

현수선 길이 계산 방법과 응용

데이터정보학과

지도교수 : 김익성 교수님

20191509 이보윤

20191496 김민주

20201487 김현지

목차

I. 서론

1. 연구 동기 및 목적 ----- 2
2. 연구 방법 ----- 2

II. 본론

1. 현수선의 개념과 원리 ----- 3
2. 현수선의 방정식 ----- 4~5
3. 현수선 길이 ----- 6~9
4. 현수선 길이의 응용 - 광안대교 ----- 10~11
5. 현수선 길이의 규격표 - 현수교 ----- 12~14
6. 현수선 길이 규격표 응용 - 이순신 대교 ----- 15~16

III. 결론 ----- 17

<참고문헌> ----- 18

I. 서론

1. 연구 동기 및 목적

우리는 일상에서 전봇대의 전깃줄, 빨랫대의 빨랫줄, 비닐하우스의 서까래와 같이 여러 가지 곡선들과 마주한다. 이처럼 균일한 밀도를 갖는 유연한 사슬이나 밧줄이 두 점 사이에 매달려서 그 자신의 무게만으로 이루는 곡선을 현수선이라고 한다. 이런 현수선의 원리를 인공적인 구조물로 극대화하여 구현한 것이 현수교이다. 현수교의 경우 현수선을 형성하는 양 측면의 지지대가 쓰러지지 않아야 하고 튼튼해서 충분한 인장력을 확보하여야 한다. 다리를 무너지지 않게 짓기 위해서 현수선 구조를 어떻게 활용했는지 알아보기 위해 연구를 시작했다.

현수선의 개념과 원리를 바탕으로 현수선의 길이를 계산하는 방정식에 대해 알아보고 Matlab으로 현수선의 길이를 구하는 방법을 제시할 것이다. 그리고 현수교의 대표적인 예 중 하나인 광안대교의 현수선 길이를 Matlab을 사용하여 구해볼 것이다.

최종적으로 주어진 현수선의 늘어진 길이와 폭, 높이를 가지고 현수교의 현수선 길이들을 Matlab으로 계산한 다음 표로 규격화할 것이다. 이 규격 표를 이용하여 대표적으로 이순신대교의 현수선 길이를 구해 볼 것이다. 이렇게 얻어진 표는 현수교를 지을 때 현수선의 계산에서 생기는 문제를 해결하는 데 도움이 될 것이다. 현수선에 대해서 알아보고 현수선의 길이를 구하는 방법에 대하여 생각해 본다. 또한, 간단하고 정확하게 현수선의 길이를 계산할 수 있는 표를 구현해 본다.

2. 연구 방법

현수선의 개념과 원리에 대해서 알아보고 현수선 방정식을 이용하여 현수선의 길이를 구하는 방법에 대해서 알아본다. Matlab을 사용하여 각각의 폭과 현수선의 늘어진 길이에 대한 현수선의 길이를 계산한다. 현수교 중 대표적으로 광안대교의 현수선 길이를 Matlab으로 구하고 현수교의 현수선 길이들을 표로 구현하도록 한다. 이렇게 얻어진 현수교의 현수선 길이 규격 표를 이용해서 이순신대교의 현수선 길이를 구해 본다.

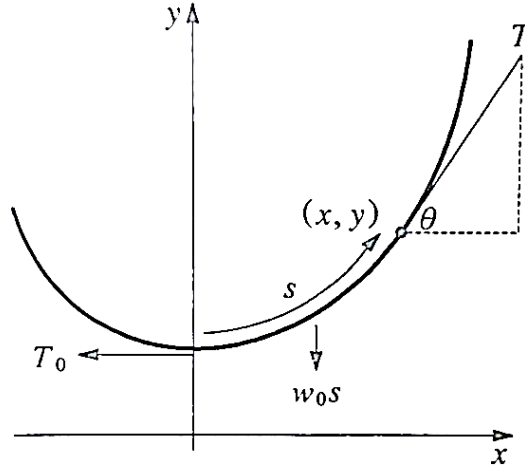
II. 본론

1. 현수선의 개념과 원리

균일한 밀도를 갖는 유연한 사슬이나 밧줄을 두 점 사이에 매달아서 그 자신의 무게만으로 드리워져 있다고 할 때, 이것에 의하여 만들어지는 곡선의 형태를 현수선이라고 정의할 수 있다. 또한, 현수선은 그 자체의 무게만으로 드리워져 있는 밀도가 균일한 선상이라고 물리학적으로 정의된 곡선이므로 각 지점에는 중력과 장력만이 작용한다. 우리 주변에서 흔히 볼 수 있는 전봇대 사이에 축 늘어진 전깃줄이나 빨랫줄이 현수선의 대표적인 예라고 할 수 있다.

빨랫줄이 제대로 버티기 위해서는 두 개의 버팀대와 땅에 빨랫줄의 끝을 단단히 고정해야 한다. 빨래를 널지 않은 빨랫줄은 조금 불안정하지만, 무거운 빨래를 널면 빨랫줄이 처지기 시작하면서 점차 당기는 힘이 늘어나 팽팽해진다. 현수교의 경우에는 주 케이블이 자체 무게만 지탱하는 것이 아니라 그보다 더 큰 다리 상판의 무게까지 지탱한다. 주 케이블은 현수선의 형태가 되면 장력이 작용하여 무거운 차량이 다녀도 거뜬히 버틴다.

