Твърдение

Нека $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ са КСЕ. Тогава $L_1 \cup L_2$ е КСЕ.

Конструкция:

Нека $\Gamma_i = (N_i, \Sigma, S_i, P_i)$ за $i = \overline{1,2}$ е КСГ с език $L(\Gamma_i) = L_i$. БОО $N_1 \cap N_2 = \emptyset$

Тогава нека $S \notin N_1 \cup N_2$ и

$\Gamma = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 | S_2\})$

Вярно е, че $L(\Gamma) = L_1 \cup L_2$.

Твърдение

Нека $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ са КСЕ. Тогава $L_1 L_2$ е КСЕ.

Конструкция:

______ . Тогава нека

______ || ______

$\Gamma = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$

Твърдение

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е КСЕ. Тогава L^* е КСЕ.

Конструкция:

Нека $\Gamma = (N, \Sigma, S, P)$ е КСГ с $L(\Gamma) = L$.

Нека $S' \notin N$ и нека

$\Gamma^* = (N \cup \{S'\}, \Sigma, S', P \cup \{S \to \varepsilon | S'S\})$

Вярно е, че $L(\Gamma^*) = L^*$

Задача

Докажете, че $L = \{a^n b^k \mid n \in \mathbb{N} \;\&\; k \in \mathbb{N} \;\&\; n \geq k\}$ е КСЕ.

Решение:

$$L = \{a^{n-k} a^k b^k \mid n \geq k\} = \{a^t a^k b^k \mid t \in \mathbb{N} \;\&\; k \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{a^t \mid t \in \mathbb{N}\}\{a^k a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{a\}^* \{a^k b^k \mid k \in \mathbb{N}\}$$, където $\{a\}^*$ е РЕ и $\{a^k b^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ е КСЕ, защото $\{a\}^*$ е КСЕ, е КСЕ.

Задача

Докажете, че $L = \{a^k b^t c^p \mid k \in \mathbb{N} \;\&\; t \in \mathbb{N} \;\&\; p \in \mathbb{N} \;\&\; p \geq \min\{k, t\}\}$ е КСЕ.

Решение:

$$L = \{a^k b^t c^p \mid p \geq k \vee p \geq t\} =$$

$$= \underbrace{\{a^k b^t c^p \mid p \geq k\}}_{L_1} \cup \underbrace{\{a^k b^t c^p \mid p \geq t\}}_{L_2}$$

$$L_2 = \{a^k b^t c^p \mid p \geq t\} = \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}\{b^t c^p \mid p \geq t\}$$

$$= \underbrace{\{a\}^*}_{\text{РЕ}} \underbrace{\{b^t c^t \mid t \in \mathbb{N}\}}_{\text{КСЕ}} \underbrace{\{c\}^*}_{\text{РЕ}}$$ е КСЕ

$$L_1 = \{a^k b^t c^p \mid p \geq k\} =$$
$$= \{a^k b^t c^k c^{p-k} \mid p \geq k\} =$$
$$= \underbrace{\{a^k b^t c^k \mid k, t \in \mathbb{N}\}}_{L_3} \underbrace{\{c\}^*}_{PE}$$

Ще докажем, че L_3 е КСЕ.

Дефинираме граматика, която да генерира L_3 по следния начин

1) Добавяне равен брой $\underline{a}$ в началото и $\underline{c}$ в края.
2) Спиране да изпълняване 1) и започване да добавяне произволен брой $\underline{b}$.

/* $S \to aSc \mid B$
$B \to \varepsilon \mid bB$
*/

Нека $\Gamma = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, S, \{S \to aSc \mid B, B \to \varepsilon \mid bB\})$

Вярно е, че $L(\Gamma) = L_3$.

Нека $L_S = \{\alpha \in \{S, B, a, b, c\}^* \mid S \vDash \alpha\}$ и

$L_B = \{\alpha \in \{S, B, a, b, c\}^* \mid B \vDash \alpha\}$

Нека $L'_S = \{a^k S c^k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{a^k B c^k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{a^k \beta c^k \mid k \in \mathbb{N} \ \& \ \beta \in L'_B\}$

$L'_B = \{b^t B \mid t \in \mathbb{N}\} \cup \{b^t \mid t \in \mathbb{N}\}$

Ще докажем, че $\underset{(1)}{L_B = L'_B}$ & $\underset{(2)}{L_S = L'_S}$ (*)

От (*) ще следва, че

$L(\Gamma) = L_S \cap \{a, b, c\}^* =$

$= \{a^k \beta b^k \mid k \in \mathbb{N} \ \& \ \beta \in L_B \cap \{a, b, c\}^*\}$

$= \{a^k b^t c^k \mid k, t \in \mathbb{N}\}$

⊆) Ще докажем $L_B \subseteq L'_B$ & $L_S \subseteq L'_S$.

