def: Контекстно свободна граматика наричаме $\Gamma = (N, T, S, P)$, където

- N е мн-во от нетерминали.
- T е мн-во от терминали и $T \cap N = \emptyset$.
- $S \in N$ е начален нетерминал
- P (Production rules) е мн-во от правила $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$

Означение:

За $A \in N$ и $\alpha \in (N \cup T)^*$ вместо $(A, \alpha) \in P$ ще пишем $A \to \alpha \in P$

Означение:

Когато $A \in N$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in (N \cup T)^*$ са такива, че $A \to \alpha_1 \in P$, $A \to \alpha_2 \in P, \dots, A \to \alpha_n \in P$ ще пишем $A \to \alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_n$

Пример: $\Gamma = (\{S, A\}, \{a, b\}, S, \{S \to \varepsilon, S \to ASaAb, S \to A, A \to Sa\})$

ще пишем

$\Gamma = (\{S, A\}, \{a, b\}, S, \{S \to \varepsilon | ASaAb | A, A \to Sa\})$

def: Релация на извод $\vdash_\Gamma \subseteq (N \cup T)^* \times (N \cup T)^*$

$$\alpha \vdash_\Gamma \beta \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists X \to \gamma \in P)(\exists i \in \mathbb{N})$$
$$[\alpha_i = X \ \& \ \beta = \alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \gamma \alpha_{i+1} \ldots \alpha_{|\alpha|}]$$

|| Можем използвайки правило в/у нетерминал от α, да получим β

def: Релация $\models_\Gamma$ дефинираме като рефлексивно и транзитивно затваряне на $\vdash_\Gamma$. Тоест

1) $\alpha \models_\Gamma \alpha$ за вс. $\alpha \in (N \cup T)^*$;
2) ако $\alpha^{(1)} \vdash_{\Gamma_2} \alpha^{(2)} \vdash_\Gamma \ldots \vdash_\Gamma \alpha^{(n)}$, то $\alpha^{(1)} \models_\Gamma \alpha^{(n)}$.

def: Език на граматиката Γ:

$$L(\Gamma) \overset{def}{=} \{\alpha \in T^* \mid S \models_\Gamma \alpha\}$$

def: Езикът $L \subseteq \Sigma^*$ е контекстно свободен език $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists \text{ КСГ} - \Gamma)[L(\Gamma) = L]$.

$\boxed{\text{Твърдение}}$

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е регулярен. Тогава L е контекстно свободен език.

$(РЕ \subsetneq КСЕ)$

Идея за доказателство:

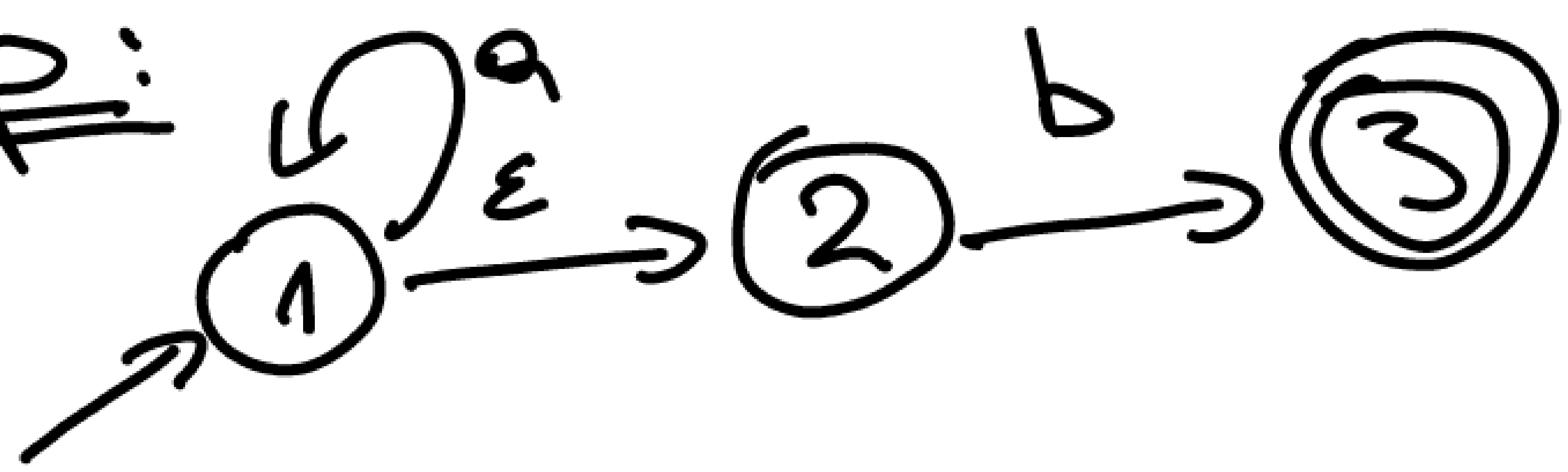
Нека $A = (Q, \{q_0\}, \Delta, F)$ е автомат такъв, че $L(A) = L$. Тогава нека

