曲线，曲面与流形

刘博

2021 年 5 月 18 日

目录

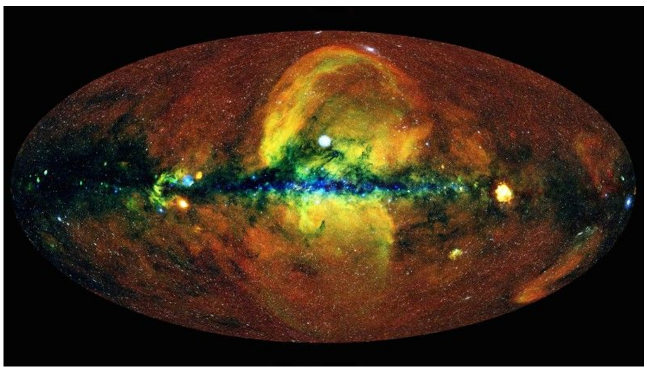
Chapter 1

什么是流形？

在之前的课程中，我们用了很多微积分的技术来研究如何在欧氏空间中通过建立坐标来研究曲面的性质以及如何由此研究曲面的弯曲程度。这种用研究曲面的方法主要是由数学家Gauss发展起来的。 Gauss的视角和我们现在习惯的视角是很接近的。我们可以打开百度地图，从自己所在的位置，将自己的视角不断拉高，直到来到地球的大气层外，直到能窥得地球的形状，这样我们就可以清楚地看出地球是一个球体。这是一个从外围空间来看几何体的角度，但也是外星人的角度。当然，以人类现在的技术，如果大家赚了足够多的钱，也可以坐飞船飞到月亮上来亲眼验证这件事。

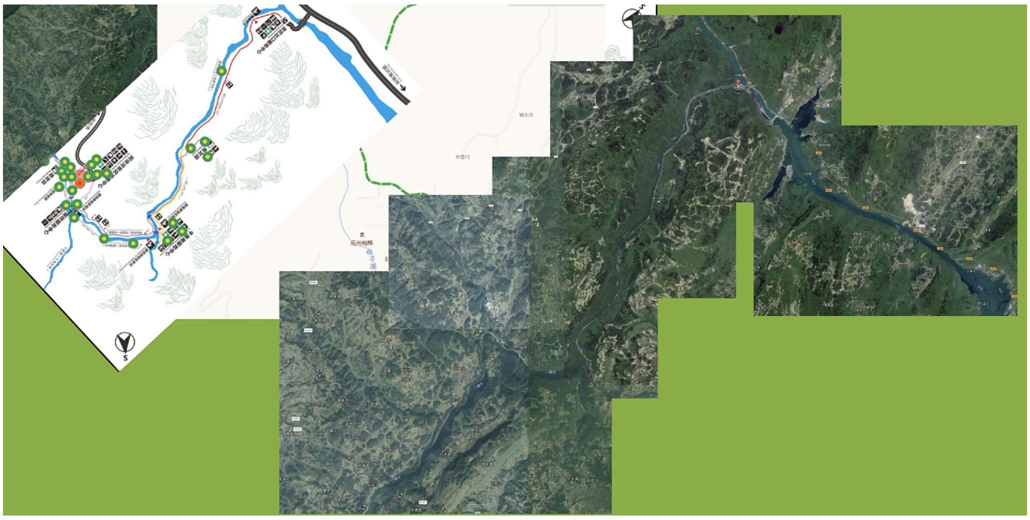
这就体现了一个重要的研究几何的方法：就是把曲面放在三维欧氏空间中像太空人看地球一样来观察这个曲面的性质。这是我们之前学到的角度。而当我们打开百度地图或者看着一个地球仪时可以思考一个新的问题：在我们这个宇航时代，我们想要看清楚宇宙的形状，该怎么办？

对于地球，我们可以跳出地球，在地球之外看我们的城市，我们研究宇宙难道要跳出宇宙，用上帝视角，像在月球看地球一样看我们的宇宙？我们必须承认，在可预见的将来人类并没有这样的能力。那我们该怎样研究宇宙？



我们不要被现代的技术蒙住眼睛。其实古人没有宇宙飞船，也没有百度地图，他们照样可以研究地球。他们研究地球的办法就是:画地图，画一张张的地图，然后再把地图拼接起来，忘记外在的空间，就可以拼成一整

张大地图，甚至拼成一个球。在地球的尺度上，人只相当于球面上的一个小爬虫，但通过一张张地图的拼接，我们依然能够得到足够多的信息。

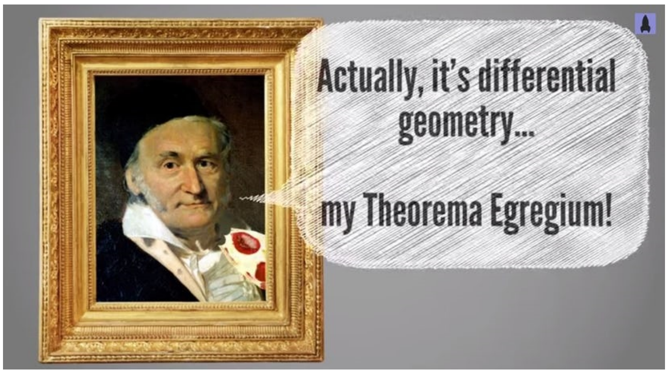


如果大家不喜欢被看成爬虫，我们可以想象自己在探索宇宙，通过一点点的探索，画出宇宙的一张张的三维地图，从而希望得到宇宙的信息。

接下来的问题是，我们能不能通过这些地图和拼接方式得到研究对象的整体性质？或者说拓扑性质？对于大地来说，如果我们仔细遍历脚下的每一寸土地和海洋，我们能不能得到地球是个球，而不是环面？要注意到古希腊人注意到地球是个球是通过太阳来做判断的，我们是否可以不依赖地球外面的任何东西来判断地球是个球呢？

这是一个很经典的问题，难以置信的是，对于曲面来说这居然是对的。我们走遍地球就可以判断出它是一个球而不需要借助外在空间的任何性质。这个神奇的结论来自于高斯的两个里程碑的结果： Gauss绝妙定理和Gauss-Bonnet公式。

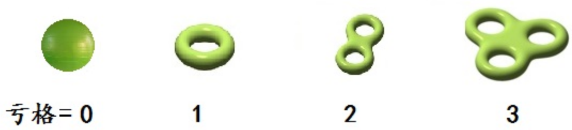
Gauss绝妙定理我们已经讲过。它指的是，我们可以用一个不依赖于曲面在大空间相对位置和坐标选取的量，Gauss曲率，来反映曲面的弯曲程度。这就说明了，我们只要用Gauss提供的办法，在曲面上研究每个局部的性质，就可以不借助曲面所在外在空间的任何性质，得到曲面的局部弯曲程度。这个定理开启了几何学新时代的大门。“绝妙(egregium)定理”这个名字是高斯自己起的，确实非常绝妙。通过高斯绝妙定理我们可以通过高斯曲率来研究曲面上每一点的不依赖于外在空间的弯曲程度。



第二个公式Gauss-Bonnet公式说的是，上述得到的高斯曲率就可以决定曲面整体的拓扑，比如可以决定我们所研究的曲面M是球面还是环面，无边情形的公式具体如下：

$$\frac{1}{2\pi}\int_M KdS = \chi(M) = 2(1-g),$$

其中K为Gauss曲率，$\chi(M)$是曲面的欧拉示性数，g是曲面的亏格，即曲面“洞”的个数。



我们走过整个地球，自然知道它没有边界，既然能走遍说明地球是紧的。这样我们只要测出了每一点的高斯曲率，再把它们积分起来就得到了曲面上洞的个数等于0，即地球确实是个球。这是几何的力量。我们在这门课程的末尾会给出这个公式的证明。

Gauss的这两个结果，在哲学上奠定了现代几何学的基础，即我们可以通过研究几何对象的局部信息，来研究几何对象的整体拓扑信息，而且这些局部信息和该几何对象处于什么样的大空间没有一点关系。这样的几何学就叫做“内蕴几何学”，内蕴是指几何体的性质和几何体处在哪个大空间中没有关系，它的所有性质都是由它本身来决定的。我们要努力找到这些与外在空间无关的性质。在这种哲学的指导下，我们研究宇宙也就不一定需要假定宇宙处在哪个更大的空间中。我们在宇宙内部一步步的探索，也有可能得到宇宙整体的信息。

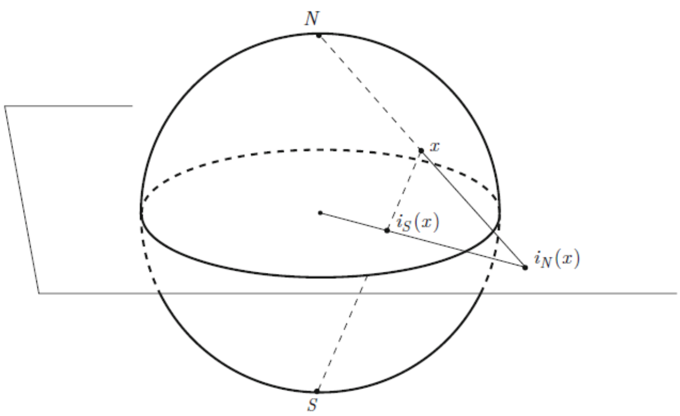
1.1 什么是流形？

《易经》：大哉乾元，万物资始，乃统天。云行雨施，品物**流形**。

《正气歌》：天地有正气，杂然赋**流形**。

在前言中我们大致描述了流形的想法。流形的英文是manifold,望文生义我们可以将其拆解为mani-fold,mani可以理解为map,这样manifold大意就是将地图叠加成“册”.从词源学上讲，这样的拆解是不对的,但意外地可以为我们理解“流形”提供一定的帮助.

聊完故事之后，我们来看一看数学。地图册研究的是我们脚下的地球，我们想要画地图，就从二维球面开始。我们回忆二维单位球面的球极投影如下：



此时，在球面的每一点，我们都可以把这点附近的球面通过某个球极投影映到平面的一部分。这就是我们画地图的过程。而且从球极投影的定义可以看出映射是1-1的，连续的，而且映射的逆也是连续的。这样我们的地图就没有丢失必要的信息。唯一不太满意的是我们不能只用**一张**平面上的地图来描述二维球面，因为球面与平面的子集是不同胚的（为什么？你们现在有能力证明它吗？）这里我们要小心“连续”这一表述。在我们之前的定义中，我们定义的球极投影是从三维欧氏空间的子集到二维平面的映射。这里我们要考虑从球面的一部分到平面的映射，我们提到“连续”就意味着已经把球面看成了一个拓扑空间，其上的拓扑是由三维欧氏空间诱导的子拓扑。所以前面的“映射是1-1的，连续的，而且映射的逆也是连续的”意味着球极投影是一个同胚。

现在我们来看一下什么是流形。粗略的说，流形就是可以用上述办法画地图的空间。首先由于同胚概念的存在（画地图不丢失连续性）我们需要流形是一个拓扑空间，且每一点局部可以同胚于欧式空间。但仅仅是拓扑空间是不够的，为了后面分析的需要，我们还需要加上两个稍强的拓扑条件：Hausdorff [1]和第二可数[2]. 这是我们在点集拓扑中学过的两个拓扑条件. Hausdorff 条件保证了我们可以分离点，而第二可数的条件会在后面用于定义流形上的积分。

定义 1.1.1. [3] 设M是一个Hausdorff且第二可数的拓扑空间.如果M上的每个点$x \in M$都存在一个开邻域同胚于$\mathbb{R}^n$的一个开子集,我们称M是一个n维拓扑流形.

