Проверка на регулярност на език чрез автомати

def: Нека $A = (Q, \{q_0\}, \delta, F)$ е детерминиран и тотален автомат над азбука Σ. Тогава $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ е тотална функция. Дефинираме $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ по следния начин:

- ако $\alpha = \varepsilon$, то $\delta^*(q, \varepsilon) = q$;
- ако $\alpha = \beta a$, то $\delta^*(q, \beta a) = \delta(\delta^*(q, \beta), a)$;

Задача

Докажете, че $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \overline{\alpha} \% 7 = 3\}$ е регулярен език над $\Sigma = \{0, 1\}$, където

$$\overline{\alpha} \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{|\alpha|} \alpha_i 2^{|\alpha| - i}$$

Решение:

Интуицията ни е, че искаме да конструираме автомат, който да кодира остатъците при деление на 7 в състоянията си. Трябва да видим как да конструираме преходите. Състоянията ще бъдат $Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Нека $A = (Q, \{0\}, \delta, \{3\})$.

I. Нека сме стигнали от $\underline{\underline{0}}$ до някое с-е $\underline{\underline{k}}$ с думата β $(k = \overline{0,6})$. Ако продължим с буквата $\underline{\underline{0}}$ получаваме:

$\overline{\beta} \% 7 = k$ & $\overline{\beta 0} = 2\overline{\beta}$. Нека $\overline{\beta} = 7p + k$, за някое $p \in \mathbb{N}$. Тогава $\overline{\beta 0} = 2(7p + k) = 14p + 2k \Longrightarrow \overline{\beta 0} \% 7 = 2k \Longrightarrow (k, 0, 2k \% 7) \in \delta$

II. Ако продължим с 1:

$\overline{\beta} \% 7 = k$ & $\overline{\beta 1} = 2\overline{\beta} + 1$. Нека $\overline{\beta} = 7p + k$.

Тогава $\overline{\beta 1} = 2(7p + k) + 1 = 14p + 2k + 1 \Longrightarrow \overline{\beta 1} \% 7 = 2k + 1 \Longrightarrow (k, 1, (2k+1) \% 7) \in \delta$.

Тогава A изглежда по следния начин

A	0	1
0	0	1
1	2	3
2	4	5
3	6	0
4	1	2
5	3	4
6	5	6

тоест $A = (Q, \{0\}, \delta, \{3\})$

където

$$\delta = \{(q, x, (2q + x) \% 7) \mid q \in Q \;\&\; x \in \Sigma\}$$

Ще докажем, че $L(A) = L$.

Ще докажем, че

$$(\forall \beta \in \Sigma^*)[\delta^*(0,\beta) = \overline{\beta} \% 7]$$

С това ще сме доказали, че $L(A) = L$, той като $L(A) = \{\beta \mid \delta^*(0,\beta) = 3\}$.

Трябва да покажем, че

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall \beta \in \Sigma^k)[\delta^*(0,\beta) = \overline{\beta} \% 7]$$

Индукция по $\underline{k}$:

(base): $k = 0$. Нека $\beta \in \Sigma^0 \Rightarrow \beta = \varepsilon$ и

$$\delta^*(0,\varepsilon) = 0 = \overline{\varepsilon} \% 7 \Rightarrow \text{тв. е вярно}$$

(ih): нека $(\forall \beta \in \Sigma^k)[\delta^*(0,\beta) = \overline{\beta} \% 7]$.

(step): $k \mapsto k+1$. Искаме да покажем, че

$$(\forall \gamma \in \Sigma^{k+1})[\delta^*(0,\gamma) = \overline{\gamma} \% 7]$$

Нека $\gamma \in \Sigma^{k+1} \Rightarrow |\gamma| = k+1 \Rightarrow \gamma = \beta x$. Тогава

за $\beta \in \Sigma^k$ и $x \in \Sigma$. Тогава

$$\delta^*(0,\beta) \overset{(ih)}{=} \overline{\beta} \% 7 = q \in Q$$

Имаме, че $\delta^*(0,\gamma) = \delta^*(0,\beta x) =$

$= \delta(\delta^*(0,\beta), x) = \delta(q, x)$

$= (2q + x) \% 7$. С разсъжденията

от деф на δ

в началото твърдението е доказано.

