Računanje izotropnih vektorjev

Avtor: Mirjam Pergar
Mentor: prof. dr. Bor Plestenjak

SEPTEMBEER

Vsebina

1. Uvod
   - Problem
   - Numerični zaklad
   - Uporaba
2. Realne matrike
   - Uvod
   - Iskanje izotropnih vektorjev
   - Primer
3. Kompleksne matrike
   - Uvod
   - Meurant
   - Carden
   - Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig
4. Numerična analiza
5. Literatura

Problem

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}(\mathbb{C}^{n \times n})$, $det(A) \neq 0$. Iščemo enotski vektor b, da je

$$b^* Ab = 0 \tag{1}$$

pravimo mu **izotropni vektor**.

Bolj splošen je inverzni problem numeričnega zaklada, kjer iščemo enotski vektor b, za katerega velja:

$$b^* Ab = \mu, \tag{2}$$

kjer je $\mu \in \mathbb{C}$ dano število.

- Problem (2) prevedemo na problem (1) za drugo matriko $(A - \mu I)$.
- Če μ lastna vrednost matrike A, potem je rešitev pripadajoč lastni vektor matrike A.
- Če μ ni lastna vrednost matrike A, je $det(A - \mu I) \neq 0$ in moramo lastne in izotropne vektorje izračunati.
- Od sedaj $\mu = 0$.
- Hermitski del matrike A bomo označili s $H = (A + A^*)/2$.
- Poševno-hermitski del matrike A bomo označili z $K = (A - A^*)/2\imath$.

Numerični zaklad

Definicija

***Numerični zaklad** matrike $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je podmnožica kompleksne ravnine, definirana kot*

$$W(A) = \{x^* Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}.$$

Numerični zaklad

Definicija

Numerični zaklad *matrike* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je podmnožica kompleksne ravnine, definirana kot*

$$W(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

- $W(A)$ je množica vseh Rayleighovih kvocientov matrike A.
- Razberemo lahko informacije o matriki in pogosto da več informacij kot spekter.
- $W(A)$ se preslika na realno os in ostane le daljica, če vzamemo hermitski del matrike.
- Veljati mora $0 \in W(A)$, če hočemo, da ima (1) vsaj eno rešitev.

Lastnosti numeričnega zaklada

(i) $W(A)$ je konveksna in kompaktna podmnožica $\mathbb{C}$.

(ii) $\sigma(A) \subseteq W(A)$, kjer $\sigma(A)$ označuje spekter.

(iii) Za vsako unitarno matriko U je $W(U^*AU) = W(A)$.

(iv) Seštevanje s skalarjem: $W(A + zI) = W(A) + z$ za $\forall z \in \mathbb{C}$.

(v) Množenje s skalarjem: $W(zA) = zW(A)$ za $\forall z \in \mathbb{C}$.

(vi) Subaditivnost: Za $\forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ velja $W(A + B) \subseteq W(A) + W(B)$.

(vii) Projekcija: $W(H) = \Re(W(A))$, za $\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kjer s H označimo hermitski del matrike A.

(viii) Če je A normalna, potem $W(A) = \mathrm{Co}(\sigma(A))$, kjer s Co označimo zaprto konveksno ogrinjačo množice.

(ix) $W(A)$ je daljica na realni osi, če in samo če, je A hermitska.

Uporaba

- Preučevanje konvergence nekaterih iterativnih metod za reševanje linearnih sistemov, npr. GMRES.
- Aplikacije v numerični analizi, diferencialnih enačbah, teoriji sistemov itd.

Realne matrike

Ko je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nas zanima, kako se izračuna rešitev enačbe:

$$b^* H b = 0, \tag{3}$$

kjer je $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična matrika (t.j. $H = H^T$).

Realne matrike

Ko je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nas zanima, kako se izračuna rešitev enačbe:

$$b^* H b = 0, \tag{3}$$

kjer je $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična matrika (t.j. $H = H^T$).

Lema

Izotropni vektorji matrike A so identični izotropnim vektorjem njenega simetričnega dela.

Realne matrike

Ko je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nas zanima, kako se izračuna rešitev enačbe:

$$b^* H b = 0, \tag{3}$$

kjer je $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika (t.j. $H = H^T$).