$$\Gamma = (Q, \Sigma, q_0, \{q' \to x q'' \mid (q', x, q'') \in \Delta\} \cup \{q \to \varepsilon \mid q \in F\})$$

Вярно е, че $L(\Gamma) = L(A)$.

Пример:

A :



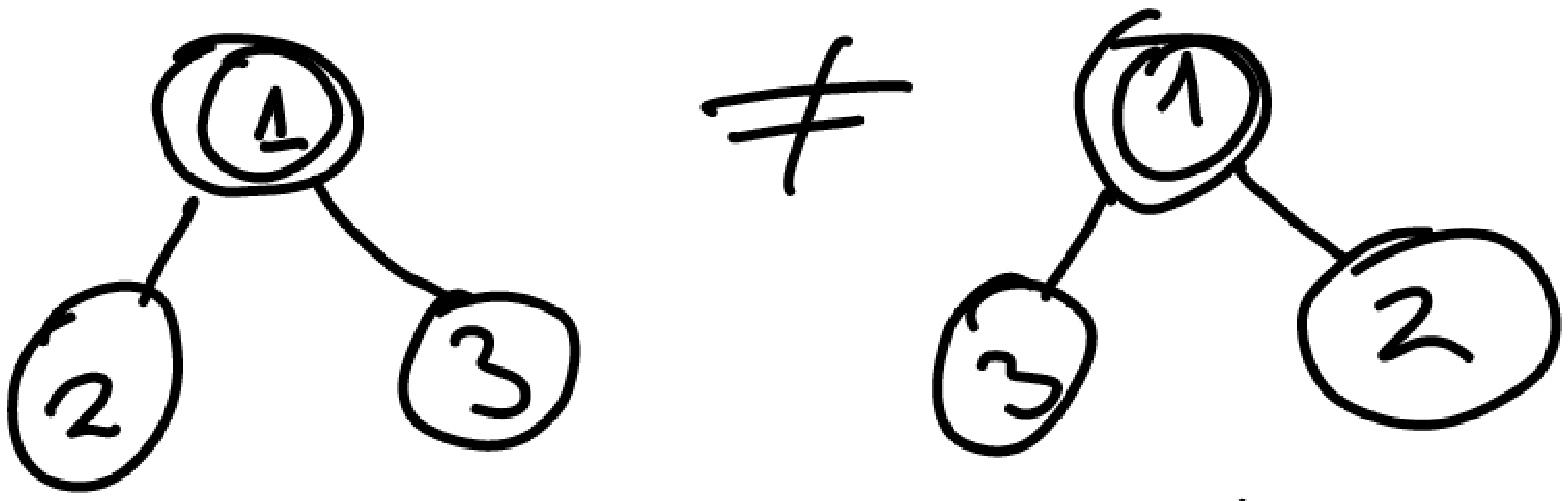
, тогава

$$\Gamma = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, 1, \{1 \to a1 \mid 2, 2 \to b3, 3 \to \varepsilon\})$$

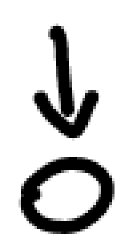
$L(A) = \{a\}^*\{b\}$ и нека $w \in L(A)$ такава, че $w = a^n b$ за някое $n \in \mathbb{N}$, тогава

