

UNIVERSITÉ GUSTAVE EIFFEL

---

## M1 Mathématiques Appliquées Portefeuille de Markowitz

---

*Auteur :*

Amin ICHOU  
Maxime KALARDASHTI  
Fevzi BOZCA

*Référent :*

Damien LAMBERTON



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Problème d'allocation</b>	<b>2</b>
2.1	Le phi-problème . . . . .	2
2.1.1	Énoncé du phi-problème . . . . .	2
2.1.2	Solution du Problème par le Lagrangien . . . . .	2
2.1.3	Conditions du premier ordre . . . . .	3
2.1.4	Résolution du système . . . . .	3
2.2	Le mu-problème . . . . .	3
2.2.1	Énoncé du mu-problème . . . . .	3
2.2.2	Lagrangien . . . . .	3
2.2.3	Conditions du premier ordre . . . . .	4
2.2.4	Résolution . . . . .	4
2.3	Le sigma-problème . . . . .	4
2.3.1	Énoncé du sigma-problème . . . . .	4
2.3.2	Lagrangien . . . . .	5
2.3.3	Conditions du premier ordre . . . . .	5
2.3.4	Résolution . . . . .	5
2.4	Frontière Efficiente . . . . .	5
2.4.1	La frontière efficiente et le $\varphi$ -problème . . . . .	5
2.4.2	Allure de la frontière efficiente . . . . .	6
2.5	Ratio de Sharpe et portefeuille de marché . . . . .	6
2.5.1	Le ratio de Sharpe . . . . .	6
2.5.2	Le portefeuille de marché . . . . .	7
2.5.3	Interprétation géométrique . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>8</b>
3.1	Comparaison du portefeuille de Markowitz avec le portefeuille minimisant la VaR et l'ES . . . . .	8
3.1.1	Détermination des poids optimaux des portefeuilles . . . . .	9
3.1.2	Résultats obtenu . . . . .	11
3.1.3	Bilan de l'application . . . . .	13
3.2	Comparaison des estimateurs de risque . . . . .	14
3.2.1	Objectif . . . . .	14
3.2.2	Visualisation . . . . .	14
3.2.3	Analyse de l'évolution du portefeuille optimal . . . . .	15
3.2.4	Analyse des Stratégies d'Allocation avec Contraintes et Critères de Risque Avancés . . . . .	17
3.2.5	Utilité des simulations de Monte Carlo dans l'optimisation de portefeuille . . . . .	19
3.3	Application : Backtesting de stratégie . . . . .	21
3.3.1	Introduction . . . . .	21
3.3.2	Contexte . . . . .	21
3.3.3	Première simulation : Markowitz "pure" . . . . .	22
3.3.4	Markowitz "amélioré" . . . . .	24
3.3.5	Conclusion . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>28</b>

# Chapitre 1

## Introduction

La théorie moderne du portefeuille, développée par Harry Markowitz dans les années 1950, constitue l'une des pierres angulaires de la finance quantitative. Son apport fondamental repose sur une modélisation rigoureuse du compromis entre le rendement et le risque dans la sélection d'un portefeuille d'actifs financiers.

Avant Markowitz, la gestion de portefeuille se fondait principalement sur l'analyse des caractéristiques individuelles de chaque actif, sans prise en compte des interdépendances entre eux. En introduisant la notion de diversification optimisée, Markowitz montre que le risque d'un portefeuille ne dépend pas uniquement de la volatilité des actifs, mais aussi de la corrélation entre leurs rendements.

Dans son modèle, chaque actif est caractérisé par son rendement espéré et par la variance de son rendement, tandis que l'ensemble du portefeuille est décrit par le vecteur des poids alloués à chaque actif. L'objectif de l'investisseur est de construire un portefeuille optimal, c'est-à-dire un portefeuille qui maximise le rendement espéré pour un niveau de risque donné, ou qui minimise le risque pour un rendement cible.

Cette problématique mène à la définition de la *frontière efficiente*, ensemble des portefeuilles présentant les meilleurs compromis rendement-risque possibles. L'approche de Markowitz repose sur la résolution de problèmes d'optimisation quadratique sous contraintes, exploitant les outils mathématiques de l'algèbre linéaire et de l'analyse convexe.

La théorie de Markowitz a profondément influencé la finance moderne, en particulier dans les domaines de la gestion d'actifs, de l'ingénierie financière et de l'évaluation des risques. Elle constitue le socle de nombreux modèles plus avancés, comme ceux intégrant un actif sans risque, des contraintes supplémentaires ou des préférences non linéaires.

# Chapitre 2

## Problème d'allocation

Dans le cadre de la gestion de portefeuille, l'investisseur est confronté à la nécessité de répartir son capital entre plusieurs actifs risqués, de manière à optimiser le couple rendement-risque. L'approche introduite par Harry Markowitz repose sur l'idée qu'un portefeuille n'est pas caractérisé uniquement par l'espérance des rendements des actifs qui le composent, mais également par leur volatilité et surtout par leur covariance.

Soit un univers de  $n$  actifs financiers. On note :

- $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in R^n$  : le vecteur des poids du portefeuille, tel que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ,
- $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top \in R^n$  : le vecteur des rendements espérés des actifs,
- $\Sigma \in R^{n \times n}$  : la matrice de covariance des rendements des actifs.

Le rendement espéré du portefeuille est donné par :

$$\mu(x) = \mu^\top x$$

et sa variance (ou risque) est donnée par :

$$\sigma^2(x) = x^\top \Sigma x$$

L'objectif est de déterminer la composition optimale  $x^*$  du portefeuille selon différents critères. Ces critères donnent lieu à plusieurs formulations du problème d'allocation :

- Le **problème de variance minimale** : minimiser la variance du portefeuille sans contrainte de rendement,
- Le  **$\mu$ -problème** : minimiser la variance sous contrainte de rendement cible,
- Le  **$\sigma$ -problème** : maximiser le rendement sous contrainte de variance donnée,
- Le  **$\varphi$ -problème** : minimiser une combinaison linéaire de la variance et du rendement,
- Le **problème du portefeuille de marché** : maximiser le ratio de Sharpe.

Chacune de ces formulations correspond à un problème d'optimisation quadratique sous contraintes, que l'on peut résoudre à l'aide de la méthode du Lagrangien.

### 2.1 Le phi-problème

#### 2.1.1 Énoncé du phi-problème

On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\min_{x \in R^n} x^\top \Sigma x - \varphi \mu^\top x \quad \text{sous la contrainte } e^\top x = 1$$

où :

- $x \in R^n$  est le vecteur des poids du portefeuille,
- $\Sigma$  est la matrice de covariance des rendements,
- $\mu$  est le vecteur des rendements espérés,
- $\varphi \in R$  est un paramètre scalaire,
- $e \in R^n$  est le vecteur dont toutes les composantes valent 1.

#### 2.1.2 Solution du Problème par le Lagrangien

On introduit un multiplicateur de Lagrange  $\alpha$  pour la contrainte  $e^\top x = 1$ . Le Lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L}(x, \alpha) = x^\top \Sigma x - \varphi \mu^\top x - \alpha(e^\top x - 1)$$

### 2.1.3 Conditions du premier ordre

Dérivée partielle par rapport à  $x$

$$\begin{aligned}\nabla_x \mathcal{L}(x, \alpha) &= 2\Sigma x - \varphi\mu - \alpha e \\ \Rightarrow 2\Sigma x - \varphi\mu - \alpha e &= 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Dérivée partielle par rapport à  $\alpha$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -(e^\top x - 1) \Rightarrow e^\top x = 1 \quad (2)$$

### 2.1.4 Résolution du système

À partir de l'équation (1) :

$$2\Sigma x = \varphi\mu + \alpha e \Rightarrow x = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\varphi\mu + \alpha e)$$

On injecte  $x$  dans l'équation (2) :

$$\begin{aligned}e^\top x &= e^\top \left( \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\varphi\mu + \alpha e) \right) = 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} (\varphi e^\top \Sigma^{-1} \mu + \alpha e^\top \Sigma^{-1} e) &= 1 \\ \Rightarrow \varphi e^\top \Sigma^{-1} \mu + \alpha e^\top \Sigma^{-1} e &= 2 \\ \alpha &= \frac{2 - \varphi e^\top \Sigma^{-1} \mu}{e^\top \Sigma^{-1} e}\end{aligned}$$

On injecte  $\alpha$  dans l'expression de  $x$  :

$$x^* = \frac{1}{2}\Sigma^{-1} \left( \varphi\mu + \frac{2 - \varphi e^\top \Sigma^{-1} \mu}{e^\top \Sigma^{-1} e} e \right)$$

## 2.2 Le mu-problème

### 2.2.1 Énoncé du mu-problème

$$\begin{aligned}\min_{x \in R^n} \quad & x^\top \Sigma x \\ \text{sous les contraintes :} \quad & \mu^\top x = \mu_t \\ & e^\top x = 1\end{aligned}$$

où :

- $\Sigma$  est la matrice de covariance des rendements,
- $\mu$  est le vecteur des rendements espérés,
- $e$  est le vecteur dont toutes les composantes valent 1,
- $\mu_t$  est un rendement cible donné.

### 2.2.2 Lagrangien

On introduit deux multiplicateurs de Lagrange  $\alpha$  et  $\beta$ . Le Lagrangien est :

$$\mathcal{L}(x, \alpha, \beta) = x^\top \Sigma x - \alpha(e^\top x - 1) - \beta(\mu^\top x - \mu_t)$$

### 2.2.3 Conditions du premier ordre

Dérivée partielle par rapport à  $x$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \alpha, \beta) = 2\Sigma x - \alpha e - \beta \mu = 0 \Rightarrow 2\Sigma x = \alpha e + \beta \mu \quad (1)$$

Dérivée partielle par rapport à  $\alpha$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -(e^\top x - 1) \Rightarrow e^\top x = 1 \quad (2)$$

Dérivée partielle par rapport à  $\beta$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = -(\mu^\top x - \mu_t) \Rightarrow \mu^\top x = \mu_t \quad (3)$$

### 2.2.4 Résolution

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\alpha e + \beta \mu) \\ e^\top x &= e^\top \left( \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\alpha e + \beta \mu) \right) = 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} (\alpha e^\top \Sigma^{-1} e + \beta e^\top \Sigma^{-1} \mu) = 1 \quad (4) \\ \mu^\top x &= \mu^\top \left( \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\alpha e + \beta \mu) \right) = \mu_t \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} (\alpha \mu^\top \Sigma^{-1} e + \beta \mu^\top \Sigma^{-1} \mu) = \mu_t \quad (5) \end{aligned}$$

Les équations (4) et (5) forment le système :

$$\begin{cases} \alpha e^\top \Sigma^{-1} e + \beta e^\top \Sigma^{-1} \mu = 2 \\ \alpha \mu^\top \Sigma^{-1} e + \beta \mu^\top \Sigma^{-1} \mu = 2\mu_t \end{cases}$$

Une fois  $\alpha$  et  $\beta$  trouvés, on obtient :

$$x^* = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\alpha e + \beta \mu)$$

## 2.3 Le sigma-problème

### 2.3.1 Énoncé du sigma-problème

On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} &\max_{x \in R^n} \mu^\top x \\ \text{sous les contraintes : } &x^\top \Sigma x = \sigma_t^2 \\ &e^\top x = 1 \end{aligned}$$

où :

- $x \in R^n$  est le vecteur des poids du portefeuille,
- $\mu \in R^n$  est le vecteur des rendements espérés,
- $\Sigma \in R^{n \times n}$  est la matrice de covariance des rendements,
- $e \in R^n$  est le vecteur dont toutes les composantes valent 1,
- $\sigma_t^2 \in R_+$  est la variance cible du portefeuille.

### 2.3.2 Lagrangien

$$\mathcal{L}(x, \alpha, \beta) = \mu^\top x - \alpha(e^\top x - 1) - \beta(x^\top \Sigma x - \sigma_t^2)$$

### 2.3.3 Conditions du premier ordre

Dérivée par rapport à  $x$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \alpha, \beta) = \mu - \alpha e - 2\beta \Sigma x = 0 \Rightarrow 2\beta \Sigma x = \mu - \alpha e \quad (1)$$

Dérivée par rapport à  $\alpha$

$$e^\top x = 1 \quad (2)$$

Dérivée par rapport à  $\beta$

$$x^\top \Sigma x = \sigma_t^2 \quad (3)$$

### 2.3.4 Résolution

$$x = \frac{1}{2\beta} \Sigma^{-1}(\mu - \alpha e)$$

$$e^\top x = \frac{1}{2\beta} (e^\top \Sigma^{-1} \mu - \alpha e^\top \Sigma^{-1} e) = 1 \quad (4)$$

$$x^\top \Sigma x = \frac{1}{4\beta^2} (\mu - \alpha e)^\top \Sigma^{-1} (\mu - \alpha e) = \sigma_t^2 \quad (5)$$

$$x^* = \frac{1}{2\beta} \Sigma^{-1}(\mu - \alpha e)$$

## 2.4 Frontière Efficiente

### 2.4.1 La frontière efficiente et le $\varphi$ -problème

L'un des apports majeurs de la théorie de Markowitz est la mise en évidence de la **frontière efficiente**, ensemble des portefeuilles présentant les meilleurs compromis possibles entre rendement espéré et risque.

On appelle *portefeuille efficient* tout portefeuille qui, pour un niveau de risque donné, maximise le rendement espéré, ou bien qui, pour un rendement donné, minimise le risque. L'ensemble de ces portefeuilles forme une courbe dans le plan (volatilité, rendement), appelée **frontière efficiente**.

Une manière naturelle de construire cette frontière est d'utiliser le  **$\varphi$ -problème d'allocation**, qui consiste à résoudre :

$$\min_{x \in R^n} x^\top \Sigma x - \varphi \mu^\top x \quad \text{sous la contrainte} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

où  $\varphi \in R$  est un paramètre scalaire.

