Детерминиране на автомати

def: Нека $A = (Q, I, \Delta, F)$ е краен автомат над азбука Σ. Казваме, че A е детерминиран т.с.т.к.

1. $|I| = 1$;
2. $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ (няма ε-преходи);
3. $(\forall q \in Q)(\forall a \in \Sigma)$
$[\,|\{q' \in Q \mid (q, a, q') \in \Delta\}| \leq 1\,]$;

def: Автомата $A = (Q, I, \Delta, F)$ е тотален детерминиран т.с.т.к.

1. $|I| = 1$;
2. $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$;
3. $(\forall q \in Q)(\forall a \in \Sigma)$
$[\,|\{q' \in Q \mid (q, a, q') \in \Delta\}| = 1\,]$

Твърдение

Нека $A = (Q, I, \Delta, F)$ е краен автомат над Σ. Тогава съществува детерминиран и тотален автомат B над Σ такъв, че

$$L(B) = L(A)$$

Когато $A = (Q, I, \Delta, F)$ е детерминиран можем да разглеждаме $\Delta : Q \times \Sigma \to Q$ ф-я когато е детерминиран и тотален, то Δ е тотална функция

Конструкция (алгоритъм за детерминиране):

Нека $A=(Q,I,\Delta,F)$ е краен автомат над Σ.

Нека $B=(\mathcal{P}(Q), \{C_\varepsilon(I)\}, \delta, \{X\subseteq Q \mid X\cap F\neq\emptyset\})$, където $C_\varepsilon : \mathcal{P}(Q)\to\mathcal{P}(Q)$ такава, че

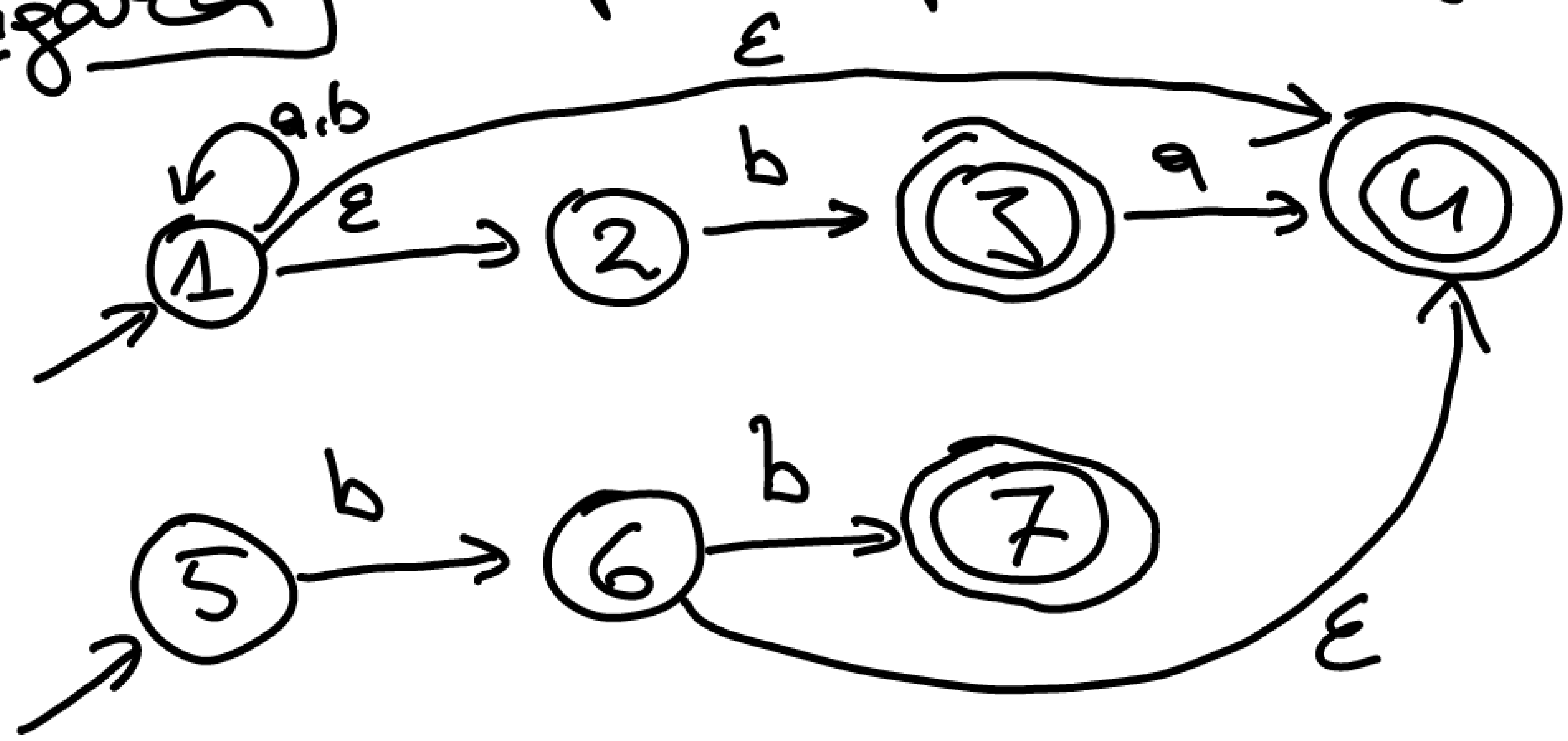
$$C_\varepsilon(X) \stackrel{def}{=} \{q'\in Q \mid (\exists q\in X)[q \stackrel{\varepsilon}{\vdash}_{A} q']\}$$