2. 현수선의 방정식



위 그래프에서 y 축이 사슬의 최저점을 지난다고 하였을 때

w_0 : 사슬의 선밀도(단위 길이당 무게)

s : 최저점에서 임의의 점 (x, y) 까지의 호의 길이

T_0 : 최저점에서 수평방향으로 작용하는 장력

T : 점 (x, y) 에서 접선의 방향으로 작용하는 장력

$w_0 s$: 사슬에 작용하는 중력

라 하자.

위 그래프에서 최저점과 임의의 점 (x, y) 까지의 현수선은 T_0 , T , $w_0 s$ 세가지 힘에 의하여 정지된 평형 상태를 이루고 있다는 사실로부터 미분방정식을 얻을 수 있다. T 의 수평 성분을 T_0 와 같게 놓고, T 의 수직 성분을 $w_0 s$ 와 같게 놓아 $T \cos \theta = T_0$ 와 $T \sin \theta = w_0 s$ 을 얻을 수 있다.

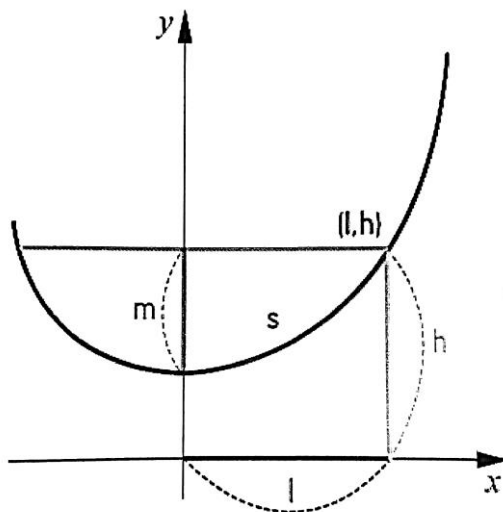
T 를 제거하기 위해 변끼리 나누면 $\frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \tan \theta = \frac{w_0 s}{T_0}$ 이다. 여기서 $\tan \theta$ 는 (x, y) 에서 접선의 기울기를 나타내므로 $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ 이다. $a = \frac{w_0}{T_0}$ 라고 하면, $as = \frac{dy}{dx}$ 로 나타낼 수 있다. 이 식에서 s 를 제거하기 위해서 x 로 미분하면 $a \frac{ds}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ 가 된다. $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ 이므로 대입하면 $\frac{d^2 y}{dx^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ 라는 현수선에 대한 미분방정식을 얻을 수 있다.

위 방정식을 두 개의 연속하는 적분으로 풀어볼 수 있다. 보조변수 p 를 $\frac{dy}{dx}$ 로 놓으면 $\frac{dp}{dx} = a\sqrt{1+p^2}$ 이 된다. 여기서 두 변수 x 와 p 로 분리하여 각각 적분해주면, $\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = a \int dx$ 식이 나오고 정리하면 $\sinh^{-1} p = ax + c_1$ 이다. x 의 값이 0일 때 p 값 $(\frac{dy}{dx})$ 이 0인 사실을 이용해서 식 $\sinh^{-1} p = ax + c_1$ 에 $x = 0, p = 0$ 을 대입해 보면, $c_1 = 0$ 임을 알 수 있다. 또한 $\sinh^{-1} p = ax$ 임을 얻을 수 있다.

이어서 보조변수 p 에 원래 값 $\frac{dy}{dx}$ 을 대입하면 $\sinh^{-1} \frac{dy}{dx} = ax$ 즉, $\frac{dy}{dx} = \sinh ax$ 가 된다. 이 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면 최종적으로 $y = \frac{1}{a} \cosh ax + c$ 을 구할 수 있다. 식 $y = \frac{1}{a} \cosh ax + c$ 는 현수선의 정확한 수학적 성질을 나타내고, 많은 실용적인 응용에 기초가 된다.

3. 현수선 길이

현수선의 길이는 폭과 높이가 주어질 때 현수선 방정식을 이용하여 구할 수 있다.



S : 현수선의 길이

h : 높이

m : 높이가 h 일 때 현수선의 늘어진 길이

l : 현수선의 폭

라 하자.

호장함수의 공식($\int_a^b |1 + \alpha'(t)| dt$: α 의 $t = a$ 에서 $t = b$ 까지의 길이)에 의해서

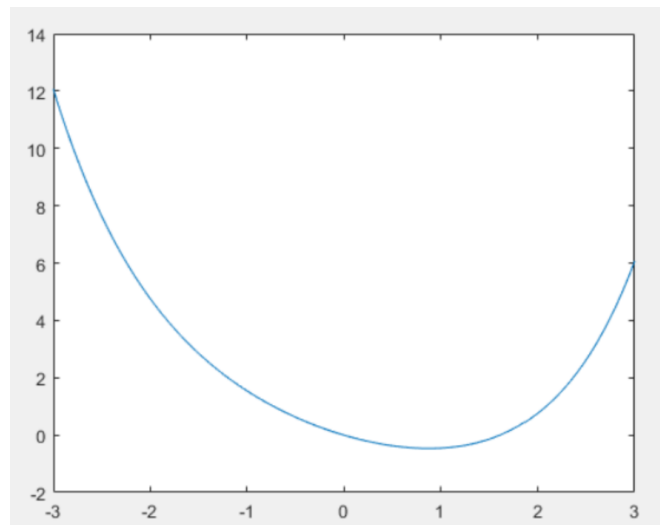
$$S = 2 \int_0^l \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2 \int_0^l \sqrt{1 + \sinh^2 ax} dx$$
가 된다. 또한 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 이므로 $\sqrt{1 + \sinh^2 ax} = \cosh ax$ 가 된다. 따라서 $s = 2 \int_0^l \cosh ax dx$ 을 얻을 수 있다. 이 적분을 계산하면 $S = 2 \left[\frac{1}{a} \sinh ax \right]_0^l = 2 \left(\frac{1}{a} \sinh al - 0 \right) = \frac{2}{a} \sinh al$ 이다. 따라서 현수선의 길이 $S = \frac{2}{a} \sinh al$ 이다.

