$\boxed{\text{Задача}}$

Да се докаже, че езикът

$L = \{ w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \}$

е КСЕ.

<u>Идея за решение:</u>

/*
$C \to cC \mid \varepsilon$ ← произволен бр. <u>c</u>

$S \to CS \mid SC$ ← позволяване за ограждане с <u>c</u>-та

$S \to aSb \mid bSa$ ← грижим се за броя на <u>a</u>-та и <u>b</u>-та, т.е за вс. <u>a</u> добавяне <u>b</u> и за <u>b</u> добавяне <u>a</u>.

$S \to SS \mid \varepsilon$

позволяване <u>a</u>-тата и <u>b</u>-тата да се слагат по произволен начин

*/

Нека $\Gamma = (\{S, C\}, \{a, b, c\}, S, \{C \to cC \mid \varepsilon,$
$S \to CS \mid SC \mid aSb \mid bSa \mid SS \mid \varepsilon\})$

Задача

Да се покаже, че $L = \{ww^{rev} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ е ИСЕ.

<u>Решение:</u>

/* $S \to aSa$

$S \to bSb$

$S \to \varepsilon$

*/

Нека $\Gamma = (\{S\}, \{a,b\}, S, \{S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon\})$

Вярно е, че $L(\Gamma) = L$

Задача

Да се покаже, че $L = \{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ е ИСЕ.

<u>Решение:</u> /* $S \to aSc$

$S \to B$

$B \to bFc \mid \varepsilon$

*/

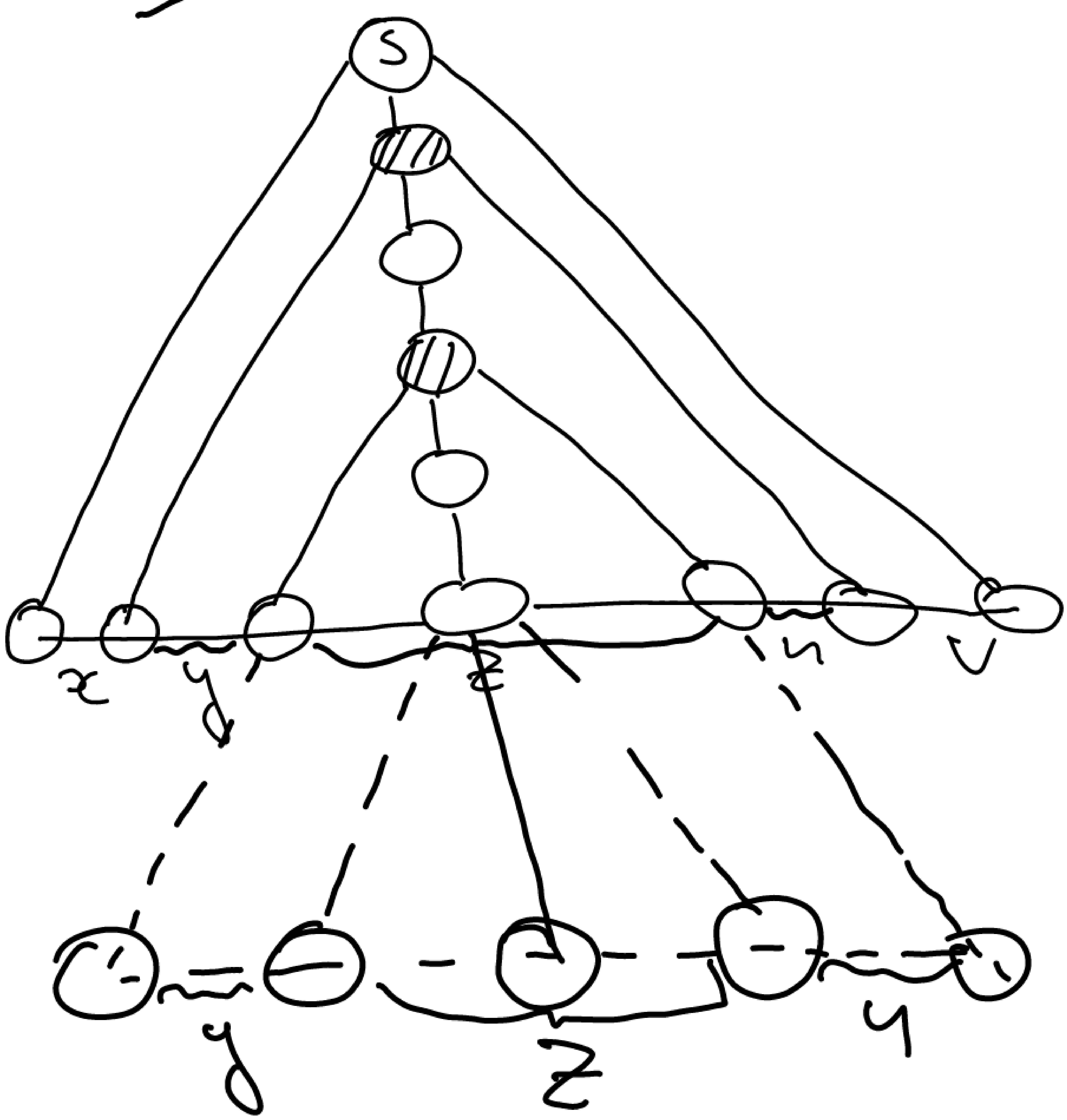
Нека $\Gamma = (\{S, B\}, \{a,b,c\}, S, \{S \to aSc \mid B,\ B \to bFc \mid \varepsilon\})$

