def! Азбука наричаме непразно крайно множество. (бележим с Σ.)

def! Ако Σ е азбука, дума над Σ наричаме вс. крайна последователност от букви $w = w_1 \ldots w_n$, $w_i \in \Sigma$, $\overline{i=1,n}$

def! Празната дума бележим с ε.

def! Множеството от всички думи над азбука Σ бележим с Σ^*.

def! Нека $u, w \in \Sigma^*$ и $u = u_1 \ldots u_n$, $w = w_1 \ldots w_m$, голяма с uw бележим тяхната конкатенация u
$uw = w_1 \ldots u_n w_1 \ldots w_m$ // индуктивно

def) w^n

def! Ако $w \in \Sigma^*$, то с $|w|$ бележим дължината на w, т.е. ако $w = w_1 \ldots w_n$, то $|w| = n$ // индуктивно

def! Език над Σ наричаме вако $L \subseteq \Sigma^*$
  • $\emptyset$ е език;
  • $\{\varepsilon\}$ е език;

def! Нека $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, полагаме

   • $L_1 L_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$

def! Нека $L \subseteq \Sigma^*$, полагаме дефо. L^n
индуктивно:

   • $L^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon\}$

   • $L^{n+1} = L^n L$

def! Нека $L \subseteq \Sigma^*$, полагаме

   • $L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$

   • $L^+ = L L^*$

def! Регулярни езици над Σ деф. индуктивно:

   • $\emptyset, \{\varepsilon\}, \{x\}$ за $\forall x \in \Sigma$
     са регулярни

   • ако $L_1 \subseteq \Sigma^*, L_2 \subseteq \Sigma^*$ са р.е. то:
     $L_1 L_2, L_1 \cup L_2, L_1^*, L_2^*$ са р.е.

Твърдение

Всеки $L \subseteq \Sigma^*$ такъв, че

$L = \{w\}$ за $w \in \Sigma^*$ е регулярен.

Доказателство:

Нека $L = \{w\}$. Индукция по $|w|$:

- $|w| = 0$, тогава $w = \varepsilon$, i.e. $L = \{\varepsilon\}$ и по деф. L е регулярен език.

- нека за $|w| = n$ единия $L = \{w\}$ е р-е

- нека $|w| = n+1$, тогава $\exists x \in \Sigma$
такава, че $w = ux$, $u \in \Sigma^*$, $|u| = n$.
От u и x $\{u\}$ е р.е. От друга страна

$$L = \{w\} = \{u\}\{x\}$$

и по деф. $\{x\}$ е р.е. Следователно

L е р.е.

Твърдение

Да се докаже, че всеки краен език е регулярен.

Доказателство:

Ще докажем, че $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall L \subseteq \Sigma^*$ такъв че $|L| = n$ е регулярен език.

- $|L| = 0$, тогава $L = \emptyset$ е р.е.
- $|L| = 1$, тогава имаме следните случаи
  - 1сл: $L = \{\varepsilon\}$ е р.е. по деф.
  - 2сл: $L = \{a\}$, $a \in \Sigma$ е р.е. по деф.
  - 3сл: $L = \{w\}$, $w \in \Sigma^*$ вече доказахме че е р.е.

- нека $\forall L \subseteq \Sigma^*$ такъв, че $|L| = n$ е регулярен.
- нека $L \subseteq \Sigma^*$ е такъв, че $|L| = n+1$. Нека $w \in L$ и $L_1 = L \setminus \{w\}$. Тогава $|L_1| = n$ и от ИХ L_1 е регулярен. Тогава зъй като $\{w\}$ е регулярен и $L = \{w\} \cup L_1$ то L също е р.е.

Задача

Нека $\Sigma = \{a, b\}$ и $L = \{w \mid w$ започва с ab и завършва с $ba\}$

Докажете, че L е р.е.

