一类染色正则图的最小阶

BpbjsGreen

2026 年 2 月 15 日

假设一个家庭的每个成员都属于二元性别 (男或女) 之一, 每个家庭成员在家庭中都恰好有一个男性伴侣和一个女性伴侣 (两个人的伴侣可以重复), 那么这个家庭的结构是什么样的? 这是本文所研究问题的灵感来源. 虽然此问题有悖伦理道德, 但抽象成图论语言后是一个有价值的问题.

定义 0.1. *对正整数 x, y, 定义 (x, y) 图是这样一种简单无向图: 每个顶点都染黑色或白色之一, 每个顶点的邻点中都恰好有 x 个黑点与 y 个白点. 定义函数 $F(x, y)$ 表示 (x, y) 图的最小阶数.*

本文开头提出的场景描述的是 $(1, 1)$ 图. 本文将会证明 $F(x, y)$ 对于所有正整数 x, y 均存在, 且 $x + y + 2 \le F(x, y) \le 2x + 2y$, 并给出计算 $F(x, y)$ 的一个方法. 以下两个定理是显然的:

定理 0.1. *(x, y) 图是 $x + y$ 正则的.*

定理 0.2. *(x, y) 图在黑点集上的导出子图是 x 正则图, 在白点集上的导出子图是 y 正则图.*

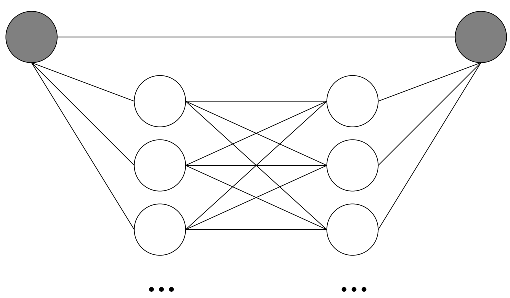
1 最小阶函数 $F(x, y)$

定理 1.1. *$F(x, y) = F(y, x)$.*

证明. 根据黑白点的对称性. □

定理 1.2. *$F(1, n) = 2n + 2$.*

证明. $(1, n)$ 图中有至少 2 个黑点且每个黑点连 n 个白点, 两两黑点所连的白点不能重复, 否则会有一个白点连两个黑点. 故 $F(1, n) \ge 2n + 2$. $2n + 2$ 阶 $(1, n)$ 图的构造如图: $2n$ 个白点平均分成两部, 部与部间连满所有边; 两个黑点间连边, 每个黑点各连满一部白点. □



2 正则图的存在性

(x,y) 图中的边可分为两种, 两个端点异色的边与两个端点同色的边. 这两种边互不影响, 所以我们分开讨论, 本节我们关注两个端点同色的边. 前文定理 0.2 提到 (x,y) 图在黑点集上的导出子图是 x 正则图, 在白点集上的导出子图是 y 正则图.

我们给出正则图存在的条件, 为最后的构造性证明打基础.

定理 2.1. *存在 n 阶 $2k$ 正则图当且仅当 $n > 2k$.*

证明. 必要性显然. 我们通过构造证明充分性. 在顶点集 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 上建立图 G, 两个点 x,y 在 G 之间连边当且仅当

$$(x-y) \bmod n \in \{-k, -(k-1), \cdots, -1, 1, \cdots, k\}.$$

因为 $2k < n$, 所以每个顶点都与 $2k$ 个不同的顶点连边, G 是 n 阶 $2k$ 正则图. □

定理 2.2. *存在 n 阶 $2k+1$ 正则图当且仅当 $n > 2k+1$ 且 n 为偶数.*

证明. 我们通过构造证明充分性. 在顶点集 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 上建立图 G, 两个点 x,y 在 G 之间连边当且仅当

$$(x-y) \bmod n \in \{-k, -(k-1), \cdots, -1, 1, \cdots, k, n/2\}.$$

因为 n 是偶数, 所以 $n/2$ 是一个整数. 又有 $|n/2| > |k|$, 所以该数集中没有重复元素. 每个顶点都与 $2k+1$ 个不同的顶点连边, G 是 n 阶 $2k+1$ 正则图.

证明必要性. $n > 2k+1$ 是显然的, 只需证明 n 为偶数即可. 在边数为 m 的 $2k+1$ 正则图 G 中,

$$(2k+1)n = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

故 $(2k+1)n$ 是一个偶数, 导出 n 为偶数. □

3 端点异色的边

本节我们关注端点异色的边.

后文设图中有 n_1 个黑点, n_2 个白点. (x,y) 图中端点异色的边形成了一个二分图.

定理 3.1. *存在这样的二分图当且仅当 $n_1 y = n_2 x$.*

证明. 证明必要性. 二分图的每条边都各有一个端点在黑点中与白点中, 于是黑点的度数之和与白点的度数之和相同, 即 $n_1 y = n_2 x$.

