，证明 $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$.

证明: 对任意的 $\langle x,y\rangle$，

$\langle x,y\rangle\in R\circ(S\cup T)$

$\Leftrightarrow(\exists z)(\langle x,z\rangle\in S\cup T\wedge\langle z,y\rangle\in R)$

$\Leftrightarrow(\exists z)((\langle x,z\rangle\in S\vee\langle x,z\rangle\in T)\wedge\langle z,y\rangle\in R)$

$\Leftrightarrow(\exists z)((\langle x,z\rangle\in S\wedge\langle z,y\rangle\in R)\vee(\langle x,z\rangle\in T\wedge\langle z,y\rangle\in R))$

$\Leftrightarrow(\exists z)(\langle x,y\rangle\in R\circ S\vee\langle x,y\rangle\in R\circ T)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$

所以，$R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$.

11. 设 S 为 X 到 Y 的关系，T 为 Y 到 Z 的关系，A 为集合，B 为集合，证明：

(1) $S[A]\subseteq Y$,

(2) $(T\circ S)[A]=T[S[A]]$,

(3) $S[A\cup B]=S[A]\cup S[B]$,

(4) $S[A\cap B]\subseteq S[A]\cap S[B]$.

证明：

(1) 对任意的 y

$y\in S[A]$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\langle x,y\rangle\in S\wedge x\in A)$

$\Rightarrow(\exists x)(\langle x,y\rangle\in S)$

$\Rightarrow(\exists x)(x\in X\wedge y\in Y)$

$\Rightarrow y\in Y$

所以，$S[A]\subseteq Y$.

(2) 对任意的 z

$z\in(T\circ S)[A]$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\langle x,z\rangle\in(T\circ S)\wedge x\in A)$

$\Leftrightarrow(\exists x)((\exists y)(\langle x,y\rangle\in S\wedge\langle y,z\rangle\in T)\wedge x\in A)$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)(\langle x,y\rangle\in S\wedge\langle y,z\rangle\in T\wedge x\in A)$

$\Leftrightarrow(\exists y)((\exists x)(\langle x,y\rangle\in S\wedge x\in A)\wedge\langle y,z\rangle\in T)$

$\Leftrightarrow(\exists y)(y\in S[A]\wedge\langle y,z\rangle\in T)$

$\Leftrightarrow z\in T[S[A]]$

所以，$(T\circ S)[A]=T[S[A]]$.

(3) 对任意的 y

$y\in S[A\cup B]$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\langle x,y\rangle\in S\wedge x\in A\cup B)$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\langle x,y\rangle\in S\wedge(x\in A\vee x\in B))$

$\Leftrightarrow(\exists x)((\langle x,y\rangle\in S\wedge x\in A)\vee(\langle x,y\rangle\in S\wedge x\in B))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\langle x,y\rangle\in S\wedge x\in A)\vee(\exists x)(\langle x,y\rangle\in S\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow y\in S[A]\vee y\in S[B]$

$\Leftrightarrow y\in S[A]\cup S[B]$

所以，$S[A\cup B]=S[A]\cup S[B]$.

(4) 对任意的 y

$y\in S[A\cap B]$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\langle x,y\rangle\in S\wedge x\in A\cap B)$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\langle x,y\rangle\in S\wedge(x\in A\wedge x\in B))$

$\Leftrightarrow(\exists x)((\langle x,y\rangle\in S\wedge x\in A)\wedge(\langle x,y\rangle\in S\wedge x\in B))$

$\Rightarrow(\exists x)(\langle x,y\rangle\in S\wedge x\in A)\wedge(\exists x)(\langle x,y\rangle\in S\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow y\in S[A]\wedge y\in S[B]$

$\Leftrightarrow y\in S[A]\cap S[B]$

所以，$S[A\cap B]\subseteq S[A]\cap S[B]$.

12. 对 A 上的关系 R_1，集合 A_1 和 A_2，证明：

(1) $A_1\subseteq A_2\Rightarrow R_1[A_1]\subseteq R_1[A_2]$，

(2) $R_1\uparrow(A_1\cup A_2)=R_1\uparrow A_1\cup R_1\uparrow A_2$.

证明：

(1) 设 $A_1\subseteq A_2$，对任意的 y

$y\in R_1[A_1]$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge x\in A_1)$

$\Rightarrow(\exists x)(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge x\in A_2)$

$\Leftrightarrow y\subseteq R_1[A_2]$

所以，$A_1\subseteq A_2\Rightarrow R_1[A_1]\subseteq R_1[A_2]$.

(2) 对任意的$\langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle\in R_1\uparrow(A_1\cup A_2)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R_1\wedge x\in A_1\cup A_2$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R_1\wedge(x\in A_1\vee x\in A_2)$

$\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge x\in A_1)\vee(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge x\in A_2)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R_1\uparrow A_1\vee\langle x,y\rangle\in R_1\uparrow A_2$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R_1\uparrow A_1\cup R_1\uparrow A_2$

所以，$R_1\uparrow(A_1\cup A_2)=R_1\uparrow A_1\cup R_1\uparrow A_2$.

13. 对 A 到 B 的关系 R，$a\in A$，定义 B 的一个子集 $R(a)=\{b\mid aRb\}$.
在 $C=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$上定义

$R=\{\langle x,y\rangle\mid x<y\}$，

$S=\{\langle x,y\rangle\mid x-1<y<x+2\}$，

$T=\{\langle x,y\rangle\mid x^2\leqslant y\}$.

写出集合 $R(0)$，$R(1)$，$S(0)$，$S(-1)$，$T(0)$，$T(-1)$.

解： $R(0)=\{1,2,3,4\}$

$R(1)=\{2,3,4\}$

$S(0)=\{0,1\}$

$S(-1)=\{-1,0\}$

$T(0)=\{0,1,2,3,4\}$

$T(-1)=\{1,2,3,4\}$

14. 对命题:"集合 A 上的一个关系 R,如果是对称的和传递的,就一定是自反的. 因为 xRy 和 yRx 蕴含 xRx."依据定义找出错误. 在{1,2,3}上构造一个关系,它是对称的和传递的,但不是自反的.

解: 由定义:

R 是 A 上对称的$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((x\in A\wedge y\in A\wedge xRy)\rightarrow yRx)$

R 是 A 上传递的$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz)\rightarrow xRz)$

R 是 A 上自反的$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow xRx)$

因此,R 是 A 上对称的和传递的$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((x\in A\wedge y\in A\wedge xRy)\rightarrow xRx)$

因而,R 是 A 上对称的和传递的,但不一定是自反的.

例如,$R=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

15. 对集合 $A=\{1,2,3\}$上,下列 8 种关系图,说明每个关系具有的性质.

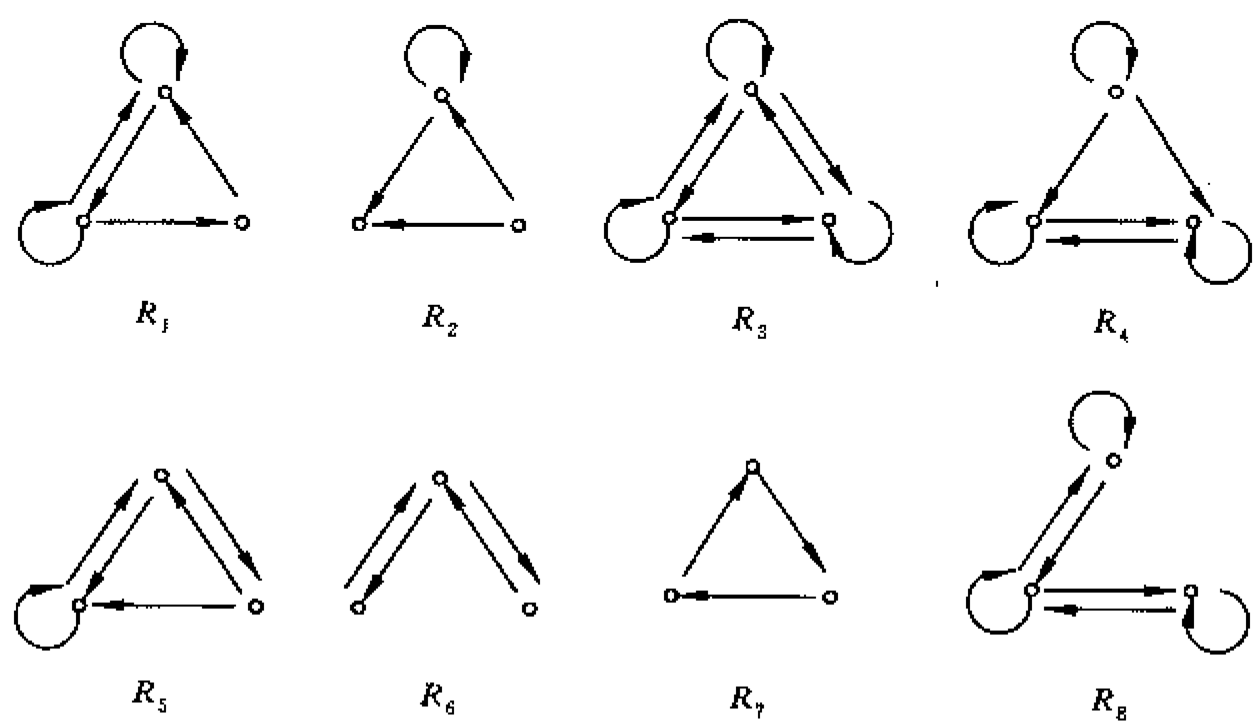


图 10.15

解: R_1 无任何关系

R_2 反对称、传递

R_3 对称、自反、传递

R_4 自反、传递

R_5 无任何关系

R_6 对称、非自反

R_7 反对称、非自反

R_8 对称、自反

16. 对集合 $A=\{1,2,\cdots,10\}$. A 上的关系 R 和 S 各有什么性质.