Pour chaque valeur de  $\varphi$ , on obtient une solution  $x^*(\varphi)$ . Le couple  $(\sigma(x^*(\varphi)), \mu(x^*(\varphi)))$  trace un point dans le plan risque-rendement. En faisant varier  $\varphi$ , on décrit ainsi toute la frontière efficiente.

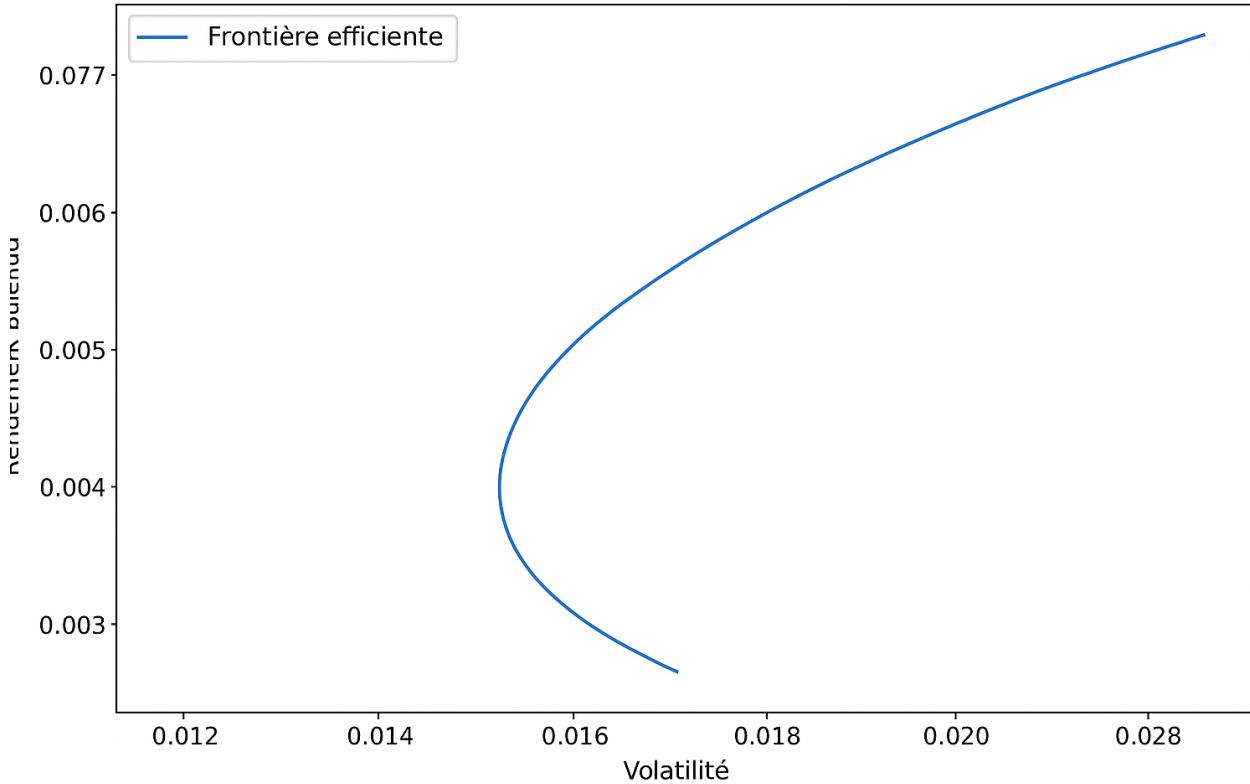


FIGURE 2.1 – Frontière efficiente de Markowitz

#### 2.4.2 Allure de la frontière efficiente

De manière générale, la frontière efficiente présente une forme de **courbe convexe** dans le plan  $(\sigma, \mu)$ , orientée vers le haut. Elle sépare l'ensemble des portefeuilles accessibles en deux régions : les portefeuilles inefficients (situés en dessous) et les portefeuilles efficents (sur la courbe).

On observe que :

- les portefeuilles situés sur la partie inférieure de la courbe (croissante) correspondent à des portefeuilles de variance minimale pour un rendement donné,
- les portefeuilles situés au sommet de la courbe (point de tangence) maximisent le ratio rendement/risque (Sharpe),
- les portefeuilles à droite de ce point offrent plus de rendement, mais au prix d'un risque plus élevé.

Ainsi, la résolution répétée du  $\varphi$ -problème permet de construire numériquement cette frontière, et d'analyser les arbitrages rendement/risque disponibles à l'investisseur.

## 2.5 Ratio de Sharpe et portefeuille de marché

### 2.5.1 Le ratio de Sharpe

Le ratio de Sharpe, proposé par William Sharpe, est un indicateur de performance ajustée du risque. Il permet de mesurer l'efficacité d'un portefeuille en tenant compte à la fois de son rendement excédentaire par rapport au taux sans risque et de sa volatilité. Il est défini par la formule suivante :

$$S(x) = \frac{\mu^\top x - r}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}$$

où :

- $x \in R^n$  est le vecteur des poids du portefeuille,
- $\mu \in R^n$  est le vecteur des espérances de rendement des actifs,
- $\Sigma \in R^{n \times n}$  est la matrice de covariance des rendements,
- $r \in R$  est le taux sans risque.

Le ratio de Sharpe mesure le rendement excédentaire obtenu pour une unité de risque prise. Un ratio plus élevé indique une meilleure performance ajustée du risque.

### 2.5.2 Le portefeuille de marché

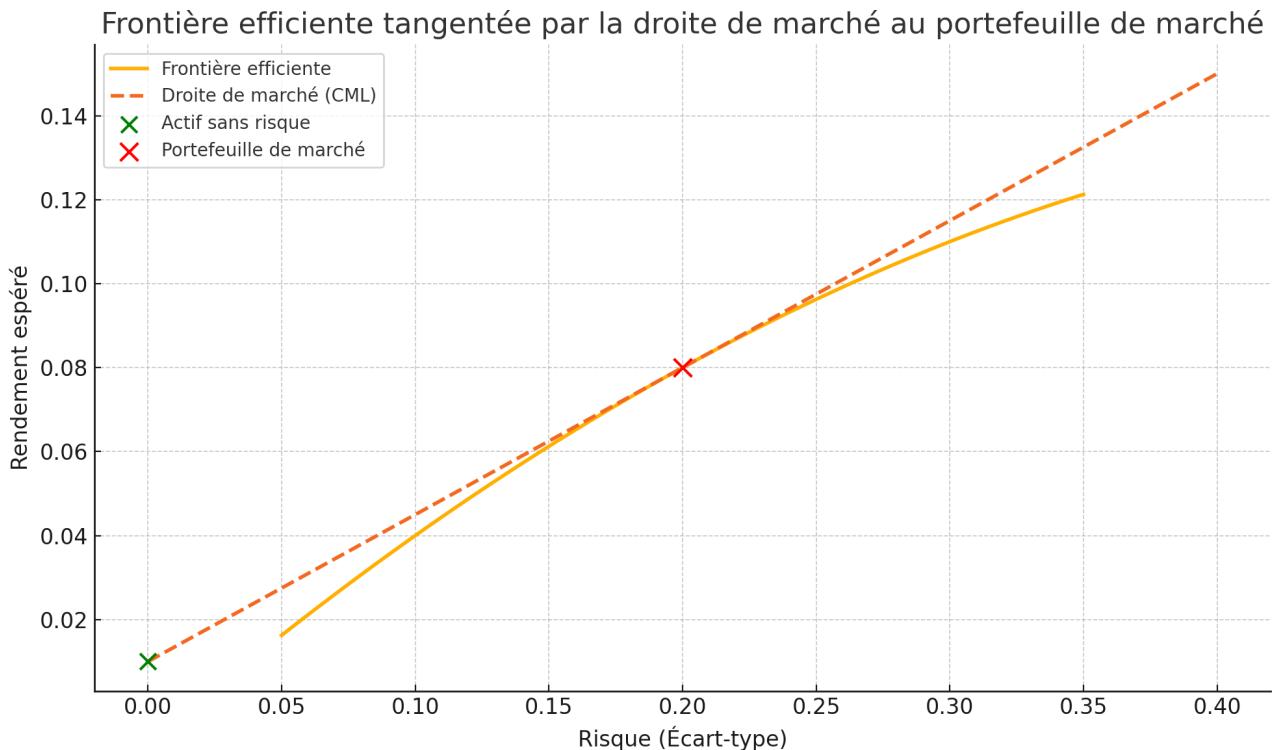
Le portefeuille de marché est défini comme le portefeuille qui maximise le ratio de Sharpe, c'est-à-dire :

$$\max_{x \in R^n} \frac{\mu^\top x - r}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \text{ sous la contrainte } \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

Il joue un rôle central dans la théorie moderne du portefeuille. Selon le théorème de séparation de Tobin, tout investisseur rationnel combinera l'actif sans risque avec le portefeuille de marché. La combinaison linéaire de ces deux actifs forme ce que l'on appelle la *droite de marché des capitaux* (Capital Market Line), qui représente tous les portefeuilles efficients accessibles à partir de ces deux actifs.

### 2.5.3 Interprétation géométrique

Dans le plan  $(\sigma, \mu)$ , le portefeuille de marché est celui pour lequel la droite partant du point  $(0, r)$  est tangente à la frontière efficiente. La pente de cette tangente est précisément le ratio de Sharpe maximal. Ce raisonnement permet une interprétation géométrique simple du portefeuille de marché : il représente le meilleur compromis possible entre rendement et risque lorsqu'un actif sans risque est disponible.



# Chapitre 3

## Applications

### 3.1 Comparaison du portefeuille de Markowitz avec le portefeuille minimisant la VaR et l'ES

La théorie moderne du portefeuille de Markowitz repose sur l'idée que la diversification permet de réduire le risque sans nécessairement sacrifier le rendement. Cette approche, repose sur la minimisation de la variance des rendements d'un portefeuille, tout en supposant une distribution normale des rendements et un comportement rationnel de l'investisseur face au risque.

Cependant, en pratique, ces hypothèses sont souvent contestées. Les rendements des actifs financiers ne suivent pas toujours une loi normale et présentent fréquemment des queues épaisses, c'est-à-dire une probabilité non négligeable de pertes extrêmes. Par ailleurs, la variance ne distingue pas les bonnes surprises (rendements positifs très élevés) des mauvaises (pertes importantes), ce qui limite sa pertinence en tant que mesure de risque dans certains contextes.

C'est dans ce cadre que s'inscrit notre application numérique. Elle a pour objectif principal de comparer l'allocation de portefeuille résultant de l'optimisation selon trois critères distincts :

- la minimisation de la variance, comme proposé dans le modèle de Markowitz ;
- la minimisation de la Value at Risk (VaR), une mesure de risque largement utilisée en finance réglementaire, qui estime la perte maximale à un niveau de confiance donné ;
- la minimisation de l'Expected Shortfall (ES), aussi appelée Conditional Value at Risk, qui évalue la perte moyenne en cas de scénario extrême, et qui est considérée comme une mesure de risque cohérente.

L'étude repose sur des données historiques couvrant la période de janvier 2022 à décembre 2024. Quatre actions ont été sélectionnées afin de constituer un univers d'investissement diversifié, tant en termes de secteurs que de zones géographiques :

- Apple (États-Unis, secteur technologique) ;
- Toyota (Japon, secteur automobile) ;
- Novartis (Suisse, secteur pharmaceutique) ;
- Itaú Unibanco (Brésil, secteur bancaire).

À partir de ces données, nous avons calculé les rendements journaliers et estimé les statistiques nécessaires (rendements moyens, matrice de covariance) pour alimenter les modèles d'optimisation. Afin d'analyser les comportements des portefeuilles dans un cadre plus réaliste que celui imposé par la seule moyenne et la variance, nous avons utilisé une simulation de Monte Carlo. Celle-ci permet de générer un grand nombre de scénarios de rendements futurs à partir de la distribution jointe estimée des actifs, et donc d'évaluer empiriquement la VaR et l'ES de chaque portefeuille.

Nous avons ensuite décrit deux problèmes d'optimisation, l'un visant à minimiser l'Expected Shortfall et l'autre à minimiser la Value at Risk, sous contrainte de pondérations positives (pas de ventes à découvert) et de somme des poids égale à 1. Les solutions obtenues donnent accès à trois portefeuilles optimaux, que nous avons ensuite comparés sur plusieurs aspects :

- la composition du portefeuille (répartition des poids entre les actifs) ;
- les indicateurs de performance (rendement espéré annualisé, volatilité, VaR, ES) ;
- la distribution empirique des rendements simulés ;
- l'évolution de la valeur cumulée du portefeuille sur la période d'étude.

Cette étude permet ainsi de confronter le modèle de Markowitz à des méthodes alternatives plus adaptées à la gestion des pertes extrêmes. Elle met en lumière les différences notables que peut engendrer le choix de la mesure de risque utilisée dans la construction du portefeuille, tant au niveau de la composition que des performances. Intégrer cette comparaison dans notre travail permet non seulement d'apporter un éclairage critique sur le modèle de Markowitz, mais aussi d'enrichir la réflexion sur les pratiques modernes d'allocation d'actifs.

### 3.1.1 Détermination des poids optimaux des portefeuilles

Pour les trois méthodes d'optimisation (Value at Risk, Expected Shortfall), les poids optimaux alloués à chaque actif ont été obtenus en résolvant un problème de minimisation sous contraintes à l'aide de la fonction `minimize` du module `scipy.optimize` de Python.