Pumping Lemma

Твърдение (Лема за покачване)

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е КСЕ. Тогава $\exists n \in \mathbb{N}$ такова, че $\forall \alpha \in L$, $|\alpha| \geq n$, $\exists x, y, z, u, v \in \Sigma^*$:

1) $\alpha = xyzuv$
2) $|yzu| \leq n$
3) $|yu| > 0$
4) $(\forall k \in \mathbb{N})[xy^k z u^k v \in L]$



Доказване, че даден език НЕ Е КСЕ

Нека е даден безкраен език L над Σ.

1. Нека $p \in \mathbb{N}$ е произволно. (числото от PL)
2. Избираме дума $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$.
3. Проверяваме, че за всяко разбиване на α на пет части $x, y, z, u, v \in \Sigma^*$ такива, че $\alpha = xyzuv$, $|yzu| \leq p$ и $|yu| \geq 1$, можем да намерим $i \in \mathbb{N}$ такова, че $xy^i z u^i v \notin L$.

Тогава L не е КСЕ.

Ако α е достатъчно дълга, то дървото е с достатъчно голяма височина и има два еднакви нетерминала в най-дългия път от корена до извода.

Задача

Докажете, че $L = \{a^k b^k c^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ не е КСЕ над $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Решение:

Допускаме, че L е КСЕ. Нека $n \in \mathbb{N}$ е такова, че $\forall \alpha \in L$, $|\alpha| \geq n$, $\exists x, y, z, u, v \in \Sigma^*$:

1) $\alpha = xyzuv$;
2) $|yzu| \leq n$;
3) $|yu| > 0$;
4) $(\forall k \in \mathbb{N})[xy^k z u^k v \in L]$;

Нека $\alpha = a^n b^n c^n$, където $|\alpha| = 3n \geq n$.

I случай: $yu = a^t$, $t > 0$. Тогава за $i = 0$ имаме, че $xy^i z u^i v = a^{n-t} b^n c^n \notin L$

$\Longrightarrow$ противоречие с 4)

II случай: $yu = b^t$, $t > 0$. Тогава за $i = 0$ имаме, че $xy^izu^iv = a^n b^{n-t} c^n \notin L$
$\Rightarrow$ противоречие с 4)

III случай: $yu = c^t$, $t > 0$. Тогава за $i = 0$ имаме, че $xy^izu^iv = a^n b^n c^{n-t} \notin L$
$\Rightarrow$ противоречие с 4)

IV случай: $yu = a^{t_1} b^{t_2}$, $t_1, t_2 > 0$. Тогава за $i = 0$ имаме, че
$xy^izu^iv = a^{n-t_1} b^{n-t_2} c^n \notin L$
$\Rightarrow$ противоречие с 4)

V случай: $yu = b^{t_1} c^{t_2}$, $t_1, t_2 > 0$. Тогава за $i = 0$ имаме, че
$xy^izu^iv = a^n b^{n-t_1} c^{n-t_2} \notin L$
$\Rightarrow$ противоречие с 4)

$\boxed{\text{Задача}}$

Да се докаже, че $L=\{b^{n^2} \mid n\in\mathbb{N}\}$ не е КСЕ.