$R=\{\langle x,y\rangle\mid x+y=10\}$,

$S=\{\langle x,y\rangle\mid x+y$ 是偶数$\}$.

解: R 对称性,S 对称性、自反性和传递性.

17. 对 A 上的关系 R，证明

(1) R 是自反的 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$，

(2) R 是非自反的 $\Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing$，

(3) R 是传递的 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$.

证明：

(1) 设 R 是自反的，对任意的 $\langle x, y\rangle$

$\langle x, y\rangle \in I_A \Leftrightarrow x = y \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R$，即 $I_A \subseteq R$.

设 $I_A \subseteq R$，对任意的 x

$x \in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$，即 R 是自反的.

因而，R 是自反的 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$.

(2) 设 R 是非自反的，对任意的 $\langle x, y\rangle$

$\langle x, y\rangle \in I_A \Leftrightarrow x = y \Rightarrow \langle x, y\rangle \notin R$，即 $I_A \cap R = \varnothing$.

设 $I_A \cap R = \varnothing$，对任意的 x

$\langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \notin R$，即 R 是非自反的.

因而，R 是非自反的 $\Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing$.

(3) 设 R 是传递的，对任意的 $\langle x, y\rangle$

$\langle x, y\rangle \in R \circ R \Leftrightarrow (\exists z)(\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in R) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R$，即 $R \circ R \subseteq R$.

设 $R \circ R \subseteq R$，对任意的 $\langle x, z\rangle, \langle z, y\rangle \in R$，

$\langle x, y\rangle \in R \circ R \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R$，即设 R 是传递的.

因而，R 是传递的 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$.

18. 对 A 上的关系 R_1 和 R_2，判定下列命题的真假. 真的证明之，假的举反例.

(1) 若 R_1 和 R_2 是自反的，则 $R_1 \circ R_2$ 是自反的；

(2) 若 R_1 和 R_2 是非自反的，则 $R_1 \circ R_2$ 是非自反的；

(3) 若 R_1 和 R_2 是对称的，则 $R_1 \circ R_2$ 是对称的；

(4) 若 R_1 和 R_2 是传递的，则 $R_1 \circ R_2$ 是传递的。

解：

(1) 该命题为真.

证明：

对任意的 x

$\langle x, x\rangle \in R_1 \wedge \langle x, x\rangle \in R_2 \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R_1 \circ R_2$，即 $R_1 \circ R_2$ 是自反的.

(2) 该命题为假.

例如：

$R_1 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$，$R_2 = \{\langle 2,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$，

$R_1 \circ R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$.

(3) 该命题为假.

例如：

$R_1 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$，$R_2 = \{\langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$，

$R_1 \circ R_2 = \{\langle 3,1\rangle\}$.

(4) 该命题为假.

例如：

$R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，$R_2=\{\langle 3,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}$，

$R_1\circ R_2=\{\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$.

19. 对集合 $A=\{1,2,3\}$. 给出 A 上的关系 R 的例子，使它有下列性质.

(1) 对称的且反对称的且传递的，

(2) 不是对称的且不是反对称的且传递的.

解：

(1) $\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$或$\{\langle 1,1\rangle\}$

(2) $\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$

20. 对集合 $A=\{1,2,3,4\}$，A 上的关系 R 为

$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$.

说明 R 不是传递的. 构造 A 上的关系 R_1，使 $R\subseteq R_1$ 且 R_1 是传递的.

解：$\langle 1,2\rangle\in R$，$\langle 3,1\rangle\in R$，但是$\langle 3,2\rangle\notin R$. 因此，$R$ 不是传递的.

构造 $R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$，

满足 $R\subseteq R_1$ 且 R_1 是传递的.

21. 对集合 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$上的关系 R 的关系图如图 10.21 所示. 求出最小的自然数 m 和 n，使 $m<n$ 且 $R^m=R^n$.

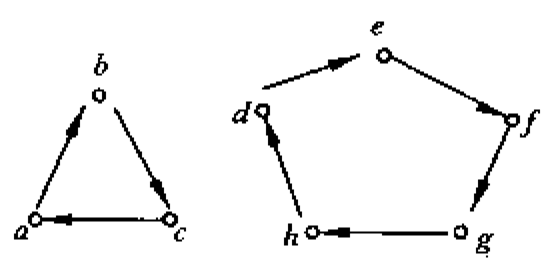


图 10.21

解：由图可知

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\ M(R_1^2)=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},$$

$$M(R_1^3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ M(R_1^4)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

所以，$R_1^k=R_1^{k+3}$.

$$M(R_2)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\ M(R_2^2)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M(R_2^3)=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\ M(R_2^4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$M(R_2^5)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ M(R_2^6)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，$R_2^k=R_2^{k+5}$.

$$M(R)=\begin{pmatrix}M(R_1)&0\\0&M(R_2)\end{pmatrix}$$

由 $R^m=R^n$ 可知，$M(R^m)=\begin{pmatrix}M(R_1^m)&0\\0&M(R_2^m)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M(R_1^n)&0\\0&M(R_2^n)\end{pmatrix}=M(R^n)$，

即 $R_1^m=R_1^n$ 且 $R_2^m=R_2^n$.

因此，满足 $m<n$ 且 $R^m=R^n$ 的最小自然数为 $m=0,n=3\times5=15$.

22. 对集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 上的两个关系

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,d\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,b\rangle\}$.

求 $R_1\circ R_2$，$R_2\circ R_1$，R_1^2，R_2^2.

解：$R_1\circ R_2=\{\langle c,d\rangle\}$,

$R_2\circ R_1=\{\langle a,d\rangle,\langle a,c\rangle\}$,

$R_1^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle\}$,

$R_2^2=\{\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$.

23. 对 $A=\{a,b,c\}$，给出 A 上的两个不同的关系 R_1 和 R_2，使 $R_1^2=R_2$ 且 $R_2^2=R_1$.

解：$R_1=\{\langle c,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$，$R_2=\{\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$.

24. $A=\{a,b,c,d,e\}$ 上的关系 R 的关系如图 10.24. 给出 $r(R)$，$s(R)$ 和 $t(R)$ 的关系图.

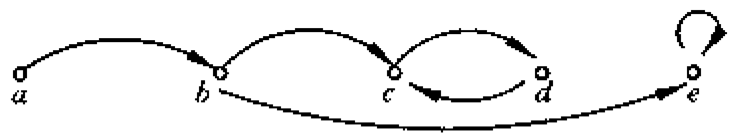


图　10.24

解:

$r(R)$

图　10.24.1

$s(R)$

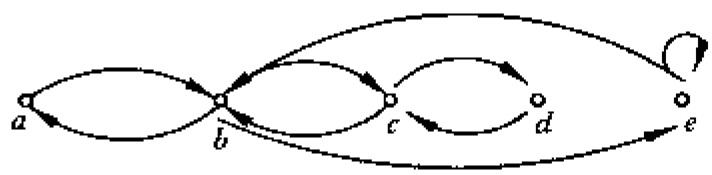


图　10.24.2

$t(R)$

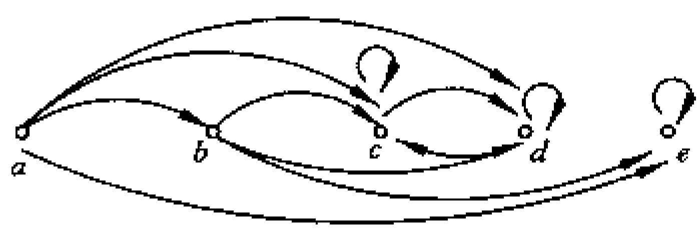


图　10.24.3

25. 证明定理 10.5.4(2)、定理 10.5.5(2)和定理 10.5.6(2).

证明:

(1) 定理 10.5.4(2):对非空集合 A 上的关系 R,R 是对称的$\Leftrightarrow s(R)=R$.

证明:

设 R 是对称的,因为 $R\subseteq R$,且任何包含 R 的对称关系 R'',有 $R\subseteq R''$.

所以,R 是满足 $s(R)$的定义,$s(R)=R$.

再设 $s(R)=R$,由 $s(R)$的定义,R 是对称的.

(2) 定理 10.5.5(2):

对非空集合 A 上的关系 R_1,R_2,若 $R_1\subseteq R_2$,则 $s(R_1)\subseteq s(R_2)$.

证明:

$R_1\subseteq R_2 \wedge R_2\subseteq s(R_2)\Rightarrow R_1\subseteq s(R_2)\Rightarrow s(R_1)\subseteq s(R_2)$

(3) 定理 10.5.6(2):

对非空集合 A 上的关系 R_1 和 R_2,若 $R_1\subseteq R_2$,则 $s(R_1)\cup s(R_2)=s(R_1\cup R_2)$.