и $\delta : Q\times\Sigma \to Q$ по следния начин

$$\delta(X,a) \stackrel{def}{=} C_\varepsilon(\{q'\in Q \mid (\exists q\in X)[(q,a,q')\in\Delta]\})$$

Вярно е, че B е детерминиран и тотален и $L(B)=L(A)$.

Задача Детерминирайте следния автомат:



// Ако директно използваме конструкцията ще получим автомат с $2^{|Q|}=2^7$ състояния.

// Ще строим само тези състояния, които са достижими от началното

I. Смятане $C_\varepsilon(I)$, където $I = \{1,5\}$, обхождайки автомата A в ширина

Queue: $1 \xrightarrow{\varepsilon} 2,4$
$5 \xrightarrow{\varepsilon}$ няма
$2 \xrightarrow{\varepsilon}$ няма
$4 \xrightarrow{\varepsilon}$ няма

$\Longrightarrow C_\varepsilon(I) = \{1,2,4,5\}$

II. Къде можем да отидем от $\{1,2,4,5\}$ с буквата $\underline{a}$:

$1 \vdash^{a}_{A} 1$
$2 \vdash^{a}_{A}$ никъде
$4 \vdash^{a}_{A}$ никъде
$5 \vdash^{a}_{A}$ никъде

$\Longrightarrow$ Търсим $C_\varepsilon(\{1\})$:
Queue: $1 \xrightarrow{\varepsilon} 2,4$
$2 \xrightarrow{\varepsilon}$ никъде
$4 \xrightarrow{\varepsilon}$ няма

$\Longrightarrow C_\varepsilon(\{1\}) = \{1,2,4\}$

$\{1,2,4\} \Longrightarrow$ Получихме ново състояние $\{1,2,4\}$ на добавяме го в първата колона на таблицата.

III. Къде ще отидем от $\{1,2,4,5\}$ с $\underline{b}$:

$1 \vdash^{b}_{A} 1$
$2 \vdash^{b}_{A} 3$
$4 \vdash^{b}_{A}$ никъде
$5 \vdash^{b}_{A} 6$

Търсим $C_\varepsilon(\{1,3,6\})$:
Queue: $1 \xrightarrow{\varepsilon} 2,4$
$3 \xrightarrow{\varepsilon}$ няма
$6 \xrightarrow{\varepsilon} 4$
$2 \xrightarrow{\varepsilon}$ няма
$4 \xrightarrow{\varepsilon}$ няма

