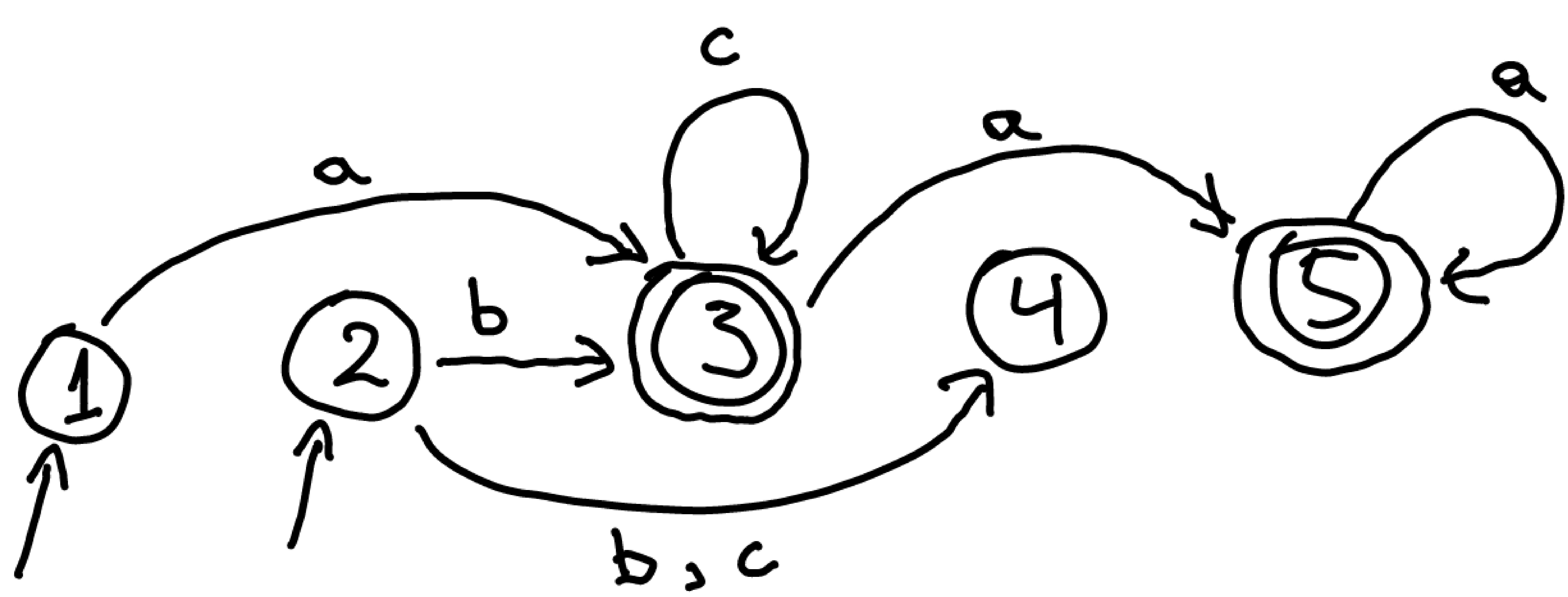
Крайни автомати

def Краен автомат над азбука Σ наричаме $A = (Q, I, \Delta, F)$, където
- Q е мн-во от състояния
- $I \subseteq Q$ е мн-во от начални състояния
- $F \subseteq Q$ е мн-во от финални с-я
- $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ релация на преходите

Пример:
$Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $I = \{1, 2\}$, $F = \{3, 5\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

$\Delta = \{(1, a, 3), (2, b, 3), (2, b, 4), (2, c, 4), (3, c, 3), (3, a, 5), (5, a, 5)\}$



def || Нека $\mathcal{A}$ е автомат над Σ. Тогава
път в $\mathcal{A}$ наричаме:

- $\pi = q$, $q \in Q$ е път от q до q с етикет $\ell(\pi) = \varepsilon$;
- $\pi = q_0 \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} \dots q_{n-1} \xrightarrow{x_n} q_n$, където $(q_i, x_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$ за $i = \overline{0, n-1}$, е път от q_0 до q_n с етикет $\ell(\pi) = x_1 \dots x_n$

|| Индуктивна деф.

