> 王航专用《复杂网络》复习笔记

《复杂网络》

1、什么是复杂网络?

复杂网络：复杂系统+背后的网络科学

- 复杂性：任何常规的系统构成部分分析都完全**无法解释**的。这些现象通常被称为**突发行为**，似乎发生在许多涉及生物体的复杂系统中，如**股票市场**或**人脑**
- 每个复杂的系统背后都有一个网络，它定义了各组成部分之间的相互作用。
- 只有我们在深刻理解网络之后才能分析出这个网络
- 推动网络学科发展的两大动力：
  - 网络分析：图论、社会网络、交流网、生态网
  - 网络科学：电影网、www、引用网......
- **网络科学**的特征：
  - 跨学科
  - 经验性、数据驱动
  - 定量和数学： 为了促进网络科学的发展，必须掌握其背后的数学工具
  - 计算
- 网络的影响：科技、经济、生物、流感、脑科学、社会管理......
- **下载链接1**
- **下载链接2**

2、本门课程主要学习什么?

- 了解网络结构如何影响复杂系统的**鲁棒性**
- 开发定量工具，来评估网络结构与网络上的动态过程之间的**相互作用**及**其对故障的影响;**
- 寻找网络故障产生的原因，使用科学的网络对其进行**量化**和**设计**

3、网络的表示方法

- 复杂网络的组成：
  - 组件：节点、顶点N
  - 交互：链路、边L
  - 系统：网络、图(N,L)
- 图的分类（边是否有方向）：
  - 有向图
  - 无向图
- **度**
  - 度：$K_A=1$,$K_A=K_A^{in}+K_A^{out}$
  - 出度：$K_A^{out}=1$
  - 入度：$K_A^{in}=1$,
- **平均度：**
  - 有向图：$<k>\equiv\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}k_i$、$<k>\equiv\frac{2L}{N}$
  - 有向图：$<k^{in}>\equiv\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}k_i^{in}$、$<k^{out}>\equiv\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}k_i^{out}$、$<k^{in}>=<k^{out}>$、$<k>\equiv\frac{L}{N}$
- **度分布**：度等于i的概率$P(i)=\frac{N_i}{N}$。N_i：表示度为i的所有节点数量，N表示总的节点数量

$$\sum_{0}^{\infty}p_i=1 \tag{1}$$

$$\int_{K_{min}}^{\infty}p(k)\,dk=1 \tag{2}$$

- **邻接矩阵**

$$A_{ij}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix} \tag{3}$$

$Aij=1$,i和j之间存在边。$Aij=0$,i和j之间不存在边。

- 真实的网络是稀疏矩阵

- 带权网络：$A_{ij} = w_{ij}$
- 双向图
- 最短路径计算：迪杰特斯拉算法（Dijkstra）
- 连通图：
  - 强连通：每一个节点都有到其他所有节点的路径（有向图双向）
  - 弱连通：每一个点都有到其他点的路径（无向图）
  - 源点：出发点
  - 汇点：结果点

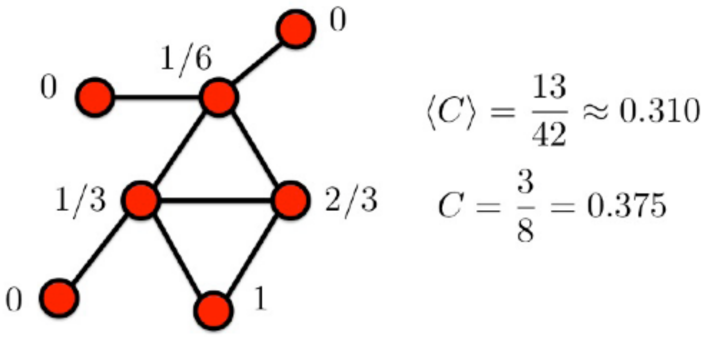
4、聚类系数

$$C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)} \tag{4}$$

k_i为节点i的度，e_i除了连接节点i的边的个数，（所有跟i相邻节点边中除了和i相邻的边之后剩余的边）并不是图中剩余边。

$$C = \frac{2\sum_{i=0}^{N} e_i}{\sum_{i=1}^{N} k_i(k_i - 1)} \tag{5}$$

$$< C >= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)} \tag{6}$$



5、随机网络

- **是什么？**
  - $p = 1/6, N = 10, < k >\sim= 1.5$
  - 随机图是一个由N个节点组成的图，其中每对节点都以概率p连接。
- 度分布：二项分布

$$P(k) = C_{N-1}^{k} p^k (1 - p)^{(N-1)-k} \tag{7}$$

$$< k >= p(N - 1) \tag{8}$$

$$\sigma_k^2 = p(1-p)(N-1) \tag{9}$$

$$\frac{\sigma_k}{<k>} = [\frac{1-p}{p}\frac{1}{N-1}]^{1/2} \approx \frac{1}{(N-1)^{1/2}} \tag{10}$$