$\Longrightarrow C_\varepsilon(\{1,3,6\}) = \{1,2,3,4,6\}$

Получихме ново с-е $\{1,2,3,4,6\} \Longrightarrow$ добавяме го в първата колона на таблицата

IV. Къде стигаме от $\{1, 2, 4\}$ с $\underline{\underline{a}}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \xmapsto[A]{a} 1 \\ 2 \xmapsto[A]{a} \text{никъде} \\ 4 \xmapsto[A]{a} \text{никъде} \end{array}\right\} \Longrightarrow C_\varepsilon(\{1\}) = \{1, 2, 4\}$$

// Вече го имаме в таблицата

V. Къде стигаме от $\{1, 2, 4\}$ с $\underline{\underline{b}}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \xmapsto[A]{b} 1 \\ 2 \xmapsto[A]{b} 3 \\ 4 \xmapsto[A]{b} \text{никъде} \end{array}\right\} \Longrightarrow C_\varepsilon(\{1, 3\}) = \{1, 2, 3, 4\}$$

// Ново с-е $\Longrightarrow$ добавяме го в таблицата

VI. От $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ с $\underline{\underline{a}}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \xmapsto{a} 1 \\ 2 \xmapsto{a} X \\ 3 \xmapsto{a} 4 \\ 4 \xmapsto{a} X \\ 6 \xmapsto{a} X \end{array}\right\} \Longrightarrow C_\varepsilon(\{1, 4\}) = \{1, 2, 4\}$$

// Вече го имаме

VII. От $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ с $\underline{\underline{b}}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \xmapsto{b} 1 \\ 2 \xmapsto{b} 3 \\ 3 \xmapsto{b} X \\ 4 \xmapsto{b} X \\ 6 \xmapsto{b} 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow C_\varepsilon(\{1, 3, 7\}) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$$

// Ново състояние

VIII. От $\{1,2,3,4\}$ с $\underline{a}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{a} 1 \\ 2 \xrightarrow{a} X \\ 3 \xrightarrow{a} 4 \\ 4 \xrightarrow{a} X \end{array}\right\} \Longrightarrow C_\varepsilon(\{1,4\}) = \{1,2,4\}$$

// Вече го имаме

IX. От $\{1,2,3,4\}$ с $\underline{b}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{b} 1 \\ 2 \xrightarrow{b} 3 \\ 3 \xrightarrow{b} X \\ 4 \xrightarrow{b} X \end{array}\right\} \Longrightarrow C_\varepsilon(\{1,3\}) = \{1,2,3,4\}$$