Ще докажем:

1) $(\forall h \in \mathbb{N})$($\forall T$-д.н. с височина h и корен B) [думата на T е от L'_B] $\psi_1(h)$

2) $(\forall h \in \mathbb{N})$($\forall T$-д.н. с височина h и корен S) [думата на T е от L'_S] $\psi_2(h)$

Ще ги докажем едновременно с индукция

(base): $h=0$. Тогава нека $T = B$ и $B \in L'_B$ защото при $t=0$, $b^0 B = B$.

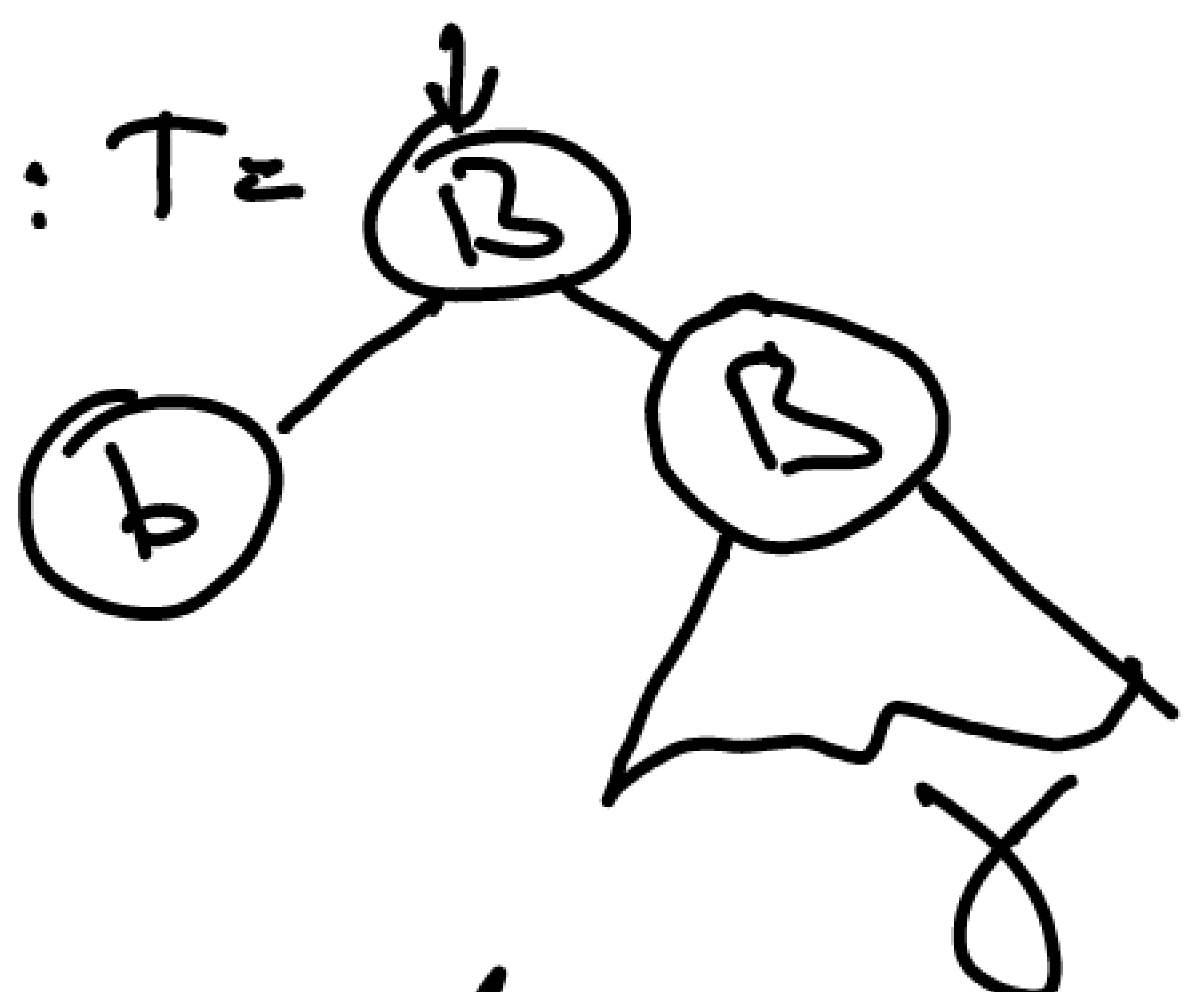
Нека $T = S$ и $S \in L'_S$ защото при $k=0$, $a^0 S c^0 = S \in L'_S$.