例 1.1.2. n维球面

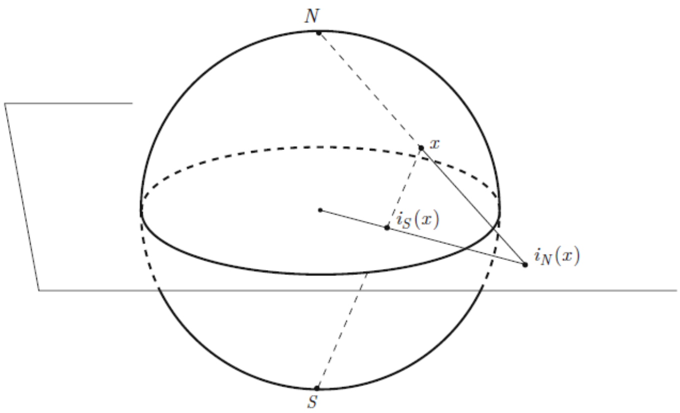
$$S^n = \{x = (x^0, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n; |x|^2 = 1\} \tag{1.1}$$

是一个拓扑流形.

[1]Hausdorff: $\forall x, y \in M$,存在开邻域U和V,满足$x \in U, y \in V$,且$U \cap V = \emptyset$.

[2]第二可数：存在可数的拓扑基.

[3]曾经有一位大数学家教过流形这门课，在很多节课之后，有学生问：“教授，你已经讲了很多流形的性质，但从来没有给出过流形的定义。” 教授回答：“对于流形，重要的是理解它，而不是定义它。”



证明. 我们继续看球极投影。首先，由点集拓扑的知识可以知道，欧氏空间的带有诱导拓扑的拓扑子空间是Hausedorff且第二可数的。设$N=(1,0,\cdots,0)$为球面的北极，$S=(-1,0,\cdots,0)$ 为球面的南极。设

$$U_1=S^n\backslash\{N\},\quad U_2=S^n\backslash\{S\}. \tag{1.2}$$

球极投影如图所示，有

$$i_N(x)=\frac{1}{1-x^0}(x^1,\cdots,x^n),\quad i_S(x)=\frac{1}{1+x^0}(x^1,\cdots,x^n). \tag{1.3}$$

显然映射$i_N:U_1\to\mathbb{R}^n$, $i_S:U_2\to\mathbb{R}^n$ 既单又满，而且连续。因为

$$\begin{aligned} i_N^{-1}(y^1,\cdots,y^n)&=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^n(y^i)^2}\left(\sum_{i=1}^n(y^i)^2-1,2y^1,\cdots,2y^n\right),\\ i_S^{-1}(y^1,\cdots,y^n)&=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^n(y^i)^2}\left(1-\sum_{i=1}^n(y^i)^2,2y^1,\cdots,2y^n\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

所以i_N^{-1}, i_S^{-1}连续。故i_N, i_S是同胚.

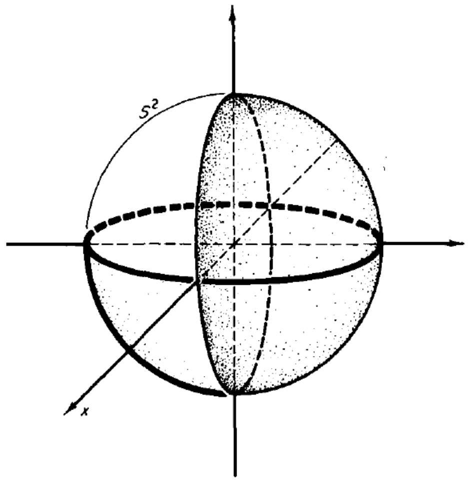
所以S^n是一个拓扑流形。

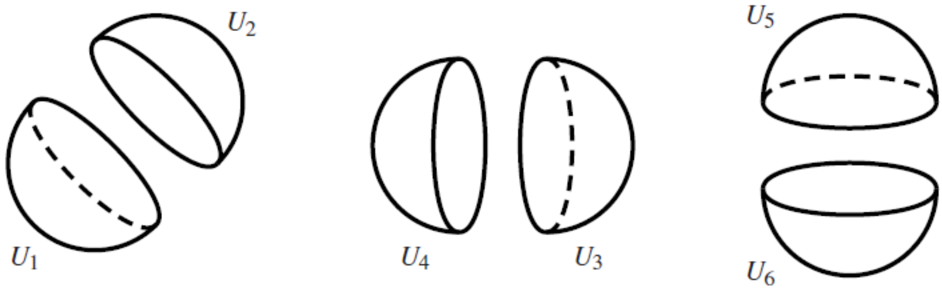
我们还可以用另外的同胚映射来证明这件事情。我们先看

$$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2=1\}.$$

考虑上、下、左、右、前、后6个半球

$$
\begin{aligned}
&U_1 = \{(x,y,z) \in S^2 : x > 0\}, \quad \phi_1(x,y,z) = (y,z);\\
&U_2 = \{(x,y,z) \in S^2 : x < 0\}, \quad \phi_2(x,y,z) = (y,z);\\
&U_3 = \{(x,y,z) \in S^2 : y > 0\}, \quad \phi_3(x,y,z) = (x,z);\\
&U_4 = \{(x,y,z) \in S^2 : y < 0\}, \quad \phi_4(x,y,z) = (x,z);\\
&U_5 = \{(x,y,z) \in S^2 : z > 0\}, \quad \phi_5(x,y,z) = (x,y);\\
&U_6 = \{(x,y,z) \in S^2 : z < 0\}, \quad \phi_6(x,y,z) = (x,y).
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$





则S^2上任一点至少被一个半球覆盖。

对于S^n, $0 \le i \le n$, 设

$$
\begin{aligned}
&U_i^+ = \{(x^0,\cdots,x^n) \in S^n : x^i > 0\},\\
&U_i^- = \{(x^0,\cdots,x^n) \in S^n : x^i < 0\}.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

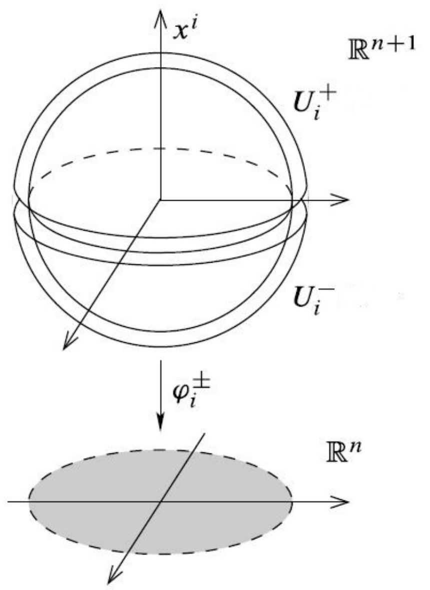
定义$\varphi_i^{\pm}: U_i^{\pm} \to B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$为

$$\varphi_i^{\pm}(x^0, \cdots, x^n) = (x^0, \cdots, \hat{x^i}, \cdots, x^n). \tag{1.7}$$

其中$\hat{x^i}$ 指去掉这一分量。因

$$\left(\varphi_i^{\pm}\right)^{-1}(y^1, \cdots, y^n) = (y^1, \cdots, y^i, \pm\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n}(y^i)^2}, y^{i+1}, \cdots, y^n) \tag{1.8}$$

连续， $\varphi_i^{\pm}$均为同胚映射，且S^n上任一点至少被某一个$U_i^{\pm}$覆盖. □

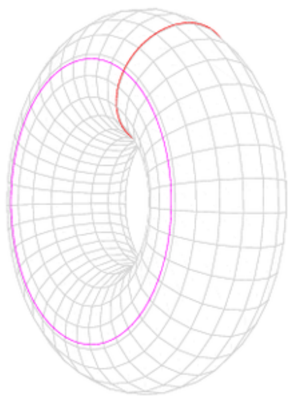


例 1.1.3. 若M,N都是拓扑流形，则笛卡尔积$M \times N$是拓扑流形。

证明. 首先，$M \times N$ Hausdorff 且第二可数。对任意$(x, y) \in M \times N$, 因M, N 为拓扑流形，存在x在M中的邻域U与同胚 $\phi : U \to \mathbb{R}^m$及$y$在$N$中的邻域$V$与同胚 $\psi : V \to \mathbb{R}^n$. 所以$U \times V$是$(x, y)$在$M \times N$ 中的邻域且有同胚$\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^{n+m}$. 故$M \times N$ 是一个拓扑流形. □

递推可得，若$M_1, \cdots, M_k$都是拓扑流形，则$M_1 \times \cdots \times M_k$是拓扑流形. 由上例可得，

例 1.1.4. 环面$T^2 = S^1 \times S^1$是一个拓扑流形.



我们定义n维环面为

$$T^n := \overbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}^{n\text{个}}. \tag{1.9}$$

则T^n也是拓扑流形.

1.2 如何求导？

我们并不满足于在拓扑这个层次上对流形进行操作，希望能够将人类最伟大的认知成就之一：微积分引入进来。我们由这两年大学的学习经历可以体会到微积分的力量。接下来我们将用微积分来研究流形。

在欧氏空间中，微积分是作用在空间上的函数上的。所以用微积分研究流形，我们首先要考察流形上的函数。由于拓扑流形M是一个拓扑空间，我们自然可以在M上定义连续函数

$$f : M \to \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

问题：如何对f求导和积分呢？

在导论中我们提到过,人们通过探索不同的地区可以绘制一张张地图,进而有了“坐标卡（chart）”的概念.

定义 1.2.1. [4] 对于拓扑流形M,由定义可知存在一族开覆盖$\{U_\alpha\}$,使得对每

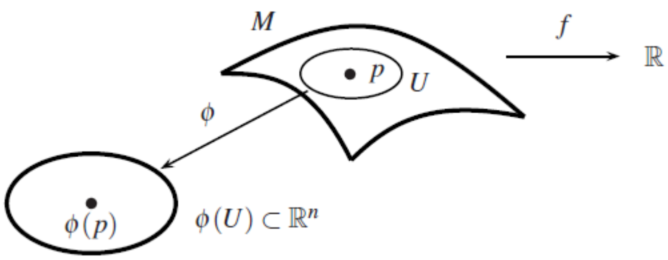
[4] 我会在自习室里放一本地图册，大家可以翻翻，辅助理解。

个$\{U_\alpha\}$都存在一个到欧氏空间的开子集上的同胚映射$\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$.我们称$(U_\alpha, \phi_\alpha)$为$M$的一个坐标卡(chart).

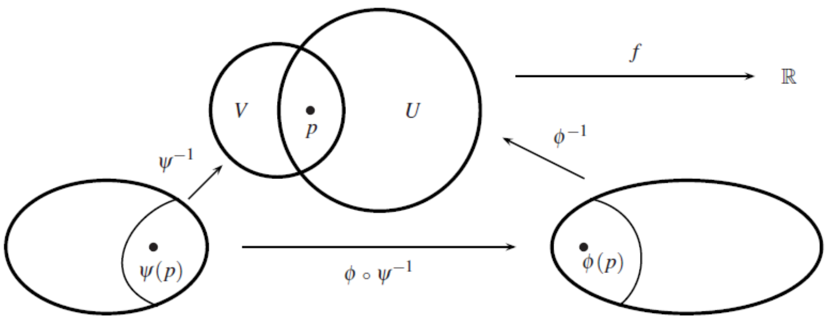
一个自然的想法是,既然拓扑流形是局部同胚到欧氏空间上的,而欧氏空间上可导性是个局部的性质,我们是不是就可以通过这个同胚来定义拓扑流形上连续函数的可微性呢？用数学语言来描述,就是给定$p \in M$,存在包含p的坐标卡(U, ϕ),若

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{1.11}$$

是一阶可微函数,我们是否可以取$f \circ \phi^{-1}$在$\phi(p)$点的导数作为f在p点的导数呢？



这样做会有两个问题,一个是若(U, ϕ), (V, ψ)是包含p的两个坐标卡，即使$f \circ \phi^{-1}$在$\phi(p)$点可微，$f \circ \psi^{-1}$在$\psi(p)$点也不一定可微.另一个问题是,即使$f \circ \phi^{-1}$和$f \circ \psi^{-1}$都可微,它们求出的偏导数是否相等？



对于第一个问题,由于

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1}), \tag{1.12}$$

如果$f\circ\phi^{-1}$可微，我们需要额外假设

$$\phi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\subset\mathbb{R}^n\to\phi(U\cap V)\subset\mathbb{R}^n \tag{1.13}$$

可微，才能保证$f\circ\psi^{-1}$可微.

