22.53

Datos

$\rho_{(r)} = \frac{\alpha}{r}$

a

b

Como se trata de una esfera, la cual es simétrica, podemos utilizar la ley de Gauss.

la linea de puntos es la superficie de Gauss de radio r.

En cada punto el vector $\overline{dE}$ es colineal con el vector $\vec{E}$ el ángulo entre ellos es 0

$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\, \vec{dA} = \underline{q_{neta}}$$

$$\epsilon_0 \oint |E||dA| \overset{1}{\cancel{\cos 0}} = q_{neta}$$

E puede salir de la integral, pues es constante en toda la superficie de Gauss.

$$\epsilon_0 E \oint dA = q_{neta} \implies \epsilon_0 E A = q_{neta} \implies \epsilon_0 E(4\pi r^2)$$

Para determinar la carga neta conocemos que:

$$\rho_{(r)} = \frac{dq}{dV} \qquad dq = \rho_{(r)} dV \implies dq = \frac{\alpha}{r} dV$$

debemos poner dV en función de r

El volumen donde está distribuida la carga es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{(4)3\pi r^2}{3} - 0 = 4\pi r^2$$

Ahora en $dq = \frac{\alpha}{r} dV$; sustituimos dV por $4\pi r^2 dr$

$$dq = \frac{\alpha}{r} 4\pi r^2 dr = \alpha 4\pi r\, dr$$

$dq = \alpha 4\pi r\, dr$ integrando en ambos miembros

$$\int_0^q dq = \int_a^r \alpha 4\pi r\, dr \qquad q = \frac{\alpha 4\pi r^2}{2}\Bigg|_a^r = \alpha 2\pi r^2 - \alpha 2\pi a^2$$

$$q = \alpha 2\pi (r^2 - a^2)$$

Ahora igualando los términos de la ley de Gauss

$$\epsilon_0 E 4\pi r^2 = \alpha 2\pi (r^2 - a^2)$$

$$E = \frac{\alpha 2\pi (r^2 - a^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\alpha}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$