$$\boxed{\text{Операции в/у регулярни езици, които ни дават регулярни езици}}$$

Твърдение
Ако $L \subseteq \Sigma^*$ е регулярен, то $\Sigma^* \setminus L$ е регулярен.

Конструкция:
Нека $A = (Q, \{q_0\}, \delta, F)$ е дет. тот. автомат с език $L(A) = L$. Тогава нека $\bar{A} = (Q, \{q_0\}, \delta, Q \setminus F)$.
Вярно е, че $L(\bar{A}) = \Sigma^* \setminus L$.

Твърдение
Ако $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ са регулярни езици, то $L_1 \cap L_2$ е р.е.

Конструкция
Нека $A_i = (Q_i, I_i, \Delta_i, F_i)$ за $i = \overline{1,2}$ са кр. автомати такива, че $L(A_i) = L_i$. Тогава нека

$$A = (Q_1 \times Q_2, I_1 \times I_2, \Delta, F_1 \times F_2), \text{ където}$$

$$\Delta = \{((q_1, q_2), a, (q_1', q_2')) \mid (q_1, a, q_1') \in \Delta \text{ и } (q_2, a, q_2') \in \Delta\}$$

Вярно е, че $L(A) = L_1 \cap L_2$

Задача

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е регулярен език. Докажете, че $L^{rev} \overset{def}{=} \{\alpha^{rev} \mid \alpha \in L\}$ е регулярен език, където ако $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n$, то $\alpha^{rev} = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1$.

Решение: Нека $A = (Q, I, \Delta, F)$ е автомат с $L(A) = L$.
Нека $A^{rev} = (Q, F, \Delta^{rev}, I)$, където
$$\Delta^{rev} = \{(q_2, x, q_1) \mid (q_1, x, q_2) \in \Delta\}$$
Ще докажем, че $L(A^{rev}) = L^{rev}$.

$\subseteq$) Нека $\alpha \in L(A^{rev}) \Rightarrow \exists \pi$-успешен път в A^{rev} с етикет $label(\pi) = \alpha$.

I случай: $\pi = q \Rightarrow \alpha = \varepsilon \Rightarrow q \in F \cap I \Rightarrow \pi$ е успешен път и в $A \Rightarrow \varepsilon \in L(A) = L \Rightarrow \alpha \in L^{rev}$

II случай: $\pi = q_0 \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} \dots \xrightarrow{x_k} q_k$, където $\alpha = x_1 \dots x_k$.
Тъй като π е успешен път в A^{rev}, то $q_0 \in F \,\&\, q_k \in I$.
Освен това $(q_i, x_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta \Leftrightarrow (q_{i+1}, x_{i+1}, q_i) \in \Delta$ за $i = \overline{0, k-1}$. Тогава $p = q_k \xrightarrow{x_k} q_{k-1} \xrightarrow{x_{k-1}} \dots \xrightarrow{x_1} q_0$ е успешен път в $A \Rightarrow \alpha^{rev} \in L(A) \Rightarrow \alpha \in L^{rev}$.

$\supseteq$) Аналогично

Задача

Докажете, че ако L е регулярен, то $Pref(L)$ също е регулярен, където

$$Pref(L) \overset{def}{=} \{\alpha \in \Sigma^* \mid (\exists \beta \in \Sigma^*)[\alpha\beta \in L]\}$$

Решение: Нека $A = (Q, I, \Delta, F)$ е автомат с $L(A) = L$ такъв, че $(\forall q \in Q)(\exists f \in F)[\exists \pi\text{-път от } q \text{ до } f]$

Нека $A^{pref} = (Q, I, \Delta, Q)$. Ще докажем, че $L(A^{pref}) = Pref(L)$

$\subseteq$) Нека $\alpha \in L(A^{pref})$, значи $\exists \pi$-успешен път в A^{pref} такъв, че $label(\pi) = \alpha$.

I случай: $\pi = q \in Q \Longrightarrow q \in I \ \& \ \alpha = \varepsilon$. Нека π' е път в A от q до някое $f \in F$ и нека $\beta = label(\pi')$

$\Longrightarrow \alpha\beta = \varepsilon\beta = \beta \in L(A) = L$.

II случай: $\pi = q_0 \xrightarrow{x_1} \ldots \xrightarrow{x_k} q_k$, където $\alpha = x_1 \ldots x_k$. Имаме, че π е път и в A и освен това от деф. на A^{pref} $\exists \pi'$-път в A от q_k до $f \in F$ и нека $label(\pi') = \beta$

$\Longrightarrow \alpha\beta \in L(A) \Longrightarrow \alpha \in Pref(L)$.

$\supseteq$) Аналогично

Задача

Докажете, че ако $L \subseteq \Sigma^*$ е р.е., то $Suff(L)$ е р.е.

където $Suff(L) \stackrel{def}{=} \{\beta \in \Sigma^* \mid (\exists \alpha \in \Sigma^*)[\alpha\beta \in L]\}$

Решение:

Нека $A = (Q, I, \Delta, F)$ е автомат с $L(A) = L$

е такъв, че $(\forall q \in Q)(\exists q_0 \in I)[\exists \pi\text{-път от } q_0 \text{ до } q]$

Нека $A^{suff} = (Q, Q, \Delta, F)$. Вярно е, че $L(A^{suff}) = Suff(L)$

$\subseteq$) ---

$\supseteq$) ---

Задача

Докажете, че ако $L \in \Sigma^*$ е р.е., то $Inf(L)$ е р.е.