다음으로 현수선의 길이 S 를 구하기 위해서는 a 의 값이 먼저 구해져야 한다. a 의 값을 구하기 위해서는 현수선의 방정식 ($y = \frac{1}{a} \cosh ax + c$)의 x 값에 0과 폭 l 을 대입하여 얻은 두 개의 연립방정식을 통해서 구할 수 있다. 값에 0과 폭 l 을 대입하여 얻은 두 개의 연립방정식은 $y(0) = \frac{1}{a} \cosh a0 + c = h - m$, $y(l) = \frac{1}{a} \cosh al + c = h$ 이다. $y(0)$ 에서 $c = h - m - \frac{1}{a}$ 을 얻을 수 있고 이것을 $y(l)$ 에 대입하면 $\frac{1}{a} \cosh al + h - m - \frac{1}{a} = h$ 가 된다. 정리하면 $m = \frac{1}{a} (\cosh al - 1)$ 이고 양변에 a 를 곱하여 주면 $am = \cosh al - 1$ 이다. 따라서 방정식 $\cosh al - (1 + am) = 0$ 을 얻을 수 있다. 이 방정식의 해를 구하게 되면 a 의 값을 구할 수 있다.

임의로 폭 $l = 1$ 과 현수선의 늘어진 길이 $m = 1$ 로 두고 함수 $f(a) = \cosh a - (1 + a)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

<함수 $f(a) = \cosh a - (1 + a)$ 의 그래프를 그리는 Matlab 프로그램>

```
>> x=-3:0.01:3;
>> y=cosh(x)-1-x;
>> plot(x,y)
```



함수 $f(a) = \cosh a - (1 + a)$ 는 하나의 고정된 값으로 $a = 0$ 의 해를 가지고 0의 아닌 다른 하나의 근은 Matlab 프로그램을 통하여 구할 수 있다. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 를 이용하면 $\cosh al - (1 + am) = 0$ 은 $e^{al} + e^{-al} - 2 - 2am = 0$ 이 된다.

<0 이 아닌 a 의 값을 구하는 Matlab 프로그램>

```
>> for i = 1;

    for j = 1

        l = i;

        m = j;

        [a, val] = fzero(@(a) exp(a*l)+exp(-a*l)-2-2*a*m, 2);

        aval(i, j) = a;

    end;

end;

aval

aval =

    1.6161
```

폭이 $l = 1$ 이고 현수선의 늘어진 길이 $m = 1$ 일 때, 0이 아닌 a 의 값이 1.6161 이라는 것을 알 수 있다.

폭 l 과 늘어진 길이 m 에 따른 a 의 값과 현수선의 길이 s 의 값을 몇 가지 구하여 보려고 한다. 폭의 값 l 을 임의로 1m, 2m, 3m로 두고, 현수선의 늘어진 길이 m 을 1m, 2m, 3m로 두었을 때 각각의 0이 아닌 a 값을 Matlab 프로그램을 통해 구하여 보자. Matlab 프로그램은 폭의 값 l 이 1m 간격으로 1~3m까지 변하고, 현수선의 늘어진 길이 m 이 1m 간격으로 1~3m까지 변할 때 총 9번 반복하여 계산하게 되는데, 이때 내장함수 fzero를 사용하여 $\cosh al - (1 + am) = 0$ 의 해를 찾게 된다. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 를 이용하면 $\cosh al - (1 + am) = 0$ 은 $e^{al} + e^{-al} - 2 - 2am = 0$ 이 된다. 여기서 숫자 2는 임의로 둔 숫자이며 이것은 2에 가까운 해를 구한다는 뜻으로 0이 아닌 해를 구하기 위해서 사용한다.

< a 의 값과 현수선의 길이 s 의 값을 구하는 Matlab 프로그램>

```
>> for i = 1:3;

    for j = 1:3

        l = i;

        m = j;

        [a, val] = fzero(@(a) exp(a*l)+exp(-a*l)-2-2*a*m, 2);

        aval(i, j) = a;

        Sval(i, j) = 2*sinh(a*l)/a;

    end;

end;

aval

Sval
```

aval =

1.6161	2.4665	2.9903
0.4654	0.8081	1.0511
0.2147	0.3957	0.5387

Sval =

2.9917	4.7420	6.6352
4.6032	5.9833	7.6702
6.4235	7.5121	8.9750

4. 현수선 길이의 응용 - 광안대교

앞서 현수선의 길이를 구하는 방법을 소개했다. 수학자들과 과학자들은 이러한 현수선의 특징을 건축 관련 쪽에 접목을 시켜서 많이 응용해왔다. 빨랫줄과 비닐하우스의 서까래와 같이 동그란 아치형으로 되어 있는 것에 대해 평소에는 중요하게 생각하지 않을 수 있지만, 생각보다 쉽게 만들어지는 것이 아니다. 현수선을 사용하는 현수교는 주 케이블과 현수재를 이용하여 하중을 지지하는 교량을 의미하는 것으로, 이 제작 과정에서도 현수선의 길이 계산 문제가 들어있는 것이다. 다리를 무너지지 않고 튼튼하게 짓기 위해서 현수선의 길이가 얼마인지 또한 중요하다. 현수선 길이 계산 문제를 건축에 적용을 시키기 위해서 현수교에 적용해보자.