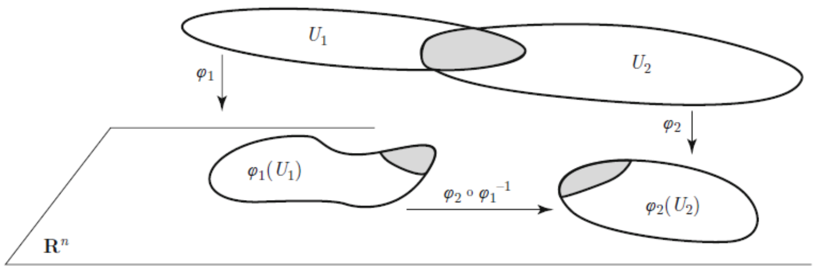
因此对拓扑流形M上的点p, 只有对所有包含p点的坐标卡$\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in J}$, $\forall\alpha,\beta\in J$,都有$\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}$在$\phi_\beta(p)$点可微, 拓扑流形上的函数$f$在$p$点是否可微这个判断才有意义.由此我们可以看出,为了拓扑流形上的函数可以求导,拓扑流形需要附加结构,只有前面的定义是不够的!

定义 1.2.2. 对拓扑流形M上的一个坐标卡的集合$\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$,如果$\mathcal{A}$满足

1. $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha=M$,即$\{U_\alpha\}$是$M$的开覆盖;
2. 对$\forall\alpha,\beta$, 若$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$, 则

$$\phi_{\alpha\beta}:=\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}:\phi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\phi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta) \tag{1.14}$$

   是C^k的[5];



3. $\mathcal{A}$是极大的,即对M的任一坐标卡(U,φ),若对所有使得$U_\alpha\cap U\neq\emptyset$的$\alpha$, $\varphi\circ\phi_\alpha^{-1}$都是$C^k$的,则一定有$(U,\varphi)\in\mathcal{A}$,

则称$\mathcal{A}$是M的一个C^k-微分结构.带有C^k-微分结构的拓扑流形M称为C^k-微分流形. 对$k=+\infty$, C^∞-微分流形又被称为光滑流形,此时的$\mathcal{A}$称为光滑结构.

[5]因ϕ_α是可逆的双射，此时$\phi_{\alpha\beta}$是C^k微分同胚。

在C^k-微分流形M上,我们就可以谈论M上的函数是否是k阶可微的,至此我们对与刚才提出的两个问题中的第一个有了较好的解答.

本次课程中,如果不特意强调，讲义中提到的流形都假定为光滑流形.[6]

我们来看几个微分流形的例子。

例 1.2.3. n维球面S^n是一个微分流形。

证明. 我们已知S^n是一个拓扑流形，需要证明S^n上存在一个微分结构。考虑球极投影$i_N : U_1 \to \mathbb{R}^n$, $i_S : U_2 \to \mathbb{R}^n$ (1.3), 已知$U_1 \cap U_2 = S^n$. 由(1.4),

$$\begin{aligned} i_S \circ (i_N)^{-1}(y^1, \cdots, y^n) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}(y^1, \cdots, y^n), \\ i_N \circ (i_S)^{-1}(y^1, \cdots, y^n) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}(y^1, \cdots, y^n). \end{aligned} \tag{1.15}$$

在$y \neq 0$时， $i_S \circ (i_N)^{-1}$ 与 $i_N \circ (i_S)^{-1}$ 都是C^∞的. 所以$\{(U_1, i_N), (U_2, i_S)\}$ 满足定义1.2.2 1, 2. 在$\{(U_1, i_N), (U_2, i_S)\}$基础上我们添加坐标卡满足定义1.2.2 3中的极大性，即可得到S^n上的一个微分结构。 □

有上述证明可以看出，只需要找到一个坐标卡覆盖，使之满足(1.14)式，我们就可以找到一个微分结构。在之后的证明中，我们可以省去构造极大坐标覆盖的步骤。

前面依据流形上的光滑结构我们可以定义其上的光滑函数。类似的,我们也可以定义两个光滑流形之间的光滑映射.

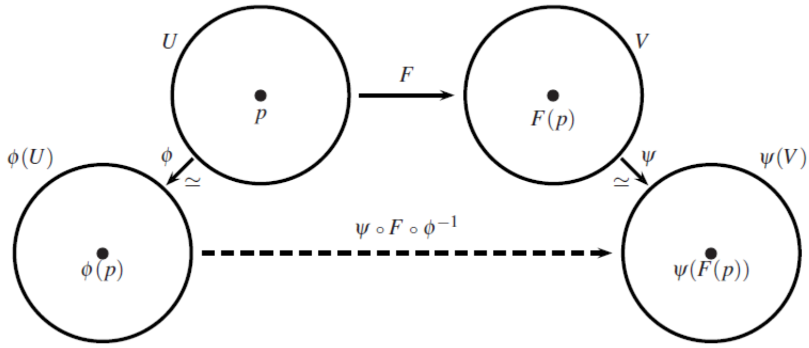
定义 1.2.4. 设 M, N是两个光滑流形,光滑结构[7]分别为$\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}, \{(V_\beta, \varphi_\beta)\}$, 设$F : M \to N$为连续映射。对$m \in M$,如果$m \in U_\alpha$,对任意$V_\beta$包含$F(m)$,

$$\varphi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{R}^n \tag{1.16}$$

都在m点光滑.我们称F在m点光滑, 如果对$\forall m \in M$, F在m点光滑,我们称F为光滑映射.

[6]拓扑流形上不一定存在光滑结构，如果存在也不一定唯一，但关于这方面的讨论超出了本讲义的范围。

[7]在后面，我们经常会省略光滑结构的定义，假定流形上存在一个固定的光滑结构。



定义 1.2.5. 对光滑映射$F: M \to N$, 如果F是同胚，且F^{-1}也是光滑的，我们称 F是一个(光滑)微分同胚[8]。

习题

1. 证明$\mathbb{R}^n$，三维空间中的正则参数曲面都是微分流形。

2. 通过S^n的另一个覆盖证明S^n是一个微分流形.

3. 若M是一个微分流形，$U \subset M$是一个开子集，证明U是一个微分流形。此时U称为M的一个**开子流形**.

4. 设$M(n,\mathbb{R})$为所有n阶实方阵组成的集合。定义一般线性群为
$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) : \det(X) \neq 0\}. \tag{1.17}$$
求证：$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$是一个微分流形.

5. 固定$g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 对任意$h \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $h \mapsto gh$ 定义了一个映射
$$L_g : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), \quad L_g(h) = gh. \tag{1.18}$$
求证：L_g是一个光滑映射.

6. 定义映射
$$\iota : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), \quad \iota(h) = h^{-1}. \tag{1.19}$$
求证：ι是一个光滑映射.

[8]我们可以自然定义流形间的C^k映射和C^k微分同胚。在本讲义中，我们提到的微分同胚都是光滑微分同胚。

1.3 求导的方向

上一节中我们解决了流形上的函数是否可微的问题,接下来我们要考虑的是如何求导.我们接着上一节自然的想法,给定一点$p \in M$,对包含p的坐标卡(U_α, ϕ_α),定义

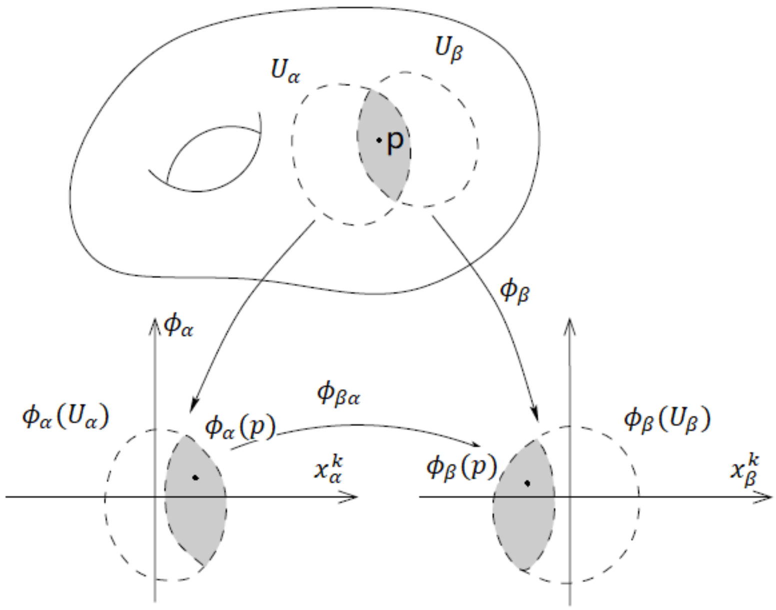
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^k} f\right)(p) := \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}\left(f \circ \phi_\alpha^{-1}\right)\left(\phi_\alpha(p)\right), \tag{1.20}$$

其中$(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n)$是$\phi(U_\alpha)$所在的n维欧氏空间的坐标. 在上面的公式中,$\phi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$, 所以右边是在欧氏空间中求导,是有意义的.

但这时我们遇到了另一个问题,即定义依赖于坐标卡的选取. 如果我们在包含p的不同的坐标卡下求导,是否可以求出同一个函数?

我们不妨验证一下,当$p \in U_\alpha \cap U_\beta$时,由(1.12), (1.13)及链式法则可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}\left(f \circ \phi_\alpha^{-1}\right)\left(\phi_\alpha(p)\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}\left(f \circ \phi_\beta^{-1}\right)\left(\phi_{\beta\alpha}\left(\phi_\alpha(p)\right)\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\beta^l}\left(f \circ \phi_\beta^{-1}\right)\left(\phi_{\beta\alpha}\left(\phi_\alpha(p)\right)\right) \cdot \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}\left(\phi_\alpha(p)\right) \\ &\neq \frac{\partial}{\partial x_\beta^k}\left(f \circ \phi_\beta^{-1}\right)\left(\phi_\beta(p)\right).\end{aligned} \tag{1.21}$$



我们不妨用矩阵的形式将上述求和式写出

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^1}{\partial x_\alpha^1} & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^2}{\partial x_\alpha^1} & \cdots & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^n}{\partial x_\alpha^1} \\ \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^1}{\partial x_\alpha^2} & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^2}{\partial x_\alpha^2} & \cdots & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^n}{\partial x_\alpha^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^1}{\partial x_\alpha^n} & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^2}{\partial x_\alpha^n} & \cdots & \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^n}{\partial x_\alpha^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\beta^1} \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^n} \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

我们经常将上面的方阵简记为

$$\left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}\right)_{(k,l)}. \tag{1.23}$$

观察式子左右两边,我们发现在更换坐标卡后,求导总体上差了一个$\phi_{\beta\alpha}$在$\phi_\alpha(p)$处的Jacobi矩阵.我们可以将这个式子理解为函数f关于两个坐标卡求导,实际上是求导的方向发生了变化,如果我们可以将两个方向“粘”成一个新的方向,之前的定义就合理了,这个方向我们也可以称之为向量场（vector field）.

对一个一般的求导方向$\sum\limits_{k=1}^{n} a_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}$, 由(1.22), 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} a_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} = \left(a_\alpha^1, \cdots, a_\alpha^n\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n} \end{pmatrix} = \left(a_\alpha^1, \cdots, a_\alpha^n\right) \left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}\right)_{(k,l)} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\beta^1} \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^n} \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

根据(1.24),我们可以给出下面的向量场的定义.