(ih): $(\forall h \leq p)[\varphi_1(h) \,\&\, \varphi_2(h)]$ за $p \in \mathbb{N}$

(step): ще докажем, че $\varphi_1(p+1) \,\&\, \varphi_2(p+1)$.

Нека T е д.и. с височина $p+1$ и корен B.

<u>I случай</u>: $T =$  и имаме, че $\varepsilon \in L'_B$.

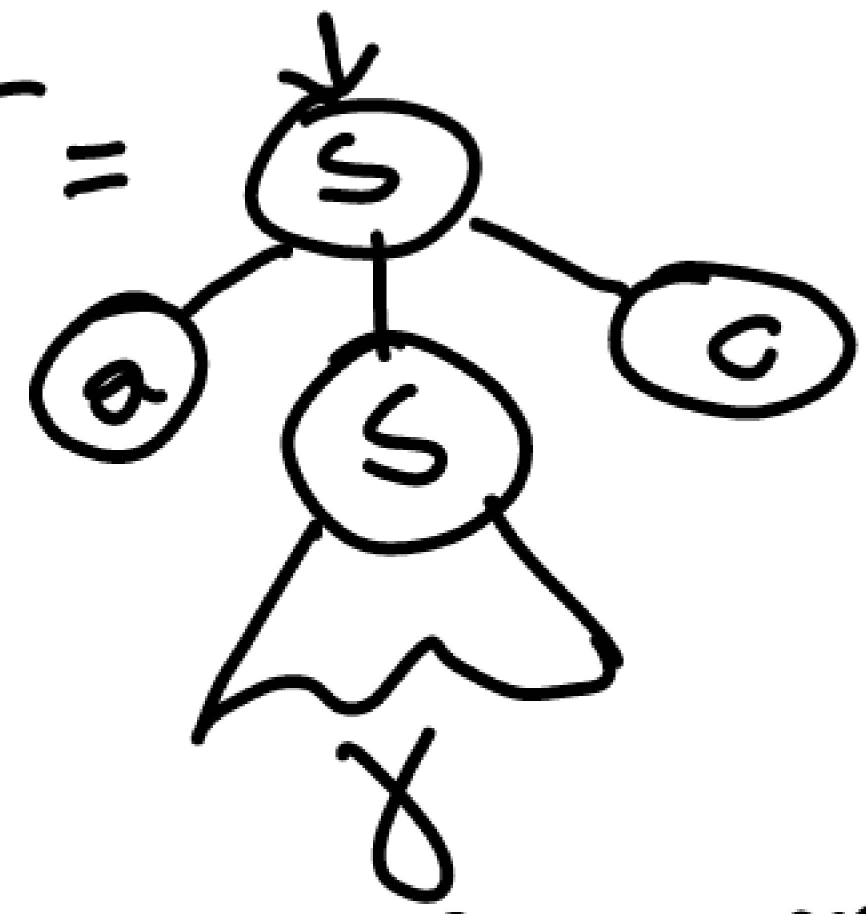
<u>II случай</u>: $T =$ 

От ИХ $\Longrightarrow \gamma \in L'_B$. Имаме два случая $\gamma = b^t B$ или $\gamma = b^t$ за някое $t \in \mathbb{N}$.

И в двата случая $b\gamma \in L'_B$.