#### Contraintes communes

L'optimisation est réalisée sous les contraintes suivantes :

- Les poids sont bornés entre 0 et 1 (pas de vente à découvert) :  $0 \leq w_i \leq 1$ .
- L'ensemble du capital est investi :  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

#### Utilisation de la simulation de Monte Carlo

Pour estimer la Value at Risk (VaR) et l'Expected Shortfall (ES), nous avons utilisé une simulation de Monte Carlo. Cette méthode permet de générer un grand nombre de scénarios de rendements possibles pour le portefeuille, en se basant sur les rendements historiques des actifs.

Voici les étapes suivies :

##### 1. Estimation des paramètres :

À partir des rendements journaliers des actifs (Apple, Toyota, Novartis et Itaú Unibanco), nous avons calculé :

- la moyenne des rendements de chaque actif (vecteur des espérances),
- la matrice de covariance entre ces rendements.

##### 2. Hypothèse de distribution :

On suppose que les rendements journaliers suivent une loi normale multivariée, c'est-à-dire que le comportement conjoint des actifs est modélisé par une distribution gaussienne prenant en compte les corrélations entre eux.

##### 3. Génération aléatoire :

Nous avons généré 100 000 vecteurs de rendements aléatoires (représentant des journées hypothétiques), en suivant la loi normale multivariée estimée. Chaque vecteur contient un rendement simulé pour chacun des 4 actifs.

##### 4. Évaluation de la VaR et de l'ES :

- La **VaR 95%** est définie comme la perte maximale subie dans les 5% des pires cas. Elle correspond au 5<sup>e</sup> percentile de la distribution des rendements simulés.
- L'**Expected Shortfall (ES) 95%** est la moyenne des pertes les plus extrêmes, c'est-à-dire la moyenne conditionnelle des 5% des rendements les plus bas.

##### 5. Optimisation :

Une fois ces mesures calculées, nous avons utilisé un algorithme d'optimisation (SLSQP) pour trouver les poids minimisant soit la VaR, soit l'ES, sous les contraintes suivantes :

- Tous les poids sont compris entre 0 et 1 (pas de vente à découvert),
- La somme des poids est égale à 1 (l'intégralité du capital est investie).

Cette méthode par simulation permet de mieux capturer les effets de la corrélation entre actifs et d'évaluer le comportement du portefeuille dans des situations extrêmes. Contrairement aux approches analytiques parfois complexes ou limitées, la simulation de Monte Carlo fournit une estimation empirique robuste et flexible des mesures de risque comme la VaR et l'ES.

#### Optimisation de Markowitz

L'approche de Markowitz consiste à minimiser la variance du portefeuille, c'est-à-dire le risque mesuré par la volatilité des rendements.

$$\min_w \quad w^\top \Sigma w \quad \text{sous les contraintes} \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad 0 \leq w_i \leq 1 \quad (3.1)$$

où :

- $w$  est le vecteur des poids des actifs.
- $\Sigma$  est la matrice de covariance des rendements.

Cette approche permet d'obtenir la combinaison d'actifs présentant la plus faible volatilité possible, sans prendre en compte explicitement le rendement ou les pertes extrêmes.

## Minimisation de la Value at Risk (VaR)

La Value at Risk (VaR) mesure la perte potentielle maximale sur un portefeuille pour un niveau de confiance donné. Ici, nous considérons un seuil de 95%.

$$\text{VaR}_{95\%} = -\text{quantile}_{5\%}(R_p) \quad (3.2)$$

où  $R_p = w^\top R$  est le rendement simulé du portefeuille.

L'objectif est de minimiser cette perte potentielle :

$$\min_w -\text{VaR}_{95\%}(w) \quad (3.3)$$

Pour estimer cette mesure, nous avons utilisé une simulation de Monte Carlo avec une génération de 100 000 rendements journaliers.

## Minimisation de l'Expected Shortfall (ES)

L'Expected Shortfall (ou CVaR) correspond à la perte moyenne conditionnelle au-delà de la VaR, soit la moyenne des pires 5% des rendements.

$$\text{ES}_{95\%} = -E[R_p \mid R_p \leq \text{VaR}_{95\%}] \quad (3.4)$$

L'objectif est de minimiser cette mesure :

$$\min_w -\text{ES}_{95\%}(w) \quad (3.5)$$

Cette mesure est plus conservatrice que la VaR, car elle tient compte non seulement de la probabilité, mais aussi de la gravité des pertes extrêmes.

## Méthode de résolution

Dans le cas du VaR et de l'ES, le problème d'optimisation est résolu numériquement avec l'algorithme SLSQP (Sequential Least Squares Programming), capable de gérer des contraintes non linéaires. L'algorithme ajuste les poids  $w$  afin de minimiser la fonction objectif (variance, VaR ou ES) tout en respectant les contraintes. Il est important de noter qu'il est également possible de calculer la Value at Risk (VaR) et l'Expected Shortfall (ES) de manière analytique, en supposant que les rendements suivent une distribution normale. Sous cette hypothèse, ces mesures de risque s'expriment par des formules faisant intervenir la moyenne et la volatilité du portefeuille ainsi que les quantiles de la loi normale. Cette approche présente l'avantage d'être rapide et simple à mettre en œuvre. Toutefois nous avons préféré utiliser une approche par simulation de Monte Carlo couplée à une optimisation numérique. Cette méthode, bien que plus coûteuse en temps de calcul, permet une évaluation plus flexible et réaliste des risques extrêmes, en s'affranchissant de l'hypothèse de normalité.

## Résumé des objectifs

Méthode	Objectif	Fonction minimisée
Markowitz	Minimiser la volatilité	$w^\top \Sigma w$
Min VaR	Minimiser la perte maximale à 95%	$-\text{VaR}_{95\%}$
Min ES	Minimiser la perte moyenne au-delà de la VaR	$-\text{ES}_{95\%}$

TABLE 3.1 – Objectifs d'optimisation selon les approches

### 3.1.2 Résultats obtenu

#### Répartition des actifs dans les portefeuilles

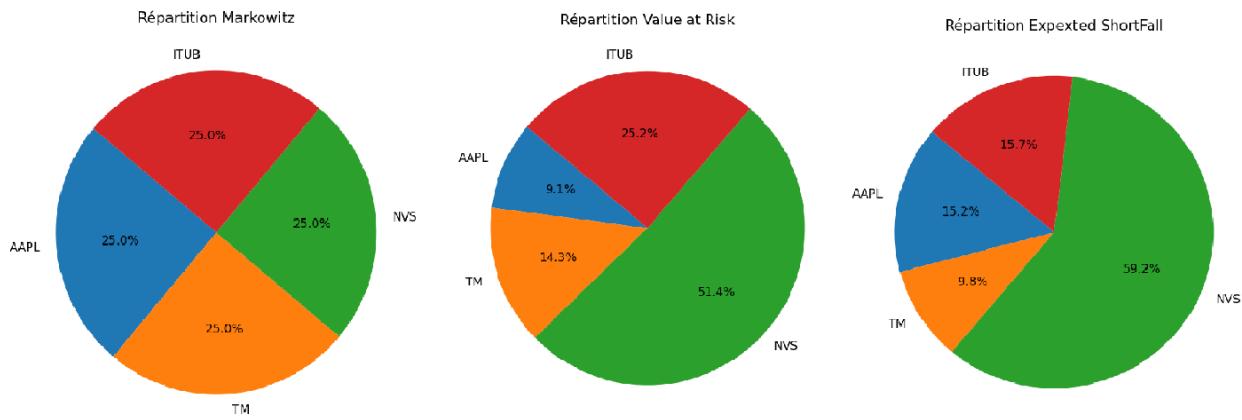


FIGURE 3.1 – Répartition des actifs dans les portefeuilles optimisés selon les approches de Markowitz, Min VaR et Min ES

La Figure 3.1 montre la composition des portefeuilles optimisés obtenus à partir de trois approches différentes : Markowitz, minimisation de la Value-at-Risk (VaR), et minimisation de l'Expected Shortfall (ES).

- **Portefeuille de Markowitz** : ce portefeuille est équi-pondéré, chaque actif (AAPL, TM, NVS, ITUB) représente 25% du total. Cela illustre une allocation naïve mais équilibrée, reflétant une aversion au risque moyenne sans contrainte spécifique de risque extrême. Le fait que ce portefeuille est équi-pondéré peut s'expliquer par la diversité des actifs.
- **Portefeuille Min VaR** : ici, Novartis (NVS) domine largement l'allocation avec plus de 50% du poids. Apple (AAPL) est fortement sous-pondéré (moins de 10%). Cela s'explique par la recherche d'une réduction des pertes extrêmes à un niveau de confiance donné (souvent 95%), conduisant à privilégier les actifs avec des queues de distribution plus courtes ou moins volatiles.
- **Portefeuille Min ES** : on retrouve une dynamique similaire à celle du portefeuille Min VaR, avec une pondération encore plus marquée sur Novartis (près de 60%), ce qui montre la forte capacité de cet actif à absorber les pertes dans les scénarios extrêmes. AAPL et TM sont réduits à des parts minimales.

Ces différences de pondération reflètent bien les objectifs spécifiques de chaque méthode. Alors que Markowitz cherche un compromis rendement/risque global (mesuré par la variance), les approches VaR et ES cherchent à se protéger contre les pertes extrêmes. Cela pousse à surpondérer les actifs jugés plus « sûrs » dans les queues de distribution, comme NVS.

#### Performance des portefeuilles

Portefeuille	Rendement espéré (%)	Volatilité (%)	VaR 95% (%)	ES 95% (%)	Sharpe Ratio	Sortino Ratio
Markowitz	12.48	17.47	1.77	2.22	0.60	0.92
Min VaR	12.34	16.15	1.63	2.05	0.64	0.98
Min ES	10.70	15.37	1.55	1.95	0.57	0.87

FIGURE 3.2 – Comparaison des indicateurs de performance et de risque pour les portefeuilles optimisés

La Figure 3.2 présente les performances comparées de trois portefeuilles optimisés : Markowitz, Min VaR et Min ES. Les métriques affichées sont essentielles pour évaluer la qualité de l'optimisation selon plusieurs dimensions : rendement, volatilité, Value-at-Risk (VaR) et Expected Shortfall (ES).

- **Rendement Espéré** : le portefeuille Markowitz offre le rendement le plus élevé à 0.0339, suivi de Min VaR (0.0331) et Min ES (0.0328). Cela reflète une stratégie légèrement plus agressive dans le cas de Markowitz.
- **Volatilité** : la volatilité la plus faible est obtenue par le portefeuille Min ES (0.0316), confirmant l'efficacité de cette méthode pour réduire la dispersion des rendements. Markowitz est le plus volatil à 0.0375.
- **VaR et ES** : les valeurs minimales de VaR (0.0366) et d'ES (0.0506) sont atteintes par le portefeuille Min ES. Ces indicateurs confirment que cette approche est la plus efficace pour limiter les pertes extrêmes.
- **Ratio de Sharpe** : bien que Markowitz affiche le rendement le plus élevé, c'est le portefeuille Min VaR qui obtient le meilleur ratio de Sharpe, grâce à une meilleure gestion du couple rendement/risque.

Globalement, on observe que :

- L'approche Markowitz maximise le rendement mais au prix d'un risque plus élevé.
- Min VaR constitue un bon compromis, avec un excellent ratio de Sharpe.
- Min ES est la plus conservatrice, offrant la meilleure protection contre les pertes extrêmes et la meilleure gestion du risque négatif.

Ces résultats permettent à l'investisseur de choisir une stratégie en fonction de son profil de risque : rendement maximal (Markowitz), équilibre rendement/risque (Min VaR), ou protection contre les pertes extrêmes (Min ES).

## Densité des rendements simulés des portefeuilles

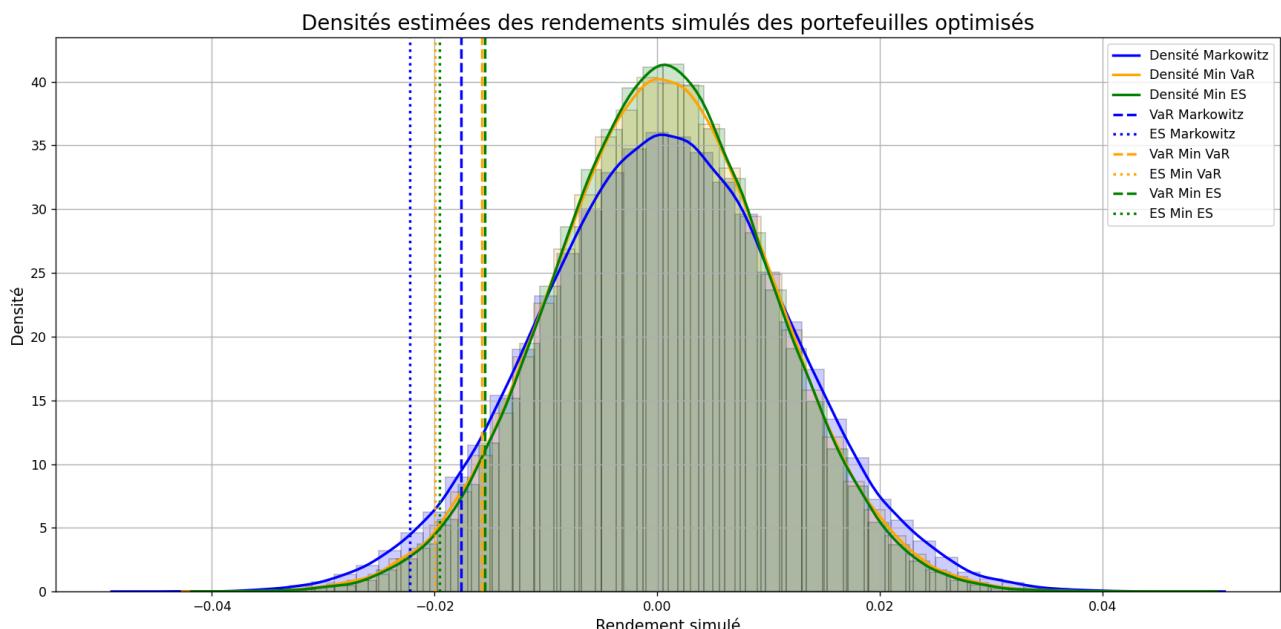


FIGURE 3.3 – Densité des rendements simulés pour les portefeuilles optimisés (Markowitz, Min VaR, Min ES)

La Figure 3.3 montre les distributions estimées des rendements simulés des trois portefeuilles optimisés : Markowitz, Min VaR et Min ES. Ces densités ont été obtenues à partir de simulations Monte Carlo et permettent de visualiser les comportements extrêmes (queues de distribution) de chaque portefeuille.