// Вече го имаме

X. От $\{1,2,3,4,7\}$ с $\underline{a}$:

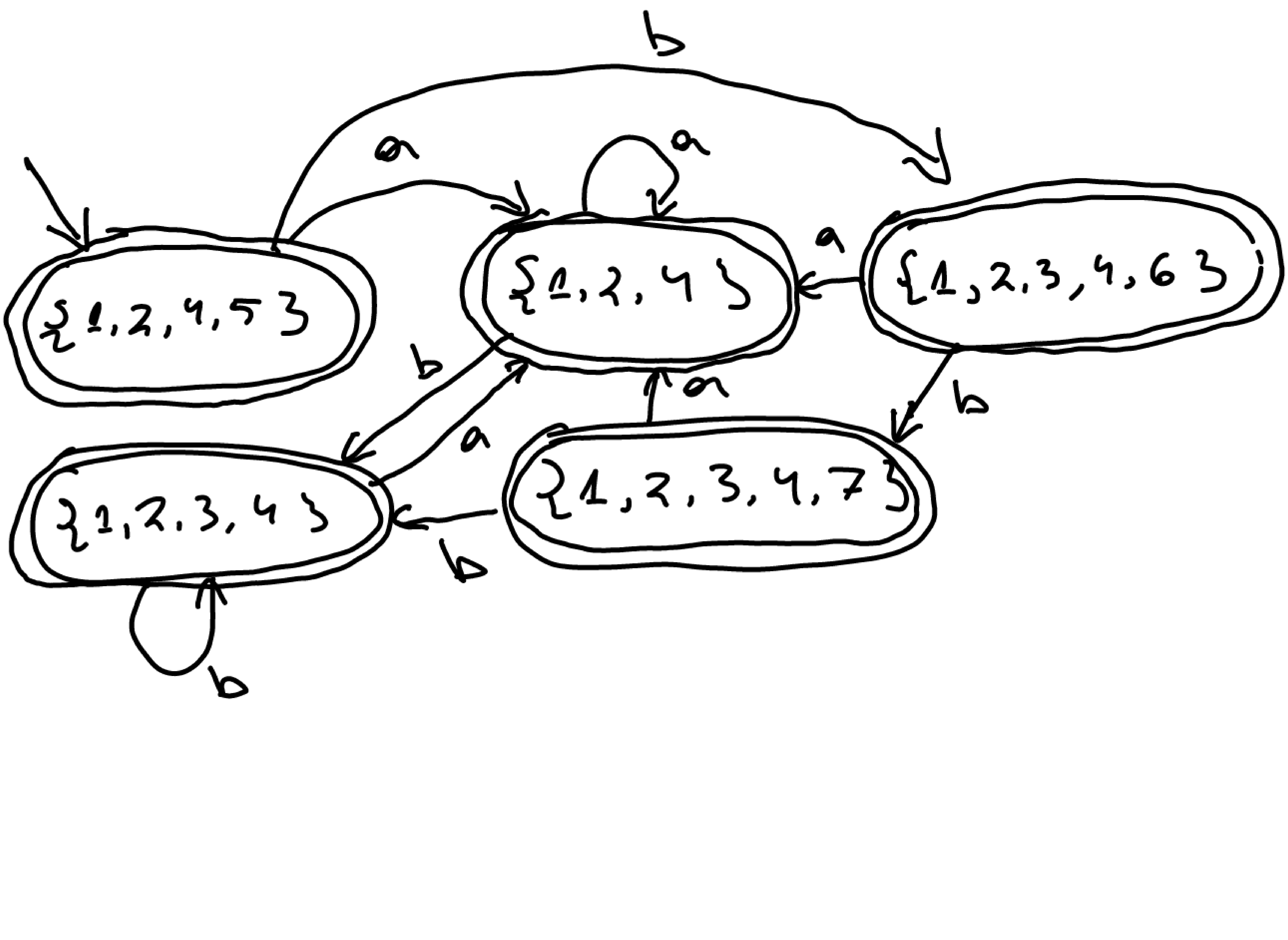
$$\left.\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{a} 1 \\ 2 \xrightarrow{a} X \\ 3 \xrightarrow{a} 4 \\ 4 \xrightarrow{a} X \\ 7 \xrightarrow{a} X \end{array}\right\} \Longrightarrow C_\varepsilon(\{1,4\}) = \{1,2,4\}$$

XI. От $\{1,2,3,4,7\}$ с $\underline{b}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{b} 1 \\ 2 \xrightarrow{b} 3 \\ 3 \xrightarrow{b} X \\ 4 \xrightarrow{b} X \\ 7 \xrightarrow{b} X \end{array}\right\} \Longrightarrow C_\varepsilon(\{1,3\}) = \{1,2,3,4\}$$

$\Longrightarrow$ КРАЙ (няма нови с-я)

B	a	b
{1,2,4,5}	{1,2,4}	{1,2,3,4,6}
{1,2,4}	{1,2,4}	{1,2,3,4}
{1,2,3,4,6}	{1,2,4}	{1,2,3,4,7}
{1,2,3,4}	{1,2,4}	{1,2,3,4}
{1,2,3,4,7}	{1,2,4}	{1,2,3,4}



Минимизация

def: Детерминираният тотален автомат $A=(Q,\{q_0\},\Delta,F)$ наричаме минимален $\overset{def}{\iff}$ за всеки детерминиран тотален автомат $B=(Q',\{q_0'\},\Delta',F')$ е вярно, че ако $L(A)=L(B)$, то $|Q|\le|Q'|$