证明:

因为 $s(R_1)$和 $s(R_2)$都是 A 上对称的关系,所以 $s(R_1)\cup s(R_2)$是 A 上对称的关系.
由 $R_1\subseteq s(R_1)$和 $R_2\subseteq s(R_2)$,有 $R_1\cup R_2\subseteq s(R_1)\cup s(R_2)$. 所以 $s(R_1)\cup s(R_2)$是包含 $R_1\cup R_2$ 的对称关系. 由对称闭包的定义,$s(R_1\cup R_2)\subseteq s(R_1)\cup s(R_2)$.

因为 $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$，有 $s(R_1) \subseteq s(R_1 \cup R_2)$. 类似的有 $s(R_2) \subseteq s(R_1 \cup R_2)$. 则 $s(R_1) \cup s(R_2) \subseteq s(R_1 \cup R_2)$.

26. 证明定理 10.5.11：对非空集合 A 上的关系 R，

(1) 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 是自反的.

(2) 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 是对称的.

(3) 若 R 是传递的，则 $r(R$ 是传递的.

证明：

(1) 先证明 $s(R)$ 是自反的.

对任意的 $x \in A$，如果 $\langle x,x\rangle \in R \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R \cup R^{-1} \Leftrightarrow \langle x,x\rangle \in s(R)$

再证明 $t(R)$ 是自反的.

对任意的 $x \in A$，如果 $\langle x,x\rangle \in R \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R \cup R^2 \cup \cdots \Leftrightarrow \langle x,x\rangle \in t(R)$

(2) 见主教材该定理的证明.

(3) 对任意的 $\langle x,y\rangle$，$\langle y,z\rangle$

$\langle x,y\rangle \in r(R) \land \langle y,z\rangle \in r(R) \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \cup R^0 \land \langle y,z\rangle \in R \cup R^0$

若 $x \neq y \neq z$，则有

$\langle x,y\rangle \in R \land \langle y,z\rangle \in R \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R \Rightarrow \langle x,z\rangle \in r(R)$

若 $x = y \neq z$，则有

$\langle x,x\rangle \in R^0 \land \langle x,z\rangle \in R \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R \cup R^0 \Rightarrow \langle x,z\rangle \in r(R)$

若 $x \neq y = z$，同理

若 $x = y = z$，显然成立.

27. 对 $A = \{a,b,c,d\}$ 上的关系

$R = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle\}$，

(1) 分别用矩阵运算和作图法求 $r(R)$，$s(R)$ 和 $t(R)$.

(2) 用 Warshall 算法求 $t(R)$.

解：

(1) $M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

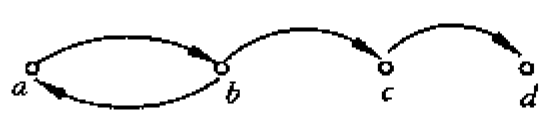


图 10.27.1

$M(r(R)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

图 10.27.2

$M(s(R)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，

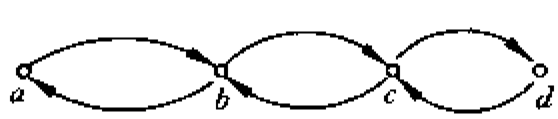


图 10.27.3

$$M(R^2)=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ M(R^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ M(R^4)=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M(t(R))=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

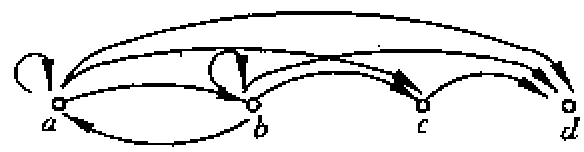


图 10.27.4

$$(2)\ M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B_3=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=M(R^+)=t(R).$$

28. 对有限集合 A,在 A 上给出最多个等价类和最少个等价类的等价关系各是什么?

解: 最多个等价类的等价关系是恒等关系 I_A,共有 $|A|$ 个等价类,

最少个等价类的等价关系是全关系 E_A,只有 1 个等价类.

29. 设 R 是 A 上传递和自反的关系,T 是 A 上的关系,$aTb \Leftrightarrow aRb \wedge bRa$. 证明 T 是等价关系.

证明: 自反关系:$aRa \wedge aRa \Leftrightarrow aTa$

对称关系:$aTb \Leftrightarrow aRb \wedge bRa \Leftrightarrow bRa \wedge aRb \Leftrightarrow bTa$

传递关系：$aTb \land bTc \Leftrightarrow (aRb \land bRa) \land (bRc \land cRb) \Leftrightarrow aRc \land cRa \Leftrightarrow aTc$

所以，T 是等价关系.

30. 对 $A=\{a,b,c,d\}$，R 是 A 上的等价关系，

$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$.

画 R 的关系图，求 A 中的各元素的等价类.

解：

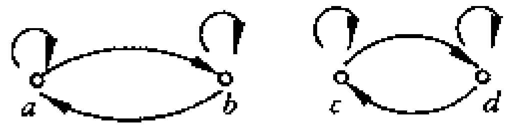


图 10.30

等价类为：$[a]_R=\{a,b\}=[b]_R$，$[c]_R=\{c,d\}=[d]_R$

31. 设 $\mathbf{Z}_+=\{x \mid x\in\mathbf{Z}\land x>0$，判定下列集合 π 是否构成 $\mathbf{Z}_+$ 的划分.

(1) $S_1=\{x \mid x\in\mathbf{Z}_+ \land x$ 是素数$\}$，$S_2=\mathbf{Z}_+-S_1$，$\pi=\{S_1,S_2\}$.

(2) $\pi=\{\{x\} \mid x\in\mathbf{Z}_+\}$.

解：

(1) 是

(2) 是

32. 对非空集合 A，$P(A)-\{\varnothing\}$是否构成 A 的划分.

解： 不是.

例如，$A=\{a,b\}$，则$\{a\}$，$\{a,b\}\in P(A)-\{\varnothing\}$. 但是$\{a\}\cap\{a,b\}=\{a\}\neq\varnothing$.

33. 有 4 个元素的集合上，不同的等价关系的数目是多少？

解： 若分为 4 个等价类，则有等价关系 1 个.

若分为 3 个等价类，则有等价关系 $C_4^2=6$ 个.

若分为 2 个等价类，则有等价关系 $C_4^1+\frac{1}{2}C_4^2=7$ 个.

若分为 1 个等价类，则有等价关系 1 个.

所以，共有等价关系 $1+6+7+1=15$ 个.

34. 设 R 和 S 是 A 上的关系，且

$S=\{\langle a,b\rangle \mid (\exists c)(aRc\land cRb)\}$

证明若 R 是等价关系，则 S 是等价关系.

证明： 若 R 是等价关系，则对任意的 $a,b\in A$

自反关系：$aRa\land aRa\Leftrightarrow aSa$

对称关系：$aSb\Leftrightarrow aRc\land cRb\Leftrightarrow bRc\land cRa\Leftrightarrow bSa$

传递关系：

$aSb\land bSc$

$\Leftrightarrow(aRx\land xRb)\land(bRy\land yRc)$

$\Leftrightarrow aRx \wedge xRy \wedge yRC$

$\Leftrightarrow aRy \wedge yRc$

$\Leftrightarrow aSc$

所以，S 是等价关系.

35. 设 $\mathbf{Z}_+$ 是正整数集合，$A=\mathbf{Z}_+\times\mathbf{Z}_+$，$A$ 上的关系

$R=\{\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle \mid xv\}=yu.$

证明 R 是等价关系.

证明： 对任意的$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R$，

自反关系：$xy=yx\Rightarrow\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$

对称关系：$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle\Rightarrow xv=yu\Rightarrow uy=vx\Rightarrow\langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle$

传递关系：

$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle \wedge \langle u,v\rangle R\langle c,d\rangle$

$\Rightarrow xv=yu\wedge ud=vc$

$\Rightarrow xd=yc$

$\Rightarrow\langle x,y\rangle R\langle c,d\rangle$

所以，R 是等价关系.

36. 设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的等价关系，判断下列关系是否 A 上的等价关系，若不是则给出反例.

(1) $(A\times A)-R_1$；

(2) R_1^2；

(3) R_1-R_2；

(4) $r(R_1-R_2)$.

解：

(1) 不是.

例如，$A=\{1,2,3\}$，$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

(2) 是.

(3) 不是.

例如，$R_1=\{1,2\}\times\{1,2\}\cup\{\langle 3,3\rangle\}$，$R_2=\{2,3\}\times\{2,3\}\cup\{\langle 1,1\rangle\}$.

(4) 不是.

例如，$R_1=\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}$，$R_2=\{1,2\}\times\{1,2\}\cup\{\langle 3,3\rangle\}$.

37. 设 R 是 A 上的关系，证明 $S=I_A\cup R\cup R^{-1}$是 A 上的相容关系.

证明：

自反关系：

对任意的 $x\in A$，$\langle x,x\rangle\in I_A\Rightarrow\langle x,x\rangle\in S$

对称关系：

对任意的$\langle x,y\rangle\in S$ 且 $x\neq y$，则

$\langle x,y\rangle \in R\cup R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R \vee \langle x,y\rangle \in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in R^{-1} \vee \langle y,x\rangle \in R$

$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in R\cup R^{-1}$

$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in S$

所以，$S=I_A\cup R\cup R^{-1}$是 A 上的相容关系.

38. 设 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$，设 R 是 A 上的相容关系，R 的简化关系如图 10.38. 求出 A 的完全覆盖.