Lema

Izotropni vektorji matrike A so identični izotropnim vektorjem njenega simetričnega dela.

Vemo:

- $W(A)$ je simetričen glede na realno os.
- $0 \in W(A)$, če in samo če $\lambda_n \leq 0 \leq \lambda_1$, kjer sta λ_n in λ_1 najmanjša in največja lastna vrednost matrike H.

Naj bosta $x_1, x_n \in \mathbb{R}^n$ lastna vektorja, pripadajoča λ_1 in λ_n. Potem sta:

- $x_1^T A x_1 = x_1^T H x_1 = \lambda_1$,
- $x_n^T A x_n = x_n^T H x_n = \lambda_n$

realni točki na skrajni levi in skrajni desni $W(A)$ na realni osi.

Naj bosta $x_1, x_n \in \mathbb{R}^n$ lastna vektorja, pripadajoča λ_1 in λ_n. Potem sta:

- $x_1^T A x_1 = x_1^T H x_1 = \lambda_1$,
- $x_n^T A x_n = x_n^T H x_n = \lambda_n$

realni točki na skrajni levi in skrajni desni $W(A)$ na realni osi.

- Realne rešitve (3) izračunamo z uporabo lastnih vektorjev matrike H.
- Predpostavimo, da iščemo vektorje b z normo 1.
- H zapišemo kot
$$H = X \Lambda X^T,$$
kjer je $\Lambda = \lambda_i I$ in X je ortogonalna matrika lastnih vektorjev, tako da $X^T X = I$.

- Uporabimo ta spektralni razcep v (3):

$$b^* H b = b^* X \Lambda X^T b = 0.$$

- Označimo s $c = X^T b$ vektor projekcije b na lastne vektorje matrike H.

- Uporabimo ta spektralni razcep v (3):

$$b^* H b = b^* X \Lambda X^T b = 0.$$

- Označimo s $c = X^T b$ vektor projekcije b na lastne vektorje matrike H.

Izrek

Naj bo b rešitev problema (3). Potem vektor $c = X^T b$ s komponentami c_i zadošča naslednjima enačbama:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |c_i|^2 = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = 1. \tag{5}$$

Iskanje izotropnih vektorjev

Če niso vse lastne vrednosti H enako predznačene, potem mora za najmanjšo veljati $\lambda_n < 0$.

Naj bo $k < n$ tak, da je $\lambda_k > 0$ in $0 < t < 1, t \in \mathbb{R}$. Izberemo taka c_n in c_k, da velja $|c_n|^2 = t$, $|c_k|^2 = 1 - t$ in $c_i = 0$, $i \neq n, k$, ker velja enačba $\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = 1$ $(t + (1 - t) = 1)$. Iz $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |c_i|^2 = 0$ mora veljati enačba:

$$\lambda_n t + \lambda_k (1 - t) = 0,$$

katere rešitev je:

$$t_s = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

- Absolutna vrednost c_n (oz. c_k) je kvadratni koren od t_s (oz. $1 - t_s$).
- Ker je $b = Xc$, sta realni rešitvi:

$$b_1 = \sqrt{t_s}x_n + \sqrt{1 - t_s}x_k, \quad b_2 = -\sqrt{t_s}x_n + \sqrt{1 - t_s}x_k,$$

kjer sta x_n in x_k lastna vektorja pripadajoča λ_n in λ_k.

- Absolutna vrednost c_n (oz. c_k) je kvadratni koren od t_s (oz. $1 - t_s$).
- Ker je $b = Xc$, sta realni rešitvi:

$$b_1 = \sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k,$$

  kjer sta x_n in x_k lastna vektorja pripadajoča λ_n in λ_k.
- Ker imata izraza v rešitvah enaka imenovalca, lahko rešitvi zapišemo kot:

$$b_1 = \sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k.$$

- Absolutna vrednost c_n (oz. c_k) je kvadratni koren od t_s (oz. $1 - t_s$).
- Ker je $b = Xc$, sta realni rešitvi:

$$b_1 = \sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k,$$

kjer sta x_n in x_k lastna vektorja pripadajoča λ_n in λ_k.

