CS–308 — Calcul Quantique

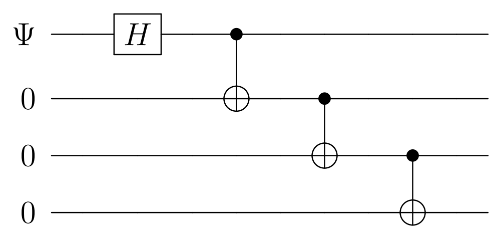
Homework VII — François Dumoncel — 314420

Exercice 1 *Un circuit et sa sortie*

Dans cet exercice $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Pour la matrice unitaire ci-dessous on vous demande de dessiner le circuit et de donner l'état de sortie quand l'état initial d'entrée est $|\Psi\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$. Ici $(CNOT)_{ij}$ est la porte $CNOT$ où i est le bit de contrôle et j est le target-bit.

$$(CNOT)_{34}(CNOT)_{23}(CNOT)_{12}(H_1 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}).$$

Solution. On commence par donner la représentation visuelle du circuit



On calcule maintenant l'état final

$$\begin{aligned}(H_1 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I})(|\Psi\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) &= H_1|\Psi\rangle \otimes |000\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\alpha+\beta)|0\rangle + (\alpha-\beta)|1\rangle\Big) \otimes |000\rangle \\ &= \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|0000\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|1000\rangle = |\Psi(t_1)\rangle\end{aligned}$$

$$(CNOT)_{12}|\Psi(t_1)\rangle = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|0000\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|1100\rangle = |\Psi(t_2)\rangle$$

$$(CNOT)_{23}|\Psi(t_2)\rangle = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|0000\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|1110\rangle = |\Psi(t_3)\rangle$$

$$(CNOT)_{34}|\Psi(t_3)\rangle = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|0000\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|1111\rangle = |\Psi(t_4)\rangle$$

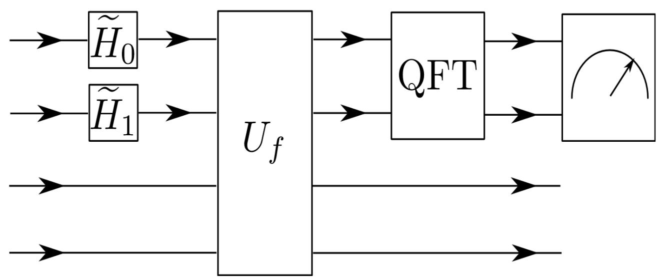
Donc l'état à la sortie du circuit est

$$|\Psi_{\text{fin}}\rangle = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|0000\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|1111\rangle.$$

Exercice 2 *Effet des "imperfections" sur quelques portes dans l'algorithme de Shor* On considère une fonction sur $\mathbb{Z}$, de période égale à 2. C'est à dire $f(x) = f(x+2)$, $x \in \mathbb{Z}$. Nous voulons étudier le circuit ci-dessous (voir figure) où les portes de Hadamard usuelles sont modifiées par une perturbation aléatoire

$$\tilde{H}_0 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + (-1)^b e^{i\varphi_0} |1\rangle \Big), \quad \text{où } b = 0, 1.$$
$$\tilde{H}_1 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + (-1)^b e^{i\varphi_1} |1\rangle \Big), \quad \text{où } b = 0, 1.$$

avec φ_0 et φ_1 sont uniformément distribués sur $[0, 2\pi]$



Le circuit est initialisé dans l'état $|\Psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$. On prendra la convention $|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle$, $|0\rangle \otimes |1\rangle = |1\rangle$, $|1\rangle \otimes |0\rangle = |2\rangle$, $|1\rangle \otimes |1\rangle = |2\rangle$ et les définitions pour $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$U_f |x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y + f(x)\rangle$$
$$QFT |x\rangle = \frac{1}{2} \sum_{y=0}^{3} \exp\left(\frac{2\pi i}{4} xy \right) |y\rangle$$

(a) Montrez que l'état après les portes de type Hadamard est :

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + e^{i\varphi_1} |1\rangle + e^{i\varphi_0} |2\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_0)} |3\rangle) \otimes |0\rangle .$$

Solution. On calcule aisément que

$$\begin{aligned}
(\tilde{H}_0 \otimes \tilde{H}_1 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) |\Psi_0\rangle &= \tilde{H}_0 |0\rangle \otimes \tilde{H}_1 |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi_0} |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi_1} |1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\
&= \frac{1}{2}(|0\rangle + e^{i\varphi_1} |1\rangle + e^{i\varphi_0} |2\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_0)} |3\rangle) \otimes |0\rangle \\
&= \frac{1}{2}(|00\rangle + e^{i\varphi_1} |10\rangle + e^{i\varphi_0} |20\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_0)} |30\rangle).
\end{aligned}$$