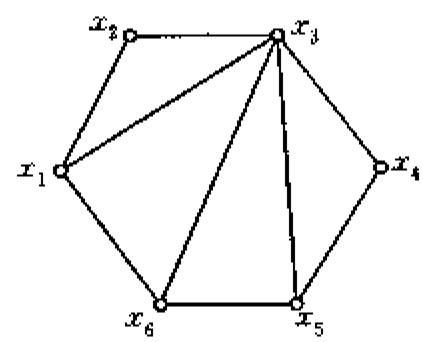


图 10.38

解：$C_R(A)=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_3,x_6\},\{x_3,x_5,x_6\},\{x_3,x_4,x_5\}\}$

39. 对下列集合的整除关系画出哈斯图.

(1) $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$，

(2) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

解：

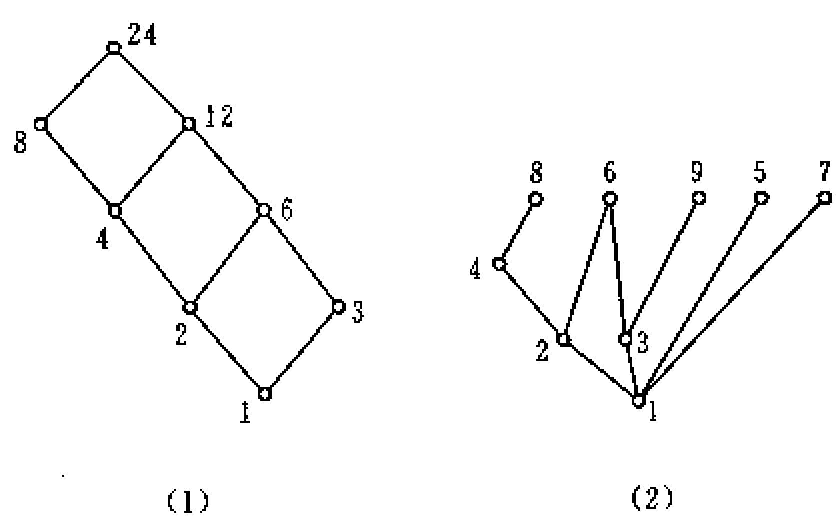


图 10.39

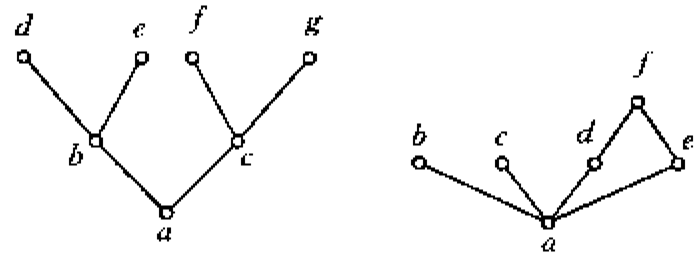
40. 写出下列哈斯图的集合和集合上的偏序关系.

解：

(1) $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

$R=I_A\cup\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle a,f\rangle,\langle a,g\rangle,\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,f\rangle,\langle c,g\rangle\}$

(2) $A=\{a,b,c,d,e,f\}$



(1)　　　　(2)

图　10.40

$R = I_A \cup \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle a,e\rangle, \langle a,f\rangle, \langle d,f\rangle, \langle e,f\rangle\}$

41. 画出下列偏序集$\langle A,R\rangle$的哈斯图，并写出 A 的极大元、极小元、最大元、最小元.

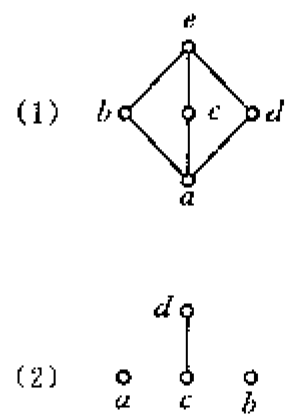
(1) $A=\{a,b,c,d,e\}$,

$R=\{\langle a,d\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,e\rangle, \langle b,e\rangle, \langle c,e\rangle, \langle d,e\rangle\} \cup I_A$,

(2) $A=\{a,b,c,d\}$,

$R=\{\langle c,d\rangle\} \cup I_A$.

解:



(1) 极大元: e
极小元: a
最大元: e
最小元: a

(2) 极大元: a、d、b
极小元: a、b、c
无最大元
无最小元

图　10.41

42. 设 $\mathbf{Z}_+ = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \wedge x > 0\}$，$D$ 是 $\mathbf{Z}_+$ 上的整除关系，$T=\{1,2,\cdots,10\} \subseteq \mathbf{Z}_+$. 在偏序集$\langle \mathbf{Z}_+, D\rangle$中，求 T 的上界、下界、上确界、下确界.

解: T 的下界为 1，下确界为 1.

T 的上界为 $n \times 5 \times 7 \times 8 \times 9 = 2520n\ (n=1,2,\cdots)$，上确界为 2520.

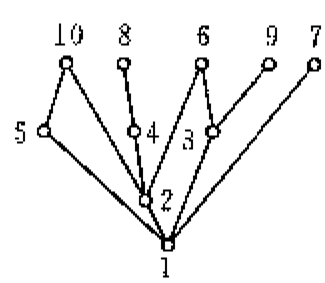


图　10.42

43. 设 R 是 A 上的偏序关系，$B \subseteq A$. 证明 $R \cap (B \times B)$ 是 B 上的偏序关系.

证明:

(1) 自反性: 对任意的 x,

$x\in B\Rightarrow\langle x,x\rangle\in R\wedge\langle x,x\rangle\in B\times B\Rightarrow\langle x,x\rangle\in R\cap B\times B$

(2) 反对称性:对任意的 x,y,

$x,y\in B\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in B\times B\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R\cap B\times B$

同理$\langle y,x\rangle\in R\cap B\times B$

由 R 的偏序关系,得 $x=y$

(3) 传递性:对任意的 x,y,z,

$x,y,z\in B$

$\Rightarrow\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in R\cap B\times B$

$\Rightarrow(\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in R)\wedge(\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in B\times B)$,

$\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R\wedge\langle x,z\rangle\in B\times B$

$\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R\cap B\times B$

因此,$R\cap(B\times B)$是 B 上的偏序关系.

44. 设$\langle A,R_1\rangle$和$\langle B,R_2\rangle$是两个偏序集,定义 $A\times B$ 上的关系 R 为,对 $a_1,a_2\in A$ 和 b_1,$b_2\in B$,$\langle a_1,b_1\rangle R\langle a_2,b_2\rangle\Leftrightarrow a_1R_1a_2\wedge b_1R_2b_2$. 证明 R 是 $A\times B$ 上的偏序关系.

证明:

(1) 自反性: 对任意的$\langle a,b\rangle$

$\langle a,b\rangle\in A\times B\Rightarrow aR_1a\wedge bR_2b\Rightarrow\langle a,b\rangle R\langle a,b\rangle$

(2) 反对称性: 对任意的$\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle$

$\langle a_1,b_1\rangle R\langle a_2,b_2\rangle\wedge\langle a_2,b_2\rangle R\langle a_1,b_1\rangle$

$\Rightarrow a_1R_1a_2\wedge a_2R_1a_1\wedge b_1R_2b_2\wedge b_2R_2b_1$

$\Rightarrow a_1=a_2\wedge b_1=b_2$

$\Rightarrow\langle a_1,b_1\rangle=\langle a_2,b_2\rangle$

(3) 传递性:对任意的$\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_3,b_3\rangle$

$\langle a_1,b_1\rangle R\langle a_2,b_2\rangle\wedge\langle a_2,b_2\rangle R\langle a_3,b_3\rangle$

$\Rightarrow a_1R_1a_2\wedge a_2R_1a_3\wedge b_1R_2b_2\wedge b_2R_2b_3$

$\Rightarrow a_1R_1a_3\wedge b_1R_2b_3$

$\Rightarrow\langle a_1,b_1\rangle R\langle a_3,b_3\rangle$

因此,R 是 $A\times B$ 上的偏序关系.

45. 给出 $A=\{0,1,2\}$上所有的偏序关系的哈斯图.

解: 共有 19 种(见图 10.45).

46. 对集合 A,下列的 R 都是 $P(A)\times P(A)$上的关系. R 是否偏序关系,是否全序关系.

(1) $\langle P,Q\rangle R\langle X,Y\rangle\Leftrightarrow(P\oplus Q)\subseteq(X\oplus Y)$,

(2) $\langle P,Q\rangle R\langle X,Y\rangle\Leftrightarrow P\subseteq X\wedge Q\subseteq Y$.

解:

(1) R 不是偏序关系,也不是全序关系.