__Решение:__

Нека $p\in\mathbb{N}$ е числото от PL. Тогава нека $\alpha = b^{p^2}$. Вярно е, че $\alpha\in L$ и $|\alpha|\geq p$.
Разглеждаме произволно разбиване на нея, тоест $x,y,z,u,v\in\Sigma^*$ такива, че $\alpha = xyzuv$, $|yzu|\leq p$ и $|yu|>0$.

Нека $k=|yu|$ и тогава $yu=b^k$, $1\leq k\leq p$.

Тогава $xy^izu^iv = xzv(yu)^i = b^{n^2-k}\cdot(b^k)^i =$

$$= b^{n^2-k+ik} = b^{n^2+(i-1)k}$$

Нека $i=2$, тогава $xy^izu^iv = b^{n^2+k}$

Трябва да покажем, че n^2+k не е точен квадрат.

Вярно е, че $n^2<n^2+1\leq n^2+k$ и
(от $k\leq n$)

$(n+1)^2 = n^2+2n+1 = n^2+n+(n+1) \geq$
$n^2+k+(n+1) > n^2+k$.

Така получихме, че $n^2 < n^2+k < (n+1)^2$

$\Rightarrow$ n^2+k не е точен квадрат

$\Rightarrow$ $xy^2zu^2v \notin L$

$\Rightarrow$ противоречие

$\Rightarrow$ L не е КСЕ

$\boxed{\text{Задача}}$

Да се покаже, че $L=\{ww \mid w\in\{a,b\}^*\}$ е КСЕ.

<u>Решение:</u>

Нека $p\in\mathbb{N}$ е числото от PL. Избираме дума $\alpha=a^pb^pa^pb^p$. В сила е, че $|\alpha|=4p\geq p$. Разглеждаме произволно разбиване на α на пет части $x,y,z,u,v\in\Sigma^*$ такива, че $|yzu|\leq p$, $|yu|>0$ и $\alpha=xyzuv$.

I случай: $xyzu=a^k$. Тогава $v=a^{p-k}b^pa^pb^p$.