Нерегулярни езици

def: Релация на Майхил-Нероуд:

$\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$:

$\alpha \sim_L \beta \overset{def}{\iff} (\forall \gamma \in \Sigma^*)[\alpha\gamma \in L \iff \beta\gamma \in L]$

Теорема Майхил-Нероуд

L е регулярен език над азбука Σ т.с.т.к. $Index(\sim_L) < \infty$, където

$Index(\sim_L) = |\{[\alpha]_{\sim_L} \mid \alpha \in \Sigma^*\}|$

Задача

Нека $L = \{ww^{rev} \mid w \in \{a,b\}^*\}$. Докажете, че L не е регулярен над $\Sigma = \{a,b\}$.

Решение: Ще покажем, че

(*) $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \neq k \Rightarrow a^n b \not\sim_L a^k b]$

От (*) ще следва, че

$[a^0 b]_{\sim_L}, [a^1 b]_{\sim_L}, [a^2 b]_{\sim_L}, \ldots$

са безкрайно много класове на еквив., тоест $Index(\sim_L) = \infty$. Нека $n \neq k$ и нека $\gamma = ba^n$, тогава $a^n b\gamma = a^n bba^n \in L$, но $a^k b\gamma = a^k bba^n \notin L$, следователно

$a^n b \not\sim_L a^k b$

Задача

Нека $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Докажете, че L не е регулярен над $\Sigma = \{a\}$.

Решение:

Ще покажем, че
$$(\forall i \in \mathbb{N})(\forall j \in \mathbb{N})[i \neq j \Rightarrow a^i \not\sim_L a^j] \quad (*)$$

От $(*)$ ще следва, че $Index(\sim_L) = \infty$.

Нека $i \neq j$, където $i, j \in \mathbb{N}$. БОО $i < j$.

Нека $t = j + q$, където $q = j - i > 0$. Ще покажем, че за $\gamma = a^{t^2 - j}$ е вярно, че

$$a^j \gamma \in L, \text{ но } a^i \gamma \notin L$$

Имаме, че $a^j \gamma = a^j a^{t^2 - j} = a^{t^2} \in L$. От друга страна $a^i \gamma = a^i a^{t^2 - j} = a^{t^2 + i - j} = a^{t^2 - q}$.

Имаме, че $t^2 - q < t^2$. Остава да покажем, че $t^2 - q > (t-1)^2$. От тук ще следва, че $a^{t^2 - q} \notin L$. Имаме, че

$$t^2 - q > (t-1)^2 \Leftrightarrow t^2 - q > t^2 - 2t + 1 \Leftrightarrow$$

$$2t > q + 1 \Leftrightarrow 2(j+q) > q + 1 \Leftrightarrow 2j + q - 1 > 0$$

което винаги е вярно той като $2j > 0$ и $q - 1 \geq 0$.

Задача

Докажете, че $L = \{a^k \mid (\nexists n \in \mathbb{N})[k = n^2]\}$ не е регулярен над $\Sigma = \{a\}$.

<u>Решение:</u>

Допускаме, че L е регулярен $\Longrightarrow$ $\Sigma^* \setminus L$ е регулярен, но $\Sigma^* \setminus L = \{a^{k^2} \mid k \in \mathbb{N}\}$ вече доказахме, че не е регулярен.

Така стигаме до противоречие.

$\boxed{\text{Твърдение}}$ (Pumping Lemma)

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е регулярен. Тогава $\exists n \in \mathbb{N}$ такова, че $\forall \alpha \in L, |\alpha| \geq n$ е вярно, че $\exists x, y, z \in \Sigma^*$:

1) $\alpha = xyz$;
2) $|y| > 0$;
3) $|xy| \leq n$;
4) $\forall k \in \mathbb{N}, \; xy^k z \in L$;

Доказване на нерегулярност чрез Pumping Lemma

1) Допускаме, че L е регулярен.
2) Нека $n \in \mathbb{N}$ е числото от PL, за което са изпълнени условията
3) Намираме $\alpha \in L$ с дължина $|\alpha| \geq n$, за което са изпълнени 1) ÷ 3) но условие да стигнем до противоречие спрямо 4).
4) Заключение, че L не е регулярен

Задача

Нека $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$. Докажете, че L не е регулярен над $\Sigma = \{a,b\}$.

Решение:

Допускаме, че L е регулярен. Нека $n \in \mathbb{N}$ е такова, че $\forall \alpha \in L$, $|\alpha| \geq n$ $\exists x, y, z \in \Sigma^*$: 1) ÷ 4)

Нека $\alpha = a^n b^n a^n b^n$. Нека $x, y, z \in \Sigma^*$:

1) $\alpha = xyz$;

2) $|y| > 0$;

3) $|xy| \leq n$;

4) $\forall k \in \mathbb{N}$, $xy^k z \in L$

$\Rightarrow a^n b^n a^n b^n = xyz$. От 3) $\Rightarrow |xy| \leq n$ нека $|xy| = p$, тоест $xy = a^p$. Тогава за $k = 0$ имаме, че $xy^0 z = a^{n-|y|} b^n a^n b^n \notin L$ което е противоречие спрямо 4).