定义 1.3.1. 设M是一个带有光滑结构$\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$的光滑流形, M上的一个向量场X是一族偏导数$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}\right\}_{\alpha\in I}$,满足对$\forall \alpha \in I$, $a_\alpha^k \in C^\infty\left(\phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$,而且若$m \in U_\alpha \cap U_\beta$,

$$a_\beta^l(\phi_\beta(m)) = \sum_{k=1}^{n} a_\alpha^k(\phi_\alpha(m)) \cdot \frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}\left(\phi_\alpha(m)\right). \tag{1.25}$$

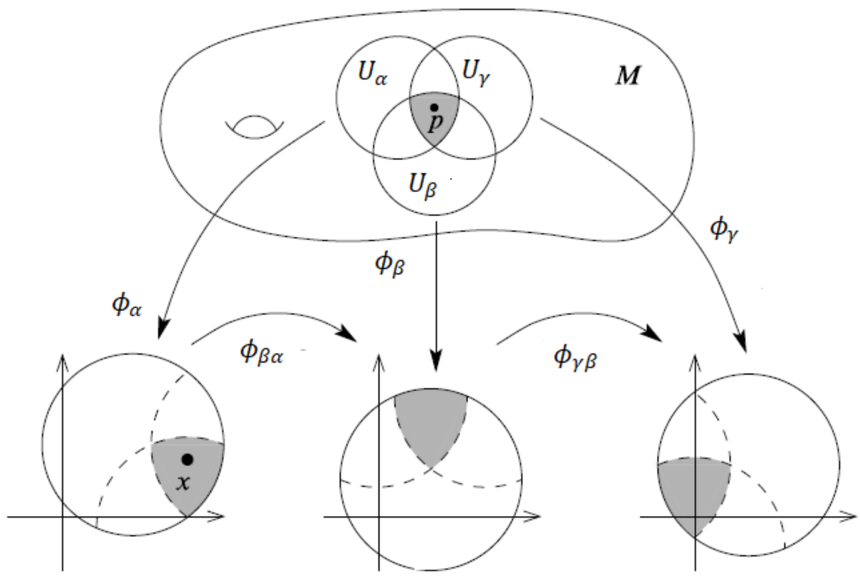
这样一来,我们用向量场的定义解决了两个关于不同坐标卡求偏导时的相容性,因此在关于向量场给定的方向求偏导时,得到的结果是不依赖于坐标卡的选取的. 这相当于我们在不同的坐标卡上对不同的方向求偏导。

接下来我们又遇到了一个问题：如果有三个坐标卡覆盖$m \in M$, $m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, 不同坐标卡变换之间是否会有冲突？按数学的语言，

$$a^l_\beta(\phi_\beta(m)) = \sum_{k=1}^{n} a^k_\alpha(\phi_\alpha(m)) \cdot \frac{\partial \phi^l_{\beta\alpha}}{\partial x^k_\alpha}(\phi_\alpha(m)) \tag{1.26}$$

$$a^l_\gamma(\phi_\gamma(m)) = \sum_{k=1}^{n} a^k_\beta(\phi_\beta(m)) \cdot \frac{\partial \phi^l_{\gamma\beta}}{\partial x^k_\beta}(\phi_\beta(m)) \tag{1.27}$$

$$a^l_\gamma(\phi_\gamma(m)) = \sum_{k=1}^{n} a^k_\alpha(\phi_\alpha(m)) \cdot \frac{\partial \phi^l_{\gamma\alpha}}{\partial x^k_\alpha}(\phi_\alpha(m)) \tag{1.28}$$



如果通过前两个公式得到的$(a^1_\gamma, \cdots, a^n_\gamma)$与 $(a^1_\alpha, \cdots, a^n_\alpha)$的关系与(1.28)不同，那么我们向量场的定义就会出问题。我们来看一下会不会出问题。

由转移映射的定义, $\phi_{\gamma\alpha} = \phi_{\gamma\beta} \circ \phi_{\beta\alpha}$,再由求导的链式法则可以得到

$$\frac{\partial \phi^l_{\gamma\alpha}}{\partial x^k_\alpha}(\phi_\alpha(m)) = \sum_{t=1}^{n} \frac{\partial \phi^l_{\gamma\beta}}{\partial x^t_\beta}(\phi_\beta(m)) \cdot \frac{\partial \phi^t_{\beta\alpha}}{\partial x^k_\alpha}(\phi_\alpha(m)). \tag{1.29}$$

写成矩阵形式,就是

$$\left(\frac{\partial\phi^l_{\gamma\alpha}}{\partial x^k_\alpha}(\phi_\alpha(m))\right)_{(k,l)} = \left(\frac{\partial\phi^t_{\beta\alpha}}{\partial x^k_\alpha}(\phi_\alpha(m))\right)_{(k,t)}\left(\frac{\partial\phi^l_{\gamma\beta}}{\partial x^t_\beta}(\phi_\beta(m))\right)_{(t,l)}. \tag{1.30}$$

把公式(1.26), (1.27)写成向量形式, 并把(1.26)代入(1.27)中，我们有

$$\begin{aligned}
&\left(a^1_\gamma\left(\phi_\gamma(m)\right),\cdots,a^n_\gamma\left(\phi_\gamma(m)\right)\right)\\
&\quad=\left(a^1_\beta\left(\phi_\beta(m)\right),\cdots,a^n_\beta\left(\phi_\beta(m)\right)\right)\left(\frac{\partial\phi^l_{\gamma\beta}}{\partial x^t_\beta}(\phi_\beta(m))\right)_{(t,l)}\\
&=\left(a^1_\alpha\left(\phi_\alpha(m)\right),\cdots,a^n_\alpha\left(\phi_\alpha(m)\right)\right)\left(\frac{\partial\phi^t_{\beta\alpha}}{\partial x^k_\alpha}(\phi_\alpha(m))\right)_{(k,t)}\left(\frac{\partial\phi^l_{\gamma\beta}}{\partial x^t_\beta}(\phi_\beta(m))\right)_{(t,l)}\\
&\quad=\left(a^1_\alpha\left(\phi_\alpha(m)\right),\cdots,a^n_\alpha\left(\phi_\alpha(m)\right)\right)\left(\frac{\partial\phi^l_{\gamma\alpha}}{\partial x^k_\alpha}(\phi_\alpha(m))\right)_{(k,l)}.
\end{aligned}\tag{1.31}$$

该式即为(1.28)的向量表示形式.

因为(1.26), (1.27)可以推出(1.28),由归纳法,对对任意多个相交于某点的坐标卡,向量场的定义都是相容的.

按照这样的定义,沿着X方向对f求导我们记为Xf. 从这个角度看,向量场X实际上定义了一个映射

$$X: C^\infty(M,\mathbb{R})\to C^\infty(M,\mathbb{R}), \tag{1.32}$$

且这个映射是合理定义的.

向量场到底是什么？在前面的定义中，向量场是以求导为目的引入，在每一块坐标卡上定义，再以某种规则粘起来的东西. 这就自然出现了一个问题：这样拼起来的东西到底是什么？在数学中我们熟悉的是三段论式的定义，有大前提和小前提，但我们这里是一个构造的定义，我们是不是可以按照数学习惯，先找一个大空间然后把向量场看作空间中满足某种性质的元素或部分？或者用通俗一点的话说，我们能不能给向量场找到一个家？我们现在给向量场建造一个家。

设M是带有光滑结构$\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$的光滑流形,记$\bigsqcup\limits_\alpha(U_\alpha\times\mathbb{R}^n)$是$\{U_\alpha\times\mathbb{R}^n\}$的不交并.定义关系"$\sim$",使得

$$\left(x,(a^1_\alpha,\cdots,a^n_\alpha)\right)\in U_\alpha\times\mathbb{R}^n\sim\left(y,(a^1_\beta,\cdots,a^n_\beta)\right)\in U_\beta\times\mathbb{R}^n \tag{1.33}$$

当且仅当$x=y$,且$\forall 1\le l\le n$,

$$a_\beta^l=\sum_{k=1}^n a_\alpha^k\cdot\frac{\partial\phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(x) \tag{1.34}$$

或写成向量形式

$$\left(a_\beta^1,\cdots,a_\beta^n\right)=\left(a_\alpha^1,\cdots,a_\alpha^n\right)\left(\frac{\partial\phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(x)\right)_{(k,l)}. \tag{1.35}$$

可以验证"$\sim$"是一个等价关系,即满足自反性、对称性和传递性.

我们定义如下映射

$$\begin{aligned} X|_{U_\alpha}=\sum_{k=1}^n a_\alpha^k(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}:U_\alpha&\to U_\alpha\times\mathbb{R}^n\\ x&\mapsto\left(x,(a_\alpha^1(x),\cdots,a_\alpha^n(x))\right)\end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned} X|_{U_\beta}=\sum_{l=1}^n a_\beta^l(x)\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}:U_\beta&\to U_\beta\times\mathbb{R}^n\\ y&\mapsto\left(y,(a_\beta^1(y),\cdots,a_\beta^n(y))\right)\end{aligned} \tag{1.37}$$

这样的映射可以“粘”成一个合理定义的映射：

$$X:M\to\bigsqcup_\alpha\left(U_\alpha\times\mathbb{R}^n\right)/\sim$$

箭头右边的空间就可以看作向量场所在的“大空间”,于是我们有了“切向量丛”（vector field）的定义.

定义 1.3.2. $TM:=\bigsqcup\limits_\alpha\left(U_\alpha\times\mathbb{R}^n\right)/\sim$称为光滑流形$M$上的切向量丛.

由前面拼接式的定义我们可以得到TM是一个拓扑流形.事实上TM甚至是一个光滑流形. 注意到我们一直在假设M是一个光滑流形.

记$\pi:TM\to M,\ (m,v)\mapsto m$为投影映射. 由(1.33)可得， π是合理定义的。

定义 1.3.3. 对$m\in M$, $T_mM:=\pi^{-1}(m)$称为 M在m点的**切空间**. 对向量场X，$X(m)\in T_mM$ 称为M在m点的一个**切向量**.

根据投影映射和切向量丛的定义，下面命题的证明是显然的。

命题 1.3.4. X是光滑流形M上的一个向量场当且仅当$X: M\mapsto TM$是一个满足$\pi\circ X=\mathrm{Id}_M$的光滑映射.

记

$$C^\infty(M,TM)=\{s:M\to T^*M\text{为光滑映射}|\pi\circ s=\mathrm{Id}_M\}.\tag{1.38}$$

所以我们可以得到$X\in C^\infty(M,TM)$.

事实上,很多书籍主要是采用上述命题中后面的方式来定义向量场.