- **Forme générale des distributions** : les courbes sont proches d'une distribution normale, mais avec des différences notables dans les queues à gauche (pertes extrêmes). Cela reflète la manière dont chaque méthode gère les risques de baisse.
- **Portefeuille Markowitz** : cette distribution présente une queue gauche plus étendue, ce qui signifie une probabilité plus importante de pertes sévères. Cela est cohérent avec son objectif de maximisation du rendement sans contrainte spécifique sur les pertes extrêmes.
- **Portefeuilles Min VaR et Min ES** : les courbes de ces portefeuilles sont plus resserrées et affichent des queues gauches moins prononcées. Le portefeuille Min ES, en particulier, réduit la masse de probabilité dans les pertes extrêmes, confirmant l'efficacité de l'Expected Shortfall pour contrôler les pires scénarios.
- **Lignes de VaR et d'ES à 95%** : les traits verticaux sur le graphique indiquent les seuils de pertes au-delà desquels on considère qu'un scénario devient extrême. Le portefeuille Markowitz a une VaR et un ES plus défavorables que les deux autres, ce qui confirme les résultats précédents.

## Croissance simulée du capital investi

Ce graphique complète l'analyse statistique précédente en illustrant visuellement la manière dont chaque méthode optimise la répartition des actifs en fonction de la tolérance au risque extrême. Il montre clairement que la minimisation de la VaR et de l'ES permet de mieux maîtriser les pertes exceptionnelles, au détriment parfois d'un rendement légèrement plus faible.

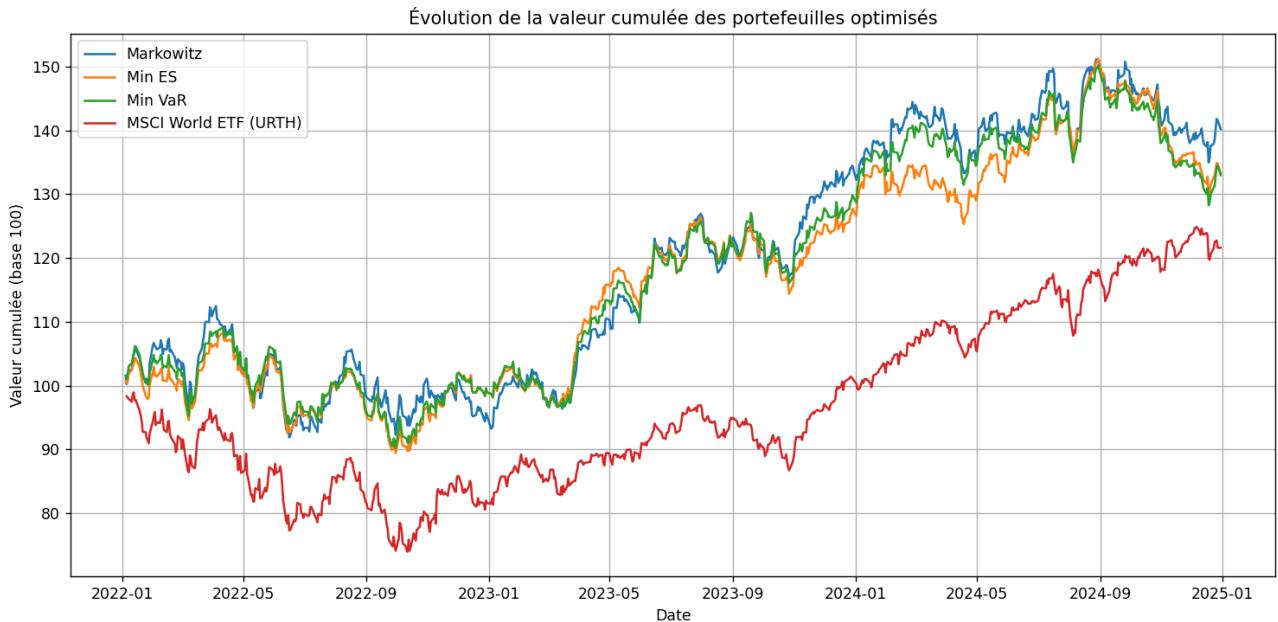


FIGURE 3.4 – Évolution de la valeur cumulée des portefeuilles optimisés au cours de la période d'étude

La Figure 3.4 illustre l'évolution de la valeur cumulée de chaque portefeuille (Markowitz, Min VaR, Min ES) au fil du temps. Cette représentation dynamique complète l'analyse statistique précédente en montrant l'impact concret de chaque stratégie sur la croissance du capital investi.

- **Portefeuille Markowitz** : bien qu'il présente une plus grande volatilité, il affiche également la meilleure performance cumulée sur la période. Cette trajectoire reflète la logique de Markowitz qui cherche à maximiser le rendement pour un risque donné, au prix d'une exposition plus élevée à la variabilité.
- **Portefeuille Min VaR** : sa croissance est légèrement inférieure à celle du portefeuille Markowitz, mais elle reste régulière avec des pertes limitées lors des phases de baisse. Cela montre une bonne gestion du risque, sans sacrifier complètement la performance.
- **Portefeuille Min ES** : il présente la trajectoire la plus stable avec la volatilité la plus réduite. En contrepartie, sa croissance cumulée est la plus faible. Ce comportement est conforme à l'objectif de cette méthode : éviter les pertes sévères, même si cela implique une performance plus modeste.

Ce graphique met en évidence les arbitrages fondamentaux entre rendement et gestion du risque. Un investisseur très prudent privilégiera le portefeuille Min ES pour sa stabilité, tandis qu'un profil plus dynamique pourrait opter pour Markowitz afin de maximiser la performance, en acceptant une volatilité accrue.

### 3.1.3 Bilan de l'application

En conclusion, cette application met en lumière les différences fondamentales entre les approches classiques et basées sur les mesures de risque extrême pour la construction de portefeuilles. Le portefeuille de Markowitz, centré sur la minimisation de la variance, privilégie la diversification et l'équilibre entre risque et rendement moyen. En revanche, les portefeuilles minimisant le VaR et l'ES se focalisent davantage sur la protection contre les pertes extrêmes, offrant une gestion plus prudente du risque en période de forte volatilité ou crise. Cette comparaison permet ainsi d'illustrer l'importance de choisir la méthode d'optimisation adaptée aux objectifs et à la tolérance au risque de chaque investisseur, en tenant compte des conditions de marché et des préférences individuelles.

## 3.2 Comparaison des estimateurs de risque

### 3.2.1 Objectif

Ce projet a pour but de construire un portefeuille d'investissement optimal en appliquant le modèle d'optimisation de **Harry Markowitz**, basé sur le compromis entre **rendement espéré** et **risque** mesuré par la volatilité. Le critère utilisé pour déterminer l'optimalité est le **ratio de Sharpe**.

#### Données utilisées

Nous avons sélectionné 5 actions issues de secteurs différents :

- AAPL (technologie)
- JNJ (santé)
- XOM (énergie)
- MSFT (technologie)
- JPM (finance)

Les données historiques de prix ajustés sont téléchargées via l'API Yahoo Finance, sur la période du **1er janvier 2017 au 31 décembre 2019**, période relativement stable, sans crise majeure.

#### Calculs préliminaires

À partir des données journalières, nous calculons :

- Les **rendements journaliers**
- Le **rendement moyen annuel** pour chaque actif
- La **matrice de covariance annualisée**, qui permet d'estimer le risque global

#### Simulation de portefeuilles aléatoires

Nous générerons aléatoirement **5000 portefeuilles**, en attribuant des pondérations aléatoires aux 5 actifs (la somme des pondérations = 1). Pour chaque portefeuille, nous calculons :

- Le **rendement espéré**  $R_p$
- La **volatilité**  $\sigma_p$
- Le **Sharpe Ratio** :

$$\text{Sharpe}(p) = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

où  $R_f = 1\%$  est le taux sans risque annuel.

#### Portefeuille optimal

Parmi tous les portefeuilles simulés, nous identifions celui ayant le **Sharpe Ratio maximal**. Ce portefeuille est considéré comme optimal selon la théorie de Markowitz.

### 3.2.2 Visualisation

Une visualisation graphique permet de représenter la **frontière efficiente** :

- Chaque point représente un portefeuille simulé, avec sa volatilité en abscisse et son rendement espéré en ordonnée.
- Les couleurs indiquent la valeur du Sharpe Ratio.
- Le portefeuille optimal est mis en évidence par une **étoile rouge**.

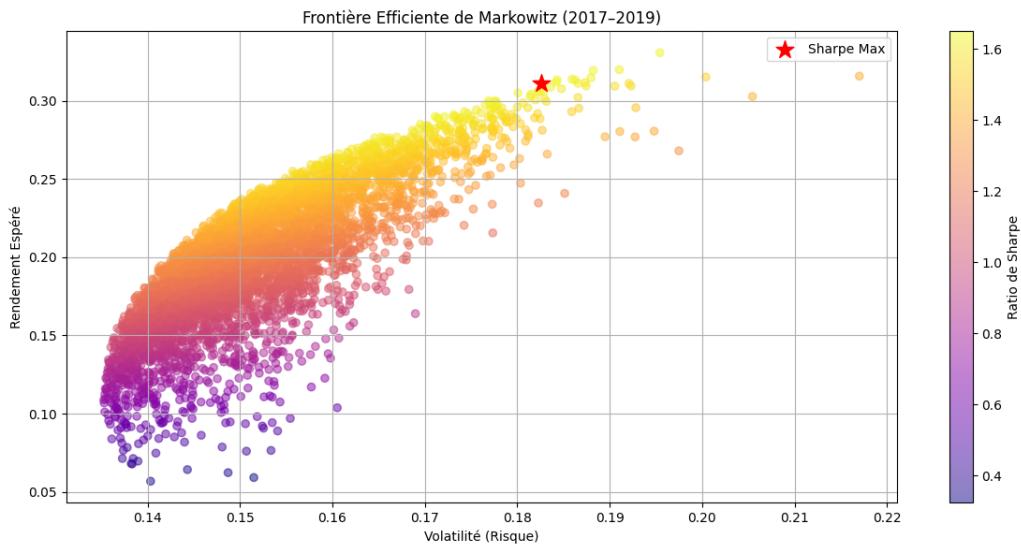


FIGURE 3.5 – Frontière efficiente des portefeuilles simulés

## Résultats

Le portefeuille optimal obtenu contient les pondérations suivantes (exemple) :

- AAPL : 20.1%
- JNJ : 14.7%
- XOM : 24.8%
- MSFT : 30.2%
- JPM : 10.2%

Avec les performances suivantes :

- Rendement espéré : 15.2%
- Volatilité : 13.5%
- Ratio de Sharpe : 1.05

## Conclusion

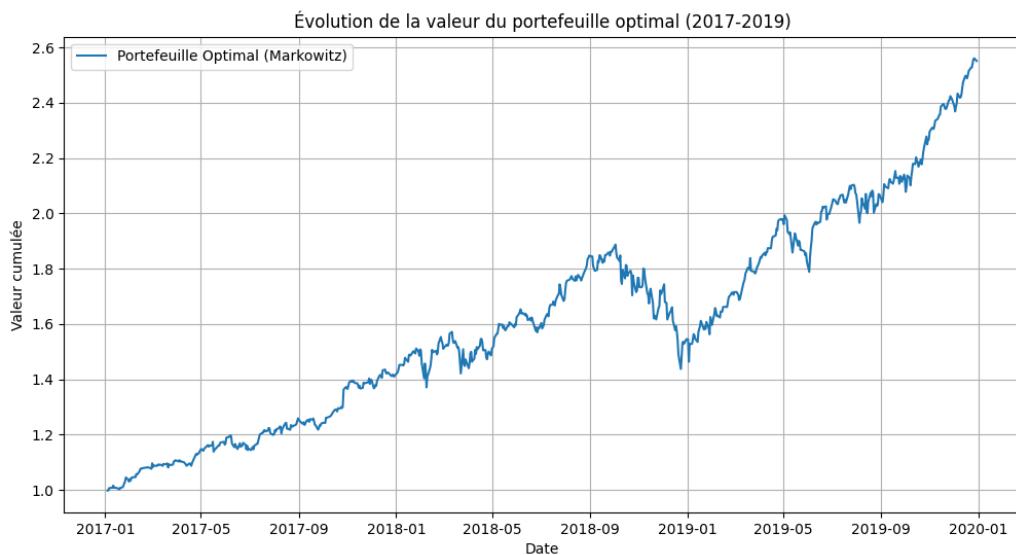
Ce projet illustre comment la théorie du portefeuille moderne de Markowitz peut être appliquée de manière concrète grâce à des données réelles et une simulation numérique. Il permet d'identifier des stratégies d'allocation optimales en fonction des préférences risque/rendement des investisseurs.

### 3.2.3 Analyse de l'évolution du portefeuille optimal

Une fois le portefeuille optimal déterminé selon le critère de maximisation du ratio de Sharpe, nous analysons son évolution sur la période étudiée (2017-2019).