def || Нека $\mathcal{A}$ е автомат над Σ. Казваме, че състоянието q' е достижимо от състояние q чрез думата w, ако $\exists$ път π от q до q' с етикет $\ell(\pi) = w$. Пишем $q \xrightarrow[\mathcal{A}]{w} q'$.

def || Казваме, че π е успешен път в $\mathcal{A}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ π е път от някое начално до някое крайно състояние.

def || Нека $\mathcal{A}$ е автомат над Σ. Език на автомата $\mathcal{A}$, наричаме
$L(\mathcal{A}) = \{ w \in \Sigma^* \mid (\exists q \in I)(\exists q' \in F)[q \xrightarrow[\mathcal{A}]{w} q'] \}$

def || Казваме, че $\mathcal{A}$ разпознава $L \subseteq \Sigma^*$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $L(\mathcal{A}) = L$.
Казваме, че $\mathcal{A}$ разпознава $w \in \Sigma^*$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $w \in L(\mathcal{A})$.

Деф. Казваме, че $L \subseteq \Sigma^*$ е автоматен език ако $\exists$ краен автомат A над Σ такъв, че $L(A) = L$.

Твърдение

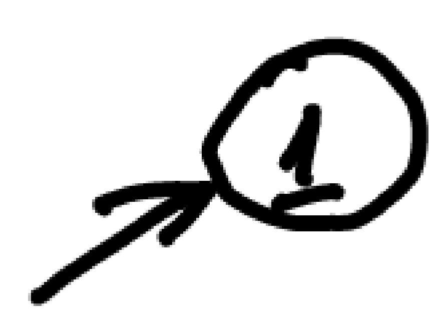
Език $L \subseteq \Sigma^*$ е регулярен език $\iff$ L е автоматен език над Σ.

Твърдение I

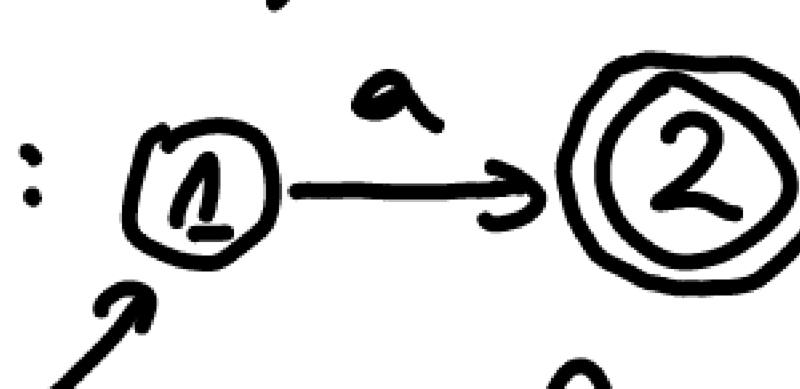
Вярно е, че:

1. $\emptyset$ е автоматен език;
2. $\{\varepsilon\}$ е автоматен език;
3. $\forall a \in \Sigma$, $\{a\}$ е автоматен език;

__Доказателство:__

1. Нека $A_\emptyset$: , т.е. $A_\emptyset = (\{1\}, \{1\}, \emptyset, \emptyset)$, тогава $L(A_\emptyset) = \emptyset$.

2. Нека A_ε: , т.е. $A_\varepsilon = (\{1\}, \{1\}, \emptyset, \{1\})$, тогава $L(A_\varepsilon) = \{\varepsilon\}$.

3. Нека за вс. $a \in \Sigma$, A_a: , т.е. $A_a = (\{1, 2\}, \{1\}, \{(1, a, 2)\}, \{2\})$, тогава $L(A_a) = \{a\}$ за вс. $a \in \Sigma$

Твърдение II

Нека $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ са автоматни езици
$\Rightarrow L_1 \cup L_2$ е автоматен език.