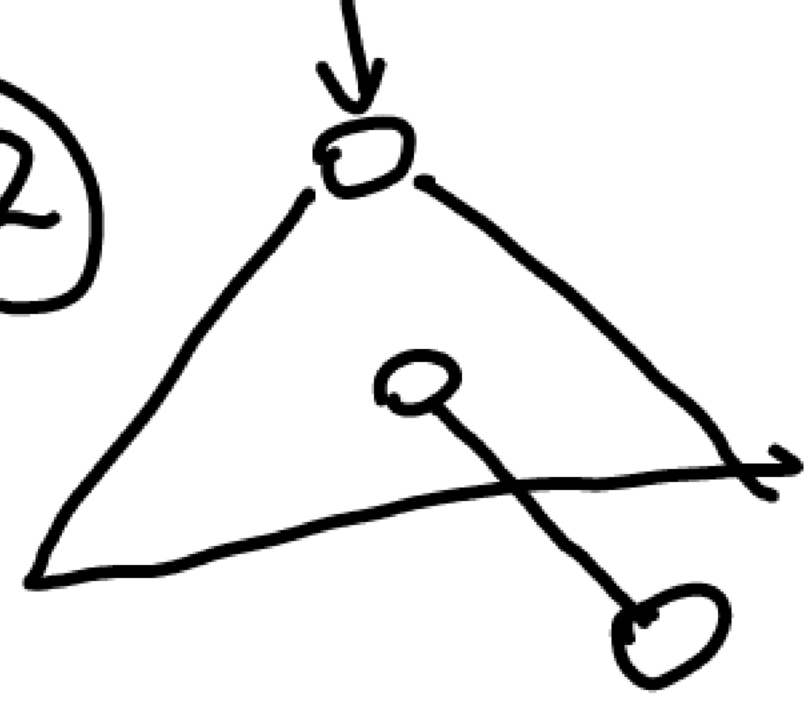
$$1 \to a1 \to aa1 \to \dots \to \underbrace{a \dots a}_{n} 1 \to \underbrace{a \dots a}_{n} 2 \to a^n b 3 \to a^n b \in L(\Gamma)$$

def: Наредено дърво наричаме кореново дърво, в което наредбата на синовете има значение.



Кореново дърво (неформално):

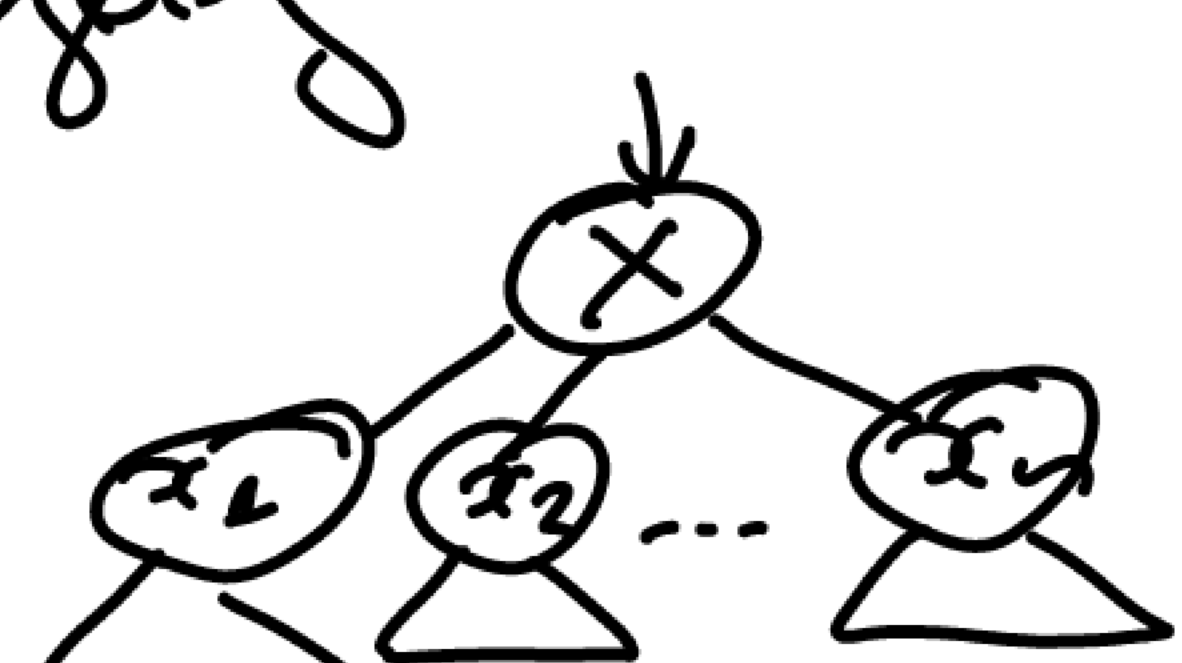
1) 

