13. Übung **Algorithmen und Datenstrukturen** **WS 2016/17**

Klaus Kriegel **Abgabe: 06.02.2016, 12:00 Uhr**

Dieser Übungszettel enthält einen kleinen Nachtrag zum Thema Hashing.
Da 4. Aufgabe zum Teil Stoff aus der Vorlesung der laufenden Woche erfordert, ist sie nicht zur Abgabe vorgesehen. Trotzdem sollte man sie zur Klausurvorbereitung selbstständig bearbeiten.

Aufgabe 1: **Hash-Funktionen** (3 + 3 Punkte)

a) Verwenden Sie die Hash-Funktion $h(x) = (2x + 1)$ ***mod*** 11 über dem Universum $\mathcal{U} = \{0, 1, \ldots, 100\}$. Bestimmen Sie den Endzustand der Hash-Tabellen (jeweils 11 Felder) nach Einfügen der Elemente $13, 17, 30, 9, 44, 35, 19$ i) bei Anwendung von Chainig (jede Zelle verwaltet eine Liste), ii) beim linearen Sondieren und iii) beim quadratischen Sondieren.

b) Wir betrachten über dem Universum $\mathcal{U} = \{0, 1, \ldots, 9999\}$ die folgenden drei Hash-Funktionen:

$$h_1(x) = (x + 3) \textbf{\textit{ mod }} 30 \qquad h_2(x) = (4x + 3) \textbf{\textit{ mod }} 30 \qquad h_3(x) = (4x + 3) \textbf{\textit{ mod }} 31$$

Untersuchen Sie, welche der drei Funktionen eine faire Hash-Funktion ist und begründen Sie die Antwort anhand der Definition.

Aufgabe 2: **Floyd-Warshall-Algorithmus** (4 Punkte)

Sei $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ die Knotenmenge eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$. Wir definieren das Gewicht eines gerichteten Weges p von u nach v als a) der maximale Zwischenknoten in p bzw. b) die Summe aller Zwischenknoten in p (Wege der Länge 0 oder 1 haben das Gewicht 0). Modifizieren Sie den Algorithmus von Floyd-Warshall dahingehend, dass die kürzesten Wege im Sinne der obigen Definition berechnet werden (einschließlich der Π-Zeiger).

Aufgabe 3: **P, NP und $coNP$** (8 Punkte)

Untersuchen Sie für die folgenden Probleme, ob sie in P, NP oder $coNP$ liegen (gesucht ist natürlich die bestmögliche Antwort mit Begründung!).

$$\begin{aligned}
L_1 = &\ \{(G, k) \mid * \text{ und } D(G) \leq k\} \\
L_2 = &\ \{(G, k) \mid * \text{ und } G \text{ enthält einen Kreis der Länge } k\} \\
L_3 = &\ \{(G, k) \mid * \text{ und } G \text{ enthält einen Kreis der Länge } l \leq k\} \\
L_4 = &\ \{(G, k) \mid * \text{ und } G \text{ enthält keinen Kreis der Länge } k\}
\end{aligned}$$

Sie können alle in der Vorlesung besprochenen Algorithmen als Prozeduren verwenden. Das Symbol $*$ steht für '(G, k) ist eine korrekte Codierung eines Graphen G und einer

Zahl $k \in \mathbb{N}$' und $D(G)$ bezeichnet den Durchmesser von G. Sie können auch davon ausgehen, dass die Sprache $L = \{(G, k) \,|\, *\}$ (also das Erkennen einer zulässigen Codierung) in P liegt.

Aufgabe 4: **p-Reduktionen** (0 Punkte)

Weisen Sie durch Reduktionen von geeigneten NP-schweren Problemen aus der Vorlesung nach, dass die folgenden Probleme NP-vollständig sind.

a) $L_1 = \{(G, H) \,|$ (G, H) ist Codierung von zwei Graphen und G enthält einen Untergraphen, der zu H isomorph ist

b) $L_2 = \{ \quad S \quad |$ S ist Codierung einer Multimenge von natürlichen Zahlen, so dass es eine Partition von S in drei Multimengen gibt, deren Summen gleich sind$\}$