Конструкция:

Нека $\mathcal{A}_i = (Q_i, I_i, \Delta_i, F_i)$ за $i = \overline{1,2}$ са
крайни автомати такива, че $L(\mathcal{A}_i) = L_i$.
БОО $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, тогава нека
$\mathcal{A} = (Q_1 \cup Q_2, I_1 \cup I_2, \Delta_1 \cup \Delta_2, F_1 \cup F_2)$.
Вярно е, че $L(\mathcal{A}) = L_1 \cup L_2$

Твърдение III

Нека $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ са автоматни езици
Нека L_1, L_2 е автоматен език.
$\Rightarrow L = L_1 L_2$ е автоматен език.

Конструкция:

Нека $\mathcal{A}_i = (Q_i, I_i, \Delta_i, F_i)$ за $i = \overline{1,2}$ са
крайни автомати такива, че $L(\mathcal{A}_i) = L_i$.
БОО $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, тогава нека
$\mathcal{A} = (Q_1 \cup Q_2, I_1, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup (F_1 \times \{\varepsilon\} \times I_2), F_2)$
Вярно е, че $L(\mathcal{A}) = L_1 L_2$.

Твърдение IV

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е автоматен език
$\Rightarrow L^*$ е автоматен.

// Сечение и разлика

Конструкция:

Нека $A = (Q, I, \Delta, F)$ е такъв, че $L(A) = L$.

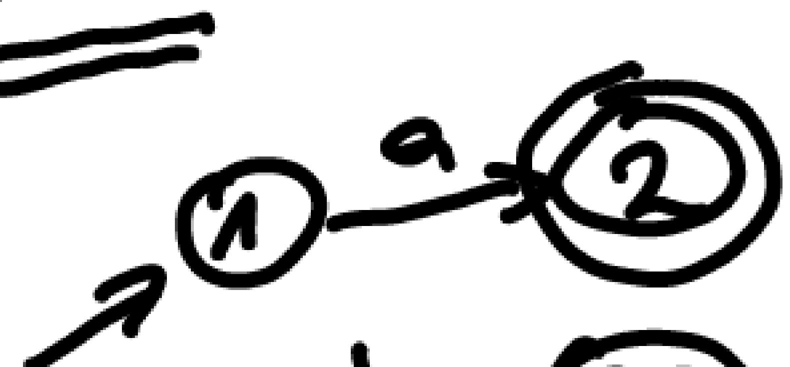
Нека $q \notin Q$ и нека

$$A^* = (Q \cup \{q\}, I \cup \{q\}, \Delta \cup (F \times \{\varepsilon\} \times I), F \cup \{q\})$$

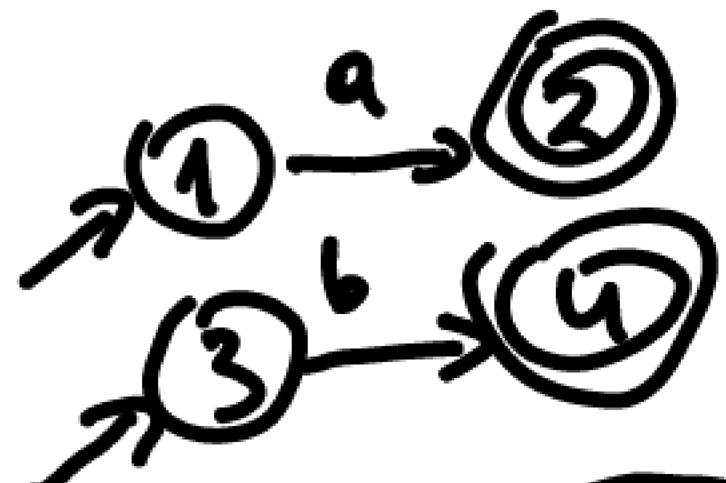
Вярно е, че $L(A^*) = L^*$.