Решение:

$L = \{w \mid w$ започва с ab и завършва с $ba\}$
$= \{abwba \mid w \in \Sigma^*\}$
$= \{ab\} \circ \Sigma^* \circ \{ba\}$

Имаме, че Σ е краен $\Rightarrow \Sigma$ е р.е. $\Rightarrow \Sigma^*$ е р.е.
$\{ab\}$ и $\{ba\}$ са крайни $\Rightarrow$ са регулярни,
следно $\{ab\} \circ \Sigma^*$ е регулярен и
$(\{ab\} \circ \Sigma^*) \circ \{ba\}$ е регулярен

Задача

—''— $L = \{w \mid -''-$ или $-''-\}$ —''—

Решение:

$L = \{abw \mid w \in \Sigma^*\} \cup \{wba \mid w \in \Sigma^*\}$
$= (\{ab\} \circ \Sigma^*) \cup (\Sigma^* \circ \{ba\})$

Задача

Нека $\Sigma = \{0, 1\}$ и нека за

$w \in \Sigma^*$, $w = w_1 \ldots w_n$ дефинираме

$$\overline{w} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot 2^{i-1}$$

Да се докаже, че $L = \{w \in \Sigma^* \mid \overline{w} \% 4 = 9\}$

Решение:

Имаме, че за $\forall n \in \mathbb{N}$

$$n \% 4 = 0 \iff \exists k \in \mathbb{N}, n = k * 4$$

В двоичен запис, ако $w = w_1 \ldots w_n$

и $w_n = 0$, то $\overline{w} \% 2 = 0$, ако

$w_n = w_{n-1} = 0$, то $\overline{w} \% 4 = 0$, оттук

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \overline{w} \% 4 = 0\} =$$

$$= \Sigma^* \{00\} \cup \{\varepsilon\},$$

но $\{\varepsilon\}$ е р.е., $\{00\}$ е р.е. и

Σ^* е р.е., следователно L е р.е.

Задача

Нека $\Sigma = \{a, b, c\}$. Докажете, че
$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \%\, 2 = 0\}\ е\ р.е.$$

Решение:

Имаме, че $L = (\Sigma^2)^*$, освен това
$$\Sigma^2 = \Sigma \cdot \Sigma\ и\ \Sigma\ е\ р.е.,\ т.е.\ \Sigma^2\ е\ р.е.$$

Оттегло $(\Sigma^2)^*\ е\ р.е.$

Задача

—||— $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \%\, 2 = 1\}$

$е\ р.е.$

Решение:
$$L = (\Sigma^2)^* \Sigma$$

Задача

Нека $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ и $k \in \mathbb{N}$. Док. че
$$L_{p,u} = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \%\, p = k\}\ е\ р.е.$$

Решение:

I случай: $k \geq p$, тогава $L_{p,u} = \emptyset\ е\ р.е.$

II случай: $k < p$, тогава $L = (\Sigma^p)^* \Sigma^k$

def.|| Регуларен израз =

Нека Σ е крайна азбука и нека
$\Gamma = \Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, (,), *, +, \cdot\}$. Регуларен
израз деф. индуктивно:

База
- о думата $\emptyset$ е р.и. над Σ;
- о думата ε е р.и. над Σ;
- о ако $a \in \Sigma$, то a е р.и. над Σ;

Стъпка
- о ако r е р.и. над Σ, то
  $(r)^*$ е р.и. над Σ
- о ако r и s са р.и. над Σ, то
  $(r + s)$ е р.и. над Σ
- о ако r и s —||— Σ, то
  $(r \cdot s)$ е р.и. над Σ

def.|| Език на регуларен израз

База
- о $L(\emptyset) = \emptyset$;
- о $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$;
- о $L(u) = \{u\}$, $u \in \Sigma$;

Стъпка
- о $L((r)^*) = \{L(r)\}^*$;
- о $L((r + s)) = L(r) \cup L(s)$;
- о $L((r \cdot s)) = L(r) L(s)$;