현수교의 구조



현수교 중 대표적으로 부산의 랜드마크인 광안대교의 현수선 길이를 알아볼 것이다.

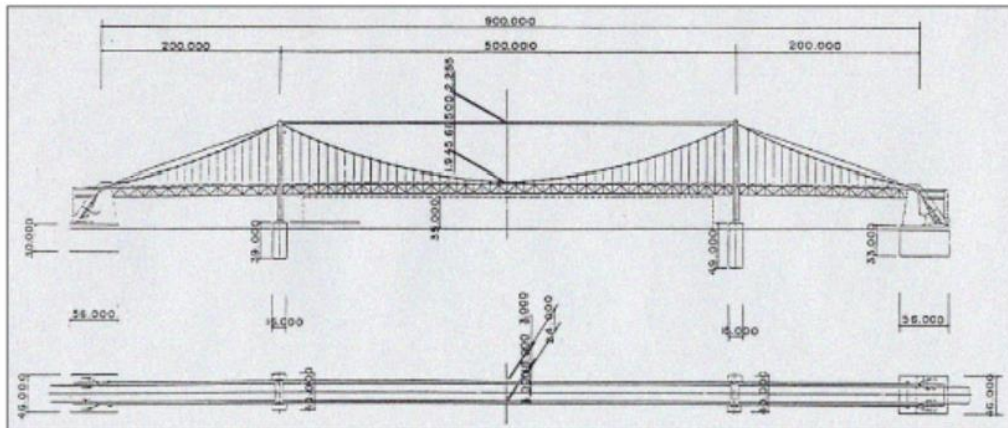


그림 2 광안대교의 형상 및 제원

앞서 구한 현수선의 길이 방정식을 보면, 현수교의 탑 사이 폭의 반에 해당하는 길이인 l 과 현수선에서 늘어난 길이인 m 을 알면 현수선의 길이를 계산할 수 있다.

위 그림을 보면 광안대교는 주탑과 주탑 사이의 거리인 주경간장이 0.5km 이고 현수선의 늘어난 길이는 0.0615km 이다. 그러므로 l 은 0.25 이고 m 은 0.0615 이다. 폭과 현수선의 늘어난 길이를 가지고 Matlab 을 이용하여 광안대교의 현수선 길이를 구해보았다.

<광안대교 현수선 길이를 구하는 Matlab 프로그램> (단위: km)

```
>> l = 0.25;
```

```
m = 0.0615;
```

```
[a,val] = fzero(@(a) exp(a*l)+exp(-a*l)-2-2*a*m, 1);
```

```
length = 2 * sinh(a*l) / a;
```

```
>> length
```

```
length =
```

```
0.5000
```

광안대교의 현수선 길이를 구하기 위해서 Matlab 프로그램에서 현수선 길이 S 를 구하는 방정식은 앞에서 구한 $S = \frac{2}{a} \sinh al$ 을 이용했다. 현수선의 전체 폭의 반에 해당하는 길이 0.25 와 현수선의 늘어진 길이 0.0615 를 $e^{al} + e^{-al} - 2 - 2am = 0$ 에 대입하여 a 를 구하고, 구한 a 값을 가지고 현수선의 길이 S 를 계산한다. 그러면 S 는 0.5000(km)가 나온다. 따라서 광안대교의 현수선의 길이는 약 0.5000km = 500m 이다.

5. 현수선 길이의 규격표 - 현수교

Matlab 을 이용하여 현수교의 폭은 0.02km 간격으로 현수교의 늘어진 길이는 0.005km 간격으로 해당 현수교의 폭과 현수교의 늘어진 길이에 따라서 필요한 현수선의 길이를 계산해서 간단하게 제작이 가능하도록 규격표를 만들어 보았다.

<현수선 길이를 구하는 Matlab 프로그램> (단위: km)

```
>> for ii = 1:30;

    for jj = 1:30;

        l = 0.2 + ii * 0.02;

        m = 0.05 + jj * 0.005;

        [a,val]=fzero(@(a) exp(a*l)+exp(-a*l)-2-2*a*m, 1.6);

        length(ii, jj) = 2 * sinh(a*l) / a;

    end;

end;

>> length
```

현수교의 현수선 길이 규격표를 만들기 위해 앞에서와 같이 Matlab 프로그램에서 현수선 길이 S 를 구하는 방정식 $S = \frac{2}{a} \sinh al$ 을 이용했다. 현수선의 전체 폭의 반에 해당하는 길이인 l 과 현수선의 늘어진 길이 m 을 $e^{al} + e^{-al} - 2 - 2am = 0$ 에 대입하여 a를 구하고, 구한 a 값을 가지고 현수선의 길이 S 를 계산한다.