当N较大k较小的时候服从泊松分布

$$P(k) = e^{-<k>}\frac{<k>^k}{k!} \tag{11}$$

- **真实网络不是泊松分布**
- 如何构建?
  - N个节点
  - 任意连接两个节点
- 二项系数
- 相变点：相变现象

6、scale-free NetWork（了解）

存在Hub

在度分布上符合**幂率**（特定幂函数）的网络

$$P(k) = Ck^{-\gamma} \tag{12}$$

γ一般小于3

7、BA模型

- ER模型：
  - 节点数量N是固定的（静态）
  - 网络规模随着节点数量增加而扩大
  - 链路数量随机增加
  - 新节点更倾向于连接有更多节点的hub节点
- 随机网络和真实网络的两个重要区别：
  - **增长性**：随机网络中节点数量是固定的（同一时间），真实网络中的节点数量是不断增加的。
  - **优先依附性**：随机网络中节点是随机依附的，在真实网络中，节点往往更倾向于选择度比较大的hub节点。
- SF网络
  - 网络节点不断增长
  - 新节点更倾向于链接度大的节点
  - 度分布

$$\prod(k_i)=\frac{k_i}{\sum_j k_j} \tag{13}$$

$$P(k)\backsim k^{-3} \tag{14}$$

γ通常取3

- SF网络
  - 度动态变化，所有节点遵循相同的增长规律

$$\frac{\partial k_i}{\partial t}\propto\prod(k_i)=A\frac{k_i}{\sum_j k_j} \tag{15}$$

- BA模型：
  - 度分布$P(k)=\frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}$
- 非线性依附，节点更倾向于连接度比较大的hub节点
  - 链路选择模型：
    - 每步增加一个新的节点
    - 随机选择一条链路，将新节点链接到链路两端
    - 度：$q_k=Ckp_k$、$q_k=\frac{kp_k}{<k>}$
  - 复制模型：
    - 随机连接：以概率p将新节点连接到u
    - 复制：以概率$1-p$随机选择不包含节点u的一条链路，并将新节点连接到u。这时候新节点复制了早起节点一条链路
  - 优化模型：
    - $C_i=min_j[\delta d_{ij}+h_j]$
- BA模型的量：
  - 节点数量：$N=t$
  - 链路条数：$N=mt$
  - 平均度：$<k>=2m$
  - 动态度：$k_t(t)=m(t/t_i)^{\beta}$
  - 动态指数：$\beta=1/2$
  - 度分布：$p_k\backsim k^{-\gamma}$
  - 度指数：$\gamma=3$
  - 平均距离：$<d>\backsim\log N/\log\log N$
  - 聚类系数：$<C>\backsim(\ln N)^2/N$
- 构建网络3步：
  - 假设已经有一个小型网络
  - 新的节点加入网络
  - 新的节点链接到已有链路

8、网络演进

- BA模型只是一个最小模型：假设了线性增长，假设了线性链接

- Bianconi-Barabasi model：$k(t) \backsim t^{1/2}$
- Fitness Model：$k(\eta,t) \backsim t^{\beta(\eta)}$,$\beta(\eta) = \eta/C$

9、度相关性

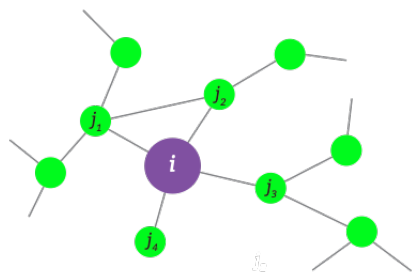
- 度相关性
  - Assortative（同配性）：hub节点表现出和hub节点相连的特性。
  - Neutral（中性）：节点随机相连
  - Disassortative（异配性）：hub节点避免和hub节点相连
- **测量方法：**
  - 完全统计描述（统计学方法）
    - $e_{j,k}$：在随机选择的边的两端找到度数为j和度数为k的节点的概率：