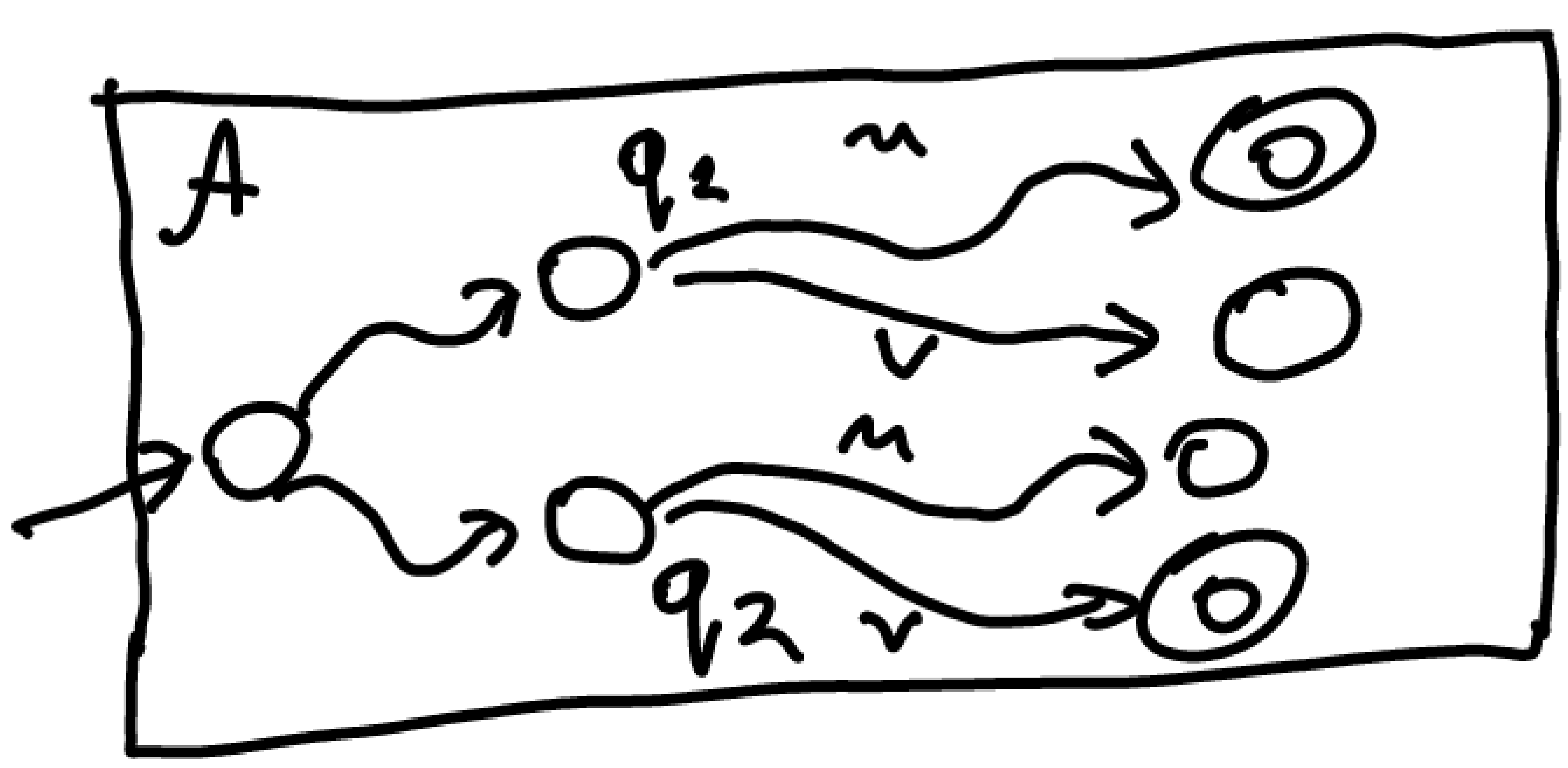
def: Нека $A=(Q,I,\Delta,F)$ е краен автомат и $q\in Q$. Тогава