<현수교의 현수선 길이 규격표> (단위: km)

$\begin{matrix} m \\ l \end{matrix}$	0.055	0.060	0.065	0.070	0.075	0.080	0.085	0.090	0.095	0.100
0.22	0.4578	0.4611	0.4646	0.4684	0.4724	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400
0.24	0.4964	0.4994	0.5027	0.5062	0.5099	0.5139	0.5180	0.5224	0.4800	0.4800
0.26	0.5352	0.5380	0.5411	0.5443	0.5478	0.5515	0.5554	0.5594	0.5637	0.5682
0.28	0.5742	0.5768	0.5796	0.5827	0.5859	0.5894	0.5930	0.5969	0.6009	0.6051
0.30	0.6132	0.6157	0.6184	0.6213	0.6243	0.6276	0.6310	0.6346	0.6384	0.6424
0.32	0.6524	0.6548	0.6573	0.6600	0.6629	0.6659	0.6692	0.6726	0.6762	0.6799
0.34	0.6917	0.6939	0.6963	0.6989	0.7016	0.7045	0.7076	0.7108	0.7142	0.7178
0.36	0.7311	0.7332	0.7354	0.7378	0.7404	0.7432	0.7461	0.7492	0.7524	0.7558
0.38	0.7705	0.7725	0.7746	0.7769	0.7794	0.7820	0.7848	0.7877	0.7908	0.7940
0.40	0.8100	0.8119	0.8139	0.8161	0.8185	0.8209	0.8236	0.8264	0.8293	0.8324
0.42	0.8495	0.8513	0.8533	0.8554	0.8576	0.8600	0.8625	0.8652	0.8680	0.8709
0.44	0.8891	0.8908	0.8927	0.8947	0.8968	0.8991	0.9015	0.9041	0.9068	0.9096
0.46	0.9287	0.9304	0.9321	0.9341	0.9361	0.9383	0.9406	0.9431	0.9457	0.9484
0.48	0.9684	0.9699	0.9716	0.9735	0.9755	0.9776	0.9798	0.9821	0.9846	0.9872
0.50	1.0080	1.0095	1.0112	1.0129	1.0148	1.0169	1.0190	1.0213	1.0237	1.0262
0.52	1.0477	1.0492	1.0508	1.0525	1.0543	1.0562	1.0583	1.0605	1.0628	1.0652
0.54	1.0874	1.0888	1.0904	1.0920	1.0938	1.0956	1.0976	1.0997	1.1020	1.1043
0.56	1.1272	1.1285	1.1300	1.1316	1.1333	1.1351	1.1370	1.1391	1.1412	1.1435
0.58	1.1669	1.1682	1.1697	1.1712	1.1728	1.1746	1.1764	1.1784	1.1805	1.1827
0.60	1.2067	1.2080	1.2093	1.2108	1.2124	1.2141	1.2159	1.2178	1.2198	1.2219
0.62	1.2465	1.2477	1.2490	1.2505	1.2520	1.2537	1.2554	1.2573	1.2592	1.2613
0.64	1.2863	1.2875	1.2888	1.2902	1.2916	1.2932	1.2949	1.2967	1.2986	1.3006
0.66	1.3261	1.3272	1.3285	1.3298	1.3313	1.3328	1.3345	1.3362	1.3381	1.3400
0.68	1.3659	1.3670	1.3682	1.3696	1.3710	1.3725	1.3741	1.3758	1.3775	1.3794
0.70	1.4057	1.4068	1.4080	1.4093	1.4107	1.4121	1.4137	1.4153	1.4170	1.4189
0.72	1.4456	1.4466	1.4478	1.4490	1.4504	1.4518	1.4533	1.4549	1.4566	1.4584
0.74	1.4854	1.4865	1.4876	1.4888	1.4901	1.4915	1.4929	1.4945	1.4961	1.4979
0.76	1.5253	1.5263	1.5274	1.5286	1.5298	1.5312	1.5326	1.5341	1.5357	1.5374
0.78	1.5652	1.5661	1.5672	1.5683	1.5696	1.5709	1.5723	1.5738	1.5753	1.5770
0.80	1.6050	1.6060	1.6070	1.6081	1.6093	1.6106	1.6120	1.6134	1.6149	1.6165