      $\sum_{j,k} e_{jk} = 1$,$\sum_j e_{jk} = q_k$

      q_k：链路末端有一个度为k的节点

      $q_k = \frac{kp_k}{<k>}$

      $e_{jk} = q_j q_k$
    - 难以从矩阵（直观）中提取信息
    - 基于e_{jk}，因此需要大量的计算
  - 度相关性函数（**一阶邻居度的大小**）
    - $k_{annd}(k)$：一阶邻居度的大小
    - $k_{nn}(k_i) = \frac{1}{k_i}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}k_j$
    - $k_{nn}(k) \equiv \sum_{k'} k' P(k'|k)$



$$k_{annd}^{v} = \frac{4+3+3+1}{4}$$

  - 相关系数
    - 如何计算

10、社团检测

- 连通性假说：
    - 一个社团对应一个连通子图
- 密度假说：
    - 社团对应于网络的局部密集区
- k^{int}：连接到同一社团其他节点的链接集合
- k^{ext}：链接到其他社团的链接集合
- 社团定义：
    - 最大社团$\delta^{int}(C) = 1$
    - 三角形是常见的，较大的小团体不常见
    - 社团并不对应完整的子图，因为他的许多节点并不直接相互连接。
    - 寻找网络中的小团体在计算上是相当难的，是一个所谓的NP-完全问题
    - **强社团：** 子图中的每个节点拥有比图中其他节点更多的链接

$$K_i^{int}(C) > k_i^{ext}(C) \tag{16}$$

- **若社团**：子图的内部总度超过其外部总度

$$\sum_{i \in C} k_i^{in}(C) > \sum_{i \in C} k_i^{out}(C) \tag{17}$$

- 图分割
- 社团检测：社团的数量和规模在开始时是未知的，将具有相同和近似性质的节点归为一类。
- 分割：将网络分为若干节点组，使每个节点属于一个组。
- **检测方法**：
    - 层次化聚类
        - 自底向上（聚合算法）：使用相似矩阵，将高度相似的矩阵放在同一矩阵中
            - 步骤1：定义相似矩阵
            - 步骤2：确定群体相似度
            - 步骤3：使用层次化聚类：将每个节点分配到一个社区中并计算相似性，直到找到相似性最小的一个，重复第二步直到所有节点都被分到同一个社区中
            - 步骤4：构建层次树，描述将节点分配给社区的精确度
        - 自顶向下（分割算法）：通过断开中心性较大的边来实现。
            - 定义链接边的中心性
            - 层次化聚类：计算每条边的中心性，将中心性最大的边去掉，并不断重复直到满足某一阈值
            - 构建层次树进行描述。
    - 模块化：
        - 优化分割，使模块化程度最大化
        - 次优，但适应模块
        - 负模块化，把每个节点分配给不同的社团
        - 零模块化，将所有节点分配给同一个社团，我们得到独立于网络结构。
        - 模块化程度取决于网络规模大小

- 步骤：
  - 1、将每个节点分配给自己的社团，如以 "社区 "开头。
  2. 2、检查每一对至少由一条链路连接的社团，并计算如果我们合并这两个社团所得到的模块化变化。
  3. 识别出ΔM最大的社团对，并将它们合并。注意，特定分区的模块化总是从网络的完整拓扑结构中计算出来的。
  4. 重复步骤2，直到所有节点都被合并到一个社区。
  5. 对每一步进行记录，并选择最大的分区。
- 重叠社团

11、网络鲁棒性

- 含义：网络的健壮性
- 在复杂网络中的含义：随机的删除一些节点，直到网络中不存在最大连通子图
- 崩溃阈值（任意网络）

$$f_c = 1 - \frac{1}{\frac{<k^2>}{<k>} - 1} \tag{18}$$

当$f < f_c$的时候网络仍然是连接的，当$f > f_c$的时候网络崩溃

- Scale-free在随机故障下不会出现奔溃—>原因：随机去掉hub节点的可能性太小了。
  - $f_c = 1 - \frac{1}{\mathcal{K}-1}$
  -

$$\mathcal{K} = \frac{<k^2>}{<k>} = \left|\frac{2-g}{3-g}\right| \begin{cases} K_{min}, & g > 3 \\ K_{max}^{3-g} K_{min}^{g-2}, & 3 > g > 2 \\ K_{max}, & 2 > g > 1 \end{cases} \tag{19}$$

- $K_{max} = K_{min} N^{\frac{1}{g-1}}$
- 攻击阈值：去掉hub节点中的一部分

12、感染模型

- S（易感染）：没有接触病原体的健康个体
- I（已感染）：已经被感染，并且能够感染其他人
- R（恢复\去世）：已经感染，并且产生抗体不会继续感染
- SIS、SI、SIR模型