

一 . 算法分析题

1.

(1). $\exists c = 4, n_0 = 10$, 当 $n > n_0$, $0 \leq 3n^2 + 10n \leq 4n^2$, 即其渐进表达式为 $O(n^2)$;

(2). $\exists c = 2, n_0 = 1$, 当 $n > n_0$, $0 \leq \frac{n^2}{10} + 2^n \leq 2 * 2^n$, 即其渐进表达式为 $O(2^n)$;

(3). $\exists c = 22, n_0 = 1$, 当 $n > n_0$, $0 \leq 21 + \frac{1}{n} \leq 22 * 1$, 即其渐进表达式为 $O(1)$;

(4). $\exists c = 4, n_0 = 1$, 当 $n > n_0$, $0 \leq \log(n^3) = 3 \log(n) \leq 4 * \log(n)$, 即其渐进表达式为 $O(\log(n))$;

(5). $\exists c = 20 \log(3), n_0 = 1$, 当 $n > n_0$, $0 \leq 10 \log(3^n) = 10 \log(3) * n \leq 20 \log(3) * n$, 即其渐进表达式为 $O(n)$;

3.

$$2 < \log(n) < n^{\frac{2}{3}} < 20n < 4n^2 < 3^n < n!$$

8.

由于 $n = 3n + 1$ 操作会使得 n 值增大, 故不是最好情况, 最好情况则是一直经过 $n = n/2$ 操作。此时运算次数为 $\log_2 n$, 即算法段计算下界为 $O(\log n)$ 。

当 n 是奇数, 则 $n = 2m + 1$, 则 $3n + 1$ 必为偶数, 即下一步为 $\frac{3n+1}{2} = 3m + 2$, 若 m 是奇数则 $3m + 2$ 亦为奇数。令 $T_n = 2T_{n-1} + 1$, 则 $T_n + 1 = 2(T_{n-1} + 1)$, 即 $T_n = 2^n - 1$ 。则会经过 n 步变为 $3^n - 1$, 为偶数, 则下一步为 $(3^n - 1)/2$ 。若 $\frac{3^n-1}{2} = 2^{n+m} - 1$, 即 $2^{n+m} - 3^n = 1$, $m \in \mathbb{N}_+$, 则可能操作为无限次。即算法段计算上界为 $O(\infty)$ 。

二 . 算法实现题

5.

首先找到数组 arr 的最小值 arr_{\min} 与最大值 arr_{\max} , 则复杂度为 $O(n)$, 之后将 $arr_{\max} - arr_{\min}$ 分成 $n - 1$ 份, 称为 $n - 1$ 个桶, 区间为左闭右开, 最后一个桶为左闭又闭, 并将 $n - 2$ 个数放 $n - 1$ 个桶。每个桶包含装入实数个数, 桶内最大值与桶内最小值, 由于分配桶需要取证操作, 其复杂度为 $O(n)$, 则上述操作复杂度为 $O(n)$ 。

由鸽笼定理知, 此时必有至少一个桶为空, 且桶内最大间距小于桶的宽度, 则最大间距两个实数之间不会在一个桶内, 必在桶 i 的上界与桶 j 的下界产生 ($j \geq i + 1$), 则只需要遍历各桶, 既能找出 n 个实数的最大间隙, 其复杂度为 $O(n)$ 。则累加之后复杂度为 $O(n)$ 。

程序直接运行 `maxgap.exe`。程序以当前文件夹的 `input.txt` 作为输入, `output.txt` 作为输出。