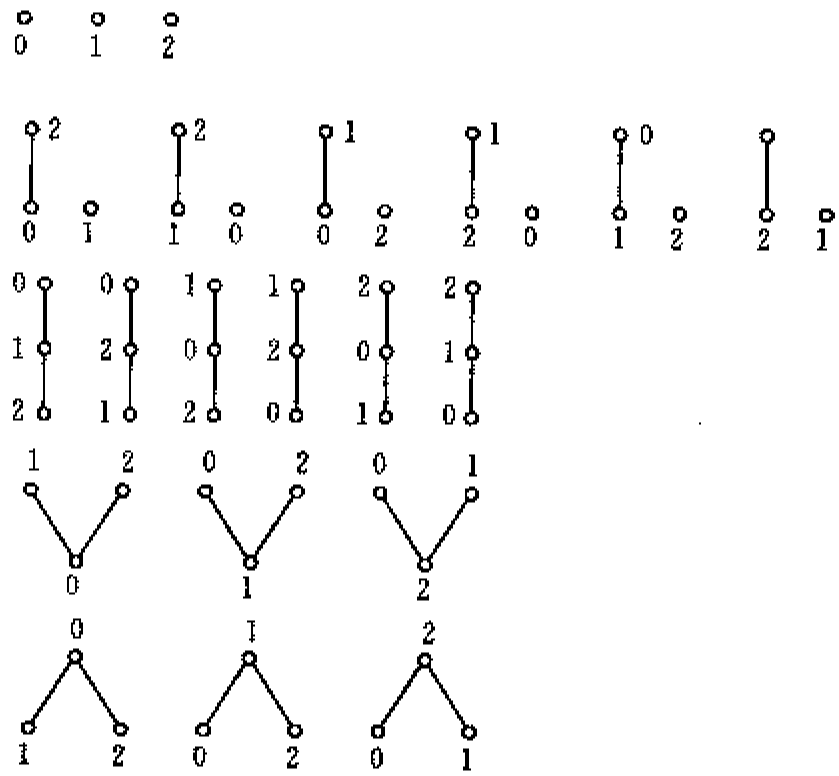


图 10.45

$((\langle P,Q\rangle R\langle X,Y\rangle) \wedge ((\langle X,Y\rangle R\langle P,Q\rangle)$

$\Leftrightarrow((P\oplus Q)\subseteq(X\oplus Y)) \wedge ((X\oplus Y)\subseteq(P\oplus Q))$

$\Leftrightarrow P\oplus Q=X\oplus Y$

$\not\Rightarrow(P=X) \wedge (Q=Y)\Leftrightarrow\langle P,Q\rangle=\langle X,Y\rangle$

例如取$\langle P,Q\rangle=\langle A,\varnothing\rangle$，$\langle X,Y\rangle=\langle\varnothing,A\rangle$，而 $A\neq\varnothing$. 显然 R 不是全序关系.

(2) R 是偏序关系，但不是全序关系.

R 是偏序关系，证明如下：

自反性：$\forall\langle P,Q\rangle\in P(A)\times P(A)$，$P\subseteq P\wedge Q\subseteq Q\Leftrightarrow\langle P,Q\rangle R\langle P,Q\rangle$

反对称性：

$\forall\langle P,Q\rangle,\langle X,Y\rangle\in P(A)\times P(A)$，

$((\langle P,Q\rangle R\langle X,Y\rangle) \wedge ((\langle X,Y\rangle R\langle P,Q\rangle)$

$\Leftrightarrow((P\subseteq X) \wedge (Q\subseteq Y)) \wedge ((X\subseteq P) \wedge (Y\subseteq Q))$

$\Leftrightarrow(P=X) \wedge (Q=Y)\Leftrightarrow\langle P,Q\rangle=\langle X,Y\rangle$

传递性：

$\forall\langle P,Q\rangle,\langle X,Y\rangle,\langle M,N\rangle\in P(A)\times P(A)$，

$((\langle P,Q\rangle R\langle X,Y\rangle \wedge ((\langle X,Y\rangle R\langle M,N\rangle)$

$\Leftrightarrow((P\subseteq X) \wedge (Q\subseteq Y)) \wedge ((X\subseteq M) \wedge (Y\subseteq N))$

$\Leftrightarrow(P\subseteq M) \wedge (Q\subseteq N)\Leftrightarrow\langle P,Q\rangle R\langle M,N\rangle$

所以 R 为偏序关系，但不是全序关系，例如取：

$A\not\subseteq B$，则$\langle A,B\rangle\overline{R}\langle B,A\rangle$，$\langle B,A\rangle\overline{R}\langle A,B\rangle$.

47. 找出在集合$\{0,1,2,3\}$上包含$\langle 0,3\rangle$和$\langle 2,1\rangle$的全序关系.

解：共有 6 个全序关系，如下图：

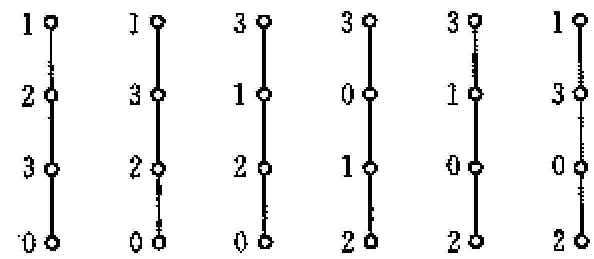


图 10.47

或表示为：

$R_1=\{\langle 0,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup I_A$；

$R_2=\{\langle 0,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup I_A$；

$R_3=\{\langle 0,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}\cup I_A$；

$R_4=\{\langle 0,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}\cup I_A$；

$R_5=\{\langle 0,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup I_A$；

$R_6=\{\langle 0,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}\cup I_A$.

48. 构造下列集合的例子.

(1) 非空全序集，它的某些子集无最小元；

(2) 非空偏序集，不是全序集. 它的某些子集没有最大元；

(3) 非空偏序集，它有一个子集没有最小元，但具有下确界；

(4) 非空偏序集，它有一个子集具有上界但没有上确界.

解：

(1) 全序集$\langle \mathbf{Z},\leqslant\rangle$，$\mathbf{Z}$ 为整数集，其子集 $Z=\{x\mid x\in\mathbf{Z}\wedge x<0\}$，无最小元.

(2) 偏序集$\langle \mathbf{Z},R_D\rangle$，$Z$ 为整数集，R_D 为整除关系，子集$\{2,3\}$上没有最大元.

(3) 偏序集$\langle \mathbf{Z},R_D\rangle$，子集 $A=\{x\mid x\in Z\wedge x>1\}$，$A$ 上没有最小元，有下确界 1.

(4) 方法 1：取 $R^*=R\backslash\{0\}=R_-\cup R_+$，$\mathbf{R}$ 为实数集，$R_-=\{x\mid x\in R\wedge x<0\}$，$R_+=\{x\mid x\in R\wedge x>0\}$，偏序集为$\langle R^*,\leqslant\rangle$，子集 R_- 有上界，为 R_+ 中任一元素，但无上确界，因为 R_+ 中无最小元.

方法 2：取 $A=\{1,2,3,R_A=I_A\cup\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，则$\langle A,R_A\rangle$为偏序集. $B=\{1\}\subseteq A$，B 的上界为 2，3，但无上确界.

第11章 习题解答

1. 下列关系中哪个是函数?

(1) $\{\langle x,y\rangle \mid x\in \mathbf{N}\wedge y\in \mathbf{N}\wedge x+y<10\}$,

(2) $\{\langle x,y\rangle \mid x\in \mathbf{R}\wedge y\in \mathbf{R}\wedge x=y^2\}$,

(3) $\{\langle x,y\rangle \mid x\in \mathbf{R}\wedge y\in \mathbf{R}\wedge y=x^2\}$.

解:

(1) 不是函数

(2) 不是函数

(3) 是函数

2. 下列集合是函数吗? 如果是,写其定义域和值域.

(1) $\{\langle 1,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 2,\langle 3,2\rangle\rangle,\langle 3,\langle 4,1\rangle\rangle\}$,

(2) $\{\langle 1,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 2,\langle 3,4\rangle\rangle,\langle 1,\langle 3,4\rangle\rangle\}$,

(3) $\{\langle 1,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 2,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 3,\langle 2,3\rangle\rangle\}$.

解:

(1) 是函数

$\mathrm{dom}(f)=\{1,2,3\}$, $\mathrm{ran}(f)=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

(2) 不是函数

(3) 是函数

$\mathrm{dom}(f)=\{1,2,3\}$, $\mathrm{ran}(f)=\{\langle 2,3\rangle$

3. 设 $f,g\in A_B$,且 $f\cap g\neq\varnothing$, $f\cap g$ 和 $f\cup g$ 是函数吗? 如果是,证明之,不是则举反例.

解:

(1) $f\cap g$ 不是函数.

例如, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3\}$

$f=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $g=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

$f\cap g=\{\langle 1,1\rangle\}$,显然不是函数.

(2) $f\cup g$ 不是函数.

例如, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3\}$

$f=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $g=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

则, $f\cup g=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,显然不是函数.

4. 设 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $f(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\ 是奇数,\\ x/2 & 当\ x\ 是偶数.\end{cases}$

求 $f(0)$，$f[\{0\}]$，$f[\{0,2,4,6,\cdots\}]$，$f[\{1,3,5,\cdots\}]$，$f^{-1}[\{2\}]$，$f^{-1}[\{3,4\}]$.

解：$f(0)=0$

$f[\{0\}]=\{0\}$

$f[\{0,2,4,6,\cdots\}]=\{0,1,2,3,\cdots\}$

$f[\{1,3,5,\cdots\}]=\{1\}$

$f^{-1}[\{2\}]=\{4\}$

$f^{-1}[\{3,4\}]=\{6,8\}$

5. 对下列函数分别确定：

(a) 是否是满射的、单射的、双射的；如果是双射的，写出 f^{-1} 的表达式.

(b) 写出函数的象和对给定集合 S 的完全原象.

