

# Упражнение IV

⊛ Определено ли е множество  $\{\{aw \mid w \in \Sigma^*\}\}$  за фиксирано  $a \in \Sigma$ ?

(В структурата  $S = (\mathcal{P}(\Sigma^*), \text{cat}^s, \text{cup}^s)$ )

Нека  $h': \Sigma \rightarrow \Sigma$  е такава, че  $h'(x) = \begin{cases} a, & x = b \\ b, & x = a \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$  за  $a, b \in \Sigma$ .

$h'': \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*, h''(a_1 \dots a_n) = h'(a_1) \dots h'(a_n)$

$h: \mathcal{P}(\Sigma^*) \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$ , което

$h(L) = \{h''(w) \mid w \in L\}$  за  $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$

Всичко означават, че  $h$  е абстрактно приложение в  $S$ .

Нека предположим, че  $\{\{aw \mid w \in \Sigma^*\}\}$  за  $a \in \Sigma$  е определено с ф-на  $f_{aw}(x)$ . Нека  $L_0 = \{aw \mid w \in \Sigma^*\}$   $a \in \Sigma$ . Тогава  $h(L_0) = \{h''(aw) \mid w \in \Sigma^*\} =$

$= \{bh''(w) \mid w \in \Sigma^*\}$ . Уви, че  $f_{aw}(L_0) \leftrightarrow f_{aw}(h(L_0))$  но думите в  $h(L_0)$  са от вида  $bh''(w)$  за  $w \in \Sigma^*$ , откъдето стигаме до противоречие.

Следователно  $\{\{aw \mid w \in \Sigma^*\}\}$  не е определено.

# Задача

Нека  $L = (\{p\}, \emptyset, \emptyset, I)$

$S = (E_2, \{p^s\}, \emptyset, \emptyset)$ , което

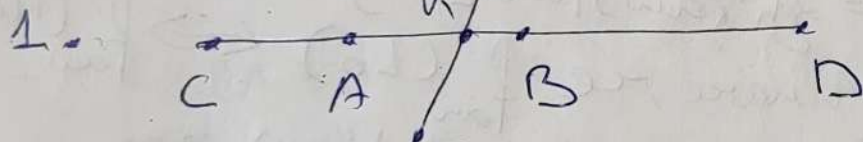
$E_2$  - Евклидовата равнина

$p^s(A, B, C, D) \Leftrightarrow AB \cap CD \neq \emptyset$

Определения ни са:

1.  $\{(A, B, C, D) \mid AB \subseteq CD\}$
2.  $\{(A, B, C, D) \mid AB \parallel CD\}$
3.  $\{(A, B, C) \mid B \in AC \text{ и } B \neq A \text{ и } B \neq C\}$
4.  $\{(A, B, C, D) \mid ABCD \text{ е успоредник}\}$
5.  $\{(A, B, M) \mid M \text{ е среда на } AB\}$
6.  $\{(A, B, C) \mid \angle ABC = 60^\circ\}$

Решение:



$$f_{\subseteq}(A, B, C, D) \Leftrightarrow \forall E \forall F (p(E, F, A, B) \Rightarrow p(E, F, C, D))$$

Нека  $AB \subseteq CD$ , тогава за вс.  $K \in AB$ ,  $K \in CD$ .

Отгук, ако  $E, F \in E_2$  са такива, че  $EF \cap AB = \{K\}$ , то  $EF \cap CD = \{K\}$ . Обратно, нека  $AB \not\subseteq CD$ .

Тогава има  $K \in AB$  такива, че  $K \notin CD$ , т.е.

можем да изберем  $E, F \in E_2$  такива, че  $AB \cap EF = \{K\}$ .

Тогава  $CD \cap EF = \emptyset$ .

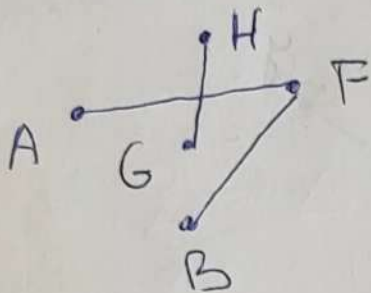
2. Ще изберем две, че продълженията на успоредни прави не се пресичат.

$$f_{\parallel}(A, B, C, D) \Leftrightarrow \forall E \forall F \forall G \forall H \\ (f_{\subseteq}(A, B, E, F) \& f_{\subseteq}(C, D, G, H) \Rightarrow \neg p(E, F, G, H))$$

