“缺项杨辉三角”问题解法

154True(高一 14 班林宇峰), BpbjsGreen(高一 13 班林宇轩)

2026 年 1 月 4 日

我们证明了数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为:

$$a_n = 1 - \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}.$$

定理 1. 当 $m \geq 0$ 时, 有

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{C}_{m+k}^m}{2^{m+k+1}} = 1/2.$$

证明见附文档对 (5.20) 式子的证明.

定理 2. 当 $m \geq 0$ 时, 有

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{C}_{2k}^k}{2^{2k}} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m} \cdot (m!)^2}.$$

证明. 考虑数学归纳法. 显然 $m = 0$ 时该等式两边均为 $1/2$.

我们接下来证明:

$$\frac{\mathrm{C}_{2m}^m}{2^{2m}} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m} \cdot (m!)^2} - \frac{(2m-1)!}{2^{2m-2} \cdot [(m-1)!]^2}.$$

左右两边同乘 2^{2m} 后将右边通分, 即证

$$\mathrm{C}_{2m}^m = \frac{(2m+1)! - 4m^2(2m-1)!}{(m!)^2} = \frac{[2m(2m+1) - 4m^2](2m-1)!}{(m!)^2} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}$$

该部分证毕. 于是当 $m \geq 1$ 时,

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{C}_{2k}^k}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mathrm{C}_{2k}^k}{2^{2k}} + \frac{\mathrm{C}_{2m}^m}{2^{2m}} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m} \cdot (m!)^2},$$

证毕. □

定理 3. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为:

$$a_n = 1 - \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}.$$

证明. 不妨设 $f(i,j) = \dfrac{\mathrm{C}_i^j}{2^{i+1}}$. 由数列 $\{a_n\}$ 的定义可得

$$a_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i} f(i,j) + \sum_{i=n}^{2n-2} \sum_{j=i-n+1}^{n-1} f(i,j) \right),$$

据组合数性质, 显然有 $f(i,j)=f(i,i-j)$. 变换求和顺序得

$$a_n=\frac{1}{n}\left(2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{i}f(i+k,i)-\sum_{k=0}^{n-1}f(2k,k)\right),$$

使用定理 1,2 简单化简即可得

$$a_n=1-\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}\cdot n!\cdot(n-1)!}=1-\frac{\mathrm{C}_{2n-1}^{n-1}}{2^{2n-1}}=1-\frac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{2^{2n}}.$$

证毕. □

定理 4.

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=1.$$

证明. 即证 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{2^{2n}}=0$. 根据斯特林公式, 有

$$\mathrm{C}_{2n}^{n}\sim\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}(n\to+\infty)$$

故 $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}=0$. 证毕. □

以下是我们的证明过程. 154True 设计了整体证明思路, 完成了定理 3 的一部分证明和定理 1 的证明; 随后, BpbjsGreen 通过技术手段分析得到了 a_n 第二部分的通项公式 (定理 2), 并用数学归纳法证明. 154True 提出使用斯特林公式, BpbjsGreen 完成定理 4 的证明.

本文由 BpbjsGreen 编写.