$\begin{matrix} m \\ l \end{matrix}$	0.105	0.110	0.115	0.120	0.125	0.130	0.135	0.140	0.145	0.150
0.22	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400
0.24	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800
0.26	0.5728	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200
0.28	0.6094	0.6140	0.6187	0.6235	0.6285	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600
0.30	0.6465	0.6508	0.6552	0.6598	0.6646	0.6695	0.6745	0.6797	0.6850	0.6900
0.32	0.6838	0.6879	0.6921	0.6965	0.7010	0.7057	0.7105	0.7155	0.7205	0.7257
0.34	0.7215	0.7253	0.7294	0.7335	0.7378	0.7423	0.7469	0.7516	0.7564	0.7614
0.36	0.7593	0.7630	0.7668	0.7708	0.7749	0.7792	0.7836	0.7881	0.7927	0.7975
0.38	0.7974	0.8009	0.8046	0.8084	0.8123	0.8164	0.8206	0.8249	0.8293	0.8339
0.40	0.8356	0.8390	0.8425	0.8461	0.8499	0.8538	0.8578	0.8620	0.8662	0.8706
0.42	0.8740	0.8773	0.8806	0.8841	0.8877	0.8914	0.8953	0.8993	0.9034	0.9076
0.44	0.9126	0.9157	0.9189	0.9222	0.9257	0.9293	0.9330	0.9368	0.9408	0.9448
0.46	0.9512	0.9542	0.9573	0.9605	0.9638	0.9673	0.9709	0.9745	0.9784	0.9823
0.48	0.9900	0.9928	0.9958	0.9989	1.0021	1.0054	1.0089	1.0124	1.0161	1.0199
0.50	1.0288	1.0316	1.0344	1.0374	1.0405	1.0437	1.0471	1.0505	1.0540	1.0577
0.52	1.0678	1.0704	1.0732	1.0760	1.0790	1.0821	1.0853	1.0887	1.0921	1.0956
0.54	1.1068	1.1093	1.1120	1.1148	1.1177	1.1207	1.1238	1.1270	1.1303	1.1337
0.56	1.1458	1.1483	1.1509	1.1536	1.1564	1.1593	1.1623	1.1654	1.1686	1.1719
0.58	1.1850	1.1874	1.1899	1.1925	1.1952	1.1980	1.2009	1.2039	1.2070	1.2102
0.60	1.2242	1.2265	1.2289	1.2314	1.2340	1.2368	1.2396	1.2425	1.2455	1.2486
0.62	1.2634	1.2657	1.2680	1.2704	1.2730	1.2756	1.2784	1.2812	1.2841	1.2871
0.64	1.3027	1.3049	1.3071	1.3095	1.3120	1.3146	1.3172	1.3200	1.3228	1.3257
0.66	1.3420	1.3441	1.3463	1.3487	1.3511	1.3535	1.3561	1.3588	1.3616	1.3644
0.68	1.3814	1.3834	1.3856	1.3878	1.3902	1.3926	1.3951	1.3977	1.4004	1.4032
0.70	1.4208	1.4228	1.4249	1.4271	1.4293	1.4317	1.4341	1.4367	1.4393	1.4420
0.72	1.4602	1.4622	1.4642	1.4663	1.4685	1.4708	1.4732	1.4757	1.4782	1.4809
0.74	1.4997	1.5016	1.5036	1.5056	1.5078	1.5100	1.5123	1.5147	1.5172	1.5198
0.76	1.5392	1.5410	1.5430	1.5450	1.5471	1.5493	1.5515	1.5539	1.5563	1.5588
0.78	1.5787	1.5805	1.5824	1.5843	1.5864	1.5885	1.5907	1.5930	1.5954	1.5978
0.80	1.6182	1.6200	1.6218	1.6238	1.6258	1.6278	1.6300	1.6322	1.6345	1.6369

$\begin{matrix} m \\ l \end{matrix}$	0.155	0.160	0.165	0.170	0.175	0.180	0.185	0.190	0.195	0.200
0.22	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400
0.24	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800
0.26	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200
0.28	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600
0.30	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000
0.32	0.7311	0.7365	0.7421	0.6400	0.6400	0.6400	0.6400	0.6400	0.6400	0.6400
0.34	0.7665	0.7717	0.7771	0.7825	0.7881	0.7938	0.7995	0.8054	0.8000	0.6800
0.36	0.8024	0.8074	0.8125	0.8178	0.8231	0.8286	0.8341	0.8398	0.8456	0.8514
0.38	0.8386	0.8434	0.8484	0.8534	0.8585	0.8638	0.8691	0.8746	0.8802	0.8858
0.40	0.8751	0.8798	0.8845	0.8894	0.8943	0.8994	0.9045	0.9098	0.9152	0.9206
0.42	0.9120	0.9164	0.9210	0.9256	0.9304	0.9353	0.9403	0.9454	0.9506	0.9558
0.44	0.9490	0.9533	0.9577	0.9622	0.9668	0.9715	0.9763	0.9813	0.9863	0.9914
0.46	0.9863	0.9904	0.9947	0.9990	1.0035	1.0080	1.0127	1.0174	1.0223	1.0272
0.48	1.0238	1.0278	1.0319	1.0361	1.0404	1.0448	1.0493	1.0539	1.0586	1.0633
0.50	1.0614	1.0653	1.0692	1.0733	1.0775	1.0817	1.0861	1.0905	1.0951	1.0997
0.52	1.0992	1.1030	1.1068	1.1107	1.1148	1.1189	1.1231	1.1274	1.1318	1.1363
0.54	1.1372	1.1408	1.1445	1.1483	1.1522	1.1562	1.1603	1.1645	1.1688	1.1732
0.56	1.1753	1.1788	1.1824	1.1861	1.1899	1.1937	1.1977	1.2018	1.2059	1.2102
0.58	1.2135	1.2169	1.2204	1.2240	1.2276	1.2314	1.2353	1.2392	1.2432	1.2474
0.60	1.2518	1.2551	1.2585	1.2620	1.2656	1.2692	1.2730	1.2768	1.2807	1.2847
0.62	1.2902	1.2934	1.2967	1.3001	1.3036	1.3071	1.3108	1.3145	1.3183	1.3222
0.64	1.3288	1.3319	1.3351	1.3383	1.3417	1.3452	1.3487	1.3523	1.3561	1.3599
0.66	1.3673	1.3704	1.3735	1.3767	1.3800	1.3833	1.3868	1.3903	1.3939	1.3976
0.68	1.4060	1.4090	1.4120	1.4151	1.4183	1.4216	1.4249	1.4284	1.4319	1.4355
0.70	1.4448	1.4476	1.4506	1.4536	1.4567	1.4599	1.4632	1.4665	1.4700	1.4735
0.72	1.4836	1.4864	1.4892	1.4922	1.4952	1.4983	1.5015	1.5048	1.5082	1.5116
0.74	1.5224	1.5252	1.5280	1.5308	1.5338	1.5369	1.5400	1.5432	1.5464	1.5498
0.76	1.5614	1.5640	1.5668	1.5696	1.5725	1.5754	1.5785	1.5816	1.5848	1.5880
0.78	1.6003	1.6029	1.6056	1.6084	1.6112	1.6141	1.6170	1.6201	1.6232	1.6264
0.80	1.6394	1.6419	1.6445	1.6472	1.6500	1.6528	1.6557	1.6587	1.6617	1.6648