$\Rightarrow L$ не е регулярен.

Задача

Докажете, че $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен над $\Sigma = \{a, b\}$.

Решение:

Нека $n \in \mathbb{N}$ е числото от Pumping Lemma. Нека $w = a^n b^n$, където $|w| \geq n$. Нека $w = xyz$, където $|xy| \leq n$, $|y| > 0$. Имаме, че $|xy| = p \leq n$, т.е. $xy = a^p$. Тогава за $k = 2$:

$$xy^2z = a^{n+|y|} b^n \notin L,$$ противоречие

$\Longrightarrow L$ не е регулярен.

Задача

Нека $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \}$.
Регулярен ли е L?

<u>Решение</u>: Нека L е регулярен език.
Нека $p \in \mathbb{N}$ е числото от PL.
Нека $\alpha = a^p b^p$, вярно е, че $|\alpha| = 2p > p$.
Нека $x, y, z \in \Sigma^*$ са такива, че $\alpha = xyz$, $|y| > 0$ и $|xy| \leq p$. Следователно

$$xy = a^m, m \leq p$$

Имаме, че $(\forall k \in \mathbb{N})[xy^k z \in L]$ и в частност за $k = 0$ получаваме

$$xy^0 z = a^{p-|y|} b^p, \text{ което}$$

$$p - |y| \neq p \quad (|y| > 0)$$

Следователно $xy^0 z \notin L$, противоречие с допускането, че L е регулярен език.

Задача

Нека $L = \{\alpha\beta\alpha \mid \alpha \in \Sigma^+ \ \&\ \beta \in \Sigma^+\}$.
Регулярен ли е L?

<u>Решение</u>: Допускаме, че L е регулярен.
Нека $p \in \mathbb{N}$ е числото от PL и нека $w = a^p b\, b\, a^p b$, която очевидно е в L и $|w| > p$. Нека $x, y, z \in \Sigma^*$ са такива, че $w = xyz$, $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$. Имаме, че $|xy| \leq p$, следователно

$$xy = a^m, \ m \leq p$$

Имаме, че $(\forall k \in \mathbb{N})[xy^k z \in L]$ в частност за $k = 2$:

$$xy^2z = a^{p+|y|} b b a^p b \notin L,$$

противоречие.

Задача Нека $L = \{a^n b^k \mid n \in \mathbb{N} \;\&\; k \in \mathbb{N} \;\&\; n \leq k \leq 2n\}$.

Регулярен ли е L над $\Sigma = \{a, b\}$?

Решение:

Нека $p \in \mathbb{N}$ е числото от PL. Избираме $\alpha = a^p b^{2p}$, $|\alpha| = 3p > p$. Нека $x, y, z \in \Sigma^*$ са такива, че $\alpha = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$. Тогава $xy = a^m$, $m \leq p$. Имаме, че

$$(\forall k \in \mathbb{N})[xy^k z \in L]$$

В частност за $k = 0$:

$$xy^0 z = a^{p-|y|} b^{2p}, \text{ но тъй като}$$

$2(p - |y|) = 2p - 2|y| < 2p$ следователно $xy^0 z \notin L$, противоречие

$\Rightarrow L$ не е регулярен.

Задача

Нека $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2\#_b(w)\}$.

Регулярен ли е L над $\Sigma = \{a, b\}$?

Задача

Нека $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) + \#_b(w) = \#_c(w) + \#_d(w) \}$

над $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Регулярен ли е L?

Решение:

1) Допускаме, че L е регулярен и p е числото от PL.

2) Избираме $w = a^p b^p c^p d^p$.

3) За $k = 0$, $xy^kz \notin L$.

Задача

Нека $L = \{ \alpha\beta \mid \alpha, \beta \in \Sigma^* \ \& \ \#_b(\alpha) = 2\#_a(\alpha) \ \& \ \#_c(\beta) = 3\#_b(\beta) \}$

Решение:

1) Нека $p \in \mathbb{N}$ е числото от PL

2) Избираме $w = b^{2p} a^p c^{3p} b^p$

3) За $k = 0$, $xy^kz \notin L$