4. Übung **Algorithmen und Datenstrukturen** **WS 2016/17**

Klaus Kriegel **Abgabe: 18.11.2016, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Sortieren mit Stacks** ($3 + 2 + 2 + 3$ Punkte)

Die folgende Methode kann man als eine spezielle Umsetzung der Idee des Sortierens durch Einfügen (Insertion-Sort) verstehen. Die Elemente einer Folge, gegeben durch ein Array A werden nacheinander in eine Datenstruktur eingefügt, die aus zwei Stacks S und T aufgebaut ist. Dabei werden die folgende Invarianten eingehalten:

1. Die Einträge in S sind von oben nach unten monoton fallend.
2. Die Einträge in T sind von oben nach unten monoton steigend.
3. Wenn S und T nicht leer sind, dann gilt $S.top() \leq T.top()$

Zum Einfügen eines neuen Elements wird die richtige Einfügeposition durch Umstapeln der Stacks gefunden.

a) Beschreiben Sie diesen Algorithmus in Pseudocode.

b) Vergleichen Sie die Laufzeit dieser Variante mit dem klassischen Insertion-Sort mit einem Ausgabe-Array, wenn die Eingabewerte bereits monoton steigend oder monoton fallend gegeben sind.

c) Analysieren Sie die (worst case) Laufzeit in einer Form $\Theta(f(n))$ entweder durch Abzählung der Vergleiche oder der Einfüge- und Lösch-Operationen auf den Stacks (Zugriffe durch $top()$ und $empty()$ können dabei vernachlässigt werden).

d) Implementieren Sie die Methode in Java mit `Stack<E>` aus java.util und richten Sie zusätzlich einen Zähler für die Einfüge- und Lösch-Operationen auf den Stacks ein. Testen Sie den Algorithmus insbesondere mit der Eingabefolge $2, 12, 4, 6, 8, 3, 1, 5, 5, 10$ und geben Sie die sortierte Folge zusammen mit der Anzahl der Stack-Operationen aus.

Aufgabe 2: **Binärbäume** ($4 + 2$ Punkte)

Beweisen Sie, dass in einem echten Binärbaum mit genau k Blättern mit den Tiefen $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_k$ die Gleichung (a) gilt. In einem allgemeinen Binärbäumen mit k Knoten, die weniger als zwei Kinder haben, bezeichen wir mit d_i die Tiefen dieser Knoten und mit $c_i \leq 1$ die Anzahl ihrer Kindern ($1 \leq i \leq k$). Zeigen Sie, dass dann Gleichung (b) gilt:

$$(a) \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{d_i}} = 1 \qquad\qquad (b) \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{d_i + c_i}} = 1$$

Hinweis: Wenden Sie Für (a) Induktion nach Anzahl der Blätter an! Wenn $k > 1$, dann hat ein Blatt der Tiefe d_k ein Geschwisterblatt gleicher Tiefe. Führen Sie (b) auf (a) zurück, indem Sie bei inneren Knoten mit einem Kind ein zweites Kind hinzufügen.

Aufgabe 3 auf Seite 2

Aufgabe 3: **Binärbäume** (6 Punkte)

Beschreiben Sie in Pseudocode unter Verwendung der in Skript gegebenen Funktionen des ADTs für Binärbäume einen Algorithmus, der die durchschnittliche Tiefe der Blätter eines gegebenen, echten Binärbaums berechnet. Beschreiben Sie zuerst verbal Ihre Idee und kommentieren Sie Ihre Lösung ausreichend.