(c) 关系 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in \mathrm{dom}(f)\wedge f(x)=f(y)\}$ 是 $\mathrm{dom}(f)$ 上的等价关系，一般称为由函数 f 导出的等价关系，求 $\mathbf{R}$.

(1) $f:\mathbf{R}\to(0,\infty)$，$f(x)=2^x$，$S=[1,2]$.

(2) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(n)=2n+1$，$S=\{2,3\}$.

(3) $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$，$f(x)=|x|$，$S=\{0,2\}$.

(4) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，$f(n)=\langle n,n+1\rangle$，$S=\{\langle 2,2\rangle$.

(5) $f:[0,1]\to[0,1]$，$f(x)=\dfrac{2x+1}{4}$，$S=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

解：

(1) 双射，$f^{-1}(x)=\log_2 x$，$f[\mathbf{R}]=(0,\infty)$，$f^{-1}(S)=[0,1]$，等价关系 $\mathbf{R}=I_R$.

(2) 单射，$f[\mathbf{N}]=\{x \mid x=2n+1\wedge n\in N\}$，$f^{-1}(S)=\{1\}$，等价关系 $\mathbf{R}=I_N$.

(3) 满射，$f[\mathbf{Z}]=\mathbf{N}$，$f^{-1}(S)=[-2,0,2]$，等价关系 $\mathbf{R}=I_Z\cup\{\langle -x,x\rangle \mid x\in\mathbf{Z}\}$.

或 $R=I_Z\cup\{\langle x,y\rangle \mid x+y=0\wedge x\in\mathbf{Z}\wedge y\in\mathbf{Z}\}$

或 $R=\{\langle x,y\rangle \mid (x=y\vee x=-y)\wedge x\in\mathbf{Z}\wedge y\in\mathbf{Z}\}$

或 $R=\{\langle x,y\rangle \mid |x|=|y|\wedge x\in\mathbf{Z}\wedge y\in\mathbf{Z}$

(4) 单射，$f[\mathbf{N}]=\{\langle n,n+1\rangle \mid n\in\mathbf{N}$，$f^{-1}(S)=\varnothing$，等价关系 $R=I_N$.

(5) 单射，$f[0,1]=\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$，$f^{-1}(S)=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，等价关系 $R=I_{[0,1]}$.

6. 下列函数是否满射的，单射的，双射的？

(1) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x^2-2x-15$，

(2) $f:\mathbf{N}-\{0\}\to\mathbf{R}$，$f(x)=\log_2 x$，

(3) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x)=\begin{cases}1, x\ 是奇数\\ 0, x\ 是偶数,\end{cases}$

(4) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x)=x \bmod 3$.

(其中，$x \bmod 3$ 是 x 除以 3 的余数.)

解：

(1) 非满射、非单射.

(2) 单射.

(3) 非满射、非单射.

(4) 非满射、非单射.

7. 设 R 是 A 上的等价关系，$g: A \to A/R$ 是自然映射，什么条件下 g 是双射的？

解：方法一：

$g: A \to A/R$，记 $a \in A$，$\bar{a}$ 为 a 的等价数，令 $g(a) = \bar{a}$，g 为满射，

若要满足 g 为单射，即要使 $a \neq b \Rightarrow \bar{a} \neq \bar{b}$，即 $\bar{a} \cap \bar{b} = \varnothing$，要求 $R = I_A$.

因此，$R = I_A$ 时，g 为双射的.

方法二：

g 是双射，则 A 与 A/R 中的元素个数相同，故 R 必为恒等关系.

反之，若 R 为恒等关系，则易知 g 必为双射.

所以，当且仅当 R 为恒等关系时，g 是双射的.

8. 找到集合 A 和函数 $f, g \in A_A$，使 f 是单射的且 g 是满射的，但都不是双射的. 要求 A 尽可能小.

解：假设 A 为有限集，设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$|A| = n$.

由于 $f(a_1), \cdots, f(a_n)$ 互不相同且均在 A 中，

所以 $f(a_1), \cdots, f(a_n)$ 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列. f 为双射.

因此，A 不是有限集.

对于 $A = N$，取 $f(x) = 2x + 1$，则 f 是单射且非满射.

取 $g(x) = \begin{cases} x/2, & x \text{ 为偶数} \\ (x-1)/2, & x \text{ 为奇数} \end{cases}$，则 g 是满射且非单射.

由于 A 与 N 等势，可知 A 已是最小的.

9. 对有限集合 A 和 B，$|A| = m$，$|B| = n$，求出下列情况下 m 和 n 应满足的条件.

(1) 存在从 A 到 B 的单射函数.

(2) 存在从 A 到 B 的满射函数.

(3) 存在从 A 到 B 的双射函数.

解：

(1) $m \leqslant n$

(2) $m \geqslant n$

(3) $m = n$

10. 对下列集合 A 和 B，构造从 A 到 B 的双射函数.

(1) $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{a, b, c\}$.

(2) $A = (0, 1) \subseteq \mathbf{R}$，$B = (1, 3) \subseteq \mathbf{R}$.

(3) $A=P(x), B=X_Y$，其中 $X=\{a,b,c\}, Y=\{0,1\}$.

解：

(1) $f: A \to B \quad f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c$

$f=\{\langle 1,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,c\rangle$

(2) $f: A \to B \quad f(x)=2x+1$

(3) $A=P(x)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

$B=X_Y=\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$

$f_1=\{\langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle\}$

$f_2=\{\langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,1\rangle\}$

$f_3=\{\langle a,0\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,0\rangle\}$

$f_4=\{\langle a,0\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,1\rangle\}$

$f_5=\{\langle a,1\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,0\rangle\}$

$f_6=\{\langle a,1\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,1\rangle\}$

$f_7=\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,0\rangle\}$

$f_8=\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,1\rangle\}$

$$f=\begin{cases}\langle\varnothing, f_1\rangle, \langle\{a\}, f_2\rangle, \langle\{b\}, f_3\rangle, \langle\{c\}, f_4\rangle, \\ \langle\{a,b\}, f_5\rangle, \langle\{a,c\}, f_6\rangle, \langle\{b,c\}, f_7\rangle, \langle\{a,b,c\}, f_8\rangle\end{cases}$$

11. 对 $f: A\to B$，定义 $g: B\to P(A)$ 为 $g(b)=\{x \mid x\in A \land f(x)\in b\}$.
证明若 f 是满射的，则 g 是单射的. 其逆是否成立？

证明： 对任意的 $b_1, b_2\in B$ 且 $b_1\neq b_2$

$g(b_1)=\{x \mid x\in A\land f(x)\in b_1\}$

$g(b_2)=\{x \mid x\in A\land f(x)\in b_2$

若 f 是满射，那么存在 x_1, x_2，使 $f(x_1)=b_1, f(x_2)=b_2$

因为 f 是函数，所以 $x_1\neq x_2$，所以 $g(b_1)\neq g(b_2)$.

所以，g 是单射的.

其逆不成立.

12. 设 $f: A\to B, g: C\to D, f\subseteq g, C\subseteq A$，证明 $f=g$.

证明：

$\forall\langle x,y\rangle\in g$，有 $x\in C$，由 $C\subseteq A$，则 $x\in A$，

那么 $\exists y_0, f(x)=y_0$，即$\langle x, y_0\rangle\in f$，

又由 $f\subseteq g$，则$\langle x, y_0\rangle\in g$.

由函数定义易知 $y=y_0$，因此$\langle x,y\rangle\in f$

则 $g\subseteq f$，所以 $f=g$.

13. 设 $f, g, h\in \mathbf{R}_{\mathbf{R}}, f(x)=x+3, g(x)=2x+1, h(x)=\frac{x}{2}$. 求出 $g\circ f, f\circ g, f\circ f, g\circ g$,

$f\circ h, h\circ g, h\circ f, f\circ h\circ g$.

解：

$$g\circ f=2(x+3)+1=2x+7$$
$$f\circ g=(2x+1)+3=2x+4$$
$$f\circ f=(x+3)+3=x+6$$
$$g\circ g=2(2x+1)+1=4x+3$$
$$f\circ h=\frac{x}{2}+3$$
$$h\circ g=\frac{2x+1}{2}=x+\frac{1}{2}$$
$$h\circ f=\frac{x+3}{2}=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$$
$$f\circ h\circ g=\frac{2x+1}{2}+3=x+\frac{7}{2}$$

14. 设 $f,g,h\in \mathbf{N}_{\mathbf{N}}$，$f(n)=n+1$，$g(n)=2n$，$h(n)=\begin{cases}0 & n\text{ 是偶数}\\ 1 & n\text{ 是奇数}\end{cases}$，求出 $f\circ f, f\circ g, g\circ f, g\circ h, h\circ g, (f\circ g)\circ h$.

解：

$$f\circ f(n)=n+2, f\circ g(n)=2n+1, g\circ f(n)=2n+2,$$
$$g\circ h(n)=\begin{cases}1 & n\text{ 为偶数}\\ 1 & n\text{ 为奇数}\end{cases}, h\circ g(n)=0, (f\circ g)\circ h(n)=\begin{cases}1 & n\text{ 为偶数}\\ 3 & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

15. 证明定理 11.2.4.

证明：

$$(f\circ I_A)(x)=f(I_A(x))=f(x)$$
$$(I_B\circ f)(x)=I_B(f(x))=f(x)$$

16. 设 $h\in A_A$，证明“对一切 $f,g\in A_A$，如果 $h\circ f=h\circ g$ 则 $f=g$”成立的充要条件是“h 是单射的”.