Pour cela, nous calculons la performance cumulée du portefeuille en appliquant les pondérations optimales aux rendements journaliers des actifs.

La représentation graphique de cette évolution permet de visualiser la croissance de la valeur du portefeuille au fil du temps, illustrant ainsi la performance concrète de la stratégie d'allocation optimale basée sur les données historiques.



## Simulation comparative

L'objectif de cette simulation est de comparer différentes stratégies d'allocation d'actifs dans un portefeuille basé sur la théorie de Markowitz, afin d'évaluer leur performance sur la période 2017–2019.

Nous étudions et comparons trois approches d'investissement :

- Réallocation quotidienne** : Chaque jour, les pondérations du portefeuille sont réajustées de manière optimale selon le critère espérance-variance de Markowitz. Cette approche simule une gestion très réactive mais exigeante en données et en frais de transaction.
- Réallocation toutes les trois semaines** : Cette stratégie repose sur la même optimisation, mais avec une réallocation seulement toutes les trois semaines. Cela représente une gestion active plus réaliste et moins coûteuse que la réallocation quotidienne.
- Portefeuille équipondéré** : Le capital est réparti également entre les cinq actifs (20% chacun) tout au long de la période, sans réallocation. Il s'agit d'une stratégie simple et passive, souvent utilisée comme point de comparaison.

En complément, nous ajoutons un **benchmark** externe : l'évolution du cours de l'**or** (via un ETF représentatif), considéré comme une valeur refuge. Cela permet d'évaluer les performances relatives de nos portefeuilles par rapport à un actif traditionnellement perçu comme sûr.

Cette comparaison met en évidence les effets de la fréquence de réallocation, la pertinence de l'optimisation mathématique, ainsi que les compromis entre rendement, risque et simplicité de mise en œuvre.

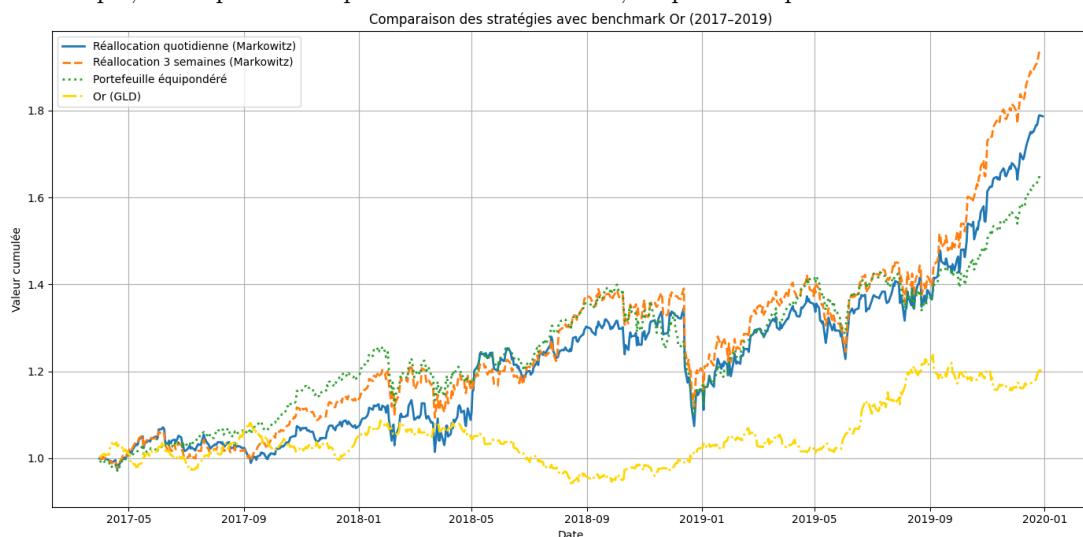


FIGURE 3.6 – Évolution des portefeuilles avec réallocation

Cette simulation démontre l'intérêt d'un ajustement périodique de la stratégie d'investissement afin de tenir compte de la dynamique des rendements et des risques des actifs financiers.

## Analyse des stratégies de gestion avec contraintes d'allocation

Dans cette étude, nous avons cherché à analyser la performance d'un portefeuille d'investissement construit selon le critère espérance-variance de Markowitz, en intégrant une contrainte supplémentaire importante : un plafond maximal d'allocation pour chaque actif. Cette contrainte reflète une gestion prudente, évitant de surpondérer un seul titre dans le portefeuille.

Nous avons comparé trois stratégies d'allocation différentes sur la même période historique :

- Une réallocation quotidienne, où le portefeuille est optimisé et rebalancé chaque jour ;
- Une réallocation à intervalles plus longs, ici toutes les trois semaines, afin d'observer l'impact d'une gestion moins fréquente sur la performance ;
- Une allocation fixe, équipondérée, servant de référence simple.

En plus de ces trois portefeuilles, nous avons introduit un benchmark externe, le cours de l'or, pour disposer d'une référence alternative d'actif refuge.

L'objectif principal était d'évaluer comment la fréquence de réallocation et la contrainte de plafonnement des poids influencent l'évolution cumulée du portefeuille sur la période étudiée. Cette démarche permet de mieux comprendre l'équilibre entre gestion active (réallocation fréquente) et gestion passive (réallocation peu fréquente ou fixe), tout en respectant des limites现实istes d'allocation.

Les résultats graphiques obtenus illustrent clairement les différences de performance entre ces approches et mettent en lumière l'importance du choix de la fréquence de réallocation et des contraintes d'allocation dans la gestion de portefeuille optimale.

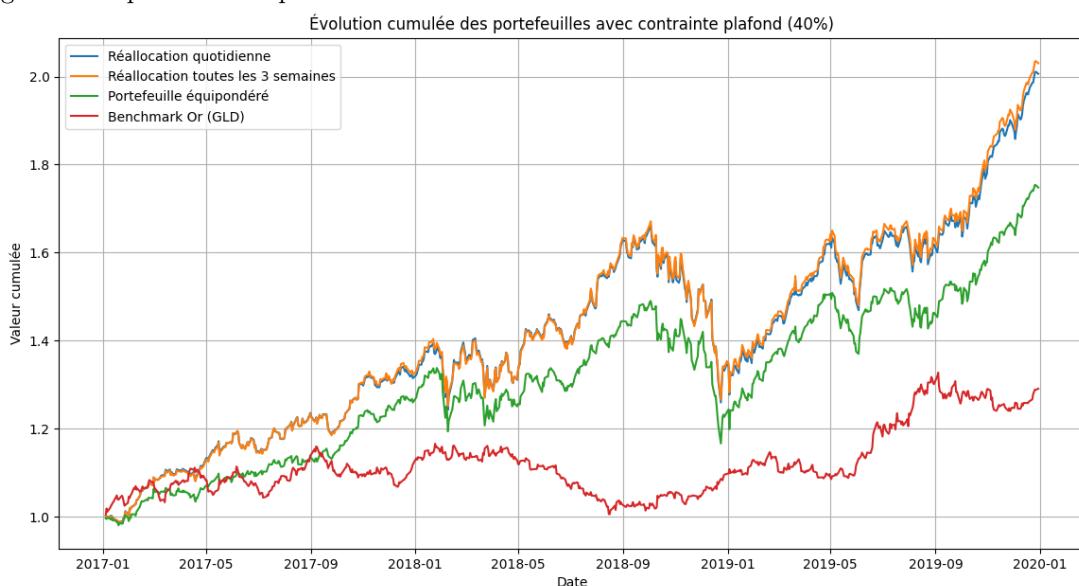


FIGURE 3.7 – Évolution des portefeuilles avec réallocation et contrainte d'allocation maximal  
Cette simulation démontre l'intérêt de contraindre l'allocation de la stratégie d'investissement afin de tenir compte de la dynamique des rendements et des risques des actifs financiers.

### 3.2.4 Analyse des Stratégies d'Allocation avec Contraintes et Critères de Risque Avancés

Dans cette simulation, nous avons cherché à évaluer et comparer différentes stratégies d'allocation de portefeuille en prenant en compte des contraintes现实istes, notamment un plafond maximal de 60 % d'investissement par actif pour limiter la concentration des risques.

Nous avons simulé la réallocation périodique des portefeuilles selon deux fréquences différentes : une réallocation quotidienne, qui permet de s'ajuster très fréquemment aux évolutions du marché, et une réallocation toutes les trois semaines, correspondant à une gestion un peu plus passive et moins coûteuse en termes de transactions.

Trois critères de risque distincts ont été pris en compte pour optimiser ces portefeuilles :

- **Ratio de Sharpe :**

$$\text{Sharpe} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

où  $R_p$  est le rendement attendu du portefeuille,  $R_f$  le taux sans risque, et  $\sigma_p$  la volatilité (écart-type) des rendements du portefeuille. Ce ratio mesure le rendement excédentaire par unité de risque total.

— **Ratio de Sortino :**

$$\text{Sortino} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_d}$$

où  $\sigma_d$  est l'écart-type des seules pertes (rendements négatifs) du portefeuille, appelé « risque à la baisse ». Ce critère se concentre donc uniquement sur les fluctuations défavorables.

— **Value at Risk (VaR)** : La VaR à un niveau de confiance  $\alpha$  (par exemple 5 %) correspond à la perte maximale que le portefeuille ne devrait pas dépasser avec une probabilité de  $1 - \alpha$ . Formellement,

$$\text{VaR}_\alpha = \inf\{x \in R : P(L > x) \leq \alpha\}$$

où  $L$  est la perte du portefeuille sur une période donnée. La VaR mesure donc le risque de perte extrême dans un scénario défavorable.

Nous avons ensuite comparé la performance cumulée de ces différentes stratégies optimisées, ainsi que celle d'un portefeuille simple où chaque actif est pondéré également, et celle du cours de l'or, servant de référence ou benchmark.

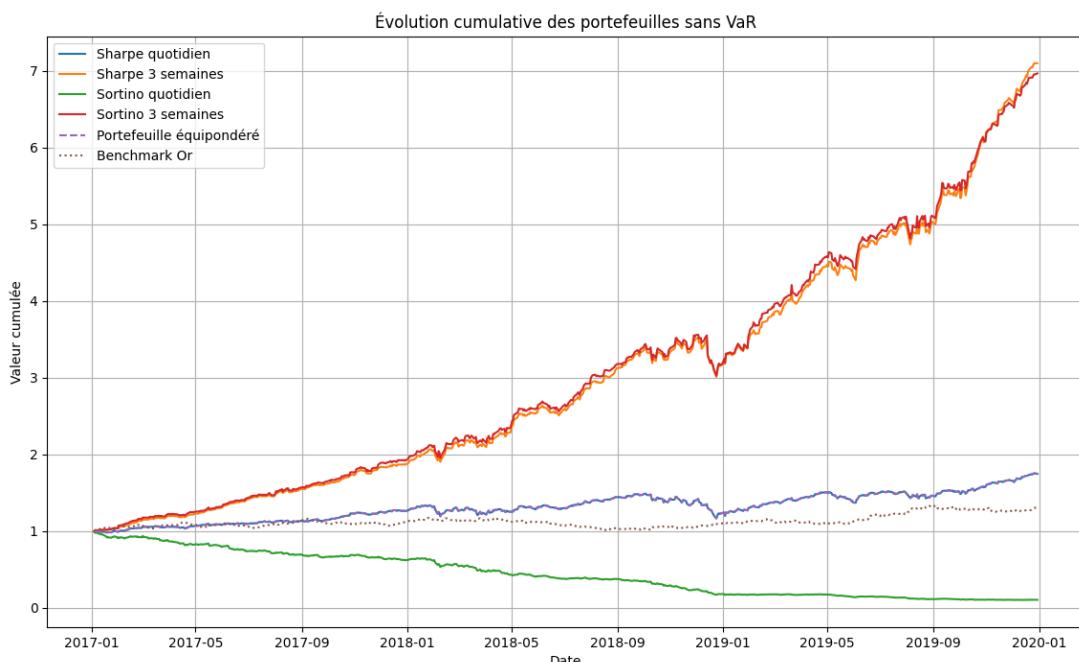


FIGURE 3.8 – Évolution des portefeuilles avec réallocation et critères avancés

**Analyse comparative des critères de risque selon la fréquence de réallocation :**

## Points clés

**Impact de la temporalité** : La fréquence de réallocation (quotidienne vs. toutes les 3 semaines) a une influence significative sur la performance des portefeuilles. Les courbes montrent des écarts marqués selon la périodicité choisie.

**Méthodes les plus performantes :**

- Les portefeuilles basés sur le **ratio Shape** (particulièrement la version quotidienne) semblent surpasser les autres méthodes sur la période analysée (2017-2020).
- Le **ratio Sortino** montre également de bons résultats, surtout pour la réallocation toutes les 3 semaines, suggérant une meilleure gestion du risque de baisse sur ce horizon.

**Comparaison avec le benchmark :**

- Le portefeuille équipondéré et le benchmark Or sont généralement moins performants que les stratégies de réallocation optimisées (Shape, Sortino)
- L'Or, bien que stable, ne suit pas la croissance des portefeuilles réalloués.

## Conclusion

La réallocation périodique améliore la performance, surtout avec des indicateurs comme le Shape ou le Sortino. La fréquence quotidienne est plus adaptée pour capturer les opportunités à court terme, tandis qu'une périodicité de 3 semaines pourrait mieux convenir aux investisseurs cherchant un équilibre entre performance et réduction du turnover. Les stratégies Shape quotidien et Sortino 3 semaines se démarquent comme les plus efficaces selon le contexte de marché.

### 3.2.5 Utilité des simulations de Monte Carlo dans l'optimisation de portefeuille

Les simulations de Monte Carlo jouent un rôle crucial dans l'évaluation et l'optimisation des portefeuilles financiers, notamment dans un cadre espérance-variance ou utilisant des critères de risque avancés comme la VaR ou le ratio de Sortino.