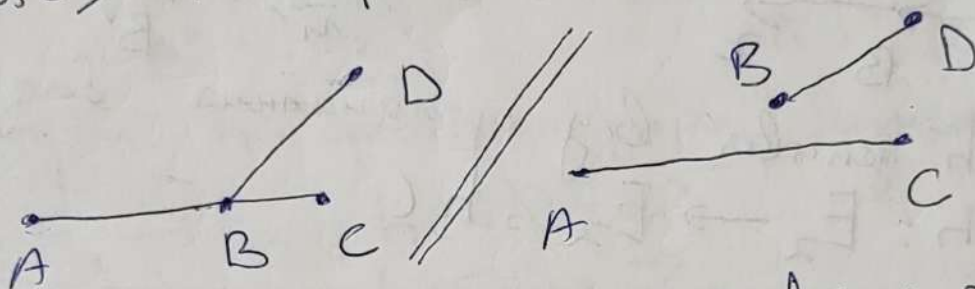


3. Прво дефинираме предикатна ф-ца, која  
разпознава совпаѓаачи точки.

$$eq(A, B) \Leftrightarrow \forall F \forall G \forall H (p(A, F, G, H) \Leftrightarrow p(B, F, G, H))$$



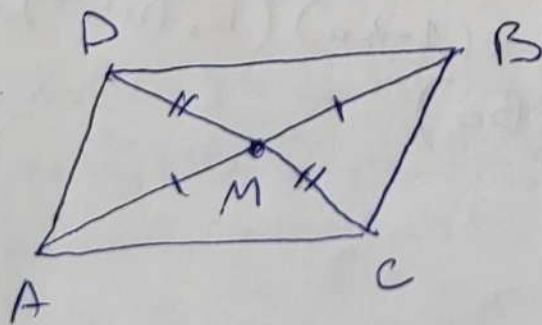
$$f_{\text{between}}(A, B, C) \Leftrightarrow \forall D (p(B, D, A, C) \& \neg eq(A, B) \& \neg eq(B, C))$$



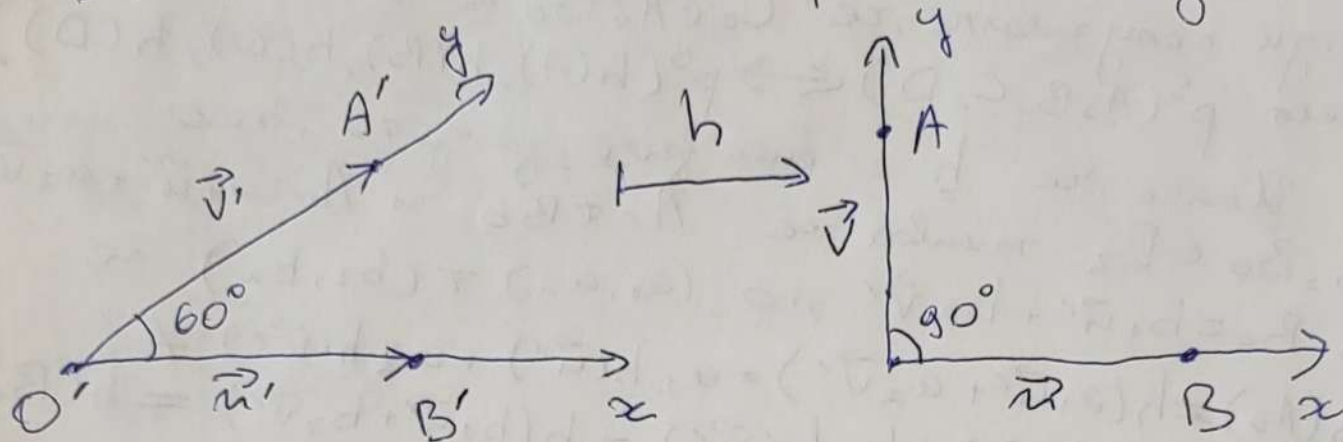
$$4. f_{\square}(A, B, C, D) \Leftrightarrow f_{\parallel}(A, B, C, D) \& f_{\parallel}(A, D, B, C)$$

$$5. f_{\text{mid}}(A, B, M) \Leftrightarrow \exists C \exists D (f_{\square}(A, C, B, D) \& f_{\text{between}}(A, M, B) \& f_{\text{between}}(C, M, D))$$

Употребаваме идејта, се во утврденик дијагонали  
се разподелуваат.



6. Ще покажем, че в нашия "дваг" не можем да различим  $60^\circ$  от  $90^\circ$ . Ще дефинираме автоморфизъм  $h$  който ще прелинава от базис  $\vec{u}', \vec{v}'$ , такъв че  $\angle(\vec{u}', \vec{v}') = 60^\circ$ , към ортогонален базис  $\vec{u}, \vec{v}$ .



