LinearTransformusic

Bernardo Pinto de Alkmim - 1210514
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Novembro 2015

1 Introducão

Música é um dos assuntos que mais move emocionalmente as pessoas, o que leva muitos a focarem somente nesse aspecto e optarem por ignorar a riqueza matemática que a estrutura.

Nesse relatório, introduzo o LinearTransformusic, uma aplicação Desktop que visa utilizar Álgebra Linear com matrizes tipadas (segundo a Teoria dos Tipos) formando uma categoria, a fim de representar transformações de intervalos musicais de maneiras diferentes, dependendo de qual o ponto de vista: estritamente de intervalos (que se utiliza somente de semitons), de intervalos funcionais (utilizando tons e semitons) e de potências de razões entre intervalos (o que leva em conta afinação e temperamento). Os termos serão explicados no decorrer do relatório.

O sistema foi desenvolvido em C++.

O propósito da aplicação é receber uma entrada numérica do usuário (uma sequência de números) referente aos intervalos em semitons das notas de uma música, sem se importar com ritmo e mostrar-lhe uma visualização em uma e duas dimensões da música recebida.

Uma possível aplicação desse sistema pode ser realizada no ensino de música para iniciantes, para mostrar a relação entre tons, semitons, e intervalos em geral entre notas musicais, na esperança de facilitar o entendimento da noção de função em música tonal, especialmente, uma vez que a relação enre um intervalo em semitons (1 dimensão) e um intervalo em tons e semitons (duas dimensões) mostra quantos "passos"numa escala musical foram dados.

2 Noções de Teoria Musical

Para iniciar o relatório, é necessário dar uma breve introdução de teoria musical. Caso o leitor já esteja familiarizado com o assunto, pode prosseguir para a próxima seção.

Na música ocidental, temos a presença de 12 notas, separadas por intervalos que chamamos de semitons. Se utilizarmos todas elas em alguma música, não fica clara a característica musical dessa organização para um ouvido não treinado. Historicamente, as músicas se utilizam de 7 dessas 12 (dizemos que essas músicas utilizam escalas heptatônicas). Com isso, ganhamos uma noção maior de tonalidade, ou seja, uma dessas notas (chamada tônica) se torna o ponto de referência para as outras. Observação: também é possível ter um centro tonal escolhendo 5, 6, 8, etc. (até mesmo as 12), mas tal assunto foge ao escopo desse trabalho.

Por pularmos algumas notas, temos que entre as 7 escolhidas não há sempre um semitom. De fato, do modo como evoluiu a música, temos que, a partir da tônica, as notas apresentam o seguinte padrão:

1. Primeira nota - a tônica, nosso ponto de referência.
2. Segunda nota - um tom acima da tônica (um tom equivale a dois semitons).
3. Terceira nota (ou terça) - um tom acima da segunda nota (ou seja, 4 semitons/2 tons acima da tônica).
4. Quarta nota - um semitom acima da terça (5 semitons/2 tons e 1 semitom acima da tônica).
5. Quinta nota - um tom acima da quarta (7 semitons/3 tons e 1 semitom acima da tônica).
6. Sexta nota - um tom acima da quinta (9 semitons/4 tons e 1 semitom acima da tônica).
7. Sétima nota - um tom acima da sexta (11 semitons/5 tons e 1 semitom acima da tõnica).
8. Oitava nota - um semitom acima da sétima (12 semitons/5 tons e 2 semitons acima da tônica). A oitava equivale harmonicamente à tônica (acusticamente, sua frequência é o dobro da tônica). A partir daqui elas passam a se repetir (a nona é a segunda e assim por diante).

É importante notar que, apesar de o intervalo entre a tônica e a oitava equivaler a 6 tons inteiros, dizer isso esconde o fato de haverem 7 "passos"entre essas notas, o que fica aparente ao dizer que há 5 tons e 2 semitons.

Dessa lista, nota-se que foram ocultados os seguintes intervalos com a tônica: 1 semitom, 3 semitons, 6 semitons, 8 semitons e 10 semitons. Quando uma escala se utiliza das 7 notas escolhidas, ignorando essas 5, dizemos que ela está em tom maior. Escolhendo outras 7, muda-se a característica da escala (apesar de utilizarmos 7 notas e mantermos a mesma tônica. Se utilizarmos como tônica a nota Dó, temos que os 7 "degraus"da escala serão Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si (a oitava volta a ser um Dó). Geralmente se utiliza o Lá como tendo 440Hz de frequência atualmente, e as outras notas vão tendo suas frequências alteradas de acordo com essa referência e o temperamento utilizado.