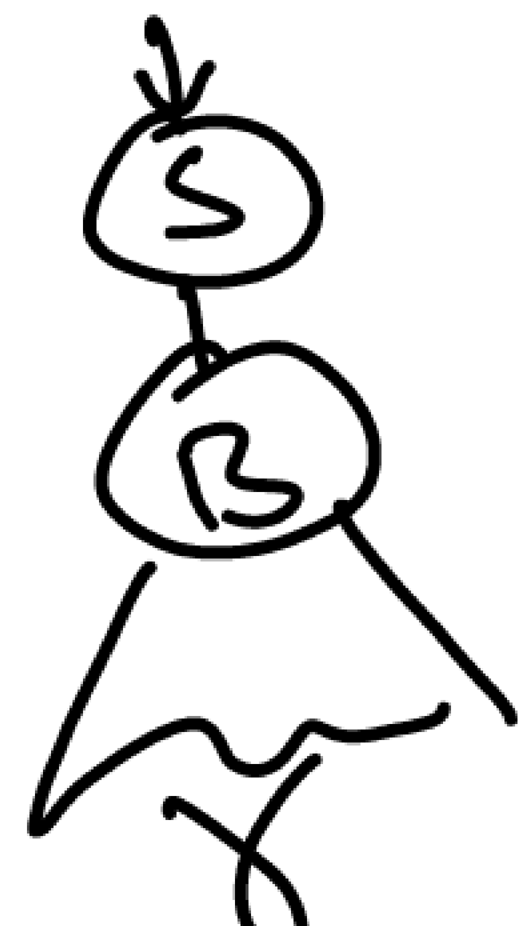
$\Longrightarrow \varphi_1(p+1)$.

Нека T е д.и. с височина $p+1$ и корен надписан с S.

I случай: $T =$ 

От ИХ $\Rightarrow \gamma \in L'_S$. Трябва да докажем, че $a\gamma c \in L'_S$.

Имаме три случая за γ и те са $\gamma = a^k S c^k \vee \gamma = a^k B c^k \vee \gamma = a^k \beta c^k$ и в трите $a\gamma c \in L'_S$.

II случай: $T =$ 

От ИХ $\Rightarrow \gamma \in L'_B$ (!!! ...)

Трябва да док. че $\gamma \in L'_S$. Това е вярно, защото при $t=0$ се видя, че $L'_B \subseteq L'_S$.

$\Rightarrow \varphi_2(p+1)$

$\Rightarrow$ Ще докажем, че $L'_B \subseteq L_B$ & $L'_S \subseteq L_S$ като докажем, че:

1) $\underbrace{(\forall l \in \mathbb{N})(\forall \alpha \in \{a,b,c,S,B\}^l)[\alpha \in L'_B \Rightarrow \alpha \in L_B]}_{\varphi_1(l)}$

2) $\underbrace{(\forall l \in \mathbb{N})(\forall \alpha \in \{a,b,c,S,B\}^l)[\alpha \in L'_S \Rightarrow \alpha \in L_S]}_{\varphi_2(l)}$

(base): $l=0$. Имаме, че $\varepsilon \in L'_B$ и $\varepsilon \in L_B$
$\varepsilon \in L'_S$ и $\varepsilon \in L_S$

(ih): $(\forall l \leq p)[\varphi_1(l) \,\&\, \varphi_2(l)]$

(step): Ще док., че $\varphi_1(p+1) \,\&\, \varphi_2(p+1)$.
Нека $|\alpha| = p+1$ и нека $\alpha \in L'_B$. Тогава

<u>I случай</u>: $\alpha = b^t B$. Ако $t=0$, то $B \in L_B$.
Ако $t \neq 0$, то $\alpha = b\, b^{t-1} B$ и имаме, че $b^{t-1} B \in L'_B$ и от (ih) $b^{t-1} B \in L_B$.
Следователно $B \models_\Gamma b^{t-1} B$. От друга страна $B \vdash_\Gamma bB$, тоест
$B \vdash_\Gamma bB \models_\Gamma b\, b^{t-1} B = \alpha \Rightarrow \alpha \in L_B$

<u>II случай</u>: $\alpha = b^t$, $t = p+1 \Longrightarrow \alpha = b\, b^p$.
От (ih) $\Longrightarrow b^p \in L'_B$ и $b^p \in L_B$.
От $b^p \in L_B \Longrightarrow B \models_\Gamma b^p$. От друга страна $B \vdash_\Gamma bB$, тоест
$B \vdash_\Gamma bB \models_\Gamma b\, b^p = \alpha \in L_B$

$\Longrightarrow \varphi_1(p+1)$.

Нека $|\alpha| = p+1$ и нека $\alpha \in L'_S$.

I случай: $\alpha = a^k S c^k$ ------

II случай: $\alpha = a^k B c^k$ ----

III случай: $\alpha = a^k \beta c^k$, $\beta \in L'_B$ ----