在曲面论中，我们讨论过曲面上的切向量与切空间。这里我们定义了流形上的向量场与切空间。我们需要讨论一下当流形就是三维空间中的曲面时，二者之间的关系。

设M是一个三维空间中的正则参数曲面，则它是一个微分流形。对$m\in M$, 考虑覆盖m的两个坐标卡$(U_\alpha,\phi_\alpha),(U_\beta,\phi_\beta)$. 则$\phi_\alpha^{-1},\phi_\beta^{-1}$ 是$U_\alpha\cap U_\beta$ 的两个参数表示。这两个参数表示之间的参数变换为

$$\phi_{\beta\alpha}:\phi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\phi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\tag{1.39}$$

考虑M上经过m点的一条光滑曲线$\gamma(t)$，$\gamma(0)=m$, 设$\phi_\alpha\circ\gamma(t)=(x_\alpha^1(t),x_\alpha^2(t))$, $\phi_\beta\circ\gamma(t)=(x_\beta^1(t),x_\beta^2(t))$. $\gamma(t)$在m点对应的切向量为$\gamma'(0)\in\mathbb{R}^3$, 在$\phi_\alpha(U_\alpha)$中对应的向量为$((x_\alpha^1)'(0),(x_\alpha^2)'(0))$, 在$\phi_\beta(U_\beta)$中对应的向量为$((x_\beta^1)'(0),(x_\beta^2)'(0))$. 注意到

$$((x_\beta^1)'(0),(x_\beta^2)'(0))=((x_\alpha^1)'(0),(x_\alpha^2)'(0))\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi_{\beta\alpha}^1}{\partial x_\alpha^1} & \frac{\partial\phi_{\beta\alpha}^2}{\partial x_\alpha^1}\\ \frac{\partial\phi_{\beta\alpha}^1}{\partial x_\alpha^2} & \frac{\partial\phi_{\beta\alpha}^2}{\partial x_\alpha^2}\end{pmatrix}\tag{1.40}$$

此式正好对应于(1.35)式。

在流形的意义下，$\phi_\alpha(U_\alpha)$中的偏微分$(x_\alpha^1)'(0)\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}+(x_\alpha^2)'(0)\frac{\partial}{\partial x_\alpha^2}$与$\phi_\beta(U_\beta)$中的偏微分$(x_\beta^1)'(0)\frac{\partial}{\partial x_\beta^1}+(x_\beta^2)'(0))\frac{\partial}{\partial x_\beta^2}$粘合成了一个切向量$X(m)\in T_mM$. 所

以我们有两种切向量的对应：

$$
\begin{aligned}
(a_\alpha^1, a_\alpha^2) \in \phi_\alpha(U_\alpha) &\longleftrightarrow a_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} + a_\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^2}, \\
(a_\beta^1, a_\beta^2) \in \phi_\beta(U_\beta) &\longleftrightarrow a_\beta^1 \frac{\partial}{\partial x_\beta^1} + a_\beta^2 \frac{\partial}{\partial x_\beta^2}.
\end{aligned} \tag{1.41}
$$

但切向量$\gamma'(0) \in \mathbb{R}^3$在流形中却没有对应。这是因为我们并不假设流形在另外更大的欧式空间中。

向量场有两个性质, 若$X \in C^\infty(M, TM)$, $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,则有:

(1)$X(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot Xf + \beta \cdot Xg$,

(2)$X(f \cdot g) = f \cdot Xg + g \cdot Xf$.

习题

1. 证明(1.33)中的$\sim$是一个等价关系。

2. 证明TM是一个微分流形.

1.4 微分

在欧氏空间$\mathbb{R}^n$中,我们在学过偏导数之后学习了微分$df = \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$.在之前的小节中,我们完成了流形上求偏导的推广,接下来我们尝试着把微分也推广到流形上.

给定一个流形上的光滑函数$f : M \to \mathbb{R}$,用同之前一样自然的想法,我们猜想是否可以将微分定义成

$$
df|_{U_\alpha} := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} (f \circ \phi_\alpha^{-1}) dx_\alpha^k. \tag{1.42}
$$

与之前相同,我们需要验证这样的定义是否合理,即定义是否与坐标卡的选取有关.我们选定$m \in U_\alpha \cap U_\beta$, 因为对$1 \le l \le n$,

$$
x_\beta^l = \phi_{\beta\alpha}^l (x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n). \tag{1.43}
$$

由欧氏空间中多元微积分的换元公式,我们可以得到

$$\left(dx_\beta^1, \cdots, dx_\beta^n\right) = \left(dx_\alpha^1, \cdots, dx_\alpha^n\right) \left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(\phi_\alpha(x))\right)_{(k,l)}. \tag{1.44}$$

由(1.22) 与(1.44),我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}(f \circ \phi_\alpha^{-1}) dx_\alpha^k = \left(dx_\alpha^1, \cdots, dx_\alpha^n\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n} \end{pmatrix} (f \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\alpha(m)) \\
&= \left(dx_\beta^1, \cdots, dx_\beta^n\right) \left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(x)\right)_{(k,l)}^{-1} \left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(x)\right)_{(k,l)} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\beta^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^n} \end{pmatrix} (f \circ \phi_\beta^{-1})(\phi_{\beta\alpha}(\phi_\alpha(m))) \\
&= \left(dx_\beta^1, \cdots, dx_\beta^n\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\beta^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta^n} \end{pmatrix} (f \circ \phi_\beta^{-1})(\phi_\beta(m)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\beta^k}(f \circ \phi_\beta^{-1}) dx_\beta^k.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

我们惊奇的发现,我们的定义与坐标卡的选取无关,也就是说我们这样推广是合理的推广(和切向量不一样！).和之前一样,我们所定义的全微分也是定义在一片一片坐标卡上的.像对待向量场一样,我们也要问：拼起来的微分到底是什么东西呢？微分可以看作什么样的大空间中的一个元素呢？

采用和切向量丛中相同的方法,我们依然通过定义一个等价关系来构造这个空间. 我们现在看看我们需要的是一个什么样子的等价关系。我们需要在商掉这个等价关系后,可以将不同坐标卡之间的变换视作同一个东西.所以我们先定义一个一般的df,查看它应该满足什么样的条件.

设$df|_{U_\alpha}=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^\alpha dx_\alpha^k$,则

$$df|_{U_\alpha\cap U_\beta}=\left(dx_\alpha^1,\cdots,dx_\alpha^n\right)\begin{pmatrix}b_1^\alpha\\ \vdots\\ b_n^\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\left(dx_\beta^1,\cdots,dx_\beta^n\right)\left(\frac{\partial\phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(x)\right)_{(k,l)}^{-1}\begin{pmatrix}b_1^\alpha\\ \vdots\\ b_n^\alpha\end{pmatrix}. \tag{1.46}$$

$$df|_{U_\alpha\cap U_\beta}=\left(dx_\beta^1,\cdots,dx_\beta^n\right)\begin{pmatrix}b_1^\beta\\ \vdots\\ b_n^\beta\end{pmatrix}.$$

为了保证上面两个式子相等，我们得了系数向量应该满足的条件：

$$\left(b_1^\beta,\cdots,b_n^\beta\right)=(b_1^\alpha,\cdots,b_n^\alpha)\left(\left(\frac{\partial\phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(m)\right)_{(k,l)}^{-1}\right)^T. \tag{1.47}$$

定义 1.4.1. 我们定义$\bigsqcup\limits_\alpha(U_\alpha\times\mathbb{R}^n)$的关系"$\sim$"为

$$(x,(b_1^\alpha,\cdots,b_n^\alpha))\in U_\alpha\times\mathbb{R}^n\sim\left(y,(b_1^\beta,\cdots,b_n^\beta)\right)\in U_\beta\times\mathbb{R}^n \tag{1.48}$$

当且仅当$x=y$且(1.47)成立.我们可以验证"$\sim$"是一个等价关系.同时定义$T^*M:=\bigsqcup\limits_\alpha(U_\alpha\times\mathbb{R}^n)\,/\sim$,称为M的余切丛.

设$\pi':T^*M\to M,\ (x,v)\mapsto x$为投影映射.则由上述定义，$\pi'$是合理定义的. 与$TM$同理我们可以证明$T^*M$也是光滑流形. 记

$$C^\infty(M,T^*M)=\{s:M\to T^*M\text{为光滑映射}|\pi'\circ s=\mathrm{Id}_M\}. \tag{1.49}$$

所以我们可以得到$df\in C^\infty(M,T^*M)$. 注意到对 $\forall s\in C^\infty(M,T^*M)$, 在任意坐标卡$U_\alpha$上,都存在$b_1^\alpha,\cdots,b_n^\alpha\in C^\infty(\phi_\alpha(U_\alpha))$,使得

$$s|_{U_\alpha}=\sum_{k=1}^{n}b_k^\alpha dx_\alpha^k. \tag{1.50}$$

但是与上一节命题1.3.4不同的是,此陈述反过来不一定成立,即$\forall s \in C^{\infty}(M, T^*M)$,不一定存在$f \in C^{\infty}(M)$使得$s = df$.

回忆一下微分的定义,类似于向量场我们已经可以将其看成一个线性映射

$$d : C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M, T^*M) \tag{1.51}$$

我们能否更进一步,对于$s \in C^{\infty}(M, T^*M)$,继续定义$s$的全微分呢？对

$$s|_{U_\alpha} = \sum_{k=1}^{n} b_k^\alpha(x) dx_\alpha^k, \tag{1.52}$$

我们能否定义：

$$ds|_{U_\alpha} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^l} b_k^\alpha(x) \right) dx_\alpha^l dx_\alpha^k ? \tag{1.53}$$

这里有两个问题,一个是$dx_\alpha^l dx_\alpha^k$是什么？另一个是我们的定义是否不依赖于坐标卡的选取？我们在讨论曲面的基本形式时也遇到过这个问题，现在我们较严格地讨论一下这件事情。我们引入张量（tensor）的语言.

1.5 张量

上一节中, 出现过记号$dx_i dx_j$, 从形式上看, 这是dx_i与dx_j的乘积, 但我们没有定义过此类乘积. 看样子笛卡尔积或许可以作为一个候选对象。

我们猜想上一节(1.53)中的$dx_i dx_j$可能是笛卡尔积$T_x^*M \times T_x^*M$中的元素。但(1.53)中ds应该是关于$dx_i dx_j$线性的(因为有求和)，对于两个有限维向量空间V, W,我们是否可以定义一个线性映射 $f : V \times W \to \mathbb{R}$? 换句话说对$\forall v_1 \neq v_2 \in V$, $\forall w_1 \neq w_2 \in W$, 是否有 $f(a(v_1, w_1)) = af((v_1, w_1))$, $a \in F$, $f((v_1, w_1) + (v_2, w_2)) = f((v_1, w_1)) + f((v_2, w_2))$?

这里又有额外的两个问题：$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) \in V \times W$? 如何定义数乘使得$a(v_1, w_1) \in V \times W$?如果满足这两个条件，$V \times W$本身就成为了一个向量空间。但一般来说，虽然我们可以强行定义$V \times W$上的线性结构(比如把$V \times W$等同于$V \oplus W$)，但此时f并不是线性的。退而求其次的想法是重

新构造一个和$V \times W$相关的向量空间，使得在这个新的向量空间上f是线性的.

下面我们在任意双线性f在扩张后线性的目标指引下将$V \times W$扩张成一个向量空间. 设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, $\{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$分别是$V$, W的一组基, 其中n, m分别为V与W的维数. $\forall 1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, $(e_i, s_j) \in V \times W$, 我们定义由$\{(e_i, s_j)|1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$作为一组基生成的向量空间为$V$和$W$的张量积, 记为$V \otimes W$. 作为$V \otimes W$的元素, (e_i, s_j)通常记为$e_i \otimes s_j$, 而且满足对$\forall a \in \mathbb{R}$,

$$(ae_i) \otimes s_j = e_i \otimes (as_j) = a(e_i \otimes s_j). \tag{1.54}$$

换句话说我们有

$$V \otimes W := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a^{ij} e_i \otimes s_j | a^{ij} \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1.55}$$

按照定义$V \otimes W$显然是一个向量空间.

我们回忆一下前面提到的 **Einstein求和约定**:当指标$i, j, k, l, \cdots$,上下各出现一次时表示对这个指标求和。例如上面的$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a^{ij} e_i \otimes s_j$就可记为$a^{ij} e_i \otimes s_j$.

到此我们已经定义了一个张量积, 这个定义是否合理? 他看起来依赖基的选取, 而我们希望两个空间V, W生成的另一个空间的定义能够脱离基的选择. 也就是说, 我们希望, 如果取V和W另外的两组基, (1.55)定义出的向量空间$V \otimes W$还是原来的空间. 事实上, 我们上面的定义满足这一性质.

取V, W的另一组基$\{e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\}$, $\{s'_1, s'_2, \cdots, s'_m\}$, 则有线性表示:

$$e'_i = c_i^k e_k,\ s'_j = b_j^l s_l, \tag{1.56}$$

此时

$$e'_i \otimes s'_j = c_i^k b_j^l e_k \otimes s_l \in V \otimes W, \tag{1.57}$$

这样一来, 对$\forall a'^{ij} \in \mathbb{F}$, 有$a'^{ij} e'_i \otimes s'_j = a'^{ij} c_i^k b_j^l e_k \otimes s_l \in V \otimes W$.