Ainda em Dó maior, temos que as notas excluídas são, na ordem:

- Dó♯, lido Dó sustenido (ou Ré♭, lido Ré bemol). O sustenido indica um semitom acima, e o bemol um abaixo. Essa nota se encontra entre o Dó e o Ré.
- Ré♯ ou Mi♭, que está entre o Ré e o Mi.
- Entre o Mi e o Fá um somente semitom, então não há nenhuma nota entre eles (vale lembrar que isso vale no sistema ocidental, no qual utilizamos o semitom como a distância mínima; em algumas escalas orientais o menor intervalo é o quarto-de-tom, que equivale a meio semitom).
- Fá♯ ou Sol♭, que está entre o Fá e o Sol.
- Sol♯ ou Lá♭, que está entre o Sol e o Lá.
- Lá♯ ou Si♭, que está entre o Lá e o Si.
- Entre o Si e o Dó há só um semitom.

Diferentes escalas em Dó utilizam diferentes notas, assim como tonalidades de característica maior com outras tônicas (Sol maior, por exemplo, troca o Fá pelo Fá♯, e a escala começa a partir do Sol, e não do Dó).

Vale notar também que as notas "extras"(que chamamos de acidentes) podem ter dois nomes. Isso depende do papel delas na escala (em Lá maior, por exemplo, temos um Sol ♯, ao passo que em Mi♭ maior temos um Lá♭, que, apesar de terem a mesma frequência numa afinação temperada, têm funcionalidades diferentes nas suas respectivas escalas).

A noção de "passos"entre as notas musicais é o que nos insere nas escalas (no caso, utilizaremos as heptatônicas, com 7 notas, apesar de haverem várias outras) e dá a noção de tonicidade em uma música. Se tratarmos escalas somente por semitons, perdemos essa noção de tônica (apesar de, no fundo, os intervalos todos serem formados por eles). Com a noção de tonicidade, o ensino de música na prática se torna muito mais intuitivo e natural para o aluno, uma vez que ele naturalmente compreenderá os conceitos de música tonal, ao contrário de atonal, que a priori parece um conjunto de regras sem sentido.

3 Incorporando Tipos e Álgebra Linear

Considerando a natureza do problema, temos que músicas recebidas como entrada do usuário são representadas como sequências de valores em semitons. Supondo que o usuário tenha feito uma sequência de n valores, a matriz que representa a música do usuário em uma dimensão tem tamanho $1 \times n$. Todas as suas entradas são do tipo SEMITOM ou $STom$, um tipo isomorfo aos inteiros, $\mathbb{Z}$. Essa matriz, digamos, D_1 tem como tipo $D_1 : \mathbb{Z}^n \to STom$.

A matriz $T_{2\to 1} : STom \times Tom \to STom$ (onde Tom, ou TOM é um tipo isomorfo a $\mathbb{Z}$) de transformação entre a representação de duas dimensões e a de uma é a seguinte:

$T_{2\to1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

Onde a primeira coluna corresponde a uma transformação $STom \to STom$ e a segunda, a uma $Tom \to STom$, dado que um Tom equivale a dois semitons.

Aplicando $T_{2\to1}$ a uma matriz, digamos, $D_2 : \mathbb{Z}^n \to STom \times Tom$ de tamanho $2 \times n$, que representa uma música em duas dimensões tem como saída uma matriz $D_1 : \mathbb{Z}^n \to STom$.

Verificando tipos: $T_{2\to1} \cdot D_2$ tem tipo $\mathbb{Z}^n \to STom$, assim como D_1. Ou seja, como foi construída, $T_{2\to1}$ representa uma projeção de $STom \times Tom$ em $Stom$.

Essa matriz, por não ser quadrada, não admite uma inversa única, mas admite inversos à esquerda, que são alguns poucos para o nosso problema, devido à natureza de cada intervalo. Isso nos leva a várias matrizes de transformação que, na prática, trataremos como caixa preta: dada uma entrada, saberemos sua saída, mas sem um mecanismo interno direto para tal.