(b) Montrez que l'état juste avant la mesure est

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{4} \sum_{y=0}^{3} (1 + e^{i(\pi y + \varphi_0)}) |y\rangle \otimes |f(0)\rangle + \left(e^{i(\varphi_1 + \frac{\pi}{2} y)} + e^{i(\varphi_0 + \varphi_1 + \frac{3\pi}{2} y)} \right) |y\rangle \otimes |f(1)\rangle .$$

Solution. On calcule l'état après l'oracle U_f

$$\begin{aligned}
U_f|\Psi_1\rangle &= \frac{1}{2}(U_f|0\rangle\otimes|0\rangle + e^{i\varphi_1}U_f|1\rangle\otimes|0\rangle + e^{i\varphi_0}U_f|2\rangle\otimes|0\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle\otimes|0\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|0\rangle\otimes|f(0)\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle\otimes|f(1)\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle\otimes|f(2)\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}U_f|3\rangle\otimes|f(3)\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|0\rangle\otimes|f(0)\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle\otimes|f(1)\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle\otimes|f(0)\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle\otimes|f(1)\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|0\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle)\otimes|f(0)\rangle + \frac{1}{2}(e^{i\varphi_1}|1\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle)\otimes|f(1)\rangle
\end{aligned}$$

car f est 2-périodique. On applique finalement la QFT aux deux premiers qubits

$$\begin{aligned}
(QFT)U_f|\Psi_1\rangle &= \frac{1}{2}(QFT|0\rangle + e^{i\varphi_0}QFT|2\rangle)\otimes|f(0)\rangle + \frac{1}{2}(e^{i\varphi_1}QFT|1\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}QFT|3\rangle)\otimes|f(1)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum_{y=0}^{3}|y\rangle + \frac{1}{2}\sum_{y=0}^{3}e^{i(\pi y+\varphi_0)}|y\rangle\right\}\otimes|f(0)\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum_{y=0}^{3}e^{i(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y)}|y\rangle + \frac{1}{2}\sum_{y=0}^{3}e^{i(\varphi_1+\varphi_0+\frac{3\pi}{2}y)}|y\rangle\right\}\otimes|f(1)\rangle \\
&= \frac{1}{4}\sum_{y=0}^{3}(1+e^{i(\pi y+\varphi_0)})|y\rangle\otimes|f(0)\rangle + \left(e^{i(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y)} + e^{i(\varphi_0+\varphi_1+\frac{3\pi}{2}y)}\right)|y\rangle\otimes|f(1)\rangle
\end{aligned}$$

comme attendu.

(c) On mesure les deux premiers qubit dans la base définie par les projecteurs

$$\{P_y\otimes\mathbb{I}_{4\times4} = |y\rangle\langle y|\otimes\mathbb{I}_{4\times4}, y = 0,1,2,3\}$$

Calculez l'état juste après la mesure (a un facteur de normalisation près). Ensuite calculez la probabilité d'obtenir y. Vous devrez trouver un résultat indépendant de φ_1.

Solution.
On calcule l'état final à un facteur de normalisation près

$$(P_y\otimes\mathbb{I}_{4\times4})|\Psi_2\rangle = \frac{1}{4}(1+e^{i(\pi y+\varphi_0)})|y\rangle\otimes|f(0)\rangle + \frac{1}{4}\left(e^{i(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y)} + e^{i(\varphi_0+\varphi_1+\frac{3\pi}{2}y)}\right)|y\rangle\otimes|f(1)\rangle$$

On calcule maintenant la probabilité d'obtenir y

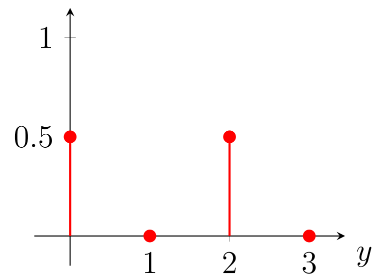
$$\begin{aligned}
\langle\Psi_2|P_y\otimes\mathbb{I}_{4\times4}|\Psi_2\rangle &= \frac{1}{16}(1+e^{i(\pi y+\varphi_0)})(1+e^{i(\pi y+\varphi_0)})^* \\
&+ \frac{1}{16}\left(e^{i(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y)} + e^{i(\varphi_0+\varphi_1+\frac{3\pi}{2}y)}\right)\left(e^{i(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y)} + e^{i(\varphi_0+\varphi_1+\frac{3\pi}{2}y)}\right)^* \\
&= \frac{1}{16}|1+e^{i(\pi y+\varphi_0)}|^2 + \frac{1}{16}|e^{i(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y)} + e^{i(\varphi_0+\varphi_1+\frac{3\pi}{2}y)}|^2 \\
&= \frac{1}{16}\left|1+e^{i(\pi y+\varphi_0)}\right|^2 + \frac{1}{16}\left|e^{i(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y)}(1+e^{i(\pi y+\varphi_0)}\right|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{16} \left|1 + e^{i(\pi y+\varphi_0)}\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}(1 + \cos(\pi y + \varphi_0) \\
&= \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\pi y + \varphi_0}{2}\right).
\end{aligned}
$$