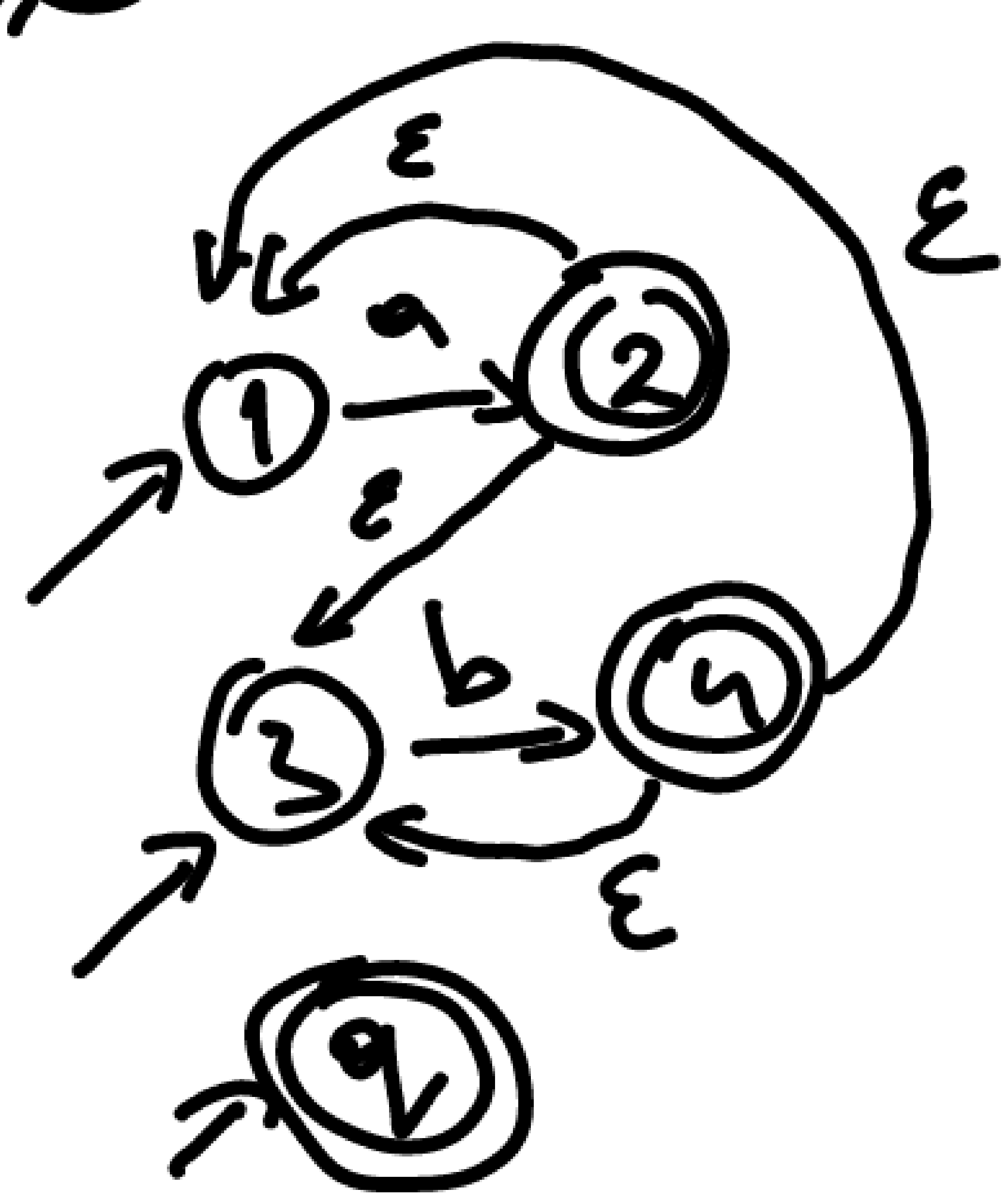
Задача Нека $\Sigma = \{a, b\}$. Постройте краен автомат с език Σ^*.