$\overrightarrow{L}(q) \overset{def}{=} L((Q,\{q\},\Delta,F))$ – десен език

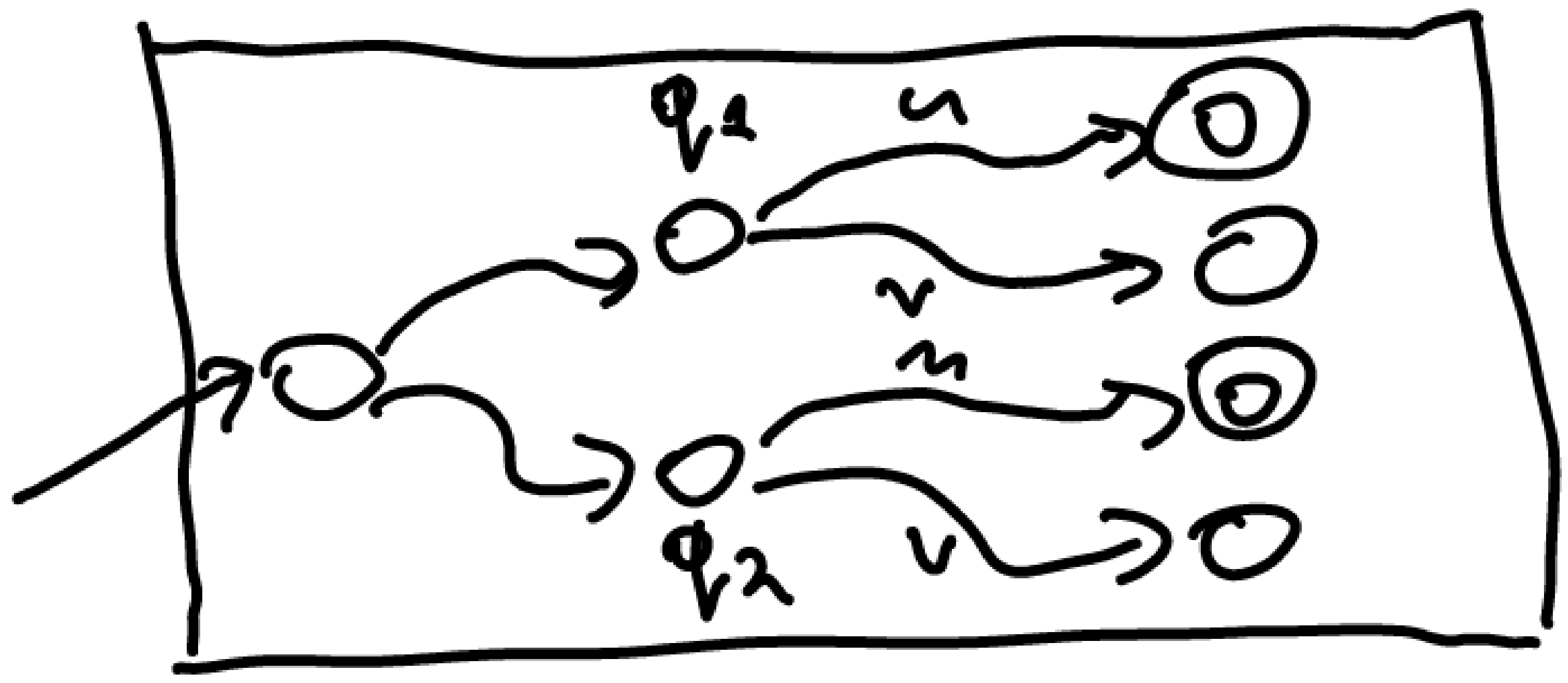
$\overleftarrow{L}(q) \overset{def}{=} L((Q,I,\Delta,\{q\}))$ – ляв език