За $i:=0$, $xy^izu^iv=a^{k-|yu|}b^pa^pb^p \notin L$

II случай: $y=a^k$, $u=b^s$. Тогава за $i=2$

$$a^{p+k}b^{p+s}a^pb^p \notin L$$

III случай: $y=b^k$, $y=a^s$. Тогава за $i=2$

$$a^pb^{p+k}a^{p+s}b^p \notin L$$

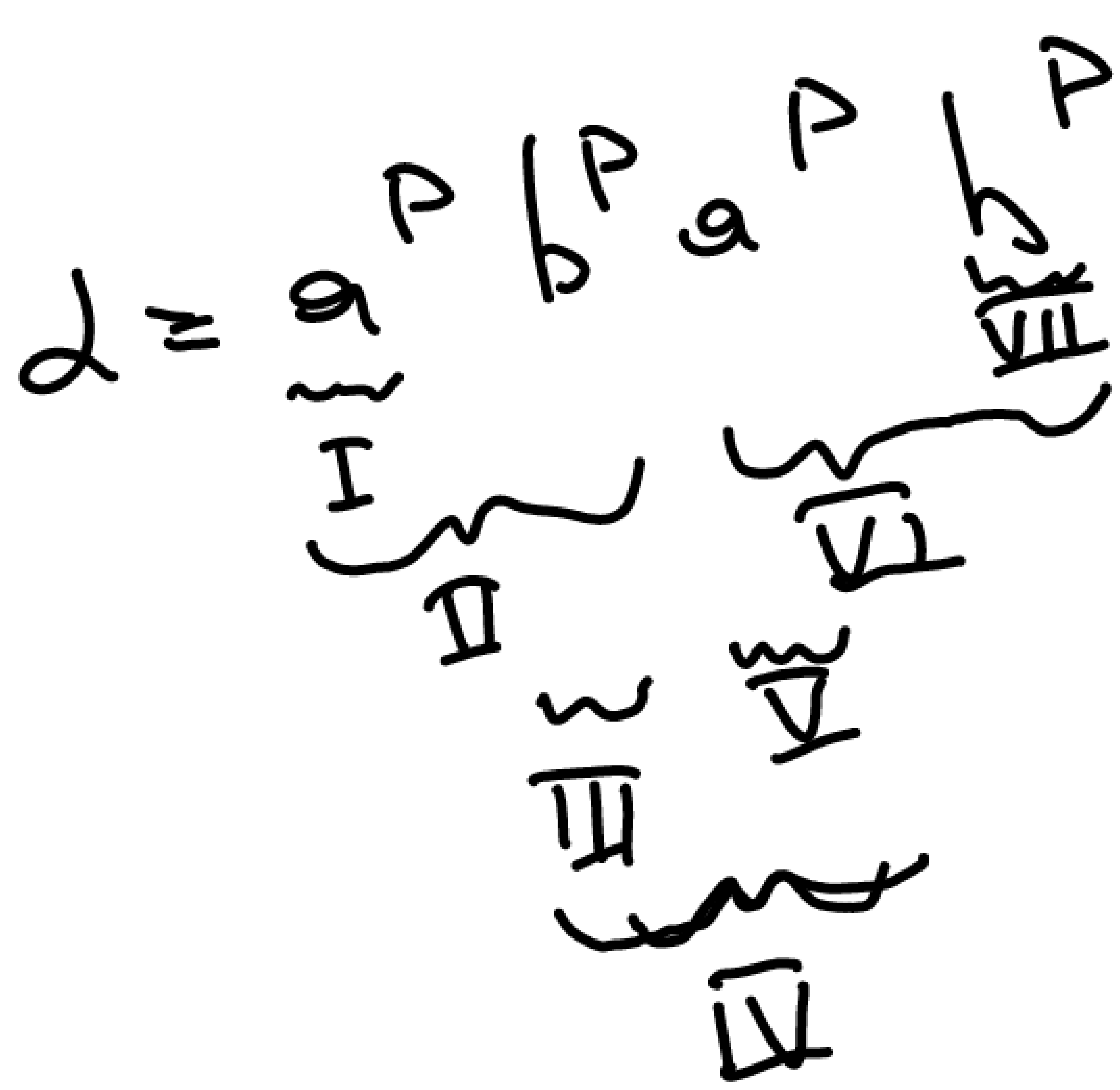
IV случай: $yzuv=b^k$. Тогава за $i=0$

$$a^pb^pa^pb^{p-|uy|} \notin L$$

V случай: $yzu=b^k$, $v=b^{p-k}a^pb^p$

- — —

VI случай:



Задача

Да се докаже, че $L=\{a^n b^k c^{nk} \mid n,k\in\mathbb{N}\}$ не е КСЕ.

Решение:

Нека $p\in\mathbb{N}$ е числото PL. Избираме $\alpha = a^p b^p c^{p^2}$. В сила е, че $\alpha\in L$ и $|\alpha| = 2p+p^2 \ge p$. Разглеждаме произволно разбиване на пет части спазващи условията $x,y,z,u,v\in\Sigma^*$, $\alpha = xyzuv$, $|yzu|\le p$, $|yu|>0$

$$\alpha = \underbrace{a^p}_{\mathrm{I}}\ \underbrace{b^p}_{\mathrm{III}}\ \underbrace{c^{p^2}}_{\mathrm{V}}$$

II, IV

I случай: $xyzu = a^k$. Тогава за $i=0$

$$xy^0zu^0v = a^{p-|yu|}b^p c^{p^2}\notin L$$

II случай: $y=a^k$, $z=a^m b^t$, $u=b^s$. Тогава за $i=2$

$$xy^2zu^2v = a^{p+k}b^{p+s}c^{p^2}\notin L\text{, защото}$$

$$(p+k)(p+s) = p^2+(k+s)p+sk > p^2$$

III случай: $y=b^k$, $z=b^m c^t$, $u=c^s$. Тогава за $i=2$

$xy^iz u^i v = a^p b^{p+k} c^{p^2+s}$. Имаме, че

$$p(p+k)=p^2+kp$$

Ако $k=0$, то $0<s\le p$ и $p(p+k)=p^2<p^2+s$

Ако $k>0$, то $0\le s<p$ и

$$p(p+k)=p^2+kp\ge p^2+p>p^2+S$$

$\Rightarrow xy^izu^iv\notin L$.

IV случай: $yu=b^k$. Тогава за $i=0$

$$xy^izu^iv = a^p b^{p-k} c^{p^2} \notin L$$

V случай: $yzuv=c^k$. Тогава $x=a^p b^p c^{p^2-k}$

и за $i=0$ имаме

$$xy^izu^iv = a^p b^p c^{p^2-|yu|} \notin L$$