Решение: Имаме, че $\Sigma^* = (\{a\} \cup \{b\})^*$, освен това

$A_{\{a\}}$:  е такъв, че $L(A_a) = \{a\}$

$A_{\{b\}}$:  е такъв, че $L(A_b) = \{b\}$

$A_{\{a\} \cup \{b\}}$:  е такъв, че $L(A_{\{a\} \cup \{b\}}) = \{a\} \cup \{b\}$

$A_{(\{a\} \cup \{b\})^*}$:  е такъв, че $L(A_{(\{a\} \cup \{b\})^*}) = (\{a\} \cup \{b\})^*$

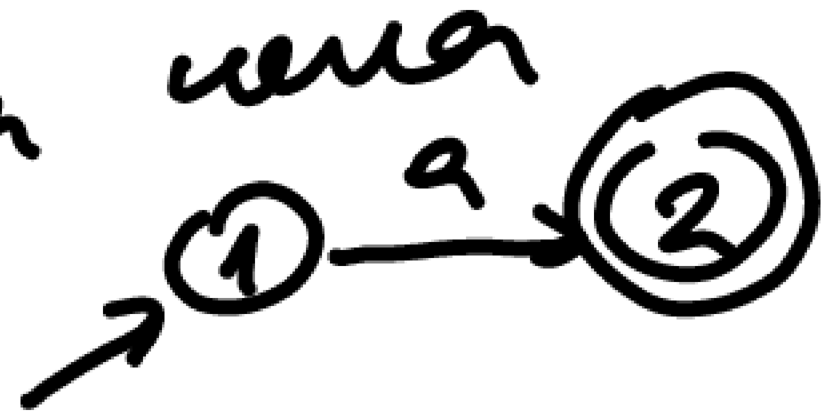
$L($  $) = \Sigma^*$

Директна конструкция:

$\boxed{\text{Задача}}$ Постройте краен автомат над $\Sigma = \{a, b\}$ с език $L = \{w \in \Sigma^* \mid w$ започва с a или завършва с $b\}$

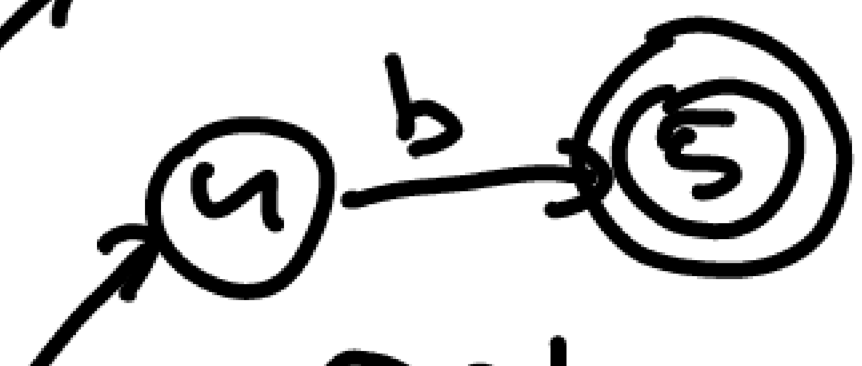
<u>Решение</u>: Имаме, че $L = (\{a\}\Sigma^*) \cup (\Sigma^*\{b\})$.