- Ker imata izraza v rešitvah enaka imenovalca, lahko rešitvi zapišemo kot:

$$b_1 = \sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k.$$

- Vektor mora biti normiran:

$$b_1 = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_n + \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_k,$$

$$b_2 = -\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_n + \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_k.$$

Neskončno rešitev

Ko sta $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $b \in \mathbb{R}^n$ smo dokazali naslednji izrek:

Izrek

Če je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nedefinitna (t.j. ni pozitivno in negativno definitna), potem obstajata najmanj dva neodvisna realna izotropna vektorja.

Neskončno rešitev

Ko sta $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $b \in \mathbb{R}^n$ smo dokazali naslednji izrek:

Izrek

Če je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nedefinitna (t.j. ni pozitivno in negativno definitna), potem obstajata najmanj dva neodvisna realna izotropna vektorja.

Vzeti moramo vsaj tri različne lastne vrednosti, ki ne smejo biti istega predznaka (ko obstajajo).

- Predpostavimo, da $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$.

- Predpostavimo, da $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$.
- Naj bo $t_1 = |c_1|^2$, $t_2 = |c_2|^2$.

- Predpostavimo, da $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$.
- Naj bo $t_1 = |c_1|^2$, $t_2 = |c_2|^2$.

Veljati mora enačba (5)

$$\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3(1 - t_1 - t_2) = 0$$

oz.

$$(\lambda_1 - \lambda_3)t_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)t_2 + \lambda_3 = 0,$$

s pogoji: $t_i \geq 0, i = 1, 2$ in $t_1 + t_2 \leq 1$.

Neskončno rešitev

- Dobimo premico definirano v (t_1, t_2) ravnini z enačbo:

$$t_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} t_1 .$$

Neskončno rešitev

- Dobimo premico definirano v (t_1, t_2) ravnini z enačbo:

$$t_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} t_1 .$$

- Pogoji za t_1, t_2 definirajo trikotnik.
- Preverimo, če premica seka trikotnik.
- Vse dopustne vrednosti za t_1 in t_2 so dane z daljico v trikotniku.
- Zato obstaja neskončno število možnih pozitivnih parov (t_1, t_2).

Zgled

Poglejmo si enostaven zgled za matriko 3x3 z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 2$.

Matrika lastnih vektorjev X je enaka I.

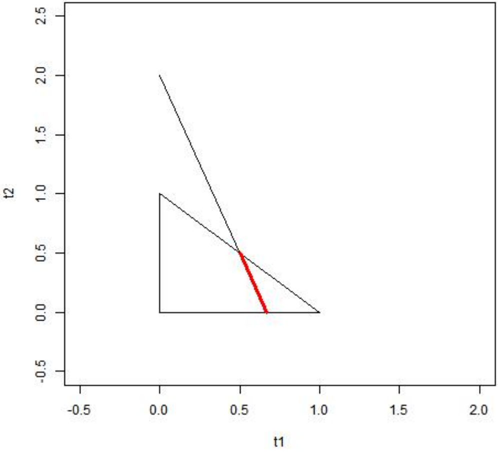
Enačba premice je $t_2 = 2 - 3t_1$ s pogoji $t_1, t_2 \geq 0$ in $t_1 + t_2 \leq 1$.

Zgled

Dopustne rešitve za t_1 in t_2 so dane z daljico v trikotniku.

Zgled

Dopustne rešitve za t_1 in t_2 so dane z daljico v trikotniku.



Zgled

Iz daljice lahko izberemo katerikoli par točk (t_1, t_2), npr. $(0.5, 0.5)$. Potem vemo kako izgleda vektor $c = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \\ 0 \end{bmatrix}$. Iz enačbe $c = X^T b$ dobimo

$$b = Xc = c = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Seveda je rešitev tudi $b = -c$. Tako dobimo neskončno izotropnih vektorjev b.

Neskončno rešitev

Takšna konstrukcija pripelje do naslednjega izreka:

Izrek

Če je $n > 2$ in je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nedefinitna, ima matrika H vsaj tri različne lastne vrednosti z različnimi predznaki. Potem obstaja neskončno število realnih izotropnih vektorjev.

Neskončno rešitev

Takšna konstrukcija pripelje do naslednjega izreka:

Izrek

Če je $n > 2$ in je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nedefinitna, ima matrika H vsaj tri različne lastne vrednosti z različnimi predznaki. Potem obstaja neskončno število realnih izotropnih vektorjev.