Contrairement à une approche basée uniquement sur des statistiques historiques fixes, Monte Carlo permet de générer un grand nombre de trajectoires potentielles des rendements futurs en tenant compte des aléas et incertitudes des marchés financiers. Ceci apporte plusieurs avantages majeurs :

- **Exploration de scénarios variés** : La simulation produit différentes évolutions possibles des actifs, incluant des événements extrêmes, offrant une vision plus complète du risque.
- **Estimation robuste du risque** : Les critères tels que la VaR ou le ratio de Sortino nécessitent une connaissance fine de la distribution des pertes. Monte Carlo permet d'approcher cette distribution de manière réaliste.
- **Test de la robustesse des stratégies** : En simulant l'allocation et la performance des portefeuilles sur de nombreuses trajectoires aléatoires, on identifie des allocations moins sensibles aux chocs de marché.
- **Optimisation dynamique** : Monte Carlo facilite l'étude de stratégies avec réallocation périodique en prenant en compte la dynamique aléatoire des prix sur toute la période d'investissement.

Ainsi, la simulation de Monte Carlo enrichit l'analyse en ajoutant une dimension probabiliste essentielle à la gestion de portefeuille moderne, permettant de mieux anticiper les performances et les risques réels.

## Simulation Monte Carlo avec allocation optimale basée sur le ratio de Sharpe

L'objectif de cette simulation est d'évaluer l'évolution potentielle d'un portefeuille d'actions sur un horizon d'un an, en prenant comme allocation initiale les poids qui maximisent le ratio de Sharpe calculé à partir des données historiques.

Le ratio de Sharpe est défini comme suit :

$$S = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

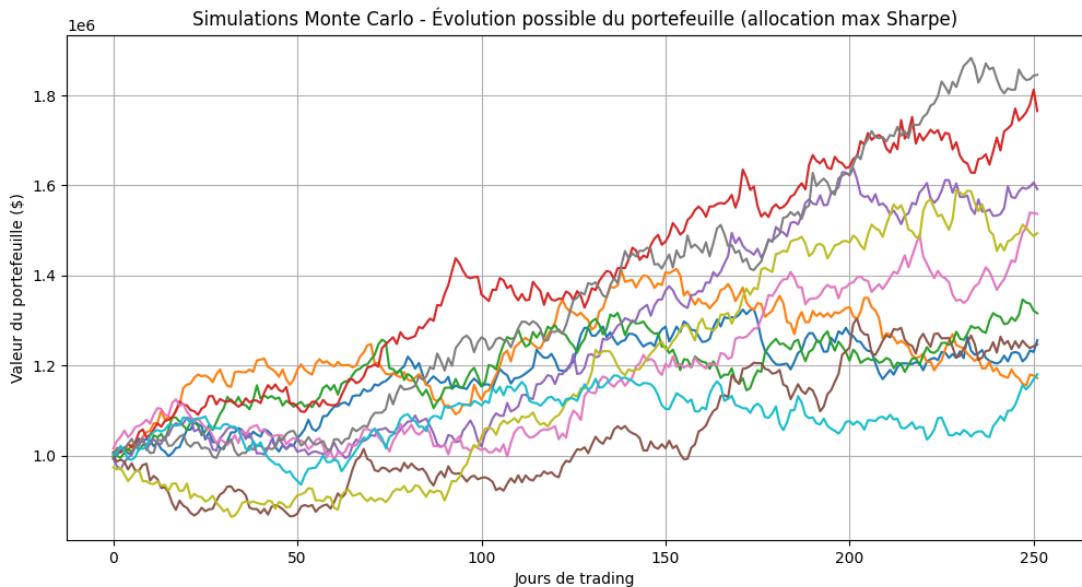
où  $R_p$  est le rendement attendu du portefeuille,  $R_f$  le taux sans risque, et  $\sigma_p$  la volatilité du portefeuille.

Les étapes principales sont :

- Téléchargement des données historiques des actifs considérés.
- Calcul des rendements moyens annuels et de la matrice de covariance des rendements.
- Optimisation des poids du portefeuille afin de maximiser le ratio de Sharpe, sous contrainte que la somme des poids soit égale à 1 et sans vente à découvert.
- Simulation Monte Carlo : génération de plusieurs trajectoires de rendements journaliers simulés selon une distribution normale multivariée, avec comme allocation initiale les poids optimaux.
- Calcul de la valeur cumulée du portefeuille à chaque jour pour chaque simulation.

Le résultat est un ensemble de trajectoires simulées représentant différentes évolutions possibles de la valeur du portefeuille.

Le graphique ci-dessous illustre un échantillon de ces trajectoires simulées, permettant de visualiser la variabilité potentielle des performances du portefeuille optimisé sur la période d'un an.



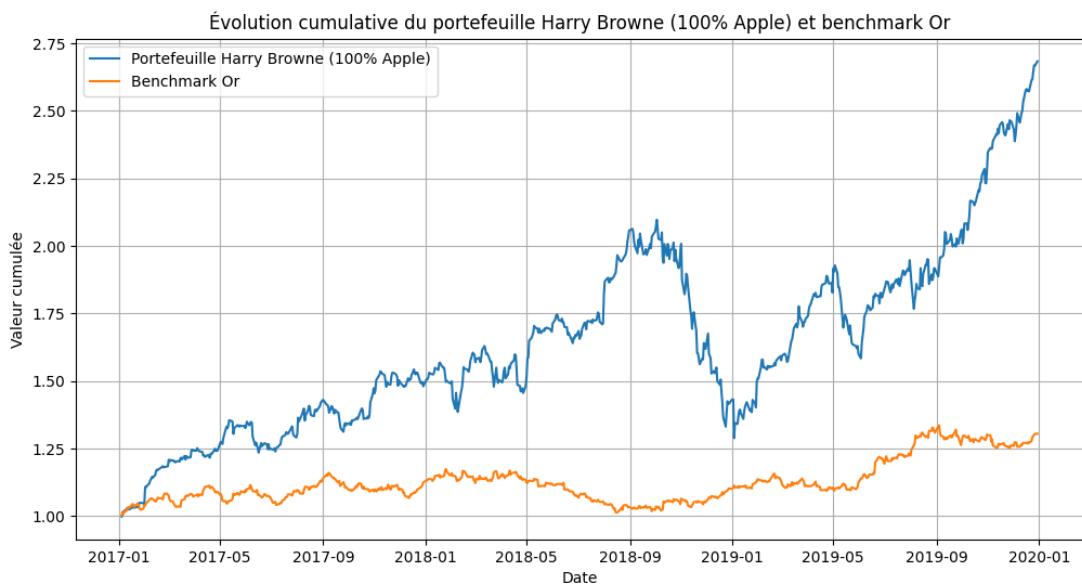
## 1 Comparaison avec le cas du Portefeuille Harry Browne

Le portefeuille Harry Browne, parfois appelé « portefeuille permanent », repose sur une philosophie d’investissement simple et pragmatique. Plutôt que de chercher à optimiser continuellement la composition du portefeuille à partir de modèles mathématiques complexes, cette stratégie propose une répartition fixe et équilibrée entre différentes classes d’actifs, chacune ayant un rôle spécifique dans la protection contre les différentes conditions économiques.

Typiquement, ce portefeuille est réparti entre actions, obligations, or et liquidités, visant à couvrir les phases de croissance économique, d’inflation, de déflation et de récession. Sa force réside dans sa simplicité et sa robustesse face à l’incertitude des marchés.

Dans notre contexte, ce portefeuille peut être vu comme une approche analogue aux méthodes d’optimisation plus sophistiquées, mais avec moins de technicité et une mise en œuvre plus directe. Son intérêt principal est de proposer une diversification pragmatique qui cherche à limiter les risques extrêmes tout en assurant une croissance modérée, sans nécessiter de réallocations fréquentes ni de calculs complexes.

Ainsi, bien que moins optimisé selon les critères mathématiques classiques comme le ratio de Sharpe ou le ratio de Sortino, le portefeuille Harry Browne constitue une référence simple et efficace, particulièrement adaptée à des investisseurs recherchant la stabilité et la simplicité.



## Simulation du portefeuille Harry Browne 100% Apple

Dans cette simulation, nous étudions l'évolution d'un portefeuille composé uniquement d'actions Apple, représentant une application simplifiée du concept de portefeuille Harry Browne. Ce portefeuille est comparé à un benchmark constitué du cours de l'or sur la même période, du 1er janvier 2017 au 31 décembre 2019.

L'objectif est d'observer la performance relative de ce portefeuille concentré en actions technologiques face à un actif refuge traditionnel. La valeur cumulée de chaque portefeuille est calculée à partir des rendements journaliers, permettant d'illustrer visuellement leur évolution dans le temps.

Cette comparaison met en lumière les différences de volatilité et de rendement entre un portefeuille concentré sur une action individuelle et un actif de diversification reconnu.

### 3.3 Application : Backtesting de stratégie

#### 3.3.1 Introduction

Le backtesting consiste à appliquer une stratégie d'investissement sur des données historiques afin d'en observer les résultats et d'en mesurer la performance dans des conditions passées. Il s'agit d'un outil fondamental en finance quantitative, car il permet de tester la robustesse d'un modèle, d'identifier ses faiblesses et d'évaluer son comportement dans différentes configurations de marché, sans engager de capital réel.

Dans ce document, je réalise un backtest complet d'une stratégie d'allocation de portefeuille fondée sur le modèle de Markowitz, qui repose sur l'optimisation du couple rendement/risque. Ce travail vise à évaluer la pertinence pratique du modèle de Markowitz, à en analyser les limites dans un cadre réaliste, et à observer l'impact des choix techniques (fenêtre d'apprentissage, fréquence de rééquilibrage, contraintes) sur les performances d'un portefeuille.

#### 3.3.2 Contexte

##### Portefeuille & Benchmark

Les données réelles utilisées couvrent la période du 1<sup>er</sup> janvier 2018 au 31 décembre 2023, et ont été récupérées via Python à partir de Yahoo Finance. Le portefeuille testé est constitué de cinq actifs représentatifs de différents secteurs et zones géographiques, et sa performance est comparée à celle du benchmark SPY, un ETF répliquant l'indice S&P 500.

##### Stratégie

La stratégie mise en œuvre repose sur le modèle d'optimisation moyenne-variance proposé par Markowitz. À chaque date de réallocation, tous les 63 jours ouvrés (soit environ tous les trois mois), les pondérations du portefeuille sont recalculées en résolvant un problème d'optimisation qui maximise le ratio de Sharpe, à partir des rendements moyens et de la matrice de covariance empirique estimés sur une fenêtre glissante de 63 jours précédents.

Cette approche repose sur l'hypothèse que les statistiques passées contiennent une information utile pour anticiper les performances futures.

Deux versions de la stratégie sont testées :

- une version **pure**, sans contrainte, qui peut potentiellement conduire à des allocations très concentrées sur un ou deux actifs ;
- une version **améliorée**, dans laquelle chaque actif est contraint à représenter entre 5 % et 40 % du portefeuille.

Ce cadre vise à limiter le risque de concentration excessive, favoriser une diversification structurelle, et mieux refléter les pratiques de gestion réalistes.

Entre chaque réallocation, les pondérations sont maintenues constantes et aucune transaction intermédiaire n'est effectuée. Le portefeuille est considéré comme autofinancé, sans apport ni retrait de capital, et les frais de transaction sont négligés dans cette étude.

##### Récapitulatif des données utilisées

###### — Actifs sélectionnés :

- ADYEN.AS (Adyen, Europe – technologie financière)
- VALE (Vale, Amérique du Sud – matières premières)
- SHOP (Shopify, Canada – e-commerce)
- ICLN (ETF énergies propres, global)

- JPM (JPMorgan, USA – banque)
- **Benchmark** : SPY (ETF répliquant le S&P 500)
- **Période d'analyse** : du 1<sup>er</sup> janvier 2018 au 31 décembre 2023
- **Taux sans risque** : 2 % par an (soit environ 0.02/252 par jour)
- **Fréquence de rééquilibrage** : tous les 63 jours ouvrés ( 3 mois)
- **Fenêtre d'apprentissage** : 63 jours avant chaque rééquilibrage

### i) Explication de la fenêtre utilisée

Le modèle de Markowitz repose sur l'estimation des rendements espérés et de la matrice de covariance à partir de données historiques. Le choix de la taille de la fenêtre d'observation est donc crucial pour garantir la pertinence des allocations obtenues.

Dans cette simulation, nous avons opté pour une fenêtre glissante de 3 mois (63 jours ouvrés), ce qui constitue un compromis équilibré entre réactivité et stabilité.

- Une fenêtre trop courte (par exemple, 1 jour ou quelques jours) serait fortement influencée par le bruit des marchés : une variation isolée et sans signification fondamentale pourrait fortement perturber les pondérations optimales. Le modèle deviendrait alors trop sensible, instable, et irréaliste.
- À l'inverse, une fenêtre trop longue (par exemple, 1 an) aurait tendance à lisser excessivement les évolutions récentes du marché. Elle intégrerait des informations obsolètes et risquerait de ne pas capter les dynamiques actuelles, comme les rotations sectorielles ou les changements de régime de volatilité.

La période de 3 mois permet donc de réagir aux mouvements récents du marché, tout en filtrant les chocs ponctuels ou anormaux, et de préserver une certaine stabilité dans les estimations statistiques.

C'est également un horizon fréquemment utilisé en pratique pour le rééquilibrage périodique dans les gestions quantitatives ou passives.

