群的置换表示与群的图表示

郭大昌
(广东工业大学数理系, 广州, 510090)

摘要　考虑群 G 在一个集合 Ω 上传递转换作用和把 Ω 做成 G 的 $C[\Omega]$ 模空间, 得到 G 作为线性群在 $C[\Omega]$ 作用, 那么二者有怎样的内在联系呢?

本文主要结果是: 群 G 在一个基数为 p 的集合 Ω 上的作用是传递的, 那么这个置换特征标 π 有如下分解式:

⑴若 G 在 Ω 上的作用是二传递的, 则

$$\pi = 1_G + \chi_i,\ \deg\chi = p - 1;$$

⑵若 G 在 Ω 上的作用是单本原的, 则

$$\pi = 1_G + \sum_{i=1}^{r}\chi_i,\ \deg\chi_i = m,\ i = 1, 2, \cdots, r,\ p - 1 = m\cdot r.$$

此处数 r 称为 G 的秩.

关键词　传递置换群; 双轨道; 次轨道
中图资料法分类号　O157

1　预备知识

考虑群 G 在一个集合 Ω 上传递置换作用, 其诱导了它在 $\Omega\times\Omega$ 上的一个自然作用. 假设 $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_{r-1}$ 是群 G 在 $\Omega\times\Omega$ 上的轨道, 此处

$$\Gamma_0 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha\in\Omega\}.$$

我们称这些轨道为 G 的双轨道(orbitals), 并且称 Γ_0 为 G 的平凡双轨道, 数 r 称为 G 的秩(rank), 每一个非平凡双轨道 Γ_i 用如下方法可构造一个 G- 对称有向图 $\Gamma = (\Omega, \Gamma_i)$:

$$V(\Gamma) = \Omega,$$
$$E(\Gamma) = \{(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta)\in\Gamma_i\}.$$

若对任意 $\alpha, \beta\in\Omega$, $(\alpha, \beta)\in\Gamma_i$ 等价于 $(\beta, \alpha)\in\Gamma_i$, 则 Γ 为无向图. 把这样得到的有向或无向图 $\Gamma(\Omega, \Gamma_i)$ 称为群 G 的双轨道图(orbital graph). 若这个图是无向的, 则称双轨道 Γ_i 是自配对的(self- paired), 此时图 Γ 的全自同构群 $Aut(\Gamma)$ 为阶为偶数. 于是对于给定的群 G, 所有的 G 对称的无向图均可通过寻找所有这样的 G 的自配对双轨道而得到. (参见[1], p199)

任取一个点 $\alpha\in\Omega$, 则 $G_\alpha = \{g\in G \mid \alpha^g = \alpha\}$ 称为点 α 在 G 中的稳定子, 而 G_α 在 Ω 上的轨道称为 G 的次轨道(suborbits). 这些次轨道与 G 的以轨道存在着一一对应. 对每一双轨道 Γ_i,

$$\Delta_i = \{\beta\in\Omega \mid (\alpha, \beta)\in\Gamma_i\}$$

收稿日期: 1997- 05- 05

是一个次轨道, 并且对每一次轨道 Δ_i,

$$\Gamma_i = \{(\alpha, \beta)^g \mid g \in G, \beta \in \Delta_i\}$$

是 G 的一个双轨道. 于是 G 的次轨道的个数也称为 G 的秩. 更进一步地图 $\Gamma(\Omega, \Gamma_i)$ 同构于 $Sab(G, D, G_\alpha)$, 此处 D 可由下式刻划:

$$D = \{g \in G \mid \alpha^g \in \Delta_i\}. \qquad (Sab(G, D, G_\alpha)\text{定义参见[4]})$$

事实上, $(\alpha^{g_i}, \alpha^{g_j}) \in E(\Gamma)$ 当且仅当 $(\alpha^{g_i}, \alpha^{g_j}) \in \Gamma_i$, 而这又等价于 $g_j g_i^{-1} \in D$.

另一方面, 给定一个 G- 对称图 $\Gamma(\Omega, \Gamma_i)$, 对任意 $g \in G$, 令

$$\pi(g) = |\{\alpha \in \Omega \mid \alpha^g = \alpha\}|.$$

则这个非负整数值函数 π 称为 G 的关于这个作用的置换特征标. 为了看清 π 确实为 G 的一个特征标(character), 设 V 是一个由某组基 $\{\alpha, \beta, \ldots, r\}$ 张成的 C 空间, 令 $\Omega = \{\alpha, \beta, \ldots, r\}$. 于是群 G 对集合 Ω 的置换作用, 自然地延拓成群 G 对空间 V 的线性作用. 这样我们就把 V 变成了一个 $C[G]$ 模, 并称为置换模. 显然此时 V 赋于了这个作用的置换特征标 π. 下面的事实关于置换特征标 π 是基本的.