2) 

def: Нека $\Gamma = (N, T, S, P)$ е КСГ. Тогава

1)  е дърво на извод, където $x \in N \cup T \cup \{\varepsilon\}$

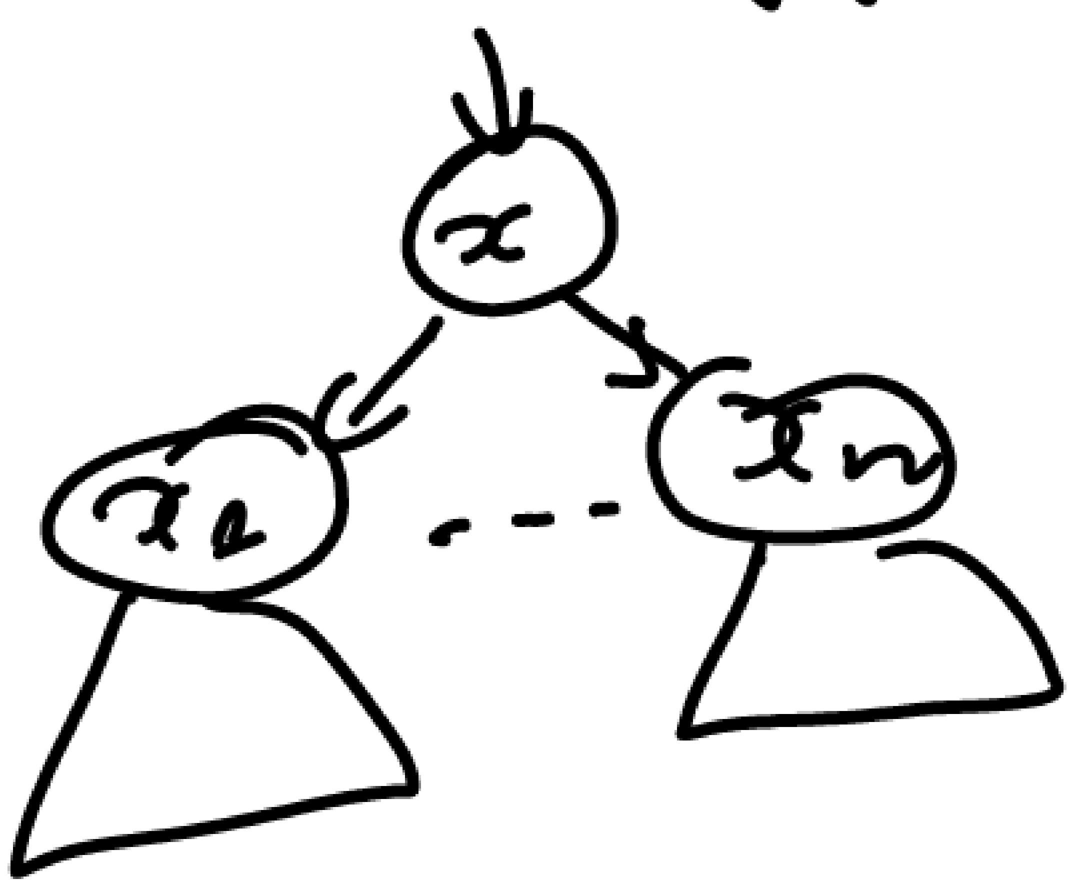
2) нека  са дървета на извод и $X \to x_1 x_2 \dots x_n \in P$.