С други думи  $h$  "ортогонализира" базиса  $\vec{u}', \vec{v}'$ .

$$h: E_2 \rightarrow E_2, \quad h(\vec{u}') = \vec{u} \\ h(\vec{v}') = \vec{v}$$

Нека  $z \in E_2$  е произволен. Тогава  $z = q\vec{u}' + r\vec{v}'$  за  $q, r \in \mathbb{R}$ . Нека  $h$  действа в/у  $z$  така:

$$h(z) = qh(\vec{u}') + rh(\vec{v}') = q\vec{u} + r\vec{v}$$

Нека  $A_0, B_0 \in E_2$  са произволни, погледва отсечката  $A_0B_0 = \{\lambda A_0 + (1-\lambda)B_0 \mid \lambda \in [0, 1]\}$

Нека  $C_0 \in A_0B_0$ , погледва има  $\lambda_0 \in [0, 1]$  такова, че  $C_0 = \lambda_0 A_0 + (1-\lambda_0)B_0$

Учеме, че  $h(C_0) = \lambda_0 h(A_0) + (1-\lambda_0)h(B_0)$ , защото

ако  $A_0 = a_1\vec{u}' + a_2\vec{v}'$  и  $B_0 = b_1\vec{u}' + b_2\vec{v}'$ , то

$$\begin{aligned} h(C_0) &= h(\lambda_0 A_0 + (1-\lambda_0)B_0) = \\ &= h(\lambda_0(a_1\vec{u}' + a_2\vec{v}') + (1-\lambda_0)(b_1\vec{u}' + b_2\vec{v}')) = \\ &= h(\lambda_0 a_1 \vec{u}' + \lambda_0 a_2 \vec{v}' + (1-\lambda_0)b_1 \vec{u}' + (1-\lambda_0)b_2 \vec{v}') = \\ &= h(\vec{u}'(\lambda_0 a_1 + (1-\lambda_0)b_1) + \vec{v}'(\lambda_0 a_2 + (1-\lambda_0)b_2)) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= h(\vec{u}') (2\alpha a_1 + (1-2\alpha) b_1) + h(\vec{v}') (2\alpha a_2 + (1-2\alpha) b_2) = \\
 &= 2\alpha (a_1 h(\vec{u}') + a_2 h(\vec{v}')) + (1-2\alpha) (b_1 h(\vec{u}') + b_2 h(\vec{v}')) = \\
 &= 2\alpha h(A_0) + (1-2\alpha) h(B_0),
 \end{aligned}$$

Оттук получаваме, че  $C_0 \in A_0 B_0 \iff h(C_0) \in h(A_0) h(B_0)$

$$\text{Тоест } p^S(A, B, C, D) \iff p^S(h(A), h(B), h(C), h(D))$$

Укаже, че  $h$  е биекция, защото, ако  $A_0, B_0 \in E_2$  са различни, че  $A_0 \neq B_0$  и  $A_0 = a_1 \vec{u}' + a_2 \vec{v}'$  и  $B_0 = b_1 \vec{u}' + b_2 \vec{v}'$ , то  $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$  и  $h(A_0) = h(a_1 \vec{u}' + a_2 \vec{v}') = a_1 h(\vec{u}') + a_2 h(\vec{v}') \neq b_1 h(\vec{u}') + b_2 h(\vec{v}') = h(b_1 \vec{u}' + b_2 \vec{v}') = h(B_0)$

Ако  $A_0 \in E_2$  и  $A_0 = a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v}$ , то  $h^{-1}(A_0) = a_1 h^{-1}(\vec{u}) + a_2 h^{-1}(\vec{v})$ .

Така получаваме, че  $h$  е абиоморфизъм. Нека  $A', O', B'$  са точките от първата терпедон, т.е.  $\angle A'O'B' = 60^\circ$ . Нека допуснем, че  $\{(A, B, C) \mid \angle ABC = 60^\circ\}$  е определено с ф-на  $f_{60^\circ}(A, B, C)$ . Оттук получаваме, че  $f_{60^\circ}(A', O', B')$  е истина т.с.т.к.  $f_{60^\circ}(h(A'), h(O'), h(B'))$  е истина т.с.т.к.  $f_{60^\circ}(A, O, B)$  е истина, което е абсурд.

Така получаваме, че  $\{(A, B, C) \mid \angle ABC = 60^\circ\}$  не е определено.