където $Inf(L) \stackrel{def}{=} \{\beta \in \Sigma^* \mid (\exists \alpha_1 \in \Sigma^*)(\exists \alpha_2 \in \Sigma^*)[\alpha_1\beta\alpha_2 \in L]\}$

Решение:

Нека $A = (Q, I, \Delta, F)$ е такъв, че $L(A) = L$ и

1) $(\forall q \in Q)(\exists q_0 \in I)[\exists \pi\text{-път от } q_0 \text{ до } q]$

2) $(\forall q \in Q)(\exists f \in F)[\exists \pi\text{-път от } q \text{ до } f]$

Нека $A^{Inf} = (Q, Q, \Delta, Q)$

$\subseteq$) ---

$\supseteq$) ---

|| $Inf(L) = Pref(Suff(L))$

(Задача)

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е регулярен език и $w \in \Sigma^*$ е дума. Докажете, че $Rem_w(L)$ е регулярен където $Rem_w(L) \overset{def}{=} \{ u \in \Sigma^* \mid wu \in L \}$.

<u>Решение:</u> Нека $A = (Q, I, \Delta, F)$ е автомат над Σ с $L(A) = L$ и е такъв, че

$(\forall q \in Q)(\exists q_0 \in I)[\exists \pi\text{-път в } A \text{ от } q_0 \text{ до } q]$

Нека $A' = (Q, I', \Delta, F)$, където

$I' = \{ q \in Q \mid (\exists q_0 \in I)[q_0 \overset{w}{\underset{A}{\longmapsto}} q] \}$

Ще покажем, че $L(A') = Rem_w(L)$

$\supseteq)$ Нека $u \in Rem_w(L) \Longrightarrow wu \in L = L(A)$.

Тогава $\exists \pi$-успешен път в A с $label(\pi) = wu$

I сл: $\pi = q \Longrightarrow w = \varepsilon$ & $u = \varepsilon$ и $q \in I \cap F$.

Оттук и от деф. на $A' \Longrightarrow u = \varepsilon \in L(A')$

II сл: $\pi = q_0 \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} \dots \xrightarrow{x_k} q_k$, $label(\pi) = wu$.

Нека $i \in \{0, \dots, k\}$ е такъв, че

$w = x_1 \dots x_i$ & $u = x_{i+1} \dots x_k$

Освен това $q_0 \in I$ & $q_k \in F \Longrightarrow q_i \in I'$

$\Longrightarrow \pi' = q_i \xrightarrow{x_{i+1}} q_{i+1} \xrightarrow{x_{i+2}} \dots \xrightarrow{x_k} q_k$ е успешен път в

$A' \Longrightarrow u = x_{i+1} \dots x_k \in L(A')$

Задача

Докажете, че ако L е регулярен, то $half(L)$ е регулярен, където

$$half(L) \overset{def}{=} \{\alpha \in \Sigma^* \mid (\exists \beta \in \Sigma^*)[|\alpha| = |\beta| \;\&\; \alpha\beta \in L]\}$$

<u>Решение:</u> Нека $A = (Q, I, \Delta, F)$ е автомат с един $L(A) = L$ такъв, че $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ (няма ε-преходи)

Нека $A' = (Q', I', \Delta', F')$, където

- $Q' = Q \times Q$
- $I' = I \times F$
- $\Delta' = \{((q_1', q_2'), a, (q_1'', q_2'')) \mid (q_1', x, q_1'') \in \Delta \;\&$ $(\exists y \in \Sigma)[(q_2', y, q_2'') \in \Delta]\}$

Ще покажем, че $L(A') = half(L)$.

$\supseteq$) Нека $\alpha \in half(L) \implies \exists \beta \in \Sigma^*$ такова, че $|\beta| = |\alpha| \;\&\; \alpha\beta \in L \implies \exists \pi$ - успешен път в A такъв, че $label(\pi) = \alpha\beta$

I сл. $\pi = q \implies q \in I \cap F \;\&\; \alpha\beta = \varepsilon \implies \alpha = \varepsilon \;\&\; \beta = \varepsilon$
$\implies (q, q)$ е успешен път в $A' \implies \alpha = \varepsilon \in L(A')$

II сл. $\pi = q_0 \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} q_2 \xrightarrow{x_3} \dots \xrightarrow{x_k} q_k$. Тогава $x_1 \dots x_k = \alpha\beta$ и $|\alpha| = |\beta| \implies k$ е четно и $q_0 \in I \;\&\; q_k \in F \implies (q_0, q_k) \xrightarrow{x_1} (q_1, q_{k-1}) \dots \dots \xrightarrow{x_{|\alpha|}} (q_{|\alpha|}, q_{|\alpha|})$ е успешен път в A' и етикета му е α
$\implies \alpha \in L(A')$

$\subseteq$) Аналогично