Ou seja, existirá um conjunto de matrizes $T_{1\to2}$ tal que:

$T_{1\to2} * D_1 = D_2$, para algum D_1 e algum D_2.

Com as seguintes propriedades:

$T_{1\to2} : 0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T_{1\to2} : 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T_{1\to2} : 2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T_{1\to2} : 3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T_{1\to2} : 4 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$T_{1\to2} : 5 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$T_{1\to2} : 6 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$T_{1\to2} : 7 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$T_{1\to2} : 8 \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$T_{1\to2} : 9 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$T_{1\to2} : 10 \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$T_{1\to2} : 11 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Assim como para intervalos negativos (utilizados para representar notasdescendentes):

$$T_{1\to 2} : -1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$T_{1\to 2} : -2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$T_{1\to 2} : -3 \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$T_{1\to 2} : -4 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$T_{1\to 2} : -5 \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$T_{1\to 2} : -6 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$T_{1\to 2} : -7 \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$T_{1\to 2} : -8 \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$T_{1\to 2} : -9 \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$T_{1\to 2} : -10 \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$T_{1\to 2} : -11 \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

E assim continuando módulo 12 (pois há 12 semitons, e as transformações a nível harmônico tendem a se repetir do 12 em diante, com os mesmos padrões dos intervalos menores que 12).

Aplicando $T_{1\to 2}$ a uma matriz, digamos, $D_1 : \mathbb{Z}^n \to STom$ de tamanho $1 \times n$, que representa uma música em duas dimensões tem como saída uma matriz $D_2 : \mathbb{Z}^n \to STom \times Tom$.

Verificando tipos: $T_{1\to 2} \cdot D_1$ tem tipo $\mathbb{Z}^n \to STom \times Tom$, assim como D_2. Ou seja, do modo como foi construída, $T_{1\to 2}$ representa uma injeção de $STom$ para $Stom \times Tom$.

A nível prático, como a transformação $T_{1\to 2}$ não é única, ela é implementada em casos: dependendo da entrada, a ação tomada varia. Já $T_{2\to 1}$ envolve uma simples multiplicação de matrizes.

4 Componentes do Sistema

O sistema está dividido em alguns módulos:

- Graphics - responsável pela parte gráfica, utilizando a biblioteca Qt. Aqui há os arquivos view.h e view.cpp.

- LinearAlgebra - módulo que contém a definição da classe Matrix e as operações de Álgebra Linear a serem realizadas no programa (levando em conta os tipos das matrizes). Aqui estão os arquivos matrix.h e matrix.cpp.

- Music - aqui estão definidas as matrizes de transformação entre as matrizes de entrada e saída. Composto pelos arquivos music.h e music.cpp.

- Arquivo main.cpp, que inicia a aplicação.

- Um Makefile para compilação e geração do executável (chamado *linear-Transformusic*).

5 Descrição de cada módulo

5.1 Graphics

Aqui, a princípio, pensou-se em utilizar o ambiente gráfico Qt para aplicações em C++ para realizar interface com o usuário e gerar visualizações das músicas por ele inserido (tanto em uma quanto em duas dimensões), só que ocorreu um problema: do que era utilizado do Qt, havia um bug que impedia a visualização do modo pretendido. Por falta de tempo, foi necessário recorrer a uma interface simples via linha de comando com o usuário.

Nesse módulo se encontra a interface a ser mostrada a o usuário, que consiste em menus de interação e um modo de visualização da música. Aqui, o programa se estrutura em seus diversos *modos*:

- Modo de Criação - aqui o usuário pode começar a criar sua música. Entrnado nesse modo, insere-se os intervalos entre as notas da música em semitons, um por vez.

- Modo de Abertura de Arquivo - nesse modo o usuário pode abrir um arquivo texto com valores inteiros que representa sua música para visualização.

- Modo de Salvamento em Arquivo - aqui o usuário pode gravar a música que ele criou em um arquivo texto.

- Modo de Visualização - nesse modo o usuário pode visualizar a música que está editando ou que abriu de um arquivo. Como cada componente da música requer uma representação diferente, as funções referentes a esse modo apresentam várias divisões em casos para representar as partes da música do usuário.