Твърдение

$A=(Q,I,\Delta,F)$ е минимален $\iff$
$(\forall q_1\in Q)(\forall q_2\in Q)[q_1\ne q_2 \implies \overrightarrow{L}(q_1)\ne\overrightarrow{L}(q_2)]$



В този случай $\overrightarrow{L}(q_1)\ne\overrightarrow{L}(q_2)$



В този случай $\overrightarrow{L}(q_1)=\overrightarrow{L}(q_2)$ и можем да ги слеем в една

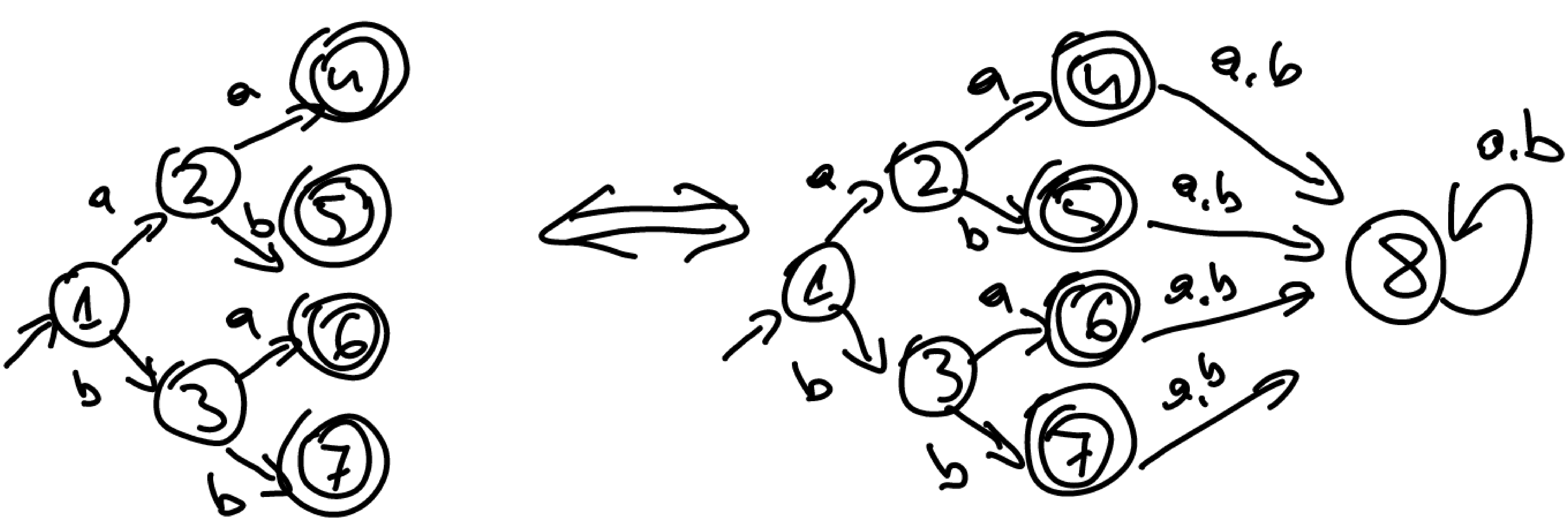
Допълване на детерминиран автомат до тотален

Алгоритъмът за минимизация, който ще покажем работи върху детерминирани и тотални автомати.

Добавяме ново фиктивно състояние, към което добавяме преходи от всички състояния, от които нямаме преходи с дадени букви. Накрая правим примка на това състояние с цялата азбука.