Splošen zapis

$$\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i - \lambda_k)t_i + \lambda_k = 0, \quad t_i \geq 0, i = 1, \ldots, k-1, \quad \sum_{i=1}^{k-1} t_i \leq 1.$$

Kompleksne matrike

Predstavljeni bodo algoritmi naslednjih avtorjev:

1. *Meurant*,
2. *Carden*,
3. *Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig* (CPU).

Algoritme bomo numerično primerjali, saj bi radi, da algoritem vrne izotropni vektor s čim manj računanja.

Meurant

- Uporabimo lastne vrednosti in lastne vektorje hermitske matrike $K = (A - A^*)/(2i)$.
- S kombiniranjem lastnih vektorjev matrike K pripadajočim k pozitivnim in negativnim lastnim vrednostim, lahko (v nekaterih primerih) izračunamo taka vektorja b_1 in b_2, da

$$\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0$$

in

$$\alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0.$$

Meurant

Lema

Naj bosta b_1 *in* b_2 *enotska vektorja z* $\Im(b_i^* A b_i) = 0$, $i = 1, 2$ *in* $\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0$, $\alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0$. *Naj bo*

$b(t, \theta) = e^{-i\theta} b_1 + t b_2$, $t, \theta \in \mathbb{R}$ *in* $\alpha(\theta) = e^{i\theta} b_1^* A b_2 + e^{-i\theta} b_2^* A b_1$. *Potem je*

$$b(t, \theta)^* A b(t, \theta) = \alpha_2 t^2 + \alpha(\theta) t + \alpha_1,$$

$\alpha(\theta) \in \mathbb{R}$, *ko* $\theta = arg(b_2^* A b_1 - b_1^T \bar{A} \bar{b}_2)$.

Za $t_1 = (-\alpha(\theta) + \sqrt{\alpha(\theta)^2 - 4\alpha_1\alpha_2})/(2\alpha_2)$ *imamo*

$$b(t_1, \theta) \neq 0, \quad \frac{b(t_1, \theta)^*}{\|b(t_1, \theta)\|} A \frac{b(t_1, \theta)}{\|b(t_1, \theta)\|} = 0.$$

Algoritem

1. S kombiniranjem lastnih vektorjev K, pripadajočim pozitivnim in negativinim lastnim vrednostim, izračunamo taka b_1 in b_2, da $\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0$ in $\alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0$. Uporabimo lemo 6 in končamo.
2. Če ne najdemo b_1, b_2 potrebna za lemo 6, izračunamo še lastne vektorje matrike H. Ponovimo korak 1. za matriko $\imath A$.
3. Če postopek ne deluje niti za $\imath A$, uporabimo kombinacijo lastnih vektorjev K in H, kjer z x označimo lastni vektor K in z y lastni vektor H.
4. Upoštevamo vektorje $X_\theta = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y, 0 \leq \theta \leq \pi$. $X_\theta^* A X_\theta$ opiše elipso znotraj $W(A)$.

Algoritem

5. Za dan par (x, y) iščemo presečišča elipse $X_\theta^* A X_\theta$ z realno osjo. Upoštevamo, da je $A = H + iK$:

$$X_\theta^* A X_\theta = \cos^2(\theta)(x^* Hx + ix^* Kx) + \sin^2(\theta)(y^* Hy + iy^* Ky) + \sin(\theta)\cos(\theta)(x^* Hy + y^* Hx + i[x^* Ky + y^* Kx]).$$

Naj bo $\alpha = \Im(x^* Hx + ix^* Kx)$, $\beta = \Im(y^* hy + iy^* Ky)$ in$\gamma = \Im(x^* Hy + y^* Hx + i[x^* Ky + y^* Kx])$. Ko izenačimo $\Im(X_\theta^* A X_\theta) = 0$, dobimo enačbo:

$$\alpha \cos^2(\theta) + \beta \sin^2(\theta) + \gamma \sin(\theta)\cos(\theta) = 0.$$

Predpostavimo, da $\cos(\theta) \neq 0$ in delimo, dobimo kvadratno enačbo za $t = \tan(\theta)$,

$$\beta t^2 + \gamma t + \alpha = 0.$$

Algoritem

6. Če ima ta enačba realne rešitve, potem dobimo vrednosti θ, ki nam vrnejo take vektorje X_θ, da $\Im(X_\theta^* A X_\theta) = 0$.
7. Če tudi ta konstrukcija ne deluje, uporabimo algoritem CPU.