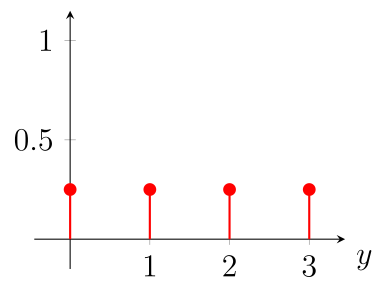
(d) Dans la question précédente vous avez calculé une probabilité étant donné φ_0 et φ_1 fixés. En principe vous avez trouvé un résultat dépendant uniquement de φ_0. Faire un dessin de $\mathbb{P}(y|\varphi_0)$ pour $\varphi_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ Calculez et dessinez la probabilité totale $\mathbb{P}(y)$ en considérant que φ_0 est distribuée uniformément sur $[0, 2\pi]$.

Solution. On calcule facilement que

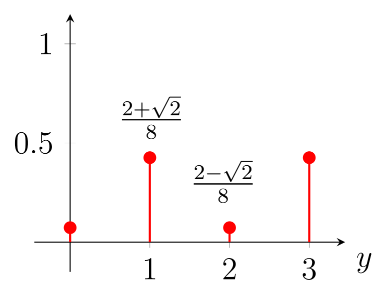
$$\mathbb{P}(y|\varphi_0 = 0) = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$



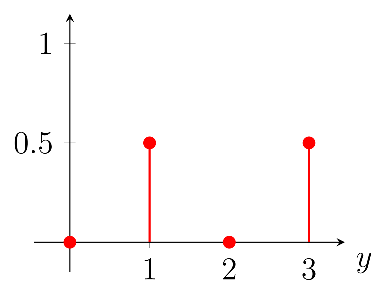
$$\mathbb{P}\left(y|\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi(2y+1)}{4}\right)$$



$$\mathbb{P}\left(y|\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi(4y+3)}{8}\right)$$



$$\mathbb{P}\left(y|\varphi_0 = \pi\right) = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi(y+1)}{2}\right)$$

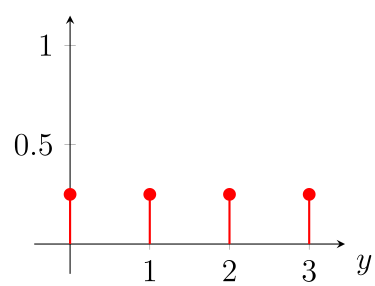


Soit la variable aléatoire Φ_0 suivant une loi continue uniforme sur $[0, 2\pi]$. Le théorème des probabilités totales donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(y) &= \int_0^{2\pi} f_{\Phi_0}(\varphi_0)\mathbb{P}(y \mid \varphi_0)\, \mathrm{d}\varphi_0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbb{P}(y \mid \varphi_0)\, \mathrm{d}\varphi_0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi y + \varphi_0}{2}\right)\, \mathrm{d}\varphi_0 \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{2\pi}{2^2}\binom{2}{1} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

où on a utilisé que

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)^{2k}\, dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)^{2k}\, dx = \frac{2\pi}{2^{2k}}\binom{2k}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$



Exercice 3 *Estimation de phase basée sur la transformée de Fourier quantique*

Soit U une matrice unitaire $2^n \times 2^n$ (ici $n \geq 1$) possédant un vecteur propre $|u\rangle$ avec valeur propre $e^{2\pi i\varphi}$. C'est à dire :

$$U|u\rangle = e^{2\pi i\varphi}|u\rangle .$$

On suppose

$$\varphi = \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_0}{4}$$

avec $\varphi_1, \varphi_0 \in \{0, 1\}$ binaires. Dans ce problème on étudie un "algorithme d'estimation de phase" qui permet de découvrir φ en supposant le vecteur propre $|u\rangle$ connu. On rappelle que la transformée de Fourier quantique agissant sur deux qubits est définie par

$$QFT|x_1, x_0\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{F}_2^2} e^{\frac{2\pi i}{4}(2x_1+x_0)(2y_1+y_0)}|y_0, y_1\rangle$$

où ici $x_1, x_0 \in \{0, 1\}$.

