第一题

a. 通过*Z-Y-X*欧拉角计算旋转矩阵

自定义函数rotationx，得到绕x轴旋转的旋转矩阵

自定义函数输出的结果：

```
clc, clear;
rotationx(pi/3)
```

```
ans = 3×3
    1.0000         0         0
         0    0.5000   -0.8660
         0    0.8660    0.5000
```

使用Robotics工具箱中的函数输出的结果：

```
rotx(pi/3)
```

```
ans = 3×3
    1.0000         0         0
         0    0.5000   -0.8660
         0    0.8660    0.5000
```

自定义函数rotationy，得到绕y轴旋转的旋转矩阵

自定义函数输出的结果：

```
rotationy(pi/3)
```

```
ans = 3×3
    0.5000         0    0.8660
         0    1.0000         0
   -0.8660         0    0.5000
```

使用Robotics工具箱中的函数输出的结果：

```
roty(pi/3)
```

```
ans = 3×3
    0.5000         0    0.8660
         0    1.0000         0
   -0.8660         0    0.5000
```

自定义函数rotationz，得到绕z轴旋转的旋转矩阵

自定义函数输出的结果：

```
rotationz(pi/3)
```

```
ans = 3×3
    0.5000   -0.8660         0
    0.8660    0.5000         0
         0         0    1.0000
```

使用Robotics工具箱中的函数输出的结果：

```
rotz(pi/3)
```

```
ans = 3×3
    0.5000   -0.8660         0
    0.8660    0.5000         0
         0         0    1.0000
```

自定义函数eulerzyx2rotm，通过输入的Z-Y-X欧拉角，计算出旋转矩阵

验算1：$\alpha = 10^{\circ}, \beta = 20^{\circ}, \gamma = 30^{\circ}$

自定义函数输出的结果：

```
eulerzyx2rotm(10, 20, 30, 'deg')
```

```
ans = 3×3
    0.9254    0.0180    0.3785
    0.1632    0.8826   -0.4410
   -0.3420    0.4698    0.8138
```

使用Robotics工具箱中的函数输出的结果：

```
rotz(10, 'deg') * roty(20, 'deg') * rotx(30, 'deg')
```

```
ans = 3×3
    0.9254    0.0180    0.3785
    0.1632    0.8826   -0.4410
   -0.3420    0.4698    0.8138
```

验算2：$\alpha = 10^{\circ}, \beta = 20^{\circ}, \gamma = 30^{\circ}$

自定义函数输出的结果：

```
eulerzyx2rotm(30, 90, -55, 'deg')
```

```
ans = 3×3
         0   -0.9962    0.0872
         0    0.0872    0.9962
   -1.0000         0         0
```

使用Robotics工具箱中的函数输出的结果：

```
rotz(30, 'deg') * roty(90, 'deg') * rotx(-55, 'deg')
```

```
ans = 3×3
         0   -0.9962    0.0872
         0    0.0872    0.9962
   -1.0000         0         0
```

证明单位正交旋转矩阵的6个约束条件

由上面的计算过程可以看出，欲得到一个3×3的旋转矩阵，实际上只需要输入3个参数（例如上面的3个欧拉角），这说明矩阵中只有3个参数是独立的。

证明 ${}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{-1} = {}^{A}_{B}R^{T}$

```
R = eulerzyx2rotm(30, 90, -55, 'deg')
```

```
R = 3×3
         0   -0.9962    0.0872
         0    0.0872    0.9962
   -1.0000         0         0
```

```
R_inv = inv(R)
```

```
R_inv = 3×3
         0         0   -1.0000
   -0.9962    0.0872         0
    0.0872    0.9962         0
```

```
R_T = R'
```

```
R_T = 3×3
         0         0   -1.0000
   -0.9962    0.0872         0
    0.0872    0.9962         0
```

由上面的计算可以看出，${}_A^BR = {}_B^AR^{-1} = {}_B^AR^T$ 是成立的。

b. 通过旋转矩阵得到欧拉角

自定义函数eulerzyx2rotm，可以根据旋转矩阵，计算出Z-Y-X欧拉角

```
R1 = eulerzyx2rotm(10, 20, 30, 'deg');
eul1 = rotm2eulerzyx(R) * 180/pi
```

```
eul1 = 1×3
     0    90   -85
```

```
R2 = eulerzyx2rotm(30, 90, -55, 'deg');
eul2 = rotm2eulerzyx(R2) * 180/pi
```

```
eul2 = 1×3
     0    90   -85
```

注意到第二个例子中输入的欧拉角和输出的欧拉角不完全相同，这是因为$\beta = 90^{\circ}$使得旋转矩阵出现奇异，在这种情况下一般取$\alpha = 0^{\circ}$，因此最终算得的欧拉角和最初输入的欧拉角不完全相同，但是它们所表示的变换的效果是一样的。

c. 仅简单地绕*y*轴旋转

```
Ry = rotationy(20, 'deg')
```

```
Ry = 3×3
    0.9397         0    0.3420
         0    1.0000         0
   -0.3420         0    0.9397
```

```
BP = [1; 0; 1]
```

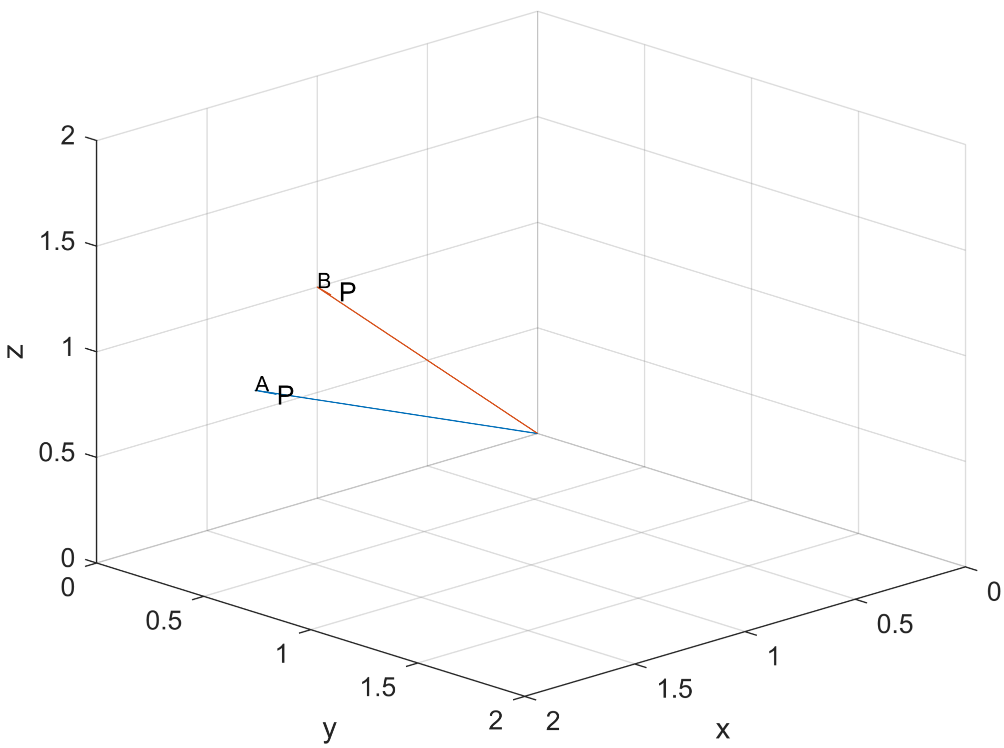
```
BP = 3×1
     1
```

```
     0
     1
```

```
AP = Ry * BP
```

```
AP = 3×1
    1.2817
         0
    0.5977
```

```
f1 = figure;
scale=1;
quiver3(0,0,0, AP(1),AP(2),AP(3),scale);
text(AP(1),AP(2),AP(3),'^A P');
hold on;
quiver3(0,0,0, BP(1),BP(2),BP(3),scale);
text(BP(1),BP(2),BP(3),'^B P');
hold on;
grid on;%绘网格
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
axis([0 2 0 2 0 2]);
view([135.86 23.75])
```



从图中可以看出，^{A}P与^{B}P夹角约为20度（此时将旋转矩阵视作变换算子）

第二题

a. 计算齐次变换矩阵

第一个例子：

$\alpha = 10°, \beta = 20°, \gamma = 30°, {}^{A}P_{B} = \{1, 2, 3\}^{T}$

自定义函数输出结果如下：

```
translation(1,2,3) * trotationz(10, 'deg') * trotationy(20,'deg') * trotationx(30,'deg')
```

```
ans = 4×4
    0.9254    0.0180    0.3785    1.0000
    0.1632    0.8826   -0.4410    2.0000
   -0.3420    0.4698    0.8138    3.0000
         0         0         0    1.0000
```

工具箱中函数输出结果如下：

```
transl(1,2,3) * trotz(10, 'deg') * troty(20,'deg') * trotx(30, 'deg')
```

```
ans = 4×4
    0.9254    0.0180    0.3785    1.0000
    0.1632    0.8826   -0.4410    2.0000
   -0.3420    0.4698    0.8138    3.0000
         0         0         0    1.0000
```

第二个例子：

$\alpha = 0°, \beta = 20°, \gamma = 0°, {}^{A}P_{B} = \{3, 0, 1\}^{T}$

自定义函数输出结果如下：

```
translation(3,0,1) * trotationz(0, 'deg') * trotationy(20,'deg') * trotationx(0,'deg')
```

```
ans = 4×4
    0.9397         0    0.3420    3.0000
         0    1.0000         0         0
   -0.3420         0    0.9397    1.0000
         0         0         0    1.0000
```

工具箱中函数输出结果如下：

```
transl(3,0,1) * trotz(0, 'deg') * troty(20,'deg') * trotx(0, 'deg')
```

```
ans = 4×4
    0.9397         0    0.3420    3.0000
         0    1.0000         0         0
   -0.3420         0    0.9397    1.0000
         0         0         0    1.0000
```

b. 坐标变换

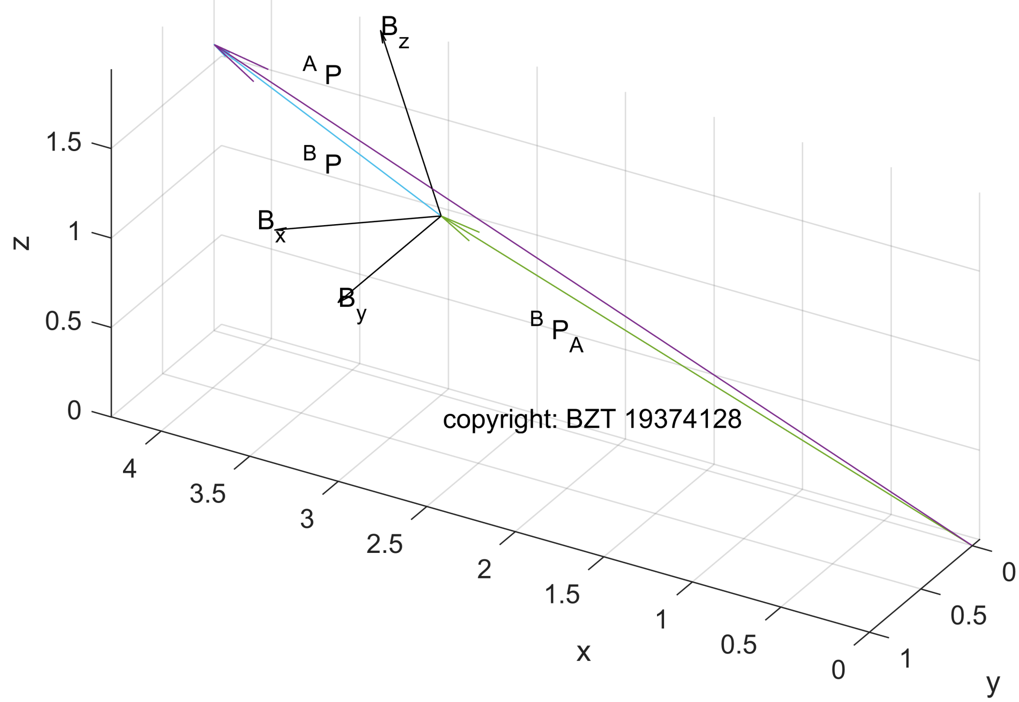
已知$\alpha = 0°, \beta = 20°, \gamma = 0°, {}^{A}P_{B} = \{3, 0, 1\}^{T}$以及${}^{B}P = \{1, 0, 1\}$可以按照如下计算出${}^{A}P$

```
APB = [3;0;1];
T = translation(3,0,1) * trotationz(0, 'deg') * trotationy(20,'deg') * trotationx(0,'deg');
BP = [1;0;1];
AP = T*([BP;1]);
```

```
AP = AP(1:3)
```

```
AP = 3×1
    4.2817
         0
    1.5977
```

```
AoriginB = APB;
Bx = T(1:3, 1); By = T(1:3, 2); Bz = T(1:3, 3);
f2 = figure;
scale=1;
quiver3(APB(1),APB(2), APB(3), Bx(1),Bx(2),Bx(3),scale, 'filled','black');
text(APB(1)+Bx(1)+0.1,APB(2)+Bx(2),APB(3)+Bx(3),'B_x');
hold on;
quiver3(APB(1),APB(2), APB(3), By(1),By(2),By(3),scale, 'filled','black');
text(APB(1)+By(1),APB(2)+By(2),APB(3)+By(3),'B_y');
hold on;
quiver3(APB(1),APB(2), APB(3), Bz(1),Bz(2),Bz(3),scale, 'filled','black');
text(APB(1)+Bz(1),APB(2)+Bz(2),APB(3)+Bz(3),'B_z');
hold on;
quiver3(0,0,0, AP(1),AP(2),AP(3),scale);
text(AP(1)-0.5,AP(2),AP(3),'^A P');
hold on;
quiver3(0,0,0, APB(1),APB(2), APB(3),scale);
text(APB(1)-0.5,APB(2),APB(3)-0.5,'^B P_A');
hold on;
quiver3(APB(1),APB(2), APB(3), AP(1)-APB(1),AP(2)-APB(2),AP(3)-APB(3),scale);
text(AP(1)-0.5,AP(2),AP(3)-0.5,'^B P');
text(2.7, 0.5, 0.2, "copyright: BZT 19374128")
hold on;
grid on;%绘网格
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
axis equal;
view([-149.82 29.19])
```



题目中要求利用数值验证齐次变换矩阵的三种描述，我将这些数值体现在了上面这个图像中，并逐一解释：

- 它是位姿的描述：在上图中，通过齐次变换矩阵画出了坐标轴{B}，可以看出，坐标轴{A}经过平移和旋转得到了坐标轴{B}，这和齐次变换矩阵中蕴含的信息是相同的。
- 它是变换映射：如上图所示，齐次变换矩阵可以将 ${}^{B}P$ （蓝色箭头）映射为 ${}^{A}P$ （紫色箭头）
- 它是变换算子：上图也可以理解为，将蓝色箭头对应的向量旋转再平移后得到了紫色箭头对应的向量

c. 利用符号运算，计算齐次变换矩阵的逆矩阵

我的MATLAB中没有symbolic math toolbox，无法进行符号运算

因此对于此题，我使用了mathematica软件进行解决

具体程序见文件”齐次变换逆矩阵.nb“，可以通过Wolfram Mathemtica或者Wolfram Player将其打开运行

或者打开“齐次变换逆矩阵.pdf”文件查看

d. 齐次变换矩阵的运算

i) 利用变换图说明关系

```
ABT = transl(1,2,3) * trotz(10, 'deg') * troty(20,'deg') * trotx(30, 'deg');
BCT = transl(3,0,1) * trotz(0, 'deg') * troty(20,'deg') * trotx(0, 'deg');
ACT = ABT*BCT;
Bx = ABT(1:3, 1); By = ABT(1:3, 2); Bz = ABT(1:3, 3);
Cx = ACT(1:3, 1); Cy = ACT(1:3, 2); Cz = ACT(1:3, 3);
```

```
Bo = ABT(1:3, 4);
Co = ACT(1:3, 4);Co = double(Co);
```

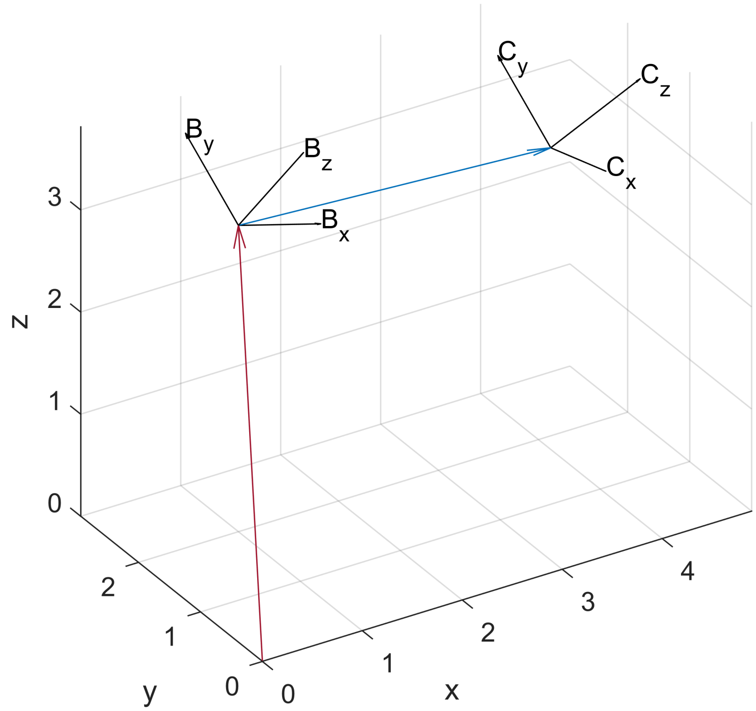
```
f3 = figure;
scale=1;
quiver3(Bo(1),Bo(2),Bo(3),Bx(1),Bx(2),Bx(3),scale, 'filled','black');
text(Bo(1)+Bx(1), Bo(2)+Bx(2), Bo(3)+Bx(3), "B_x");
hold on;
quiver3(Bo(1),Bo(2),Bo(3),By(1),By(2),By(3),scale, 'filled','black');
text(Bo(1)+By(1), Bo(2)+By(2), Bo(3)+By(3), "B_y");
hold on;
quiver3(Bo(1),Bo(2),Bo(3),Bz(1),Bz(2),Bz(3),scale, 'filled','black');
text(Bo(1)+Bz(1), Bo(2)+Bz(2), Bo(3)+Bz(3), "B_z");
hold on;

quiver3( Co(1), Co(2), Co(3), Cx(1), Cx(2), Cx(3), scale, 'filled','black');
text(Co(1)+Cx(1), Co(2)+Cx(2), Co(3)+Cx(3), "C_x");
hold on;
quiver3(Co(1),Co(2),Co(3),Cy(1),Cy(2),Cy(3),scale, 'filled','black');
text(Co(1)+Cy(1), Co(2)+Cy(2), Co(3)+Cy(3), "C_y");
hold on;
quiver3(Co(1),Co(2),Co(3),Cz(1),Cz(2),Cz(3),scale, 'filled','black');
text(Co(1)+Cz(1), Co(2)+Cz(2), Co(3)+Cz(3), "C_z");
hold on;

quiver3(0,0,0, Bo(1), Bo(2), Bo(3), scale);
hold on;
quiver3(Bo(1), Bo(2), Bo(3), Co(1)-Bo(1), Co(2)-Bo(2), Co(3)-Bo(3), scale);

grid on;%绘网格
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
axis equal;

view([-31.80 29.72])
```



ii) 利用${}^A_C T, {}^B_C T$ 求解 ${}^A_B T$

```
ACT * (inv(BCT))
```

```
ans = 4×4
    0.9254    0.0180    0.3785    1.0000
    0.1632    0.8826   -0.4410    2.0000
   -0.3420    0.4698    0.8138    3.0000
         0         0         0    1.0000
```

```
ABT
```

```
ABT = 4×4
    0.9254    0.0180    0.3785    1.0000
    0.1632    0.8826   -0.4410    2.0000
   -0.3420    0.4698    0.8138    3.0000
         0         0         0    1.0000
```

可以看到利用${}^A_C T, {}^B_C T$ 求解 ${}^A_B T$ 和原来的 ${}^A_B T$ 相同

iii) 利用${}^A_C T, {}^A_B T$ 求解 ${}^B_C T$

```
inv(ABT) * ACT
```

```
ans = 4×4
    0.9397   -0.0000    0.3420    3.0000
```

```
   -0.0000    1.0000    0.0000    0.0000
   -0.3420    0.0000    0.9397    1.0000
         0         0         0    1.0000
```

```
BCT
```

```
BCT = 4×4
    0.9397         0    0.3420    3.0000
         0    1.0000         0         0
   -0.3420         0    0.9397    1.0000
         0         0         0    1.0000
```

可以看到，利用${}_{C}^{A}T,{}_{B}^{A}T$求解${}_{C}^{B}T$和原来的${}_{C}^{B}T$相同