记$V \otimes' W = \{a'^{ij} e'_i \otimes s'_j | a'^{ij} \in \mathbb{R}\}$, 则有$V \otimes' W \subset V \otimes W$. 反过来, 用$\{e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\}$, $\{s'_1, s'_2, \cdots, s'_m\}$表示$e_i$, s_j, 可得$V \otimes W \subset V \otimes' W$. 从而有$V \otimes W = V \otimes' W$, 这样我们已说明了式(1.55)对张量空间的定义不依赖于基的选择.

习题 1.5.1. 验证$(U\otimes V)\otimes W=U\otimes(V\otimes W)$.

1.6 外代数与外微分

我们在前面一直试图求$C^\infty(M,T^*M)$上的微分, 对$\forall s\in C^\infty(M,T^*M)$, $s|_{U_\alpha}=b_k^\alpha dx_\alpha^k$, 我们先试着定义一种微分:

$$ds|_{U_\alpha}:=\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^l}b_k^\alpha\right)dx_\alpha^l\otimes dx_\alpha^k, \tag{1.58}$$

其中$dx_\alpha^l\otimes dx_\alpha^k\in T_x^*M\otimes T_x^*M$. 这个定义满足我们需要的线性性质。接下来我们要验证这个定义是否与坐标卡无关, 因为只有这样, 上述定义才能是好的.

简记$\Phi=\left(\frac{\partial\phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}\right)_{(k,l)}$为Jacobi矩阵, 记

$$\Phi_k^l=\frac{\partial\phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}. \tag{1.59}$$

则由(1.22)，

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}=\Phi_k^l\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}. \tag{1.60}$$

设$\widetilde{\Phi}:=\Phi^{-1}$. 记$\widetilde{\Phi}_s^m$ 为矩阵$\widetilde{\Phi}$的的(s,m)位置上的元素. 故

$$\widetilde{\Phi}_l^m\Phi_k^l=\Phi_k^l\widetilde{\Phi}_l^m=\delta_k^m. \tag{1.61}$$

对(1.60)两边同乘$\widetilde{\Phi}_s^k$,并对k求和，由 (1.61),有

$$\widetilde{\Phi}_s^k\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}=\widetilde{\Phi}_s^k\Phi_k^l\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}=\delta_s^l\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}. \tag{1.62}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}=\widetilde{\Phi}_l^k\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}. \tag{1.63}$$

由(1.47),

$$b_k^\beta=\widetilde{\Phi}_k^l b_l^\alpha. \tag{1.64}$$

由(1.44),

$$dx_\beta^l = \Phi_q^l dx_\alpha^q. \tag{1.65}$$

用上述记号与式(1.58)中ds的定义, 我们得到ds在另一个坐标卡U_β上的表示

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}(b_k^\beta(x))dx_\beta^l \otimes dx_\beta^k = \widetilde{\Phi}_l^m \frac{\partial(\widetilde{\Phi}_k^t b_t^\alpha)}{\partial x_\alpha^m}\Phi_q^l \Phi_p^k dx_\alpha^q \otimes dx_\alpha^p \\
=&\Phi_q^l \widetilde{\Phi}_l^m \Phi_p^k \widetilde{\Phi}_k^t \frac{\partial b_t^\alpha}{\partial x_\alpha^m} dx_\alpha^q \otimes dx_\alpha^p + \Phi_q^l \widetilde{\Phi}_l^m \Phi_p^k \frac{\partial \widetilde{\Phi}_k^t}{\partial x_\alpha^m} b_t^\alpha dx_\alpha^q \otimes dx_\alpha^p \\
=&\delta_q^m \delta_p^t \frac{\partial b_t^\alpha}{\partial x_\alpha^m} dx_\alpha^q \otimes dx_\alpha^p + \delta_q^m \Phi_p^k \frac{\partial \widetilde{\Phi}_k^t}{\partial x_\alpha^m} b_t^\alpha dx_\alpha^q \otimes dx_\alpha^p \\
=&\frac{\partial b_t^\alpha}{\partial x_\alpha^m} dx_\alpha^m \otimes dx_\alpha^t - b_t^\alpha \widetilde{\Phi}_k^t \frac{\partial^2 \phi_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^p \partial x_\alpha^m} dx_\alpha^m \otimes dx_\alpha^p,
\end{aligned} \tag{1.66}$$

最后一个等号是因为

$$\Phi_p^k \frac{\partial \widetilde{\Phi}_k^t}{\partial x_m^\alpha} = \frac{\partial(\Phi\Phi^{-1})_p^t}{\partial x_m^\alpha} - \frac{\partial \Phi_p^k}{\partial x_m^\alpha}\widetilde{\Phi}_k^t = -\frac{\partial^2 \phi_{\beta\alpha}^k}{\partial x_p^\alpha \partial x_m^\alpha}\widetilde{\Phi}_k^t. \tag{1.67}$$

由于式(1.66)中最后一个等号后面的$b_t^\alpha \Phi^{kt} \frac{\partial^2 \phi_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^p \partial x_\alpha^m} dx_\alpha^m \otimes dx_\alpha^p \neq 0$, (1.58)式是与坐标卡选取有关的。

我们将$\otimes$替换为其他算子, 使其为0.

由于$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^p \partial x^m} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^m \partial x^p}$. 那么有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^p \partial x^m}(dx_\alpha^p \otimes dx_\alpha^m - dx_\alpha^m \otimes dx_\alpha^p) \\
&\qquad = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^p \partial x^m} dx_\alpha^p \otimes dx_\alpha^m - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^m \partial x^p} dx_\alpha^m \otimes dx_\alpha^p = 0.
\end{aligned} \tag{1.68}$$

注意, 此式中的p, m为Einstein求和记号, 并无特殊含义, 我们将这种没有特别含义记号称作哑符号.

如果我们定义

$$ds|_{U_\alpha} := \frac{1}{2}\frac{\partial b_k^\alpha(x)}{\partial x_\alpha^l}(dx_\alpha^l \otimes dx_\alpha^k - dx_\alpha^k \otimes dx_\alpha^l), \tag{1.69}$$

式(1.66)中的$b_t^\alpha \Phi^{kt} \frac{\partial^2 \phi_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^p x_\alpha^m} dx_\alpha^m \otimes dx_\alpha^p$对应的一项便可以为0, 此时$ds$的定义不依赖于坐标卡$U_\alpha$的选取. 由上面的想法, 我们给出外积的定义.

定义 1.6.1 (外积). 若$v, w \in V$我们定义v与w的外积为

$$v \wedge w := \frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v). \tag{1.70}$$

所有外积张成的空间为

$$\Lambda^2 V := \{a_{ij} e_i \wedge e_j | a_{ij} \in \mathbb{R}\}. \tag{1.71}$$

其中$\{e_1, \cdots, e_n\}$是V中的一组基。显然$\Lambda^2 V$的定义不依赖于基的选取。

现在我们用外积$\wedge$替换式(1.58)中的$\otimes$, 我们得到ds的整体定义

$$ds|_{U_\alpha} := \frac{\partial b_k^\alpha(x)}{\partial x_\alpha^l} dx_\alpha^l \wedge dx_\alpha^k. \tag{1.72}$$

至此, 我们已经将全微分推广到了$C^\infty(M, T^*M)$上.

大家请注意：由于$e_i \wedge e_i = 0$, $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, 所以$\Lambda^2 V$的基为$\{e_i \wedge e_j, 1 \le i < j \le n\}$, $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^2 V = \frac{n(n-1)}{2}$.

自然地, 我们会问, ds的家在哪里? 也就是说ds将$C^\infty(M, T^*M)$空间映到了什么空间上?

类似于前面我们对向量场和全微分做过的事情，我们看一下坐标变换时会发生什么。将坐标卡U_β换为U_α时, 对$i < j$,

$$\begin{aligned} dx_\beta^i \wedge dx_\beta^j = \Phi_k^i dx_\alpha^k \wedge \Phi_l^j dx_\alpha^l &= \sum_{k \neq l} \Phi_k^i \Phi_l^j dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l \\ &= \sum_{k<l} \Phi_k^i \Phi_l^j dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l + \sum_{l<k} \Phi_k^i \Phi_l^j dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l \\ &= \sum_{k<l} \Phi_k^i \Phi_l^j dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l + \sum_{k<l} \Phi_l^i \Phi_k^j dx_\alpha^l \wedge dx_\alpha^k \\ &= \sum_{k<l} (\Phi_k^i \Phi_l^j - \Phi_k^j \Phi_l^i) dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l. \end{aligned} \tag{1.73}$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{i<j} a_{ij}^\beta dx_\beta^i \wedge dx_\beta^j &= \sum_{i<j} a_{ij}^\beta (\sum_{k<l} (\Phi_k^i \Phi_l^j - \Phi_k^j \Phi_l^i) dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l) \\ &= \sum_{k<l} (\sum_{i<j} a_{ij}^\beta (\Phi_k^i \Phi_l^j - \Phi_k^j \Phi_l^i)) dx_\alpha^k \wedge dx_\alpha^l \\ &= \sum_{i<j} (\sum_{k<l} a_{kl}^\beta (\Phi_i^k \Phi_j^l - \Phi_i^l \Phi_j^k)) dx_\alpha^i \wedge dx_\alpha^j. \end{aligned} \tag{1.74}$$

定义 1.6.2. 定义$\sqcup_\alpha(U_\alpha\times\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}})$上的等价关系'$\sim$'为

$$\begin{aligned}(x,\{a_{ij}^\alpha,1\le i<j\le n\})&\sim(y,\{a_{ij}^\beta,1\le i<j\le n\})\\ &\Leftrightarrow x=y,\ 且a_{ij}^\alpha=\sum_{k<l}a_{kl}^\beta(\Phi_i^k\Phi_j^l-\Phi_i^l\Phi_j^k).\end{aligned}\tag{1.75}$$

记$\Lambda^2T*M:=\bigcup_\alpha(U_\alpha\times\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}})/\sim$.

到这里ds的象空间就构造完成了,

$$ds\in C^\infty(M,\Lambda^2T^*M).$$

问题：我们是否可以对$C^\infty(M,\Lambda^2T^*M)$中的元素继续做微分？

我们需要定义k个向量的外积. 也就是说, 定义 $v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k$, $v_1,\cdots,v_k\in V$.

我们希望外积满足分配律, 即

$$(u\wedge v)\wedge w=u\wedge v\wedge w=u\wedge(v\wedge w).$$

我们还知道$w\wedge v=-v\wedge w$, 也就是说交换向量的位置, 外积的结果要加一个负号, 自然的一个想法是:

$$u\wedge v\wedge w=-v\wedge u\wedge w=-u\wedge w\wedge v=w\wedge u\wedge v.$$

设S_n为n阶置换阵, 对$\sigma\in S_n$, 定义$sgn(\sigma)$,

$$sgn(\sigma)=\begin{cases}1,\ \sigma为偶置换,\\-1,\ \sigma为奇置换.\end{cases}\tag{1.76}$$

定义三个向量的外积:

$$\begin{aligned}&v_1\wedge v_2\wedge v_3:=\frac{1}{|S_3|}\sum_{\sigma\in S_3}sgn(\sigma)v_{\sigma(1)}\otimes v_{\sigma(2)}\otimes v_{\sigma(3)},\ v_i\in V\\=&\frac{1}{6}\big(v_1\otimes v_2\otimes v_3-v_1\otimes v_3\otimes v_2-v_2\otimes v_1\otimes v_3+v_2\otimes v_3\otimes v_1\big).\end{aligned}\tag{1.77}$$

自然推广到k个向量的外积:

$$v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k:=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}sgn(\sigma)v_{\sigma(1)}\otimes v_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(k)}.\tag{1.78}$$

k次外积张成的空间

$$\Lambda^k V := \{a^{i_1 i_2 \cdots i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} | a^{i_1 i_2 \cdots i_k} \in \mathbb{R}\}. \tag{1.79}$$

注:

- $\Lambda^k V$的定义不依赖于基的选取;
- 对$\forall v_1, v_2, \cdots, v_k \in V$, 都有$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda^k V$;
- $k > n$时, $\Lambda^k V = 0$;
- $\Lambda^k V$的一组基为$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} | 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$; 也就是说$dim_{\mathbb{R}} \Lambda^k V = C_n^k$, 特别地, $dim_{\mathbb{R}} \Lambda^n V = 1$.