5.2 LinearAlgebra

Nesse módulo se encontram a definição da classe *Matrix*, que representa uma Matriz de Álgebra Linear, levando em conta os tipos de Teoria dos Tipos. Ela é uma classe parametrizada, e tem como componentes seu número de colunas, o número de linhas e o "engradado"de elementos que a compõem.

Aqui também é definida a multiplização de duas *Matrices*, levando em conta seus tipos, dados por seus parâmetros. O algoritmo utilizado para multiplicação de matrizes aqui é o *naïve*, com três laços de controle encadeados.

5.3 Music

O módulo Music é o pivô dessa aplicação. Nele estão definidos o tipo central das Matrizes (*Input*), que é composto por um intervalo inteiro, um *flag* que indica se o intervalo é de tons ou semitons, além da nota que ele representa no momento da música (se é um Dó, Ré etc.) e o acidente da nota (se a nota é sustenido, bemol ou natural). Para poder multiplizar duas matrizes de modo trivial, foi necessário sobrecarregar o operador asterisco (*) de multiplicação para dois valores Input (que envolve, basicamente, uma multiplicação dos intervalos internos de cada um).

Há também a função de gerar um Input a partir de um intervalo dado e o Input anterior da música, uma vez que é necessário, para se gerar a nota atual, saber qual foi a nota anterior e qual o intervalo a ser dado a partir dela. Essa função é dividida em vários casos, e, por isso, é a maior função da aplicação. Nela, são seguidas regras de teoria musical para a geração das novas notas, que, apesar de seguirem alguns padrões às vezes, isso não ocorre sempre, e acaba sendo necessário preencher "na mão"os valores.

Aqui também estão definidas as transformações $T_{1\to 2}$ e $T_{2\to 1}$ como funções, e não como matrizes.

$T_{1\to 2}$ envolve uma multiplicação trivial de matrizes, como visto anteriormente. Aqui é utilizada a função de multiplicação de duas *Matrix* do módulo LinearAlgebra.

Já $T_{2\to 1}$ é, por natureza, dividido em casos dependendo do valor de cada entrada da música, e funciona de modo análogo ao que foi mostrado anteriormente neste relatório.

6 Gerando e executando

Para gerar o programa, basta descompactar e, no diretório *LinearTransformusic* digitar *make*. Assim, será gerado um executável de nome *linearTransformusic*. Basta rodá-lo para iniciar a aplicação.

Os arquivos-texto a serem lidos devem seguir o modelo do arquivo *test1.txt* que se encontra no diretório base: os dois primeiros números se referem ao número de intervalos a ser preenchido, o segundo é sempre 1 (indica que são intervalos em semitons) e os seguintes serão os intervalos da música.

7 Conclusão

A experiência de realizar esse trabalho mostrou-se muito rica, especialmente no que tange a junção do teórico com o prático. Uma das maiores dúvidas no começo do desenvolvimento era como tipar as matrizes na prática e realizar essa multiplicação de modo mais natural possível e parecido com a teoria (onde tudo funciona sem problemas), e esse trabalho mental é muito importante, especialmente na área da Computação, onde essas passagens de teoria para prática ocorrem praticamente o tempo todo.

Com isso, espero ter mostrado um dos variados modos em que podemos incorporar o uso de ferramentas computacionais no ensino (e, em especial, no ensino de música), principalmente para auxiliar na realização de trabalhos extremamente braçais (como, no caso, mostrar todas as relações entre passos de uma escala e seus intervalos em semitons, algo extremamente maçante para professores de música). O resultado acabou sendo um trabalho bem pequeno (e com um escopo menor ainda), mas mostra o poder e a versatilidade da Álgebra Linear nas aplicações do dia-a-dia e nas mais variadas áreas do conhecimento, em especial quando aliada à Teoria dos Tipos, o que garante mais segurança em suas operações e nos permite uma melhor visão geral das relações entre seus diferentes componentes.

Referências

[1] Dorell, "Vector Analysis of Musical Intervals", 2005.

[2] Med, B., "Teoria da Música", Editora MusiMed, 4ª ed., 2011.

[3] `http://www.tutorialspoint.com/cplusplus/`, acessado pela última vez em 10/12/2015.