Пример:

Не е тотален: Тотален:



> Алгоритъма за детерминизация строи и тотален автомат

Алгоритъм за минимизация

Нека $A=(Q,\{q_0\},\Delta,F)$ е детерминиран и тотален автомат, за който е изпълнено

$$(\forall q\in Q)[\exists \text{ път в } A \text{ от } q_0 \text{ до } q]$$

На изхода ще получим детерминиран, тотален и минимален автомат B такъв, че $L(B)=L(A)$

Алгоритъм:

I сл. $F=\emptyset \Longrightarrow L(A)=\emptyset \Longrightarrow B:$ 

II сл. $Q=F \Longrightarrow L(A)=\Sigma^* \Longrightarrow B:$ 

III сл. $F\neq\emptyset$ & $F\neq Q$. Тогава ще определим еквивалентните релации с индукция:

0) $\{F, Q\setminus F\}$ - разбиване на класове на еквивалентност спрямо

$\sim_0: q'\sim_0 q'' \overset{def}{\Longleftrightarrow} (q'\in F \Longleftrightarrow q''\in F)$

i+1) ИХ: нека сме построили $\sim_i$ рел. на еквивалентност над Q. Тогава:

за $\forall a\in\Sigma$ дефинираме $\sim_{i,a}$ рел:

$$q'\sim_{i,a} q'' \overset{def}{\Longleftrightarrow} \Delta(q',a)\sim_i \Delta(q'',a)$$

Тогава нека $\sim_{i+1}=\sim_i\cap\left(\bigcap_{a\in\Sigma}\sim_{a,i}\right)$

Нека $m=\min\{i \mid \sim_i=\sim_{i+1}\}$ и $\sim=\sim_m$

Тогава $B=(\{[q]_\sim \mid q\in Q\},\{[q_0]_\sim\},\delta_B,\{[q]_\sim \mid q\in F\})$

$$\delta_B: Q/\sim\times\Sigma\longrightarrow Q/\sim$$

$$\delta_B([q]_\sim,a)\overset{def}{=}[\delta(q,a)]_\sim$$

Задача

Минимизирайте следния автомат:

	a	b
→ 1	2	3
2	4	5
3	6	7
* 4	8	8
* 5	8	8
* 6	8	8
* 7	8	8
8	8	8
* 9	1	7

: A

I. Намиране недостижимите от началното състояние. Обхождане в ширина

Queue:
1 → 2, 3
2 → 4, 5
3 → 6, 7
4 → 8
5 → 8
6 → 8
7 → 8
8 → 8

$\Rightarrow$ Не сме обходили 9, махаме го

II. Изпълняване "общия" случай

0) Нека $A = Q \setminus F$, $B = F \Longrightarrow A = \{1,2,3,8\}$, $B = \{4,5,6,7\}$. За $\forall x \in \Sigma$ смятаме $\sim_{i,x}$

A	a	b
1	A	A
2	B	B
3	B	B
8	A	A

B	a	b
4	A	A
5	A	A
6	A	A
7	A	A

За A: $1 \xmapsto[A]{a} 2 \in A$, $1 \xmapsto[A]{b} 3 \in A$, $2 \xmapsto[A]{a} 4 \in B$,
$2 \xmapsto[A]{b} 5 \in B$, $3 \xmapsto[A]{a} 6 \in B$, $3 \xmapsto[A]{b} 7 \in B$,
$8 \xmapsto[A]{a} 8 \in A$, $8 \xmapsto[A]{b} 8 \in A$

Аналогично за B

Търсим $\sim_1 = \sim_0 \cap (\sim_{0,a} \cap \sim_{0,b})$, тоест търсим състоянията, които са едновременно $\sim_0, \sim_{0,a}, \sim_{0,b}$ еквивалентни. Намират се в един и същ клас спрямо $\sim_0$ и са надписани по един и същи начин спрямо "a" и "b".

1) Получаване следните класове спрямо $\sim_1$:

C	a	b
1	D	D
8	C	C

От A и A

D	a	b
2	E	E
3	E	E

От A и B

E	a	b
4	C	C
5	C	C
6	C	C
7	C	C

От B и A

2) Получаване следните спрямо $\sim_2$:

F	a	b
1	H	H

G	a	b
8	G	G

H	a	b
2	I	I
3	I	I

I	a	b
4	G	G
5	G	G
6	G	G
7	G	G

$\Rightarrow \sim = \sim_2$

3) Спрямо получената релация $\sim$ строим

B	a	b
→F	H	H
G	G	G
H	I	I
*I	G	G