def! Азбука наричаме непразно крайно множество. (бележим с Σ)

def! Ако Σ е азбука, дума над Σ наричаме вс. крайна последователност от букви $w = w_1 \dots w_n$, $w_i \in \Sigma$, $i = \overline{1,n}$

def! Празната дума бележим с ε.

def! Множеството от всички думи над азбука Σ бележим с Σ^*.

def! Нека $u, w \in \Sigma^*$ и $u = u_1 \dots u_n$, $w = w_1 \dots w_m$, тогава с uw бележим

def! w^n тяхната конкатенация и $uw = u_1 \dots u_n w_1 \dots w_m$ // индукция

def! Ако $w \in \Sigma^*$, то с $|w|$ бележим дължината на w, т.е. ако $w = w_1 \dots w_n$, то $|w| = n$ // индукция

def! Език над Σ наричаме всяко $L \subseteq \Sigma^*$

- $\emptyset$ е език;
- $\{\varepsilon\}$ е език;

def| Нека $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, пораждаме

- $L_1 L_2 \stackrel{def}{=} \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$

def| Нека $L \subseteq \Sigma^*$, пораждаме деф. L^n индуктивно:

- $L^0 \stackrel{def}{=} \{\varepsilon\}$
- $L^{n+1} = L^n L$

def| Нека $L \subseteq \Sigma^*$, пораждаме

- $L^* = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} L^n$
- $L^+ = L L^*$

def| Регулярен език над Σ деф. индуктивно:

- $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{x\}$ за $\forall x \in \Sigma$ са регулярни
- ако $L_1 \subseteq \Sigma^*$, $L_2 \subseteq \Sigma^*$ са р.е. то: $L_1 L_2$, $L_1 \cup L_2$, L_1^*, L_2^* са р.е.

Твърдение

Всеки $L \subseteq \Sigma^*$ такъв, че $L = \{w\}$ за $w \in \Sigma^*$ е регулярен.

<u>Доказателство</u>:

Нека $L = \{w\}$. Индукция по $|w|$:

- $|w| = 0$, тогава $w = \varepsilon$, i.e. $L = \{\varepsilon\}$ и по деф. L е регулярен език.
- нека за $|w| = n$ езикът $L = \{w\}$ е р.е
- нека $|w| = n+1$, тогава $\exists x \in \Sigma$ такава, че $w = ux$, $u \in \Sigma^*$, $|u| = n$. От ИХ $\{u\}$ е р.е. От друга страна

$$L = \{w\} = \{u\}\{x\}$$

и по деф. $\{x\}$ е р.е. Следователно L е р.е.

$\boxed{\text{Твърдение}}$

Да се докаже, че всеки краен език е регулярен.

Доказателство:

Ще докажем, че $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall L \subseteq \Sigma^*$ такъв че $|L| = n$ е регулярен език.

- $|L| = 0$, тогава $L = \emptyset$ е р.е.
- $|L| = 1$, тогава имаме следните случаи
  1сл: $L = \{\varepsilon\}$ е р.е. по деф.
  2сл: $L = \{a\}$, $a \in \Sigma$ е р.е. по деф.
  3сл: $L = \{w\}$, $w \in \Sigma^*$ вече доказахме че е р.е.
- нека $\forall L \subseteq \Sigma^*$ такъв, че $|L| = n$ е регулярен.
- нека $L \subseteq \Sigma^*$ е такъв, че $|L| = n+1$. Нека $w \in L$ и $L_1 = L \setminus \{w\}$. Тогава $|L_1| = n$ и от ИХ L_1 е регулярен. Тогава тъй като $\{w\}$ е регулярен и $L = \{w\} \cup L_1$, то L също е р.е.

Задача

Нека $\Sigma = \{a, b\}$ и $L = \{w \mid w$ започва с ab и завършва с $ba\}$

Докажете, че L е р.е.

Решение:

$L = \{w \mid w$ започва с ab и завършва с $ba\}$

$= \{abwba \mid w \in \Sigma^*\}$

$= \{ab\} \circ \Sigma^* \circ \{ba\} \cup \{aba\}$

Имаме, че Σ е краен $\Rightarrow$ Σ е р.е. $\Rightarrow$ Σ^* е р.е.

$\{ab\}$ и $\{ba\}$ са крайни $\Rightarrow$ са регулярни,

оттук $\{ab\} \circ \Sigma^*$ е регулярен и

$(\{ab\} \circ \Sigma^*) \circ \{ba\}$ е регулярен

Задача

— || — $L = \{w \mid$ — || — или — || — $\}$ — || —

Решение:

$L = \{abw \mid w \in \Sigma^*\} \cup \{wba \mid w \in \Sigma^*\}$

$= (\{ab\} \circ \Sigma^*) \cup (\Sigma^* \circ \{ba\})$

Задача

Нека $\Sigma = \{0, 1\}$ и нека за $w \in \Sigma^*$, $w = w_1 \ldots w_n$ дефинираме

$$\overline{w} \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot 2^{i-1}$$

Да се докаже, че $L = \{w \in \Sigma^* \mid \overline{w} \% 4 = 0\}$

Решение:

Имаме, че за $\forall n \in \mathbb{N}$

$$n \% 4 = 0 \iff \exists k \in \mathbb{N},\ n = k * 4$$

В двоичен запис, ако $w = w_1 \ldots w_n$ $\overline{w} \% 2 = 0$, ако и $w_n = 0$, то $\overline{w} \% 4 = 0$, оттук $w_n = w_{n-1} = 0$, то

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \overline{w} \% 4 = 0\} = \{00\}\Sigma^* \cup \{\varepsilon\},$$

тъй като $\{\varepsilon\}$ е р.е., $\{00\}$ е р.е. и Σ^* е р.е., следователно L е р.е.

$\boxed{\text{Задача}}$

Нека $\Sigma = \{a, b, c\}$. Докажете, че $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \% 2 = 0\}$ е р.е.

Решение:

Имаме, че $L = (\Sigma^2)^*$, освен това $\Sigma^2 = \Sigma\Sigma$ и Σ е р.е., т.е. Σ^2 е р.е.

Оттук $(\Sigma^2)^*$ е р.е.

$\boxed{\text{Задача}}$

— || — $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \% 2 = 1\}$ е р.е.

Решение:

$$L = (\Sigma^2)^* \Sigma$$

$\boxed{\text{Задача}}$

Нека $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ и $k \in \mathbb{N}$. Док., че $L_{p,k} = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \% p = k\}$ е р.е.

Решение:

I случай: $k \geq p$, тогава $L_{p,k} = \emptyset$ е р.е.

II случай: $k < p$, тогава $L = (\Sigma^p)^* \Sigma^k$

def || **Регулярен израз** –

Нека Σ е крайна азбука и нека $\Gamma = \Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, (,), *, +, \cdot\}$. Регулярен израз деф. индуктивно:

База
- думата $\emptyset$ е р.и. над Σ;
- думата ε е р.и. над Σ;
- ако $a \in \Sigma$, то a е р.и. над Σ;

Стъпка
- ако r е р.и. над Σ, то $(r)^*$ е р.и. над Σ
- ако r и s са р.и. над Σ, то $(r+s)$ е р.и. над Σ
- ако r и s — || —, то $(r.s)$ е р.и. над Σ

def || Език на регулярен израз

База
- $L(\emptyset) = \emptyset$;
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$;
- $L(a) = \{a\}, a \in \Sigma$;

Стъпка
- $L((r)^*) = \{L(r)\}^*$;
- $L((r+s)) = L(r) \cup L(s)$;
- $L((r.s)) = L(r)\,L(s)$;