Тогава  е дърво на извод в Γ.

def: Дума на дърво на извод:

1) x е дърво на извод с дума x

2) ако x_1 --- x_n са дървета на извод с думи $w^{(1)}$ --- $w^{(n)}$, то тогава

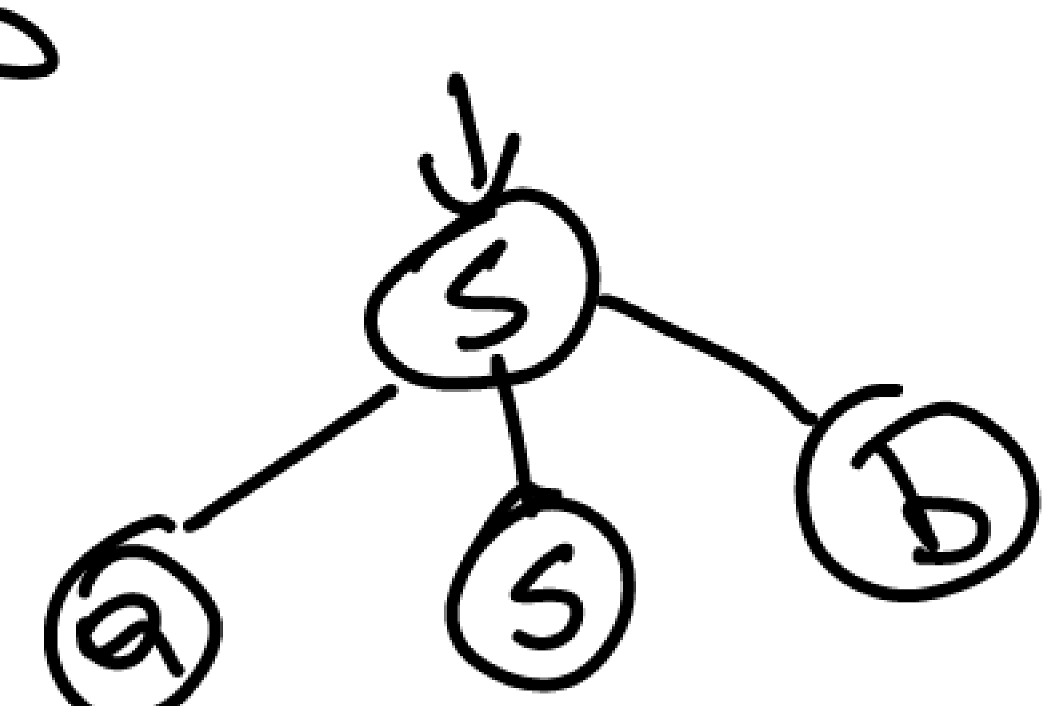


е дърво на извод с дума $w^{(1)} \dots w^{(n)}$

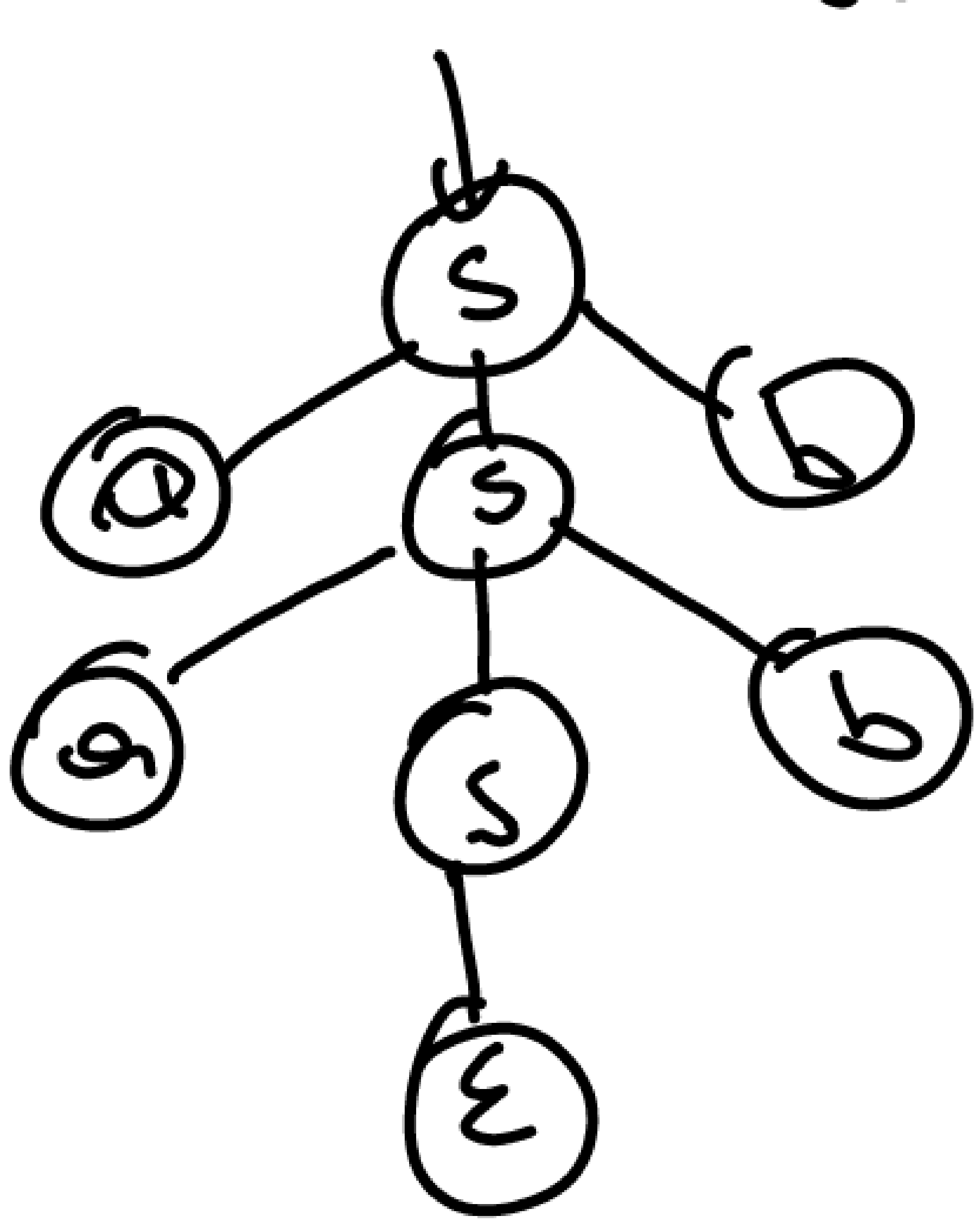
Пример: $S \to \varepsilon \mid aSb$

е д.и. с дума S

е д.и. с дума ε



е д.и. с дума aSb



е д.и. с дума $aabb$

Твърдение Нека Γ е КСГ. Тогава за вс. $X \in N$ е вярно, че
$X \models \alpha \iff \exists$ дърво на извод с корен, надписан с $\underline{X}$, и дума $\underline{\alpha}$.

Задача
Докажете, че $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е контекстно свободен език (КСЕ) над $\Sigma = \{a, b\}$.

Решение:
В началото списъка, ще се опитаме да дефинираме L индуктивно, а именно
- База: $n = 0$, $a^0 b^0 = \varepsilon$
- Стъпка: ако $\alpha \in L$, то $a \alpha b \in L$

Тази процедура може да бъде моделирана със следната граматика
$$\Gamma = (\{S\}, \Sigma, S, \{S \to \varepsilon \mid aSb\})$$
Ще покажем, че $L(\Gamma) = L$. Нека
$$L_S \stackrel{def}{=} \{\alpha \in \{S, a, b\}^* \mid S \models \alpha\}$$

Ще покажем, че

(*) $L_S = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n S b^n \mid n \in \mathbb{N}\} = L'_S$

От (*) ще следва, че

$$L(\Gamma) = L_S \cap \Sigma^* = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ще покажем, че $L_S = L'_S$.