Тогава имаме

A_1:  $\Longrightarrow L(A_2) = \{a\}$

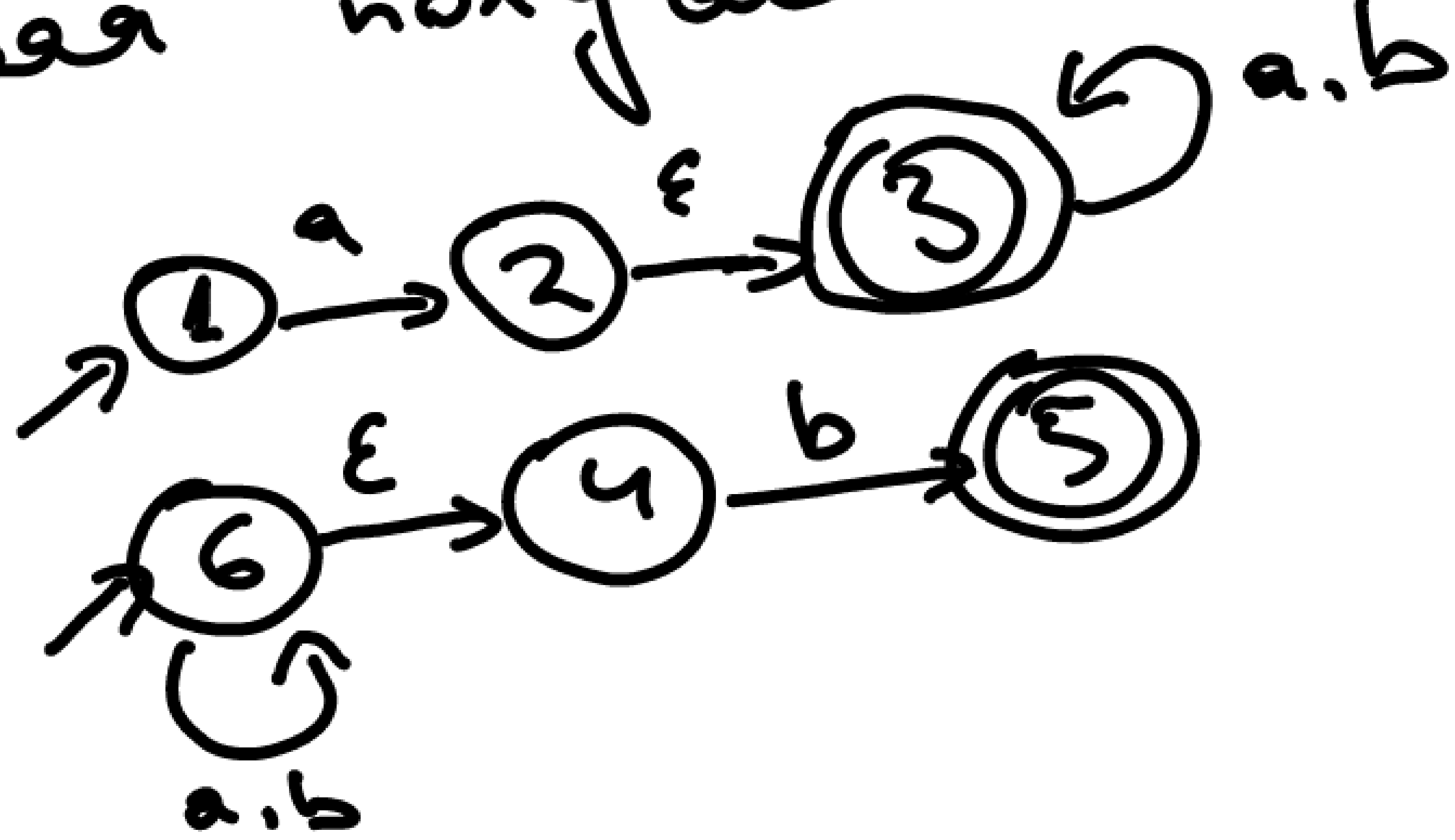
A_2:  $\Longrightarrow L(A_2) = \Sigma^*$

A_3:  $\Longrightarrow L(A_3) = \{a\}\Sigma^*$

A_4:  $\Longrightarrow L(A_4) = \{b\}$

A_5:  $\Longrightarrow L(A_5) = \Sigma^*\{b\}$

Накрая получаваме

A:  $\Longrightarrow L(A) = L$

$\boxed{\text{Твърдение } \underline{\overline{V}}}$

Ако L е автомат**е**н (регулярен), то $\Sigma^* \setminus L$ също е автоматен (регулярен).

// $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$

$\boxed{\text{Твърдение } \overline{VI}}$

Ако L_1 и L_2 са автоматни (регулярни), то $L_1 \cap L_2$ също е автоматен (регулярен).

<u>Док-во:</u>

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$