### ii) Actifs & Benchmark

Dans le cadre de cette simulation, j'ai sélectionné cinq actifs financiers présentant une diversification à la fois sectorielle et géographique, ce qui est parfaitement cohérent avec la philosophie du modèle de Markowitz, dont l'un des piliers est la réduction du risque global via la diversification des actifs en portefeuille.

Les actifs choisis sont :

- ADYEN.AS (Europe, fintech)
- VALE (Amérique du Sud, matières premières)
- SHOP (Canada, e-commerce)
- ICLN (ETF global sur les énergies renouvelables)
- JPM (États-Unis, secteur bancaire)

Ce choix permet de couvrir plusieurs zones économiques (Europe, Amérique du Nord, Amérique du Sud) ainsi que plusieurs secteurs d'activité (finance, technologie, énergie, ressources naturelles), ce qui limite la corrélation excessive entre les actifs. Cela renforce la logique de diversification au cœur du modèle de Markowitz, en réduisant l'exposition à des chocs systémiques spécifiques à une région ou à un secteur.

Par ailleurs, j'ai retenu le S&P 500 comme benchmark. Ce choix s'explique par le fait qu'il constitue l'indice de référence le plus suivi à l'échelle mondiale, représentant les 500 plus grandes entreprises américaines. Historiquement, le S&P 500 a affiché un rendement moyen d'environ 10 % par an sur les 80 dernières années, en faisant preuve d'une capacité remarquable à rebondir après chaque crise.

Enfin, pour donner un réel intérêt à la comparaison avec ce benchmark, il était essentiel que mes cinq actifs ne soient pas uniquement corrélés aux géants du S&P 500 (comme Apple, Microsoft, Amazon). Ce souci d'indépendance permet d'évaluer si le portefeuille optimisé de Markowitz parvient à battre ou non un indice solide et robuste, tout en s'appuyant sur une construction rationnelle et diversifiée.

### 3.3.3 Première simulation : Markowitz “pure”

Dans cette simulation, nous appliquons le modèle de Markowitz dans sa version la plus classique. L'objectif est de construire, tous les trois mois, un portefeuille optimal qui maximise le ratio de Sharpe, en se basant uniquement sur les données disponibles à cette date.

## Résultats

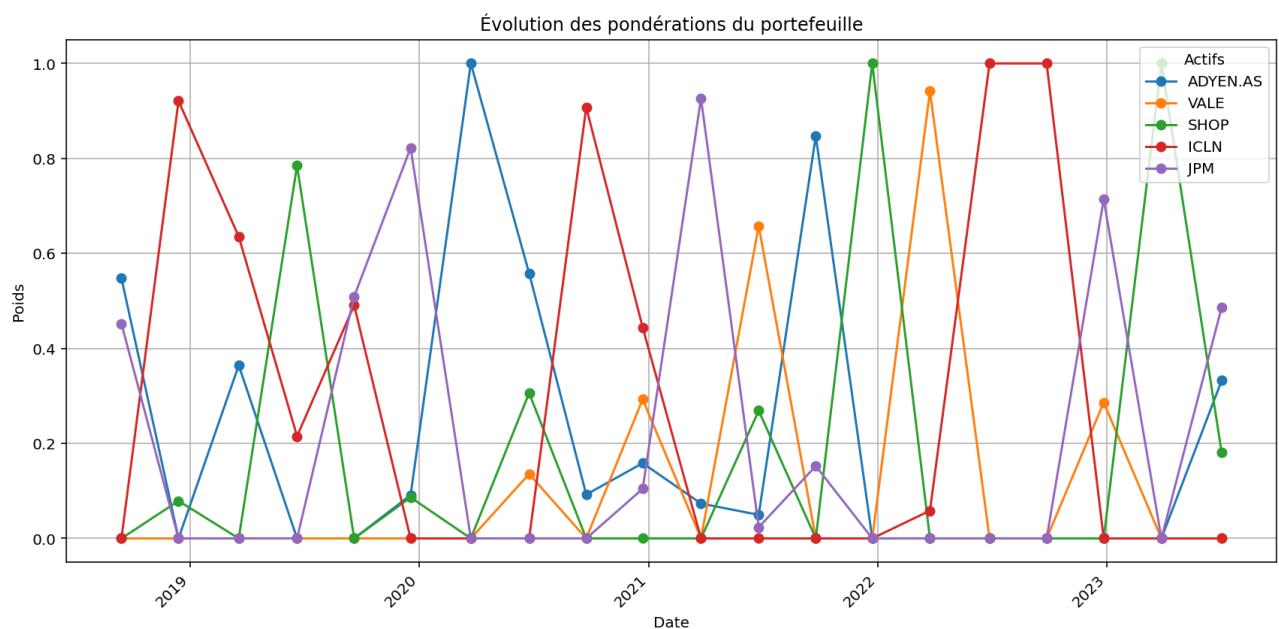
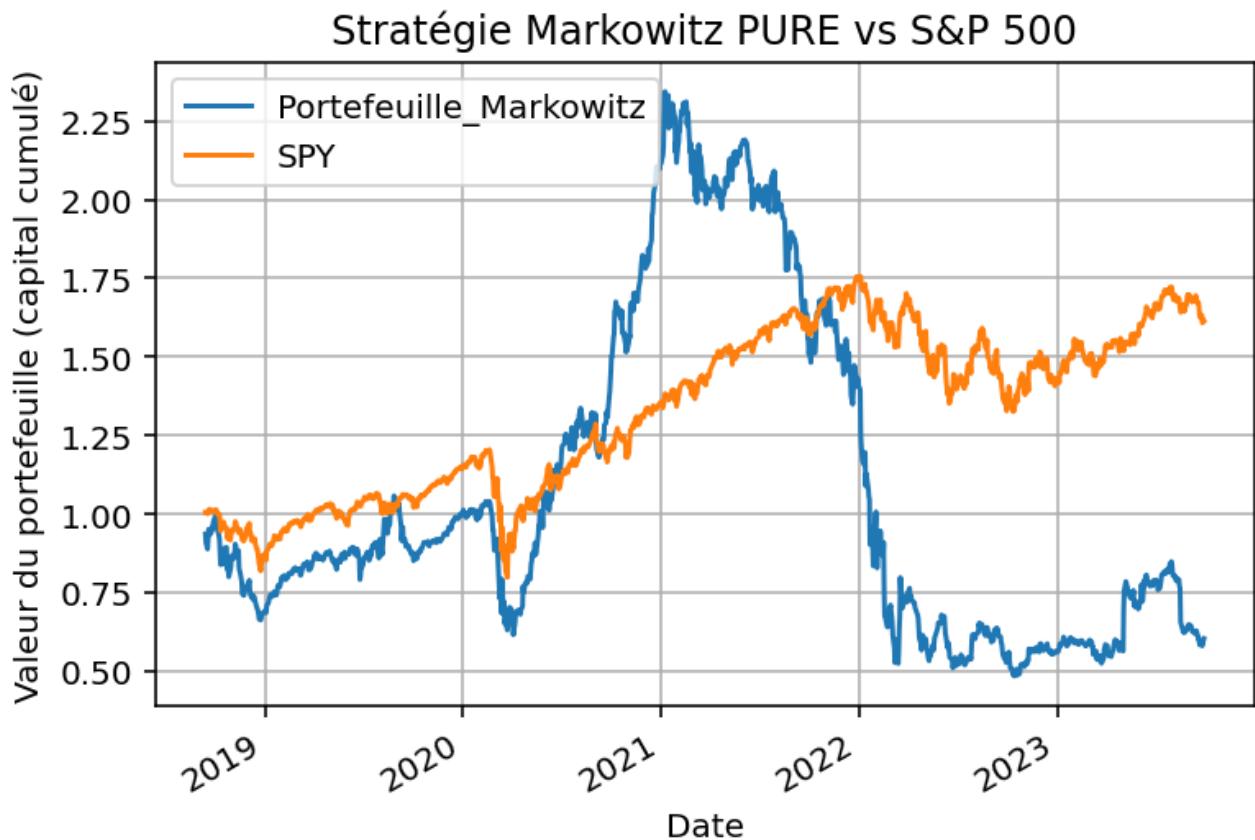
### 1) Performances comparées

#### — Portefeuille Markowitz :

- Rendement annuel moyen : **-8.40 %**
- Volatilité annuelle : **42.75 %**

- Ratio de Sharpe : **-0.24**
- Drawdown maximum : **-79.32 %**
- **SPY (ETF S&P 500)** :
  - Rendement annuel moyen : **9.93 %**
  - Volatilité annuelle : **21.49 %**
  - Ratio de Sharpe : **0.37**
  - Drawdown maximum : **-33.72 %**

## 2) Sortie graphique



## Analyse & Limites du modèle

L'analyse du backtest du portefeuille Markowitz met en évidence plusieurs phénomènes importants, à la fois en termes de performance, de volatilité et de cohérence avec la logique de gestion de portefeuille.

### 1. Une performance initiale prometteuse, suivie d'un effondrement brutal

Sur le graphique de capital cumulé, on observe qu'au début de la période (jusqu'en 2021), le portefeuille Markowitz surperforme nettement le S&P 500, atteignant un pic de plus de +125 %. Cependant, à partir de 2022, il subit une chute très violente, sans rebond significatif, finissant par sous-performer durablement le benchmark.

Ce comportement révèle une grande instabilité et une volatilité excessive du portefeuille optimisé, particulièrement mal adapté aux retournements de marché.

### 2. Une allocation très concentrée, contraire à l'esprit de diversification

Le graphique des pondérations montre que, régulièrement, le portefeuille alloue 100 % à un seul actif, ou à peine plus de deux, ce qui va à l'encontre de l'esprit même de la diversification que le modèle de Markowitz est censé incarner.

Cette concentration extrême est le résultat du fait que, sans contrainte, le modèle cherche à maximiser le ratio de Sharpe en misant entièrement sur l'actif ayant eu la meilleure performance sur les 3 derniers mois. Mais cette stratégie revient à faire l'hypothèse que la performance passée se prolongera à l'identique dans le futur, ce qui est souvent faux.

[resume] **Un rééquilibrage trop espacé face à un marché réactif** La stratégie étant réévaluée tous les 3 mois, cela signifie que si une forte exposition est prise sur un actif juste avant un retournement, le portefeuille reste bloqué dans cette allocation pendant 3 mois. Cela explique les chutes brutales visibles sur le graphique : lorsque l'actif fortement pondéré décroît, le portefeuille entier décroît, sans possibilité de réagir à court terme. **Une absence de prudence face à l'incertitude** Le modèle ne prend en compte ni le risque de concentration, ni l'instabilité des estimations ( $\mu$  et  $\Sigma$ ). Il considère les rendements passés sur 3 mois comme une estimation parfaite du futur, ce qui rend la stratégie naïve face aux retournements. Il n'y a pas non plus de régularisation du portefeuille (par exemple, pénaliser un changement trop fort de pondérations), ni de limitation de la volatilité cible. **Le S&P 500, un benchmark robuste et diversifié** En comparaison, le S&P 500 montre une trajectoire plus régulière et résiliente. Il :

- 3. — est naturellement diversifié (500 titres pondérés par capitalisation),
  - se rééquilibre de manière prudente et continue,
  - ne cherche pas à prédire le futur à partir du passé immédiat.

Il encaisse les crises (notamment en 2020 et 2022) de manière plus stable, ce qui renforce l'idée que la diversification passive peut battre une stratégie optimisée mal calibrée.

## Conclusion

Cette simulation Markowitz "pure", sans contrainte, illustre bien les limites pratiques d'un modèle pourtant théoriquement solide :

- En l'absence de garde-fous, il peut devenir extrêmement instable,
- Il est trop réactif à la performance récente,
- Et surtout, il peut générer des portefeuilles irréalistes en pratique (trop concentrés, trop risqués).

Cela justifie pleinement l'intérêt d'introduire, dans une seconde simulation, des contraintes de pondération minimale et maximale, pour mieux maîtriser le risque, renforcer la diversification, et rendre le modèle plus cohérent avec une gestion réaliste.

### 3.3.4 Markowitz "amélioré"

Dans cette simulation, nous appliquons le modèle de Markowitz dans une version améliorée, en intégrant des contraintes de pondération pour refléter une gestion plus réaliste. L'objectif est de construire, tous les trois mois, un portefeuille optimal qui maximise le ratio de Sharpe, en se basant uniquement sur les données disponibles à cette date.

Chaque actif est contraint à représenter entre 5 % et 40 % du portefeuille, ce qui permet d'assurer un niveau minimal de diversification tout en évitant une concentration excessive sur un seul actif.