$\subseteq$) $L_S \subseteq L'_S$. Ще докажем следното твърдение

$(\forall h \in \mathbb{N})(\forall$ д.и. T с корен S и височина $h)$

[думата на T е от L'_S]

(base) $h = 0$. Нека T е д.и. с височина 0 и корен, надписан с S. Оттук

$T = S$ и $S \in L'_S$.

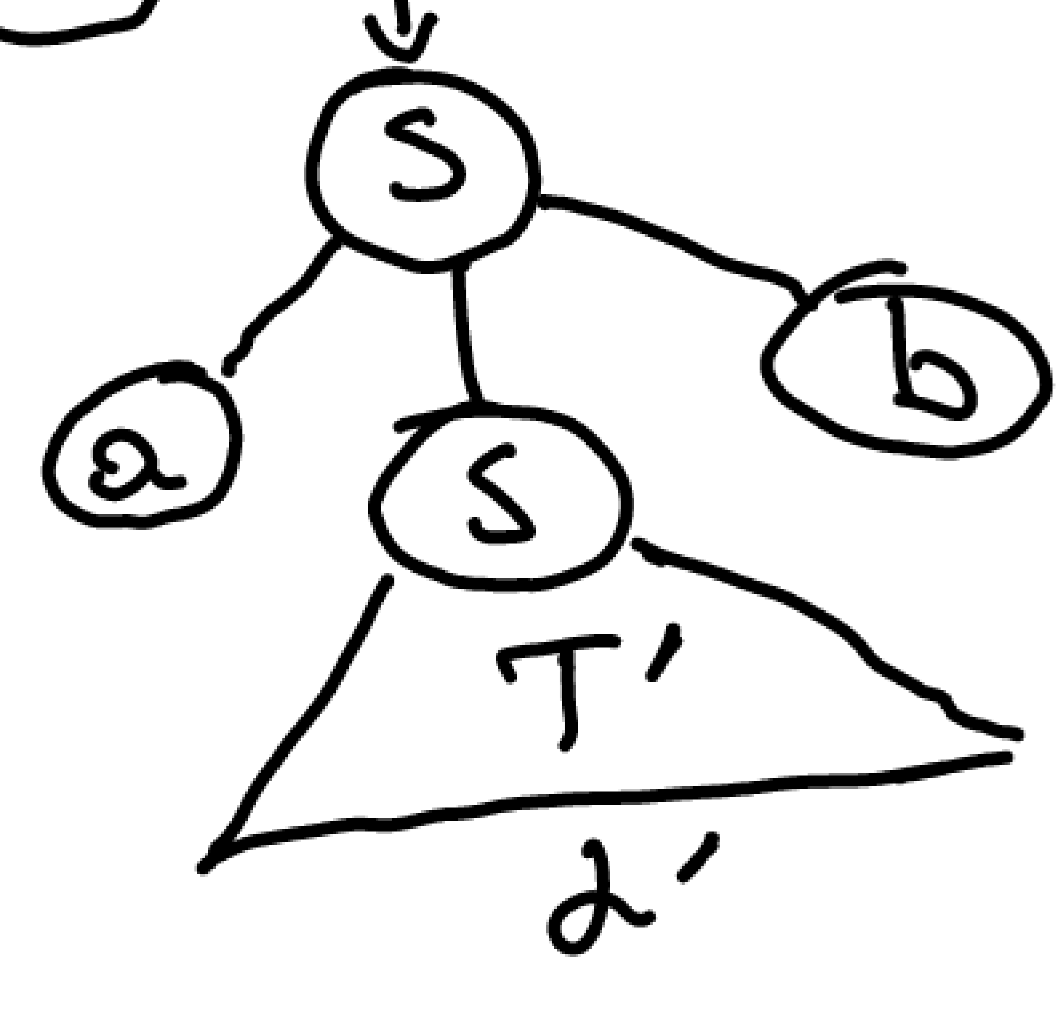
(ih) нека е вярно за $\forall h \leq k \in \mathbb{N}$.

(step) ще докажем твърдението за $k+1$.

Нека T е д.и. с височина $k+1$ и корен, надписан с $\underline{\underline{S}}$.