证明： 方法一：充分性：假设 h 是单射的，

$h\circ f=h\circ g$

$\Rightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow(\exists y)(y\in A\land(x(h\circ f)y\land x(h\circ g)y)))$

$\Rightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow(\exists y)(y\in A\land(\exists t_1)(\exists t_2)(xft_1\land t_1hy\land xgt_2\land t_2hy)))$

又 h 单射 $\Rightarrow t_1=t_2\Rightarrow f=g$

必要性：

$h\circ f=h\circ g$

$\Rightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow(\exists y)(y\in A\land(x(h\circ f)y\land x(h\circ g)y)))$

$\Rightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow(\exists y)(y\in A\land(\exists t_1)(\exists t_2)(xft_1\land t_1hy\land xgt_2\land t_2hy)))$

$f=g \Rightarrow t_1=t_2 \Rightarrow h$ 是单射的.

方法二:

$\Rightarrow$: $\forall x, h\circ f(x)=h\circ g(x) \Rightarrow h(f(x))=h(g(x)) \Rightarrow f(x)=g(x) \Rightarrow f=g$

$\Leftarrow$: 反证法,若 h 不是单射,则 $\exists x_1, x_2, y \in A, x_1 \neq x_1, h(x_1)=h(x_2)=y$

令 $f(x)=\begin{cases} x_1 & x_1=x_0 \\ 1 & x_1 \neq x_0 \end{cases}, g(x)=\begin{cases} x_2 & x_1=x_0 \\ 1 & x_1 \neq x_0 \end{cases}$,

显然 $f \neq g$,而 $h\circ f(x)=h\circ g(x)$,与已知矛盾,所以假设不成立,即 h 为单射.

17. 设 $f: A \to B, g: B \to C, (g\circ f)^{-1}: C \to A$,说明 g 不一定是单射的.

解:

取 $A=\{1,2\}, B=\{1,2,3,4\}, C=\{1,2\}$,

$f(1)=1, f(2)=2, g(1)=1, g(2)=g(3)=g(4)=2$

则 $(g\circ f): A \to C, (g\circ f)(1)=1, (g\circ f)(2)=2$,

显然 $(g\circ f)$ 为双射,$(g\circ f)^{-1}$ 存在,而 g 不是单射.

18. 设 π 和 π_1 是非空集合 A 上的两个划分,如果 π_1 的每个划分块都包含在 π 的某个划分块中,则称 π_1 是 π 的加细,并写为 $\pi_1 \leqslant \pi$. 加细关系 $\leqslant$ 是 A 的一些划分组成的非空集合上的偏序关系.

设 $f_1, f_2, f_3, f_4 \in R_R$,分别定义为

$$f_1(x)=\begin{cases} 1 & x \geqslant 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases} \quad f_2(x)=\begin{cases} -1 & x \notin \mathbf{Z}, \\ 1 & x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

$f_3(x)=x, f_4(x)=1$. 对 $i=1,2,3,4$,令 E_i 是由 f_i 导出的等价关系(见第 5 题(c)).

(1) 对 $B=\{\mathbf{R}/E_1, \mathbf{R}/E_2, \mathbf{R}/E_3, \mathbf{R}/E_4\}$ 和 B 上的加细关系 $\leqslant$,画出偏序集 $\langle B, \leqslant\rangle$ 的哈斯图(其中 $\mathbf{R}$ 是实数集).

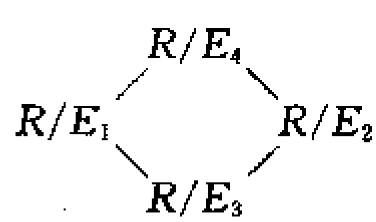
(2) 对 $i=1,2,3,4$,定义 $g_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}/E_i$ 为

$$g_i(x)=[x]_{E_i}. \text{分别求 } g_i(o).$$

解:

(1) $\mathbf{R}/E_1=\{(-\infty,0),[0,+\infty)\}, \mathbf{R}/E_2=\{\mathbf{Z}, \mathbf{R}-\mathbf{Z}\}$

$\mathbf{R}/E_3=\{\{x\} \mid x \in R\}, \mathbf{R}/E_4=\{\mathbf{R}\}$



(2) $g_1(0)=[0,+\infty), g_2(0)=Z, g_3(0)=\{0\}, g_4(0)=R$.

19. 证明模糊子集的 $\cup$ 和 $\cap$ 运算满足交换律,结合律,幂等律,吸收律,分配律和摩根律.(略)

20. 设 E 是全集，$A\subseteq E$，$B\subseteq E$，证明对任意的 $x\in E$，

(1) $(\forall x)\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)\Leftrightarrow A\subseteq B$，

(2) $\chi_{A\cap B}(x)=\min(\chi_A(x),\chi_B(x))$，

(3) $\chi_{A\cup B}(x)=\max(\chi_A(x),\chi_B(x))$，

(4) $\chi_{A-B}(x)=\chi_A(x)-\chi_{A\cap B}(x)$.

证明：

(1) 证明：

① 由 $(\forall x)(\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x))$，则

$(\forall x)(x\in A)\Rightarrow\chi_A(x)=1\Rightarrow\chi_B(x)=1\Rightarrow x\in B$，即有 $A\subseteq B$

② 由 $A\subseteq B$，则若 $x\in A$，$\chi_A(x)=\chi_B(x)=1$，

若 $x\notin A$，$\chi_A(x)=0$，$\chi_B(x)\geqslant 0$，所以 $\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$

综上所述，$(\forall x)\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)\Leftrightarrow A\subseteq B$.

(2) 证明：

若 $x\in A\cap B$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$，则 $\chi_A(x)=1$ 且 $\chi_B(x)=1$

故 $\min(\chi_A(x),\chi_B(x))=1=\chi_{A\cap B}(x)$

若 $x\notin A\cap B$，即 $x\notin A$ 或 $x\notin B$，则 $\chi_A(x)=0$ 或 $\chi_B(x)=0$

故 $\min(\chi_A(x),\chi_B(x))=0=\chi_{A\cap B}(x)$

综上所述，$\chi_{A\cap B}(x)=\min(\chi_A(x),\chi_B(x))$.

(3) 证明：

若 $x\in A\cup B$，即 $x\in A$ 或 $x\in B$，则 $\chi_A(x)=1$ 或 $\chi_B(x)=1$

故 $\max(\chi_A(x),\chi_B(x))=1=\chi_{A\cup B}(x)$

若 $x\notin A\cup B$，即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，则 $\chi_A(x)=0$ 且 $\chi_B(x)=0$

故 $\max(\chi_A(x),\chi_B(x))=0=\chi_{A\cup B}(x)$

综上所述，$\chi_{A\cup B}(x)=\max(\chi_A(x),\chi_B(x))$.

(4) 证明：

全集 $E=(-A)\cup(A-B)\cup(A\cap B)$，且这三个子集互不相交

若 $x\in -A$，$\chi_A(x)=0$，$\chi_{A\cap B}(x)=0$，$\chi_{A-B}(x)=0=\chi_A(x)-\chi_{A\cap B}(x)$

若 $x\in A-B$，$\chi_A(x)=1$，$\chi_{A\cap B}(x)=0$，$\chi_{A-B}(x)=1=\chi_A(x)-\chi_{A\cap B}(x)$

若 $x\in A\cap B$，$\chi_A(x)=1$，$\chi_{A\cap B}(x)=1$，$\chi_{A-B}(x)=0=\chi_A(x)-\chi_{A\cap B}(x)$

综上所述，$\chi_{A-B}(x)=\chi_A(x)-\chi_{A\cap B}(x)$

21. 用例 3 中的 Y 和 O，给出“又不老又不年青”的隶属函数. 给出 $Y_{0.5}$，$O_{0.5}$. 综上所述，$\chi_{A-B}(x)=\chi_A(x)-\chi_{A\cap B}(x)$

解：

以 S 表示“又不老又不年青”的集合，即 $S=-Y\cap -O=-(Y\cup O)$.

$u_s(x)=1-\max(u_Y(x)-u_O(x))$

$$=\begin{cases} 0 & 0\leqslant x\leqslant 25 \\ 1-\left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25< x\leqslant 50 \\ 1-\max\left(\left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1},\left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}\right) & 50< x\leqslant 200 \end{cases}$$

$Y_{0.5}=\{0,1,\cdots,30\}\qquad O_{0.5}=\{55,56,\cdots,200\}$

第 12 章　习题解答

1. 证明定理 12.2.2.

证明:

(1) 存在双射函数 $f: A \to A, f(x)=x$.

(2) 由 $A \approx B$,存在双射函数 $f: A \to B$,则必存在双射函数 $f^{-1}: B \to A$,
即说明 $A \approx B$.

(3) 由 $A \approx B$,存在双射函数 $f: A \to B$,同理存在双射函数 $g: B \to C$,
则存在双射函数$(g \circ f): A \to C$,所以 $A \approx C$.

2. 用等势定义证明$[0,1] \approx [a,b]$,$(a,b \in \mathbf{R}, a<b)$.

证明: 存在双射函数 $f: [0,1] \to [a,b]$,

$$f(x)=a+(b-a)*x \qquad (x \in [0,1])$$

3. 对集合 A、B、C 和 D,若 $A \approx C, B \approx D$,证明 $A \times B \approx C \times D$.