对$\xi \in \Lambda^k V, \eta \in \Lambda^l V$, ξ与η的外积满足$\xi \wedge \eta \in \Lambda^{k+l} V$, 对$\forall \xi_1, \xi_2 \in \Lambda^k V$, $\eta_1, \eta_2 \in \Lambda^l V$, $\zeta \in \Lambda^s V$, 以下性质成立:
1. 分配律: $(\xi_1 + \xi_2) \wedge \eta = \xi_1 \wedge \eta + \xi_2 \wedge \eta$, $\xi \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \xi \wedge \eta_1 + \xi \wedge \eta_2$;
2. 反交换律: $\xi \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \xi$;
3. 结合律: $(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$.

定义 1.6.3 (外代数)**.** 令$\Lambda^* V := \bigoplus\limits_{k=0}^{n} \Lambda^k V$, 特别地, $\Lambda^0 V := \mathbb{F}$, $\Lambda^1 V := V$. 则外积$\wedge$定义了$\Lambda^* V$的一个代数结构, 称为外代数.

定义 1.6.4 (张量代数)**.** 先定义$T^r V := V \otimes \cdots \otimes V$, 特别地, $T^0(V) = \mathbb{F}$, $T^1(V) = V$. 则$T(V) = \bigoplus\limits_{r=0}^{n} T^r V$也是一个代数, 称为张量代数.

仿照$d : C^\infty(M, T^*M) \to C^\infty(M, \Lambda^2 T^*M)$, 我们可以定义$\Lambda^3 T^*M$, 直到$\Lambda^n T^*M$[9], 从而定义$d : C^\infty(M, \Lambda^k T^*M) \to C^\infty(M, \Lambda^{k+1} T^*M)$.

定义 1.6.5 (外微分)**.** 简记$\Omega^k(M) := C^\infty(M, \Lambda^k T^*M)$, 对$\alpha \in \Omega^k(M)$, 局部上$\alpha = a_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, 我们定义外微分$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$

$$d\alpha := (\frac{\partial a_{i_1 i_2 \cdots i_k}}{\partial x^j}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \tag{1.80}$$

其中d称为外微分[10] (exterior differential), α称为微分形式 (differential form).

[9]对$k \geq 2$,依照粘接方法定义过于复杂，我们省去严格的定义，在后续课程中我们会学到从另一个角度得到的更加形式化的定义。

[10]这里略去(1.80)定义的合理性。

习题 1.6.6. $\Lambda^n T^*M$的转移函数恰为T^*M的转移矩阵的行列式，即

$$dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n = \det\left(\frac{\partial \phi_{\beta\alpha}^l}{\partial x_\alpha^k}(\phi_\alpha(x))\right)_{(k,l)} \cdot dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n. \tag{1.81}$$

回忆： 若一流形$M = \mathbb{R}^3$为三维欧式空间, 现有光滑函数$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, 可看做$\mathbb{R}^3$上的0-形式, 其1-形式为

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3),$$

或者$S \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, $S = Adx + Bdy + Cdz$, $A, B, C \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, 继续做外微分$d$, 得到其2-形式为

$$ds = (\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y})dx \wedge dy.$$

标准的2-形式为

$$S = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy, A, B, C \in C^\infty(\mathbb{R}^3),$$

继续用外微分得到3-形式

$$dS = (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz.$$

在场论中, 有一些标准记号. 梯度

$$grad\, f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}),$$

这样一来, df便为$grad\, f$与(dx, dy, dz)的内积. 若$X = (A, B, C)$, 则旋度为

$$curl\, X = (\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}).$$

$S \in \Omega^2(M)$, 那么S便为$curl\, X$与$(dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$的内积. 散度

$$div\, X = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z},$$

那么3-形式$dS = div\, X \cdot dx \wedge dy \wedge dz$.

场论中有两个重要的公式: $curl(gradf) = 0$与$div(curlX) = 0$, 分别由$d^2 f = 0$与$d^2 S = 0$得到.

命题 1.6.7. 如下定义的映射$TM \times T^*M \to \mathbb{R}$:

$$\left\langle x = a^k \frac{\partial}{\partial x_k}, s = b_l dx^l \right\rangle := \sum_{k=1}^{n} a^k b_k. \tag{1.82}$$

是合理，双线性且非退化的. 这里的非退化是指不存在$x, s \neq 0$,使得$\langle x, s\rangle = 0$.

证明. 双线性性非退化性是显然的。我们只需证明该映射的定义不依赖于坐标卡的选取:

$$\left\langle a^k_\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta_k}, b^\beta_l dx^l_\beta \right\rangle = a^k_\beta b^\beta_k = a^s_\alpha \Phi^k_s b^\alpha_l \widetilde{\Phi}^l_k = a^s_\alpha b^\alpha_l \delta^l_s = \left\langle a^k_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha_k}, b^\alpha_l dx^l_\alpha \right\rangle. \tag{1.83}$$

□

由于这个性质, T^*M又叫TM的对偶丛.

设V, W为向量空间, 那么

$$(V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*. \tag{1.84}$$

证明. 对$\forall v, v' \in V, w, w' \in W$, 定义$v^* \otimes w^*(v' \otimes w') = v^*(v') \cdot w^*(w') \in \mathbb{F}$, 则$v^* \otimes w^*$为$V \otimes W$在对偶空间中, 即$v^* \otimes w^* \in (V \otimes W)^*$, 从而$V^* \otimes W^* \subset (V \otimes W)^*$. 由$V^* \otimes W^*$与$(V \otimes W)^*$的维数相等, 得到$V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*$. □

由式(1.84), 可以进一步探索外微分和向量场之间的作用. 对一个k-形式$\alpha \in \Omega^k(M)$, 与向量场$X_1, X_2, \cdots, X_k$, 可定义

$$\alpha(X_1, X_2, \cdots, X_k) \in \mathbb{R},$$

定义的具体形式, 请同学自行写出.

对两个k-形式$\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$, 若对$\forall X_1, X_2, \cdots, X_k$, 有$\alpha(X_1, X_2, \cdots, X_k) = \beta(X_1, X_2, \cdots, X_k)$, 由定义, 显然有$\alpha = \beta$, 故整体上可用$\alpha$在向量场上的值来研究微分形式.

命题 1.6.8. *1.* 对$\forall \alpha \in \Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$, 有$d^2\alpha = 0$;

2. 对$\forall\varphi\in C^\infty(M)$, 有$\langle d\varphi, U\rangle = U(\varphi)$;

3. 对$\forall\alpha\in\Omega^k(M)$, $\beta\in\Omega^l(M)$, 有$d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge d\beta$.

证明. (1) 首先证明$\alpha\in\Omega^0(M)$, 也即光滑函数时的情况, 对$f\in C^\infty(M)$, $df=\frac{\partial f}{\partial x_i}dx^i$,

$$
\begin{aligned}
d(df)=&\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}dx^j\wedge dx^i\\
=&\sum_{j<i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx^j\wedge dx^i+\sum_{i<j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx^j\wedge dx^i\\
=&\sum_{j<i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx^j\wedge dx^i-\sum_{j<i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx^j\wedge dx^i\\
=&0.
\end{aligned}
$$

若$\alpha\in\Omega^k(M)$, 由式(1.80),

$$d^2\alpha := d^2(a_{i_1i_2\cdots i_k})dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}=0.$$

(2) $\langle d\varphi, u\rangle=\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx^i, U^i\frac{\partial}{\partial x_i}\rangle=U^i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=U(\varphi)$.

(3) 假设$\alpha=\alpha_I dx^I$, $\beta=\beta_J dx^J$, $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$, $J=\{j_1,j_2,\cdots,j_l\}$, 则有

$$
\begin{aligned}
d(\alpha\wedge\beta)=&\beta_J d\alpha_I\wedge dx^I\wedge dx^J+\alpha_I d\beta_J\wedge dx^I\wedge dx^J\\
=&(d\alpha_I\wedge dx^I)\wedge\beta_J dx^J+(-1)^k\alpha_I dx^I\wedge d\beta_J\wedge dx^J\\
=&d\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge d\beta.
\end{aligned}
$$

□

1.7 李括号

向量场在流形上求导与欧式空间中函数的求导有一个本质的区别: 在流形上求二次导数不能交换, 即在欧式空间中, 对光滑函数$f\in C^\infty(M)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$, 但在流形上, 对两个向量场$X,Y\in C^\infty(M,TM)$, XY与YX一般来说是不相等的. 既然$XY\neq YX$, 我们需要一个量来衡量XY与YX的差别, 这就是李括号的作用.

定义 1.7.1 (李(Lie)括号). 对$f\in C^\infty(M)$, $X,Y\in C^\infty(M,TM)$, 李括号'[,]'定义为

$$[X,Y]f=XYf-YXf. \tag{1.85}$$

在局部上, 将向量场写为关于基的表示, $X=X^i\frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x_j}$, 由向量场的性质与李括号的定义(1.85), 得到

$$\begin{aligned}[X,Y]\,f=&X^i\frac{\partial}{\partial x_i}(Y^j\frac{\partial f}{\partial x_j})-Y^j\frac{\partial}{\partial x_j}(X^i\frac{\partial f}{\partial x_i})\\=&X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}f-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}f\\=&(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x_j}-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_i}f,\end{aligned}$$

由上面的式子, 我们知道$[X,Y]f$是一个向量场, 而且不依赖于坐标卡的选取.

习题:

(1) $[X,Y]=-[X,Y]$;

(2) $[X+Y,Z]=[X,Z]+[Y,Z]$;

(3) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$;

其中(3)称作Jacobi恒等式, 代入定义验证即可.

1.8 向量丛

每次为切丛TM, 余切丛T^*M和外代数丛Λ^*T^*M给出定义的流程几乎相似, 所以我们想将它们相同的抽象定义提取出来, 统一成一种形式——向量丛.

定义 1.8.1 (转移函数). 设$\{U_\alpha\}$是M的一个开覆盖, 开集之间的转移函数(或过渡函数, transition function)定义为一族连续映射$\{\Psi_{\beta\alpha}:U_\beta\cap U_\alpha\to GL(m,\mathbb{R})\}$, s.t. 若$U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\emptyset$, 则在$U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$上有$\Psi_{\gamma\beta}\circ\Psi_{\beta\alpha}=\Psi_{\gamma\alpha}$, 且$\Psi_{\alpha\beta}=\Psi_{\beta\alpha}^{-1}$.

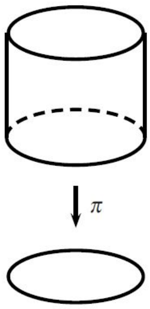
定义 1.8.2 (等价关系'$\sim$'). 定义$\cup_\alpha(U_\alpha\times\mathbb{R}^m)$上的等价关系'$\sim$'为

$$\begin{aligned}&(x,(b_1^\alpha,b_2^\alpha,\cdots,b_m^\alpha))\in U_\alpha\times\mathbb{R}^m\sim(x,(b_1^\beta,b_2^\beta,\cdots,b_m^\beta))\in U_\beta\times\mathbb{R}^m\\&\Leftrightarrow x=y,\ \text{且}(b_1^\beta,b_2^\beta,\cdots,b_m^\beta)=(b_1^\alpha,b_2^\alpha,\cdots,b_m^\alpha)\cdot\Psi_{\beta\alpha}(x).\end{aligned}$$

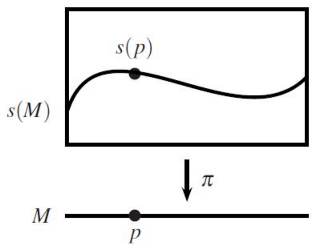
定义 1.8.3 (向量丛)**.** $E := \sqcup_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^m)/\sim$称为$M$上的一个$m$维实向量丛(vector bundle).