Algoritem

6. Če ima ta enačba realne rešitve, potem dobimo vrednosti θ, ki nam vrnejo take vektorje X_θ, da $\Im(X_\theta^* A X_\theta) = 0$.
7. Če tudi ta konstrukcija ne deluje, uporabimo algoritem CPU.

Razlike v implementaciji v Matlabu:

- Izračunamo 3 največje in 3 najmanjše lastne vrednosti in lastne vektorje.

Algoritem

6. Če ima ta enačba realne rešitve, potem dobimo vrednosti θ, ki nam vrnejo take vektorje X_θ, da $\Im(X_\theta^* A X_\theta) = 0$.
7. Če tudi ta konstrukcija ne deluje, uporabimo algoritem CPU.

Razlike v implementaciji v Matlabu:

- Izračunamo 3 največje in 3 najmanjše lastne vrednosti in lastne vektorje.
- b_1 in b_2 najdemo tako, da iščemo presečišča realne osi z maksimizirano elipso $X_\theta^* A X_\theta$.

Algoritem

6. Če ima ta enačba realne rešitve, potem dobimo vrednosti θ, ki nam vrnejo take vektorje X_θ, da $\Im(X_\theta^* A X_\theta) = 0$.
7. Če tudi ta konstrukcija ne deluje, uporabimo algoritem CPU.

Razlike v implementaciji v Matlabu:

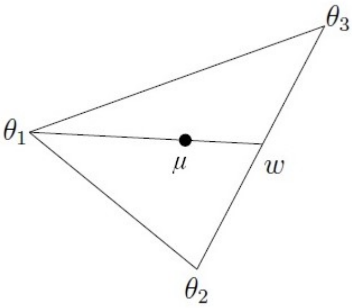
- Izračunamo 3 največje in 3 najmanjše lastne vrednosti in lastne vektorje.
- b_1 in b_2 najdemo tako, da iščemo presečišča realne osi z maksimizirano elipso $X_\theta^* A X_\theta$.
- Elipso maksimiziramo tako, da vzamemo $X_\theta(\phi) = \cos(\theta) x \exp^{\phi \imath} + \sin(\theta) y$, kjer je $\phi = \frac{1}{2\imath} \ln(x^* A y (y^* A x)^{-1})$.

Carden

- Predpostavimo, da je μ v konveksni ogrinjači treh točk $\theta_i \in W(A)$, za katere smo lahko izračunali izotropne vektorje b_i.
- Konveksna ogrinjača θ_i je trikotnik (lahko je izrojen).
- Radi bi, da je μ na daljici, ki ima take robne točke, da za njih vemo ali lahko izračuamo izotropne vektorje. BSŠ predpostavimo, da je θ_1 ena od robnih točk te daljice. Za drugo robno točko vzamemo w, ki je presečišče daljice med θ_2 in θ_3 s premico, ki teče skozi θ_1 in μ.

Carden

- w je konveksna kombinacija θ_2 in θ_3, zato mu lahko določimo pripadajoč izotropni vektor. Ker pa je μ konveksna kombinacija w in θ_1, lahko tudi njemu določimo izotropni vektor.



Algoritem

Naj bo $\varepsilon > 0$ (npr. $\varepsilon = 10^{-16}\,\|A\|$).

1. Poiščemo zunanjo aproksimacijo $W(A)$, z izračunom najbolj leve in desne lastne vrednosti $H_\theta = (e^{i\theta}A + e^{-i\theta}A^*)/2$ za $\theta = 0, \pi/2$. Če μ ni v zunanji aproksimaciji, potem $\mu \notin W(A)$ in ustavimo algoritem, drugače nadaljujemo.
2. Če je višina ali širina zunanje aproksimacije manj kot ε, potem je $W(A)$ približno hermitska ali poševno-hermitska. Če sta višina in širina zunanje aproksimacije manj kot ε, potem je $W(A)$ približno točka. V obeh primerih lahko ugotovimo ali je $\mu \in W(A)$. Če je, poiščemo pripadajoč izotropni vektor, drugače nadaljujemo.
3. Nadaljujemo s konstrukcijo notranje aproksimacije $W(A)$ z uporabo lastnih vektorjev najbolj leve in desne lastne vrednosti H_θ.