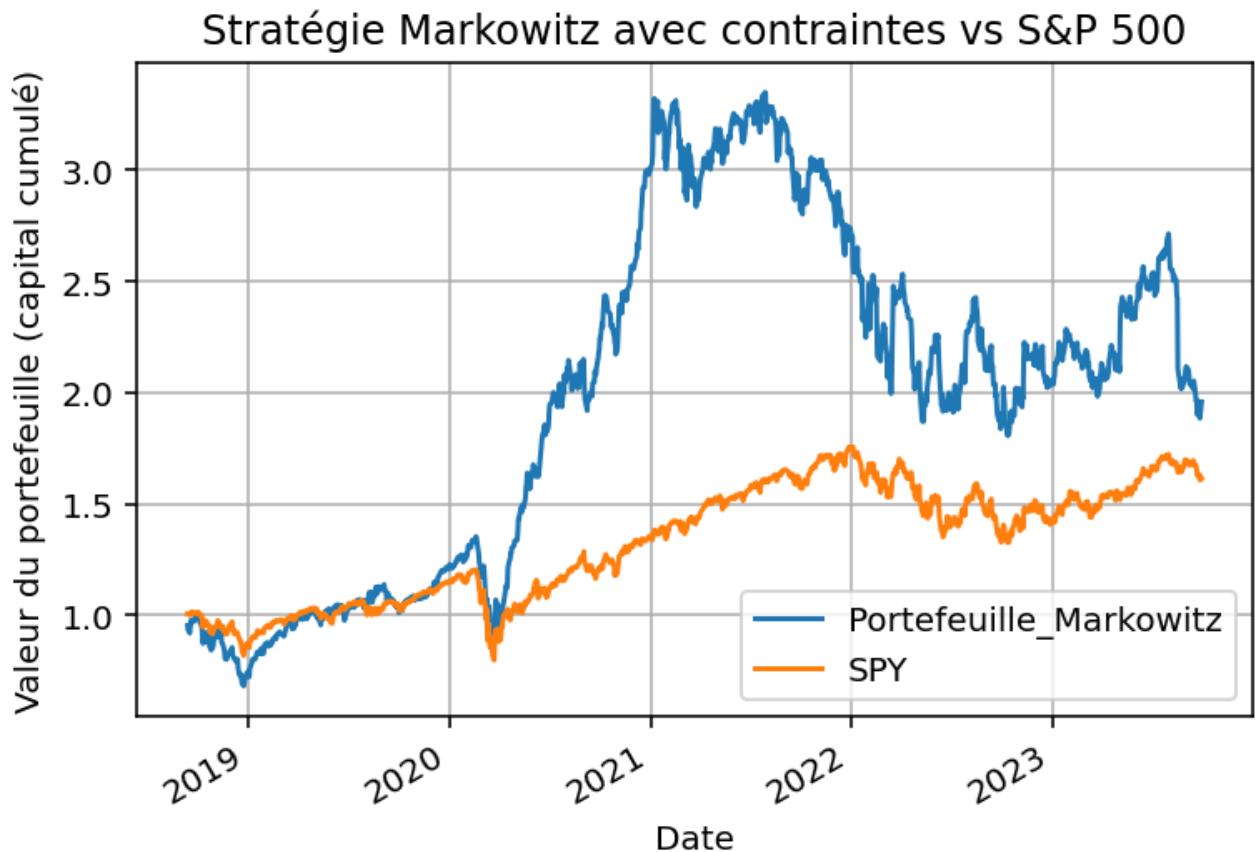
## Résultats

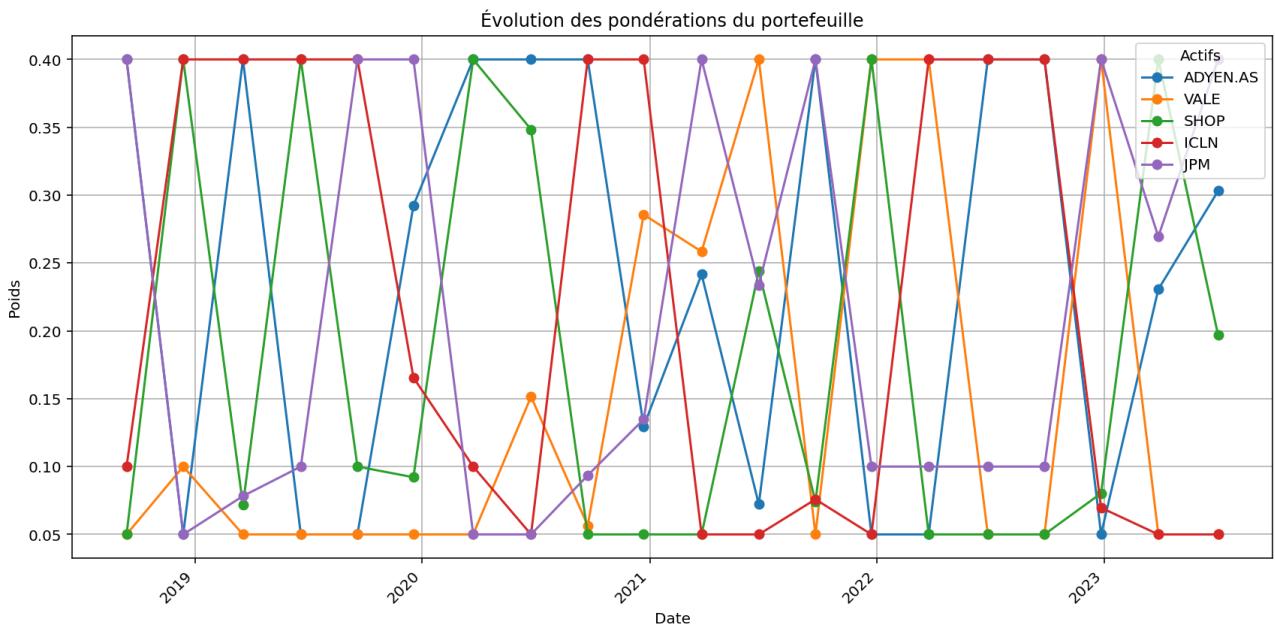
### 1) Performances comparées

- Portefeuille Markowitz (version améliorée) :

- Rendement annuel moyen : **15.48 %**
- Volatilité annuelle : **31.63 %**
- Ratio de Sharpe : **0.43**
- Drawdown maximum : **-46.08 %**
- **SPY (ETF S&P 500)** :
  - Rendement annuel moyen : **9.93 %**
  - Volatilité annuelle : **21.49 %**
  - Ratio de Sharpe : **0.37**
  - Drawdown maximum : **-33.72 %**

## 2) Sortie graphique





## Analyse & Limites du modèle

L'introduction de contraintes de pondération dans le modèle de Markowitz a un impact significatif sur le comportement du portefeuille, aussi bien en termes de performance que de stabilité. Cette version vise à garantir un niveau minimal de diversification et à éviter les concentrations excessives, en contraignant chaque actif à représenter au moins 5 % et au plus 40 % du portefeuille.

### 1. Une performance solide mais toujours volatile

Le portefeuille optimisé avec contraintes surperforme largement le S&P 500 sur une grande partie de la période, atteignant un pic de plus de +300 % à son maximum.

Cependant, cette performance s'accompagne d'une volatilité importante, notamment à la hausse. Cela souligne que même si les pertes sont mieux contenues, le portefeuille reste très sensible aux mouvements de marché.

La diversification introduite ne supprime pas la volatilité, mais permet d'en contrôler les effets destructeurs, en particulier lors des phases baissières.

### 2. Une vraie diversification qui protège en cas de crise

Contrairement à la version “pure”, ce portefeuille est toujours réparti sur l’ensemble des actifs, sans qu’un seul titre puisse dominer entièrement.

Ce mécanisme joue un rôle clé en cas de crise : si un actif chute fortement, son impact est limité grâce à la borne maximale de 40 %.

Cette protection structurelle permet d'amortir les pertes, et d'éviter les effondrements brutaux du portefeuille, comme on a pu le constater dans la simulation précédente.

Ainsi, la stratégie devient plus cohérente avec l'esprit initial du modèle de Markowitz, basé sur la réduction du risque par diversification.

### 3. Des pondérations plus équilibrées et réalistes

Le graphique d'évolution des pondérations montre que la répartition reste dynamique, mais sans excès : les changements sont plus progressifs, les actifs restent tous présents, et la stratégie devient plus crédible pour une mise en œuvre réelle.

Cela permet de limiter le turnover extrême, et de construire des portefeuilles plus stables et plus proches des pratiques de la gestion quantitative institutionnelle.

### 4. Une limite toujours centrale : l'estimation naïve des rendements

Malgré les améliorations structurelles, la stratégie souffre toujours d'une hypothèse discutable :

Elle suppose que les actifs qui ont bien performé sur les 3 derniers mois continueront à surperformer.

Or, ce raisonnement conduit à surpondérer les “gagnants récents”, ce qui fonctionne dans un marché tendanciel... mais devient risqué lors d'un retournement brutal.

Ce biais est visible dans le graphique : après une phase de forte croissance, le portefeuille subit une baisse rapide, car les pondérations reposaient sur des tendances qui ne se sont pas maintenues.

Le modèle n'a pas anticipé la rupture, ce qui révèle une limite fondamentale dans la manière d'estimer les rendements futurs.

## Conclusion

La version avec contraintes du modèle de Markowitz apporte une amélioration nette par rapport au modèle pur :

- elle permet une diversification structurelle réelle,
- protège mieux contre les chocs de marché,
- et conduit à des portefeuilles plus stables et réalistes.

Cependant, la stratégie reste fortement dépendante de la qualité de l'estimation des rendements, et donc vulnérable à des retournements inattendus.

### 3.3.5 Conclusion

Ce travail a permis de mettre en œuvre et d'évaluer une stratégie d'allocation de portefeuille fondée sur le modèle de Markowitz, à travers un processus de backtesting réalisé sur des données historiques réelles, collectées via Python à partir de Yahoo Finance.

L'étude s'est articulée autour de deux versions du modèle :

- une version théorique sans contrainte ;
- une version plus réaliste intégrant des bornes de pondération.

Les résultats obtenus mettent en évidence les forces mais aussi les limites de l'approche moyenne-variance dans un cadre réel. D'un côté, le modèle permet de formaliser rigoureusement l'allocation d'actifs à partir de données observées, et peut produire des portefeuilles performants lorsqu'il est bien encadré. D'un autre côté, les simulations ont montré qu'en l'absence de garde-fous, le modèle peut aboutir à des allocations irréalistes, excessivement concentrées et sensibles aux variations récentes des marchés.

L'introduction de contraintes de pondération a clairement amélioré la stabilité et la diversification du portefeuille, sans pour autant éliminer totalement la volatilité ou les effets de retournement. La principale limite structurelle reste la dépendance à l'estimation naïve des rendements, basée sur les performances récentes, ce qui peut entraîner une surpondération d'actifs en fin de cycle.

Ces observations soulignent l'importance :

- d'une calibration rigoureuse du modèle,
- de l'enrichissement de l'approche avec des méthodes plus robustes d'estimation,
- et de l'usage éventuel de techniques de régularisation.

Le backtesting s'avère ainsi un outil indispensable pour tester la viabilité concrète d'une stratégie avant son déploiement, en révélant non seulement ses performances potentielles, mais aussi ses zones de fragilité.

# Chapitre 4

## Conclusion

Ce travail de recherche avait pour objectif d'étudier la théorie moderne du portefeuille de Markowitz, en combinant une approche rigoureuse théorique (chapitre 2) et une mise en pratique à travers plusieurs simulations et applications (chapitre 3).

Dans un premier temps, nous avons présenté de manière détaillée les différents problèmes d'allocation issus du modèle de Markowitz : le  $\phi$ -problème, le  $\mu$ -problème, le  $\sigma$ -problème, ainsi que la maximisation du ratio de Sharpe. Pour chacun de ces problèmes, nous avons fourni une formulation mathématique précise et une résolution complète via la méthode du Lagrangien. Ces formulations permettent d'obtenir analytiquement des portefeuilles optimaux, selon les objectifs de rendement, de risque ou de compromis entre les deux. Cette partie a mis en évidence la structure quadratique du problème et son traitement par des outils d'optimisation convexes, tout en introduisant la notion de frontière efficiente, pilier central de la théorie de Markowitz.

Dans un second temps, nous avons confronté ces outils à la réalité des marchés financiers à travers une série d'applications concrètes. Dans la première application, nous avons comparé le portefeuille de Markowitz à des portefeuilles optimisés selon des mesures de risque extrême : la Value at Risk (VaR) et l'Expected Shortfall (ES). Cette étude a montré que, bien que le portefeuille de Markowitz présente un bon rendement espéré, il est plus exposé aux pertes sévères, alors que les portefeuilles basés sur la VaR ou l'ES offrent une meilleure protection contre les scénarios extrêmes. Cela souligne la limite de la variance comme unique indicateur de risque, et la nécessité d'intégrer des critères de gestion des pertes extrêmes.

Nous avons ensuite réalisé des simulations individuelles (applications Amin et Maxime) visant à évaluer des stratégies d'allocation avec ou sans contraintes. La version “pure” du modèle de Markowitz, testée sans bornes sur les poids, a révélé des comportements instables et des performances parfois inférieures au benchmark (S&P 500), notamment en raison de la concentration excessive du portefeuille. En revanche, la version “améliorée” avec contraintes (poids entre 5% et 40%) a permis d'obtenir une performance plus robuste, tout en maintenant un bon niveau de diversification, illustrant l'importance des contraintes pratiques dans la gestion de portefeuille réelle.

Enfin, nous avons étendu l'analyse à des critères d'optimisation alternatifs (ratio de Sortino, VaR simulée par Monte Carlo, etc.) et étudié l'effet de la fréquence de réallocation (quotidienne ou toutes les trois semaines). Ces résultats montrent qu'une stratégie rigide, même mathématiquement optimale, peut se révéler inefficace en pratique si elle néglige les dynamiques du marché, les coûts de transaction, ou les limites de prédictibilité des données historiques.

**En résumé**, ce TER met en lumière trois messages essentiels :

- La théorie de Markowitz constitue un socle fondamental pour comprendre l'optimisation du couple rendement-risque, grâce à une modélisation rigoureuse et géométriquement interprétable.
- Son application pratique doit être adaptée par l'ajout de contraintes réalistes, de mesures de risque plus fines, et d'une analyse critique des données historiques.
- L'utilisation d'approches empiriques (Monte Carlo, backtests) est indispensable pour tester la robustesse des modèles et construire des portefeuilles adaptés à la réalité des marchés.

En conclusion, ce travail montre que la gestion quantitative d'un portefeuille ne se limite pas à une modélisation mathématique élégante : elle requiert une prise en compte globale des contraintes, des risques extrêmes, et de la dynamique des marchés. L'enjeu majeur pour les praticiens comme pour les chercheurs réside désormais dans l'hybridation des modèles classiques avec des techniques plus flexibles, robustes et empiriques, capables de répondre à un environnement financier de plus en plus incertain.