E由等价关系'$\sim$'定义了一个商拓扑, 从而也是一个拓扑空间. 实际上, 从定义可以看出E是一个拓扑流形. 如果进一步假设对所有的$\Psi_{\beta\alpha} \in C^\infty$, 则$E$本身是一个光滑微分流形。定义投影映射$\pi : E \to M$, $(x, v) \to x$. E称为全空间(total space), M称为底空间(base space). 定义$C^\infty(M, E) :=$ $\{$光滑映射$s : M \to E | \pi \circ s = id_M\}$(有些书中记作$\Gamma(E)$). 对$\forall s \in C^\infty(M, E)$, 我们将$s$称为$E$的一个截面(section).

下图为S^1上的1维向量丛



下图为截面的示意图



习题 如果所有的$\Psi_{\beta\alpha} \in C^\infty$, 则向量丛$E$本身是一个光滑微分流形。

设E, F是M上的两个向量丛, 且定义在同一个开覆盖$\{U_\alpha\}$上(若定义在不同的开覆盖$\{U_\alpha\}, \{V_\beta\}$上, 则取并$\{U_\alpha \cap V_\beta\}$). 定义转移函数$\{\Psi^E_{\beta\alpha} : U_\beta \cap U_\alpha \to GL(M, \mathbb{R})\}$, $\{\Psi^F_{\beta\alpha} : U_\beta \cap U_\alpha \to GL(M, \mathbb{R})\}$分别为$E, F$上的转移函数.

我们可通过类比$TM, T^*M, \Lambda^k T^*M$构造新向量丛:

1. $E \oplus F$, $m+m'$维, 转移函数$\Psi^E_{\beta\alpha} \oplus \Psi^F_{\beta\alpha}$;

2. $E \otimes F$, $m \times m'$维, 转移函数$\Psi^E_{\beta\alpha} \otimes \Psi^F_{\beta\alpha}$;

3. E^*, m维, 转移函数$((\Psi^E_{\beta\alpha})^{(-1)})^T$;

4. $\Lambda^k E$, C^k_m维, 转移函数$\wedge^k \Psi^E_{\beta\alpha}$.

以上构造的新向量丛均满足1.8节的定义.
注: 矩阵的张量乘:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} & \cdots & a_{1n}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} & \cdots & a_{nn}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

直和:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

1.9 黎曼几何常用记号

流形M上的(r,s)型张量丛有如下定义,

$$T^r_s := \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{\text{r个}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{\text{s个}},$$

其中r称为反变阶数, s称为协变阶数.

就像曲面时一样，我们称$\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ 为TM 的一个局部自然标架，或一组基。同理，可称$\{dx^1, \cdots, dx^n\}$ 为T^*M的一个局部自然标架或一组基。

所以，在局部上, T_s^r的基为$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes dx^{j_2}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$, $1\le i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s\le n$. 对$\forall S\in C^\infty(M,T_s^r)$, 由1.8节的定义, S为T_s^r的一个截面, 在局部上其表示为

$$S=a^{i_1i_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes dx^{j_2}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s},$$

我们称S为一个(r,s)型张量.

此外, 还有些记号, 如

$$\frac{\partial}{\partial x^k_{(\alpha)}}=\frac{\partial x^l_{(\beta)}}{\partial x^k_{(\alpha)}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^l_{(\beta)}},$$

与

$$dx^k_{(\alpha)}=\frac{\partial x^k_{(\alpha)}}{x_{(\beta)^l}}dx^l_{(\beta)}. \tag{1.86}$$

习题 1.9.1. 给出式(1.86)的证明.

1.10 截面的外微分

前两个小节, 我们推广了切丛、余切丛和外代数丛, 定义了一般意义上的向量丛, 更进一步地, 如何把外代数丛的外微分推广到一般向量丛的截面上?

取E的光滑截面$S\in C^\infty(M,E)$, 那么在局部上,

$$S|_{U_\alpha}=f_k^{(\alpha)}S_k^{(\alpha)}. \tag{1.87}$$

由定义, 在$U_\alpha\cap U_\beta$上, 有

$$(f_1^{(\alpha)},f_2^{(\alpha)},\cdots,f_m^{(\alpha)})=(f_1^{(\beta)},f_2^{(\beta)},\cdots,f_m^{(\beta)})\Psi^E_{\alpha\beta},$$

等式两边均左乘$(S_1^{(\beta)},S_2^{(\beta)},\cdots,S_m^{(\beta)})^T$, 右乘$(S_1^{(\alpha)},S_2^{(\alpha)},\cdots,S_m^{(\alpha)})^T$得

$$\begin{pmatrix}S_1^{(\beta)}\\S_2^{(\beta)}\\\vdots\\S_m^{(\beta)}\end{pmatrix}=\Psi^E_{\alpha\beta}\begin{pmatrix}S_1^{(\alpha)}\\S_2^{(\alpha)}\\\vdots\\S_m^{(\alpha)}\end{pmatrix}.$$

从而有一个自然的猜想, 定义$dS|_{U_\alpha}=(df_k^{(\alpha)})S_k^{(\alpha)}$, 即对$S$求外微分, 只需对系数$f_k^{(\alpha)}$求外微分. 由式(1.87), 得到

$$\begin{aligned}
(df_k^{(\alpha)})S_k^{\alpha} =&(df_1^{(\alpha)},df_2^{(\alpha)},\cdots,df_m^{(\alpha)})\begin{pmatrix}S_1^{(\alpha)}\\S_2^{(\alpha)}\\\vdots\\S_m^{(\alpha)}\end{pmatrix}\\
=&(df_1^{(\beta)},df_2^{(\beta)},\cdots,df_m^{(\beta)})\begin{pmatrix}S_1^{(\beta)}\\S_2^{(\beta)}\\\vdots\\S_m^{(\beta)}\end{pmatrix}\\
&+(f_1^{(\beta)},f_2^{(\beta)},\cdots,f_m^{(\beta)})(d\Psi_{\alpha\beta}^E)(\Psi_{\alpha\beta}^E)^{-1}\begin{pmatrix}S_1^{(\beta)}\\S_2^{(\beta)}\\\vdots\\S_m^{(\beta)}\end{pmatrix},
\end{aligned}\tag{1.88}$$

最后一个式子的第二项过于复杂, 是我们不希望出现的, 只能修改对dS的定义.

1.11 联络

定义 1.11.1 (联络)**.** 一个E上的联络∇^E是一族算子, $\{d+A^\alpha|A^\alpha$是U_α上的$m\times m$的1-形式矩阵
即$A^{(\alpha)}=(a_{ij}^{(\alpha)})$, 其中$a_{ij}\in\Omega^1(U_\alpha)$, 满足在$U_\alpha\cap U_\beta$上

$$A^{(\beta)}=\Psi_{\alpha\beta}^E A^{(\alpha)}(\Psi_{\alpha\beta}^E)^{-1}+(d\Psi_{\alpha\beta}^E)(\Psi_{\alpha\beta}^E)^{-1},\tag{1.89}$$

其中$S|_{U_\alpha}=f_k^{(\alpha)}S_k^{(\alpha)}$, 且

$$A^{(\alpha)}\cdot S|_{U_\alpha}:=(f_1^{(\alpha)},f_2^{(\alpha)},\cdots,f_m^{(\alpha)})A^{(\alpha)}\begin{pmatrix}S_1^{(\alpha)}\\S_2^{(\alpha)}\\\vdots\\S_m^{(\alpha)}\end{pmatrix}.$$

联络解决了式(1.88)中出现的定义过于复杂的问题.

从变换关系(1.89)可以看出, 联络的定义是合理的, 满足相容性, 即在$U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$上, 如果$A^{(\beta)}=\Psi^E_{\alpha\beta}A^{(\alpha)}(\Psi^E_{\alpha\beta})^{-1}+(d\Psi^E_{\alpha\beta})(\Psi^E_{\alpha\beta})^{-1}$, 和$A^{(\gamma)}=\Psi^E_{\beta\gamma}A^{(\beta)}(\Psi^E_{\beta\gamma})^{-1}+(d\Psi^E_{\beta\gamma})(\Psi^E_{\beta\gamma})^{-1}$, 那么$A^{(\gamma)}=\Psi^E_{\alpha\gamma}A^{(\alpha)}(\Psi^E_{\alpha\gamma})^{-1}+(d\Psi^E_{\alpha\gamma})(\Psi^E_{\alpha\gamma})^{-1}$.

注: 联络存在但不唯一, 因为$A^{(\alpha)}$不唯一.

习题 1.11.2. 对$\forall S\in C^\infty(M,E)$, 证明$\nabla^E S\in C^\infty(M,T^*M\otimes E)$.

定理 1.11.3. *向量丛E的一个联络∇^E是一个线性映射*

$$\nabla^E: C^\infty(M,E)\to C^\infty(M,T^*M\otimes E),$$

满足:

(1)对$\forall s_1,s_2\in C^\infty(M,E)$, 有$\nabla^E(s_1+s_2)=\nabla^E s_1+\nabla^E s_2$,

(2)对$\forall f\in C^\infty(M)$, $s\in C^\infty(M,E)$, 有$\nabla^E(fs)=df\otimes s+f\nabla^E s$.

在很多教材上, 这个定理即为联络的定义, 证明显然.

注: 当$E=\wedge^*T^*M$时, $\nabla^E\neq d$.

命题: ∇^E有局部性, 即对$\forall S_1,S_2\in C^\infty(M,E)$, 开集$U\subset M$, 若$S_1|_U=S_2|_U$, 则$\nabla^E S_1|_U=\nabla^E S_2|_U$.

命题的证明由定义可得.

联络本质上是对截面求导, 首先我们回忆对光滑函数$f\in C^\infty$求导, $X(f)=<df,X>$, 类比定义对截面的求导为$\nabla^E_X S:=<\nabla^E S,X>$.

在局部上, 两个联络的差是一个1-形式矩阵. 整体上, $\nabla^E_1-\nabla^E_0\in C^\infty(M,T^*M\otimes End(E))$, 其中$End(E)=E\otimes E^*$, 其意义是向量丛的线性变换.

对$\forall k\in\mathbb{N}$, E上的一个联络∇^E可以推广到$\wedge^*T^*M\otimes E$上,

$$\nabla^E: C^\infty(M,\wedge^k T^*M\otimes E)\to C^\infty(M,\wedge^{k+1}T^*M\otimes E),$$

s.t. 对$\forall\alpha\in C^\infty(M,\wedge^q T^*M), S\in C^\infty(M,\wedge^{k-q}T^*M\otimes E)$, 有

$$\nabla^E(\alpha\wedge S)=d\alpha\wedge S+(-1)^q\alpha\wedge\nabla^E S.$$

重要的公式:

(1) 对$\forall\alpha\in\Omega^1(M)$, X_1, X_2为向量场, 有

$$d\alpha(X_1,X_2)=X_1(\alpha(X_2))-X_2(\alpha(X_1))-\alpha([X_1,X_2]); \tag{1.90}$$

(2) 对$\forall\alpha\in\Omega^k(M),\beta\in\Omega^r(M)$, $X_1,X_2,\cdots,X_{k+r}$为向量场, 有

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\beta(X_1,X_2,\cdots,X_{k+r})=&\frac{1}{k!r!}\sum_{\sigma\in S_{k+r}}sgn(\sigma)\alpha(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)},\cdots,X_{\sigma(k)})\\&\times\beta(X_{\sigma(k+1)},X_{\sigma(k+2)},\cdots,X_{\sigma(k+r)});\end{aligned} \tag{1.91}$$

(3) 对$\forall\alpha\in\Omega^k(M)$, $X_0,X_1,\cdots,X_k$为向量场, 有

$$\begin{aligned}d\alpha(X_0,X_1,\cdots,X_k)=&\sum_{i=0}^{k}(-1)^iX_i(\alpha(X_0,X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_k))\\&+\sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{i+j}\alpha([X_i,X_j],X_0,X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_k).\end{aligned} \tag{1.92}$$

习题 1.11.4. 证明上述(1.90), (1.91), (1.92)式.