引理 1　设群 G 在 Ω 上有一传递的置换作用. 对 $\alpha \in \Omega$, 记 $\ = G_\alpha$, 则 $(1\ )^G = \pi$. 此处 1　表示子群　的平凡特征标, $(1\ )^G$ 是 1　到 G 上的诱导特征标. (参见[2], p68)

引理 2　$[\pi, \pi] = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(g) \overline{\pi(g)} = r$.

此处 r 为前述的 G 关于这个作用的秩. (参见[2], p68)

记 $Irr(G)$ 为 G 的所有不可约(irrducible)特征标所组成的集合. 若 G 在 Ω 上的作用是传递的, 则

$$\pi = 1_G + \sum_i^{s-1} e_i \chi_i, \quad \chi_i \in Irr(G), \tag{1}$$

此处 e_i 称为 χ_i 的重数.

令 $\deg \chi_i = \chi_i(1) = f_i$, $\mu(G) = \max_i\{e_i\}$, $n_i = |\Delta_i|$ 为 G 的次轨道 Δ_i 的次数. 若 $\mu(G) = 1$, 则称 π 是重数自由的.

这样群 G 在 Ω 上的置换作用, 可由式(1)所确定. 式(1)与 G 在 Ω 上作用的次轨道 Δ_i 或双轨道 Γ_i 将有一个怎样的内在联系呢? 如果有, 那末我们就可以从它来确定 G 在 $\Omega \times \Omega$ 上的作用.

著名的群论与代数图论家 Peter. M. Neuman 在文献[3]中指出: "作为一般性的原则, 作为置换群, G 在 Ω 上的作用与 G 作为线性群在 C[Ω]上作用, 似乎没有太大的联系, 但是有一些比较弱的关系":

引理 3　(文献[3]定理 6. p107)作为线性群 G 在式(1)中各不可约分量 $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{s-1}$ 的最大公因数整除各非平凡次轨道的次数 $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$.

作为引理 3 的推论, 我们写成引理 4, 这在以后的证明中将用到.

引理 4　若非主特征标的次数 f_i 均相等, 即 $f_1 = f_2 = \cdots = f_{s-1} = f$, 则 π 是重数自由的, 且 $n_1 = n_2 = \cdots = n_{r-1} = f$.

虽然如此, 我们仍试图探索两者之间的进一步关系. 本文考虑集合 Ω 的基数为素数 p 这一特殊情况, 主要结果为:

定理 1　设集合 Ω 的基数为奇素数 p. 若群 G 在 Ω 上的置换作用为传递的, 那么 G 在 Ω

上作用为重数自由, 并且秩 r 等于(1)式中参数 s. 更进一步地,

1) 若 G 在 Ω 上作用是二传递的, 那么

$$\pi = 1_G + \chi,\ \deg\chi = p-1;$$

2) 若 G 在 Ω 上作用是单本原的, 那么

$$\pi = 1_G + \sum_{i}^{r-1}\chi_i;$$

$$f = \deg\chi_1 = \deg\chi_2 = \cdots = \deg\chi_{r-1} = n_1 = n_2 = \cdots = n_{r-1} = \frac{p-1}{r}.$$

即 G 的非平凡次轨道次数均相等且为f.

顺便我们可以得到连通的 p 阶对称图分类的又一证明.

推论[C. Y. Chao[5]] 每一阶数为 p 的连通对称图均同构于$G(p,f)$, f 为$p-1$ 的偶数因子, $G(p,f)$定义如下:

$V(G(p,f)) = Z_p$,

$E(G(p,f)) = \{(x,y) \mid y-x \in \ _f\}$.

如果没有特别说明, 上述记号和参数将贯穿整个余下的文章. 本文的记号一般是标准的, 可参见文献[1]、[2]或[3].

2 定理 1 和推论的证明

2.1 定理 1 的证明

由 Burnside 定理知:“若群 G 是素数p 次传递置换群, 则 G 或是二传递群, 或 G 等同于 Z_p 上的用下述方法定义的自同构群:

$$\{x+b \mid x, b\in Z_p\} \leqslant G \leqslant \{ax+b) \mid a\in Z_p^*, x, b\in Z_p\}.$$

即 G 是仿射群$AGL(1,p)$包含 $SocAGL(1,p)(\cong Z_p)$的子群. 记 $SocAGL(1,p) = N$, 则 $N\cong Z_p$. 从而 N 为 G 的正规子群. 下证分两种情况讨论:

(1) 若 G 在 Ω 上是二传递的;

由文献[2, p69] 推论 5.17 得 $\pi = 1+\chi$, 从而 $\deg\chi = p-1$.