我们通过构造证明充分性. 设 V_1 为黑点集, 其中顶点各赋 $\{0,1,\cdots,n_1-1\}$ 中的数; V_2 为白点集, 其中顶点各赋 $\{0,1,\cdots,n_2-1\}$ 中的数. 遍历 $[0, n_1 y - 1]$ 中的所有整数, 当遍历到 i 时连接 V_1 中赋值 $\lfloor i/y \rfloor$ 的点与 V_2 中赋值 $i \bmod n_2$ 的点. 因为 $n_1 y = n_2 x$, 不难得出 V_1 中每个顶点的度数都为 y, V_2 中每个顶点的度数都为 x, 构造完成. □

4 (x,y) 图的最小阶

定理 4.1. *存在一个 $n=n_1+n_2$ 阶 (x,y) 图当且仅当 n_1,n_2 满足如下条件:*

1. $n_1y=n_2x$.

2. $n_1>x, n_2>y$.

3. 若 x 是奇数, 则 n_1 是偶数; 若 y 是奇数, 则 n_2 是偶数.

证明. 这些条件都是 (x,y) 图必须满足的条件, 必要性显然.

证明充分性, 可以证明存在 $F(x,y)=n_1+n_2$ 的构造. 条件 2,3 使我们可以构造出黑点的 x 正则图与白点的 y 正则图, 条件 1 使我们可以构造出黑点与白点之间的二分图. 将两个图合并, 便得到了一个 n_1+n_2 阶的 (x,y) 图. □

推论 4.2. *设符合定理 4.1 中条件的最小正整数为 n_1,n_2, 则 $F(x,y)=n_1+n_2$.*

证明. 显然. □

推论 4.3. $x+y+2\le F(x,y)\le 2x+2y$.

证明. 由 $n_1>x, n_2>y$ 得到 $x+y+2\le F(x,y)$. $n_1=2x, n_2=2y$ 一定是一组满足定理 4.1 条件的取值, 所以 $F(x,y)\le 2x+2y$. □

5 多染色正则图的相关结论

我们把定义扩展到用 3 种颜色染色的正则图.

定义 5.1. *对正整数 x,y,z, 定义 (x,y,z) 图是这样一种无向简单图: 图的每个顶点都染黑色, 灰色与白色之一, 每个顶点的邻点中都恰好有 x 个黑点, y 个灰点与 z 个白点. 定义函数 $F(x,y,z)$ 表示 (x,y,z) 图的最小阶数.*

同理, 我们也可以类似地定义用 g 种颜色染色的正则图及相应的函数 F.

定义 5.2. *对正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_g$, 定义 $(a_1,a_2,\cdots,a_g)$ 图是这样一种无向简单图: 图的每个顶点都染 g 种颜色之一, 每个顶点的邻点中都恰好有 a_i 个第 i 种颜色的点. 定义函数 $F(a_1,a_2,\cdots,a_g)$ 表示 $(a_1,a_2,\cdots,a_g)$ 图的最小阶数.*

以下是一个简单的结论.

定理 5.1. *$F(1,1,1,\cdots,1)=2g$, 括号里共有 g 个 1.*

证明. $(1,1,1,\cdots,1)$ 图中的每种颜色有至少 2 个点, 故 $F(1,1,1,\cdots,1)\ge 2g$. 又有 $2g$ 阶图构造: 构造完全二分图 $K_{g,g}$, 每部中的 g 个点各染 g 种不同颜色即可. □

我们把定理 4.1 扩展到 3 种颜色染色的正则图.

定理 5.2. *存在一个 $n = n_1 + n_2 + n_3$ 阶 (x, y, z) 图当且仅当 n_1, n_2, n_3 满足如下条件:*

1. $n_1y = n_2x, n_1z = n_3x, n_2z = n_3y.$

2. $n_1 > x, n_2 > y, n_3 > z.$

3. *若 x 是奇数, 则 n_1 是偶数; 若 y 是奇数, 则 n_2 是偶数; 若 z 是奇数, 则 n_3 是偶数.*

原理相同, 这里不证明. 对于 g 染色的正则图也有同样的结论:

定理 5.3. *存在一个 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_g$ 阶 $(a_1, a_2, \cdots, a_g)$ 图当且仅当 $n_1, n_2, \cdots, n_g$ 满足如下条件:*

1. *对于任意 $i, j \in \{1, 2, \cdots, g\}$, 有 $n_ia_j = n_ja_i$.*

2. *对于任意 $i \in \{1, 2, \cdots, g\}$, $n_i > a_i$.*

3. *对于任意 $i \in \{1, 2, \cdots, g\}$, 若 a_i 是奇数, 则 n_i 是偶数.*

我们终于可以解决一些有趣的问题了! 设每个人都属于二元性别 (男或女), 家庭里的每个人都有 114 个女性伴侣和 514 个男性伴侣, 那么这个家庭的最少人数是 942. 设每个人都属于三元性别 (男, 女或跨性别), 家庭里的每个人都有 114 个女性伴侣, 514 个男性伴侣和 810 个跨性别伴侣, 那么这个家庭的最少人数是 2157. 这真是太有趣了!