폭은 0.22 부터 0.8 까지 즉 $l = 0.22\text{km} = 220\text{m} \sim 0.8\text{km} = 800\text{m}$ 로 하였고, 현수선의 늘어진 길이는 0.055 부터 0.2 까지 즉 $m = 0.055\text{km} = 55\text{m} \sim 0.2\text{km} = 200\text{m}$ 로 설정했다.

6. 현수선 길이 규격표 응용 - 이순신 대교

위와 같은 방법으로 Matlab 프로그램을 사용하여 폭과 현수선의 늘어진 길이의 범위를 설정하였고, 그에 따른 현수교의 현수선 길이 규격표를 만들었다. 편의상 900개 정도의 현수선 길이만 보이도록 했다. 이 현수선 길이 규격표를 이용하면 따로 재 볼 필요 없이 간단하게 길이를 알 수 있어 보다 더 신속하고 정확하게 일 처리가 가능하다. 그 예시로 만들어진 표를 통해 국내 최대 경간장의 현수교인 이순신대교의 현수선 길이를 알아볼 것이다.

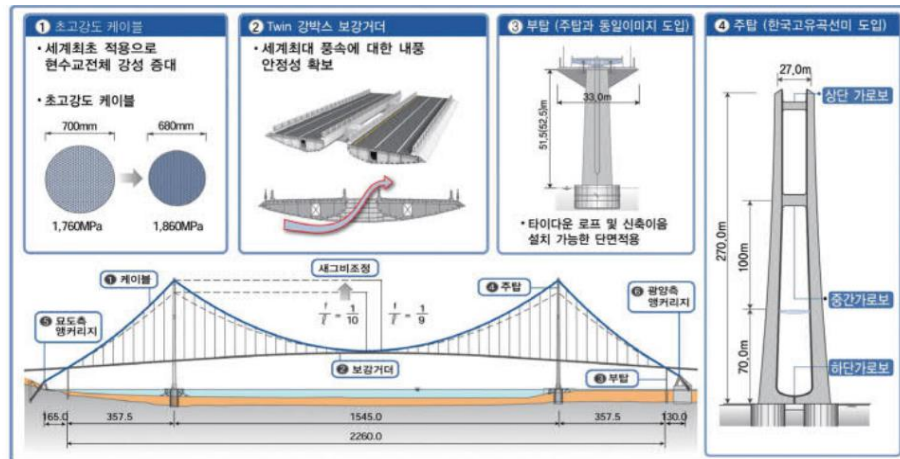


그림3. 이순신대교 구조계획 개요

이순신대교의 경우 주탑과 주탑 사이의 거리인 주경간장이 1.545(km) 이고 현수선의 늘어진 길이는 0.2km이다. 그러므로 $l = 0.77$ (km), $m = 0.2$ (km)라는 것을 알 수 있다. 앞서 구한 표를 이용해서 구해보다면 이순신 대교의 현수선의 길이인 S 값은 $(1.5880+1.6264)\%2$ 의 값인, 약 $1.6072\text{km} = 1607.2\text{m}$ 라는 것을 알 수 있다.