Algoritem

4. Če μ leži v notranji aproksimaciji, lahko poiščemo izotropni vektor.Uporabimo postopek opisan na začetku. Če μ ne leži v notranji aproksimaciji, določimo katera stranica notranje aproksimacije mu leži najbližje.
5. Izračunamo $\hat{\mu}$, ki je najbližja točka do μ, ki leži na notranji aproksimaciji. Če je $|\hat{\mu} - \mu| < \varepsilon$, izračunamo izotropni vektor za $\hat{\mu}$ in ga sprejmemo kot izotropni vektor za μ ter ustavimo algoritem.

Algoritem

6. Posodobimo notranjo in zunanjo aproksimacijo z izračunom največje lastne vrednosti in pripadajočega lastnega vektorja H_θ, kjer je smer θ pravokotna na stranico notranje aproksimacije, ki je najbližja μ. Če ne dobimo nove robne točke, ki se ni dotikala notranje aproksimacije, potem $\mu \notin W(A)$.
7. Preverimo, če je μ v novi zunanji aproksimaciji. Če je, se vrnemo na 4. korak, drugače $\mu \notin W(A)$.

Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig - CPU

1. Izračunamo do 4 robne točke $W(A)$, p_i in njihove izotropne vektorje b_i za $i = 1, 2, 3, 4$, tako da izračunamo ekstremne lastne vrednosti, ki pripadajo enotskim lastnim vektorjem x_i matrike H in K.
2. Nastavimo $p_i = b_i^* A b_i$. Dobimo štiri točke p_i, ki označujejo ekstremne vrednosti $W(A)$, tj. najmanjši in največji horizontalni in vetikalni razteg. Označimo jih z *rM* in *rm* za maksimalen in minimalen horizontalni razteg $W(A)$ in z *iM* in *im* za maksimalen in minimalen vertikalen razteg $W(A)$. Če je $|p_i| < 10^{-13}$ za $i = 1, 2, 3, 4$, potem je naš izotropni vektor kar pripadajoč enotski vektor.
3. Če med računanjem lastnih vektorjev in lastnih vrednosti ugotovimo, da je ena izmed matrik H in K definitna, t.j. da imajo njene lastne vrednosti vse enak predznak, potem vemo, da $\mu \notin W(A)$, in algoritem ustavimo.

Algoritem

4. Narišemo elipse, ki so preslikave velikega kroga kompleksne sfere $\mathbb{C}^n$, ki gredo skozi vse možne pare točk *rm*, *rM*, *im* in *iM*, ki imajo nasprotno predznačene imaginarne dele. Nato izračunamo presečišča vsake dobljene elipse z realno osjo..
5. Če so izračunana presečišča na obeh straneh 0, potem izračunamo izotropni vektor z lemo 6.
6. Če presečišča niso na obeh straneh 0, potem moramo rešiti kvadratno enačbo

$$(tx + (1-t)y)^* A(tx + (1-t)y) =$$

$$(x^*Ax + y^*Ay - (x^*Ay + y^*Ax))t^2 +$$

$$+(-2y^*Ay + (x^*Ay + y^*Ax))t + y^*Ay.$$

Algoritem

7. Zanimajo nas samo rešitve, ki imajo imaginaren del enak 0, saj želimo uporabiti lemo 6. Če imaginarni del enačbe enačimo z 0, dobimo naslednjo polinomsko enačbo z realnimi koeficienti:

$$t^2 + gt + \frac{p}{f} = 0$$

za $q = \Im(x^* Ax)$, $p = \Im(y^* Ay)$ in $r = \Im(x^* Ay + y^* Ax)$. Označimo $f = p + q - r$ in $g = (r - 2p)/f$.

8. Enačba ima realni rešitvi t_i, $i = 1, 2$, ki vrneta generirajoča vektorja $b_i = t_i x + (1 - t_i) y$ $(i = 1, 2)$ za realni točki. Z normalizacijo dobimo izotropne vektorje.

Algoritem

9. