СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ „ИВАН САЛАБАШЕВ“ – СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир „Иван Салабашев“

3 декември 2022 г.

Тема за 7 клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачите от 1 до 10 има 4 отговора, само един от които е верен. Отговорът на всяка от задачите от 11 до 15 е число. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 5 се присъждат по 2 точки. За верен отговор на всяка от задачите от 6 до 10 се присъждат по 4 точки. За верен отговор на всяка от задачите от 11 до 15 се присъждат по 6 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори.

Отговорите и решенията на задачите може да намерите на адрес https://math.softuni.bg/. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/salabashev/ след 24.12.2022 г.

Журито Ви пожелава приятна работа.

1. Ако диаметърът на цилиндър е увеличен с 25%, то с колко процента трябва да се намали височината му, така че обемът му да не се промени?

А) 10 **Б)** 25 **В)** 36 **Г)** 50

2. Числената стойност на израза

$$A = \frac{49}{64} + 7a + 16a^2$$

при $a = \dfrac{1}{32}$ е:

А) $\dfrac{1}{16}$ **Б)** 1 **В)** $\dfrac{1}{8}$ **Г)** 4

3. Каква е най-голямата стойност на израза $\dfrac{x+y}{x}$, ако $-4 \leq x \leq -2$ и $2 \leq y \leq 4$?

А) $-\dfrac{1}{2}$ **Б)** -1 **В)** $\dfrac{1}{2}$ **Г)** 0

4. Емил и Сашо бягат по кръгла писта в противоположни посоки, стартирайки от диаметрално противоположни точки като се движат с постянни скорости. Те се срещат за първи път, след като Сашо е изминал 100 метра. Следващата им среща е след като Емил изминал 150 метра след мястото на първата им среща. Дължината на пистата в метри е:

А) 350 **Б)** 300 **В)** 250 **Г)** 400

5. Нека O е вътрешна точка за изпъкналия четириъгълник $ABCD$ и разстоянията от точка O до върховете на четириъгълника са 1 cm, 2 cm, 4 cm и 7 cm в някакъв ред. Каква е най-голямата възможна стойност на лицето на $ABCD$ в квадратни сантиметри?

А) 45 **Б)** 26 **В)** 48 **Г)** 24

6. Намерете броят на естествените числа a, $1 \leq a \leq 100$, за които съществува естествено число b, за което

$$5a^2 - 4ab - 2a + b^2 + 1$$

се дели на 11.

А) 10 **Б)** 15 **В)** 9 **Г)** 11

7. Намерете сборът от коефициентите пред нечетните степени на x в нормалния вид на многочлена

$$f(x) = (2x+3)^3 - (4x+1)^3.$$

А) 27 **Б)** -14 **В)** -26 **Г)** 14

8. Нека S е множеството от първите 2005 естествени числа, които се делят на 4, а T е множеството от първите 2005 естествени числа, които се делят на 6. Колко на брой са числата, които са едновременно в S и в T?

А) 1001 **Б)** 500 **В)** 333 **Г)** 668

9. В $\triangle ABC$ имаме $AB = 25$ и $AC = 42$. Точки D и E са съответно върху страните AB и AC, като $AD = 19$ и $AE = 14$. Отношението на лицата на $\triangle ADE$ и четириъгълника $BCED$ е:

А) $\dfrac{266}{1521}$ **Б)** $\dfrac{1}{3}$ **В)** $\dfrac{19}{56}$ **Г)** 1

10. Колко от числата $1, 2, 3, 4, \ldots, 10000$ съдържат в записа си точно две съседни цифри, равни на 9? (Числата 993 и 1992 са от търсения вид, докато 9295 и 1999 не са.)

А) 280 **Б)** 300 **В)** 268 **Г)** 261

11. Да се намери броя на всички естествени числа n, $4 \leq n \leq 100$, за които съществува квадратна таблица $n \times n$, в чиито клетки могат ада се запишат цели числа така, че сборът на числата във всеки квадрат 2×2 и 3×3 е четно число, но сборът на числата в цялата таблица да е нечетно число.

12. На дъската са записани дробите

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{10}.$$

За един ход Иван избира две от записаните на дъската числа x и y, изтрива ги и на тяхно място записва числото $\dfrac{xy}{x+y}$. След девет хода на дъската останало само едно число. Ако s е сборът от всички възможни стойности на това число, да се намери $220s$.

13. Ангел и Боби са на разстояние 20 километра един от друг. Те тръгват на велосипеди едновременно един срещу друг, движат се с постоянни скорости, като скоростта на Ангел е три пъти по-голяма от тази на Боби. Разстоянието между двамата намалява с 1 километър всяка минута. След 5 минути Ангел спрял и изчакал Боби да пристигне при него. След колко минути след като са започнали да се движат един срещу друг, Боби ще пристигне при него?

14. Нека p, q и r са прости числа, за които

$$p^q + 1 = r.$$

Намерете сумата $p + q + r$.

15. Дадена е таблица с 2 реда и 2022 стълба. Едно оцветяване на клетките в син, зелен или жълт цвят (всяка клетка се оцветява в един цвят) се нарича *добро*, ако всеки две клетки, които имат обща страна са разноцветни. Нека B е броят на всички добри оцветявания. Каква е максималната степен на числото 3, която дели B?