(2) 若 G 在 Ω 上是单本原的, 如前述 $N\cong Z_p$, N 为G 的正规子群. 又 N 在 Ω(等同于 Z_p) 上的作用是正则的和交换的, 故 N 的这个作用是重数自由的, 亦即:

$$\pi_N = 1_N + \sum_{i=1}^{p-1}\Psi_i,\ \Psi_i\in Irr(N),\ \deg\Psi_i = 1, 2, \cdots, p-1.$$

由于 π_N 是 π_G 在N 上的限止, 从而 $\mu(G)\leqslant\mu(\ \ ) = 1$, 进而 G 是重数自由的. 由文献[3, p102]的说明, 得 $r = s$。

设 $\chi\in Irr(G\mid\pi)$, 即 χ 为 π 的分解式的一个非平凡的不可约分量, 故在 $\Psi_i\in Irr(N\mid\pi_N)$, (事实上$= Irr(N)$)使$[\chi_N, \Psi_i]\neq 0$). 又由于对每一 $x\in N$, x 在 G 中的中心化子$C(x)\leqslant N$, 我们可断言惯性群 $I_G(\Psi_i) = N$, 因 $I_G(\Psi_i) = \{g\in G\mid \Psi_i^g = \Psi_i\}$ 和[2, 定理 6.34]即可推得断言. 于是由 Clifford 定理知 $\Psi_i^G = \chi\in Irr(G)$.

另外从 Ψ_i 的定义知 $\deg\chi = [G:N] = f$. 由于 χ是任意的, 故 $\deg\chi_i = f$, $i = 1, 2, \cdots, r-1$. 从而由引理 4, 定理得证.

2.2 推论的证明

又考虑到次轨道 Δ_i 若是自配对情况, 则如预备知识中所述此时 G 的阶必为偶数. 而由仿射群 $AGL(1, p)$ 的子群 G 的结构知 $G = Z_p \cdot \;_f$, $\;_f$ 为 $|Z_p|$ 的非零元所成的乘法群的子群. 由于 $|Z_p|$ 为奇数, 故 $|\;_f|$ 为偶数, 从而 $|\Delta_i| = f$ 为偶数. 如前言所述, 任意中阶对称图均同构于 $\Gamma(\Omega, \Delta_i)$, 从而同构于 $G(P, \;_f)$, 于是推论得证.

注: 推论在文献[5], Chao1971 年首次证明中相当复杂, 后来 1972 年 J. L. Berggen[6] 简化了这个证明. 今我们用置换特征标的分解式的方法也得到这个结果.

参　考　文　献

1　Wang Ruji, Xu Mingyao. A Classification of symmetric graphs of order 3p, J. Combin. Theory Ser. B, 58. 1993, 197~ 216

2　Isaacs I M. Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976

3　Neumann P M. Finite permutation groups, edge coloured graphs and matrices, in" Topics in Group Theory and Computation" (M. P. J. Curran, Ed), London: Academic Press, 1977. 82~ 116

4　郭大昌. 交错群 A_5 的 4 度连通对称图的分类, 广东机械学院学报, 1997, (1): 18~ 23

5　Chao C Y. On the classification of symmetric graphs with a prime number of vertices, Trans. Amer. Math. Soc. 158. 1971: 247~ 256

6　Berggren J L. An algebraic characterization of symmetric graphs with p points. Bull Austral. math. Soc. 7. 1972: 131~ 134

The Representations Between a Group As a Permutation Group and as a Linear Group

Guo Dachang

(Dept. of Basic Courses, GDUT, Guangzhou, 510090)

Abstract In this paper some connection is dealt with between the numerical data describing G as a permutation group on Ω and that describing G as a linear group. The main result of this paper is as follows:

Let group G act on Ω transitively with permutation character π. $I_f |\Omega| = p$, then thd permutation group G on $C[\Omega]$ is multiplicity- free.

(1) If G acts on Ω doubly transitively, then

$\pi = 1_G + \chi$, $\chi \in Irr(G)$, $\deg \chi = p - 1$;

(2) If G acts on Ω simply primitively, then

$\pi = 1_G + \sum_{i}^{r-1} \chi_i$, $\chi_i \in Irr(G)$, $\deg \chi_i = f$, for $i = 1, 2, \cdots, r-1$, where r is rank of G and $r \cdot f = p - 1$.

Key words transitive permutation group; orbital; suborbit