Nous définissons aussi les opérations (controllées) suivantes qui agissent sur $2+n$ qubits (ici $x, y \in \{0,1\}$ et $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^{\otimes n}$)

$$
\begin{aligned}
R_1 |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |\Psi\rangle &= |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes U^{2x} |\Psi\rangle \\
R_2 |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |\Psi\rangle &= |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes U^{y} |\Psi\rangle .
\end{aligned}
$$

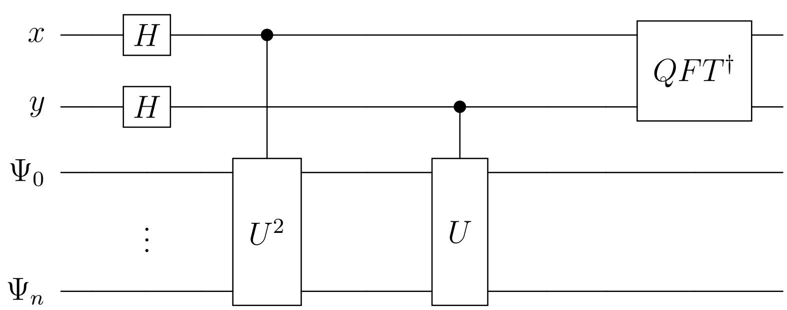
Soit maintenant la matrice unitaire

$$S = ((QFT)^\dagger \otimes \mathbb{I}_n) R_2 R_1 (H \otimes H \otimes \mathbb{I}_n)$$

où H est la matrice de Hadamard usuelle et $\mathbb{I}_n$ est la matrice unité agissant sur n qubits. Ici $(QFT)^\dagger$ est l'adjoint de QFT (c.à.d transposé et complexe conjugué).

(a) Quelle est la dimension de la matrice unitaire S ? Faites un dessin du circuit correspondant à S.

Solution. La dimension de l'espace de Hilbert du probème est $\dim \mathcal{H} = n+2$ donc S est de dimension 2^{n+2}. Le circuit correspondant est



(b) On initialise le circuit dans l'état $|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |u\rangle$. Calculez l'état des $2+n$ qubits juste avant la porte $(QFT)^\dagger$.

Solution. On travaille étape par étape en appliquant chaque séries de porte

$$
\begin{aligned}
(H \otimes H \otimes \mathbb{I}_n)(|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |u\rangle) &= H|0\rangle \otimes H|0\rangle \otimes |u\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big(|00u\rangle + |01u\rangle + |10u\rangle + |11u\rangle \Big) = |\Phi_0\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_1 |\Phi_0\rangle &= \frac{1}{2}\Big(R_1 |00u\rangle + R_1 |01u\rangle + R_1 |10u\rangle + R_1 |11u\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(|00u\rangle + |01u\rangle + e^{2\pi i \varphi} |10u\rangle + e^{4\pi i \varphi} |11u\rangle \Big) = |\Phi_1\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_2 |\Phi_1\rangle &= \frac{1}{2}\Big(R_2 |00u\rangle + R_2 |01u\rangle + R_2 e^{2\pi i \varphi} |10u\rangle + R_2 e^{4\pi i \varphi} |11u\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(|00u\rangle + e^{2\pi i \varphi} |01u\rangle + e^{4\pi i \varphi} |10u\rangle + e^{6\pi i \varphi} |11u\rangle \Big) = |\Phi_2\rangle
\end{aligned}
$$

(c) Vérifiez que l'expression trouvée sous (b) n'est rien d'autre que $QFT\,|\varphi_1, \varphi_0\rangle$. Quel est donc l'état à la sortie du circuit ?

Solution. On a

$$\begin{aligned}
QFT\,|\varphi_1, \varphi_0\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{F}_2^2} e^{\frac{2\pi i}{4}(2x_1+x_0)(2y_1+y_0)}\,|y_0, y_1\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big(\,|00u\rangle + e^{2\pi i\varphi}\,|01u\rangle + e^{4\pi i\varphi}\,|10u\rangle + e^{6\pi i\varphi}\,|11u\rangle\Big)
\end{aligned}$$

qui est bien égal à $|\Phi_2\rangle$. L'état à la sortie du circuit est donc $|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_0\rangle \otimes |u\rangle$ puisque QFT est unitaire.

(d) En déduire que l'on peut découvrir φ en faisant *une et une seule mesure* des deux premiers qubits à la sortie du circuit.

Solution. On peut découvrir φ en mesurant uniquement les deux premiers qubit du circuit et ainsi obtenir φ_1 et φ_0.