$\begin{matrix} m \\ l \end{matrix}$	0.155	0.160	0.165	0.170	0.175	0.180	0.185	0.190	0.195	0.200
0.22	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400	0.4400
0.24	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800	0.4800
0.26	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200	0.5200
0.28	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600	0.5600
0.30	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000	0.6000
0.32	0.7311	0.7365	0.7421	0.6400	0.6400	0.6400	0.6400	0.6400	0.6400	0.6400
0.34	0.7665	0.7717	0.7771	0.7825	0.7881	0.7938	0.7995	0.8054	0.6800	0.6800
0.36	0.8024	0.8074	0.8125	0.8178	0.8231	0.8286	0.8341	0.8398	0.8456	0.8514
0.38	0.8386	0.8434	0.8484	0.8534	0.8585	0.8638	0.8691	0.8746	0.8802	0.8858
0.40	0.8751	0.8798	0.8845	0.8894	0.8943	0.8994	0.9045	0.9098	0.9152	0.9206
0.42	0.9120	0.9164	0.9210	0.9256	0.9304	0.9353	0.9403	0.9454	0.9506	0.9558
0.44	0.9490	0.9533	0.9577	0.9622	0.9668	0.9715	0.9763	0.9813	0.9863	0.9914
0.46	0.9863	0.9904	0.9947	0.9990	1.0035	1.0080	1.0127	1.0174	1.0223	1.0272
0.48	1.0238	1.0278	1.0319	1.0361	1.0404	1.0448	1.0493	1.0539	1.0586	1.0633
0.50	1.0614	1.0653	1.0692	1.0733	1.0775	1.0817	1.0861	1.0905	1.0951	1.0997
0.52	1.0992	1.1030	1.1068	1.1107	1.1148	1.1189	1.1231	1.1274	1.1318	1.1363
0.54	1.1372	1.1408	1.1445	1.1483	1.1522	1.1562	1.1603	1.1645	1.1688	1.1732
0.56	1.1753	1.1788	1.1824	1.1861	1.1899	1.1937	1.1977	1.2018	1.2059	1.2102
0.58	1.2135	1.2169	1.2204	1.2240	1.2276	1.2314	1.2353	1.2392	1.2432	1.2474
0.60	1.2518	1.2551	1.2585	1.2620	1.2656	1.2692	1.2730	1.2768	1.2807	1.2847
0.62	1.2902	1.2934	1.2967	1.3001	1.3036	1.3071	1.3108	1.3145	1.3183	1.3222
0.64	1.3288	1.3319	1.3351	1.3383	1.3417	1.3452	1.3487	1.3523	1.3561	1.3599
0.66	1.3673	1.3704	1.3735	1.3767	1.3800	1.3833	1.3868	1.3903	1.3939	1.3976
0.68	1.4060	1.4090	1.4120	1.4151	1.4183	1.4216	1.4249	1.4284	1.4319	1.4355
0.70	1.4448	1.4476	1.4506	1.4536	1.4567	1.4599	1.4632	1.4665	1.4700	1.4735
0.72	1.4836	1.4864	1.4892	1.4922	1.4952	1.4983	1.5015	1.5048	1.5082	1.5116
0.74	1.5224	1.5252	1.5280	1.5308	1.5338	1.5369	1.5400	1.5432	1.5464	1.5498
0.76	1.5614	1.5640	1.5668	1.5696	1.5725	1.5754	1.5785	1.5816	1.5848	1.5880
0.78	1.6003	1.6029	1.6056	1.6084	1.6112	1.6141	1.6170	1.6201	1.6232	1.6264
0.80	1.6394	1.6419	1.6445	1.6472	1.6500	1.6528	1.6557	1.6587	1.6617	1.6648

이렇듯 Matlab을 사용하면 폭과 현수선의 늘어진 길이에 맞는 현수선의 길이를 구할 수 있다. 현수선 길이 규격표를 이용하면 따로 재 볼 필요 없이 간단하고 빠르게 길이를 알 수 있어 보다 더 신속하고 정확하게 일 처리가 가능하게 된다. 또한 현수교뿐만 아니라 비닐하우스의 서까래, 전봇대 사이에 축 늘어진 전깃줄 등에서도 폭과 현수선의 늘어진 길이를 알면 현수선 길이 규격표로 구현해 볼 수 있다. 많은 데이터를 가지고 있으면 다양한 경우에서 제작하는 데 매우 유용하다.

III. 결론

균일한 밀도를 갖는 유연한 사슬이나 밧줄을 두 점 사이에 매달아서 그 자신의 무게만으로 드리워져 있다고 할 때, 이것에 의하여 만들어지는 곡선의 형태를 현수선이라고 한다. 우리 주변에서 흔히 볼 수 있는 전봇대 사이에 축 늘어진 전깃줄이나 빨랫줄 현수선의 대표적인 예다. 현수선의 방정식 $y = \frac{1}{a} \cosh ax + c$ 를 이용하면 현수선의 길이 $S = \frac{2}{a} \sinh al$ 을 구할 수 있다. 현수선의 길이 S 를 구하기 위해서는 a 의 값을 먼저 구해야 한다. 그리고 현수선의 방정식의 x 값에 0과 폭 l 을 대입하여 연립방정식을 정리하면 방정식 $\cosh al - (1 + am) = 0$ 을 얻을 수 있다. 방정식의 해를 구하면 a 의 값을 구할 수 있다.

이렇게 현수선의 길이를 구하는 방법을 이용하여 현수교 중 대표적으로 광안대교의 현수선 길이를 알아볼 수 있다. 현수교의 탑 사이 폭의 반에 해당하는 길이인 l 과 현수선의 늘어진 길이인 m 을 통해 구해보았다. 광안대교의 경우 $l = 0.25(\text{km})$, $m = 0.0615(\text{km})$ 이다. Matlab 프로그램에서 앞에서 구한 $S = \frac{2}{a} \sinh al$ 을 이용하면 광안대교의 현수선의 길이인 S 값은 약 $0.5\text{km} = 500\text{m}$ 라는 것을 알 수 있다. 이를 통해 현수교의 폭과 현수교의 늘어진 길이에 따라서 필요한 현수선의 길이를 계산해서 간단하게 제작이 가능하도록 규격표를 만들어 보았다. 규격표를 통해서 이순신대교의 현수선 길이를 쉽게 구해낼 수 있었다.

이렇듯 Matlab을 사용해 현수선 길이 규격표를 이용하면 따로 재 볼 필요 없이 간단하고 빠르게 길이를 알 수 있다. 또한 현수교뿐만 아니라 비닐하우스의 서까래, 전봇대 사이에 축 늘어진 전깃줄 등에서도 구현해 보며 많은 데이터를 가지고 있으면 다양한 경우에서 제작하는 데 매우 유용할 것이다.

<참고문헌>

- [1] <미적분학과 해석기하> p.373. p.374. p.375.
- [2] <광안대교의 계획 및 설계_서식구 Planning and Design of Gwangan Grand Bridge> p.2.
- [3] <2012 하반기 특집 (현수교+자립기술)-이순신대교의 설계와 시공> p.2.