证明: 由 $A \approx C$,存在双射函数 $f: A \to C$,同理存在双射函数 $g: B \to D$,
令 $h: A \times B \to C \times D, h(\langle x,y \rangle)=\langle f(x),g(y) \rangle$,
易知 h 为双射,所以 $A \times B \approx C \times D$.

4. 写出 $\mathbf{N}$ 的三个与 $\mathbf{N}$ 等势的真子集.

解: 参见第 10 题的解.

5. 证明 12.5 例 4 的(2)、(3)和(4).

证明:

(2) 令 $K=\{0,1,\cdots,n^{-1}\}$,$\mathrm{card}(K)=n$,

则 $K \times N$ $\{\langle 0,0 \rangle,\langle 0,1 \rangle,\langle 0,2 \rangle,\cdots$

$$\begin{array}{lll} \langle 1,0 \rangle, & \langle 1,1 \rangle, & \langle 1,2 \rangle,\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle n-1,0 \rangle, & \langle n-1,1 \rangle, & \langle n-1,2 \rangle,\cdots\} \end{array}$$

可以构造双射函数 $f: K \times N \to N, f(\langle x,y \rangle)=ny+x$
说明 $K \times N \approx N$,则 $n \cdot \aleph_0=\aleph_0$.

(3) 令 Z 为整数集,N 为自然数集,$Z_-=\{x \mid x<0 \wedge x \in Z\}$,
显然 $\mathrm{card}(N)=\aleph_0$,$\mathrm{card}(Z_-)=\aleph_0$
而 $N \cup Z_-=Z$,易知 $Z \approx N$,因此$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.

(4) 易知存在双射函数 $f: N \times N \to N$,(见 11.1.2 例 6(4)),
则 $N \times N \approx N$,所以$\aleph_0 \cdot \aleph_0=\aleph_0$.

6. 用运算的定义证明：对任意的基数 k，有 $k+k=2\cdot k$.

证明：取集合 k_1,k_2，使 $\mathrm{card}(k_1)=k,\mathrm{card}(k_2)=k,k_1\cap k_2=\varnothing$

$$k+k=\mathrm{card}(k_1\cup k_2)$$

$$2\cdot k=\mathrm{card}(2\times k_1)$$

构造函数 $f:k_1\cup k_2\to 2\times k_1$

$$f(x)=\begin{cases}\langle 0,x\rangle & x\in k_1\\ \langle 1,x\rangle & x\notin k_1\end{cases}$$

显然 f 是双射函数，所以 $\mathrm{card}(k_1\cup k_2)=\mathrm{card}(2\times k_1)$

因此，$k+k=2\cdot k$.

7. 对任意的基数 k、l 和无限基数 m，如果 $2\leqslant k\leqslant m$ 且 $2\leqslant l\leqslant m$，证明

(1) $k^m=2^m$，

(2) $k^m=l^m$.

证明：

(1) $2^m\leqslant k^m\leqslant m^m=2^m$，所以 $k^m=2^m$.

(2) $2^m\leqslant l^m\leqslant m^m=2^m$，所以 $l^m=2^m$. 因此，$k^m=l^m$.

8. 证明定理 12.5.1 的(1)～(5).

证明：

(1) 设有集合$K,L,\mathrm{card}(K)=k,\mathrm{card}(L)=l$，

由 $K\cup L=L\cup K$，则有 $k+l=l+k$.

由 $K\times L=L\times K$，则有 $k\cdot l=l\cdot k$.

(2) 设有集合 $K,L,M,\mathrm{card}(K)=k,\mathrm{card}(L)=l,\mathrm{card}(M)=m$

由 $K\cup(L\cup M)=(K\cup L)\cup M$，则有 $k+(l+m)=(k+l)+m$

由 $K\times(L\times M)=(K\times L)\times M$，则有 $k\cdot(l\cdot m)=(k\cdot l)\cdot m$.

(3) 设有集合 $K,L,M,\mathrm{card}(K)=k,\mathrm{card}(L)=l,\mathrm{card}(M)=m$

由 $K\times(L\cup M)=K\times L\cup K\times M$，则有 $k\cdot(l+m)=k\cdot l+k\cdot m$.

(4) 设有集合 $K,L,M,\mathrm{card}(K)=k,\mathrm{card}(L)=l$, $\mathrm{card}(M)=m$

即证明$(L\cup M)_K\approx L_K\times M_K$，对于$\forall f\in(L\cup M)_K$，$f:(L\cap M)\to K$，

定义函数 $H:(L\cup M)_K\to L_K\times M_K$，则 $H(f)=\langle g,h\rangle$，其中 $g\in L_K,h\in M_K$

满足$\forall a\in L,f(a)=g(a),\forall b\in M,f(b)=h(b)$

下面证明 H 为双射：

单射：$\forall f_1\neq f_2$，$\exists a$，使 $f_1(a)\neq f_2(a)$，设 $H(f_1)=\langle g_1,h_1\rangle,H(f_2)=\langle g_2,h_2\rangle$

若 $a\in L$，则有 $g_1(a)\neq g_2(a)$，那么 $g_1\neq g_2$

若 $a\in M$，则有 $h_1(a)\neq h_2(a)$，那么 $h_1\neq h_2$

总之有$\langle g_1,h_1\rangle\neq\langle g_2,h_2\rangle$，即 $H(f_1)\neq H(f_2)$，说明 H 为单射.

满射：$\forall\langle g,h\rangle\in L_K\times M_K$，总存在 $f\in(L\cup M)_K$

使得 $\forall a\in L, f(a)=g(a)$，且 $\forall b\in M, f(b)=h(b)$，

则 $H(f)=\langle g,h\rangle$，说明 H 为满射.

综上所述，H 为双射，则 $(L\cup M)_K\approx L_K\times M_K$，所以命题成立.

(5) 设有集合 K,L,M，$\mathrm{card}(K)=k$，$\mathrm{card}(L)=l$，$\mathrm{card}(M)=m$

即证明 $M_{(K\times L)}\approx M_K\times M_L$，$\forall f\in M_{(K\times L)}$，$f:M\to K\times L$，

定义符号 $\mathrm{Left}(\langle a,b\rangle)=a$，$\mathrm{Right}(\langle a,b\rangle)=b$

定义函数 $H: M_{(K\times L)}\to M_K\times M_L$，$H(f)=\langle g,h\rangle$，

满足 $\mathrm{Left}(f(m))=g(m)$，$\mathrm{Right}(f(m))=h(m)$，$\forall m\in M$，下面证明 H 为双射

① 单射：$\forall f_1\neq f_2$，令 $H(f_1)=\langle g_1,h_1\rangle$，$H(f_2)=\langle g_2,h_2\rangle$，

$\exists m\in M, f_1(m)\neq f_2(m)$，则 $(g_1(m)\neq g_2(m))\vee(h_1(m)\neq h_2(m))$，

即 $(g_1\neq g_2)\vee(h_1\neq h_2)$，那么 $\langle g_1,h_1\rangle\neq\langle g_2,h_2\rangle$，$H(f_1)\neq H(f_2)$

说明 H 为单射.

② 满射：$\forall\langle g,h\rangle\in M_K\times M_L$，总存在函数 $f:(M\to K\times L)$，

使得 $\mathrm{Left}(f(m))=g(m)$，$\mathrm{Right}(f(m))=h(m)$，$\forall m\in M$

即有 $H(f)=\langle g,h\rangle$，所以 H 为满射.

综上所述，H 为双射，则 $M_{(K\times L)}\approx M_K\times M_L$，因而命题得证.

9. 证明平面上直角坐标系中所有整数坐标点的集合是可数集.

证明：构造序列如下：

$[\langle 0,0\rangle]$，

$[\langle 1,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,-1\rangle,\langle -1,0\rangle]$，

$[\langle 2,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,-1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,-2\rangle,\langle -1,1\rangle,\langle -1,-1\rangle,\langle -2,0\rangle]$，

……

在同一[]中，$|x|+|y|$ 恒等，该序列可遍历所有整数坐标点.

由此便可定义映射 $f: N\to$ 整数坐标点的集合，

$f(0)=\langle 0,0\rangle, f(1)=\langle 1,0\rangle, f(2)=\langle 0,1\rangle, f(3)=\langle 0,-1\rangle, f(4)=\langle -1,0\rangle$，

……

则 f 为单射且为满射.

所以，所有整数坐标点的集合是可数集.

10. 计算下列集合的基数.

(1) $A=\{a,b,c\}$，

(2) $B=\{x\mid(\exists n)(n\in\mathbf{N}\wedge x=n^2)$，

(3) $D=\{x\mid(\exists n)(n\in\mathbf{N}\wedge x=n^5)$，

(4) $B\cap D$，

(5) $B\cup D$，

(6) $\mathbf{N}_{\mathbf{N}}$，

(7) $\mathbf{R}_{\mathbf{R}}$.

答：

(1) $|A|=3$

(2) $|B|=\aleph_0$

(3) $|D|=\aleph_0$

(4) $|B\cap D|=\aleph_0$

(5) $|B\cup D|=\aleph_0$

(6) $|\mathbf{N_N}|=|\mathbf{N}|^{|\mathbf{N}|}=\aleph_0{}^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph_1$

(7) $|\mathbf{R_R}|=|\mathbf{R}|^{|\mathbf{R}|}=\aleph_1{}^{\aleph_1}=2^{\aleph_1}$