I случай: $T = \begin{array}{c} S \\ \downarrow \\ \varepsilon \end{array}$, тогава $\varepsilon = a^0 b^0 \in L'_S$

II случай: $T =$



От ИХ имаме, че $\alpha' \in L'_s$. Трябва да покажем, че $a\alpha' b \in L'_s$.

$\underline{2.1}$: $\alpha' = a^n b^n \Longrightarrow a\alpha' b = a^{n+1} b^{n+1} \in L'_s$

$\underline{2.2}$: $\alpha' = a^n S b^n \Longrightarrow a\alpha' b = a^{n+1} S b^{n+1} \in L'_s$

$\supseteq$) $L'_s \subseteq L_s$. Ще докажем, че

$(\forall l \in \mathbb{N})(\forall \beta \in \{a, b, S\}^l)$

$[\beta \in L'_s \Rightarrow \beta \in L_s]$

(base) нека $\beta \in \{a, b, S\}^0 \Longrightarrow \beta = \varepsilon$

$\Longrightarrow \varepsilon \in L'_s$ е вярно и $\varepsilon \in L_s$ е вярно

$\Longrightarrow$ твърдението е изпълнено

(ih) $\forall l \leq k \in \mathbb{N}$ твърдението е вярно.

(step) ще док. че твърдението е вярно за $k+1$. Нека $\beta \in \{a, b, S\}^{k+1}$, т.е. $|\beta| = k+1$ и нека $\beta \in L'_s$. Ще покажем, че $\beta \in L_s$.

$\underline{\underline{\text{I случай}}}$: $\beta = a^n b^n$, $k = 2n$. Оттук $\beta = a\beta' b$, $\beta' = a^{n-1} b^{n-1}$ и $|\beta'| = 2n - 2 = k - 2 \Longrightarrow$

От ИХ $\beta' \in L'_s$ и $\beta' \in L_s$, т.е. $S \models \beta'$. От друга страна $S \to aSb \in P$, т.е.

Получаваме $S \vdash_r aSb \models a\beta' b = \beta$
$\Rightarrow S \models \beta \Rightarrow \beta \in L_S$.

<u>II случай</u>: $\beta = a^n S b^n$. Тогава

II.1: $n = 0 \Rightarrow \beta = S \in L_S$

II.2: $n > 0 \Rightarrow \beta = a\beta' b$, където $\beta' = a^{n-1} S b^{n-1}$ и $|\beta'| = k-2$ и от ИХ $\Rightarrow \beta' \in L_S$, значи $S \models \beta'$. Оттук използвайки правилото $S \to aSb$ получаваме, че $S \vdash_r aSb \models_r \models_r a\beta' b \Rightarrow S \models_r \beta$
$\Rightarrow \beta \in L_S$

$\Rightarrow L_S = L'_S$.

Твърдение

Нека $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ са КСЕ. Тогава $L_1 \cup L_2$ е КСЕ.

<u>**Конструкция:**</u>

Нека $\Gamma_i = (N_i, \Sigma, S_i, P_i)$ за $i = \overline{1,2}$ са КСЕ с $L(\Gamma_i) = L_i$. БОО $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Нека $S \notin N_1 \cup N_2$. Тогава нека

$$\Gamma = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 | S_2\})$$

Вярно е, че $L(\Gamma) = L_1 \cup L_2$.

Твърдение

Нека $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ са КСЕ. Тогава $L_1 L_2$ е КСЕ.

<u>**Конструкция:**</u>

Нека $\Gamma_i = (N_i, \Sigma, S_i, P_i)$ за $i = \overline{1,2}$ са КСГ с $L(\Gamma_i) = L_i$. БОО $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Нека $S \notin N_1 \cup N_2$. Тогава нека

$$\Gamma = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$$

Вярно е, че $L(\Gamma) = L_1 L_2$

Твърдение

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е КСЕ. Тогава L^* е КСЕ.

Конструкция:

Нека $\Gamma = (N, \Sigma, S, P)$ е КСГ с $L(\Gamma) = L$. Нека $S' \notin N$, тогава нека

$$\Gamma^* = (N \cup \{S'\}, \Sigma, S', P \cup \{S' \to \varepsilon \mid S'S\})$$

Вярно е, че $L(\Gamma^*) = L^*$.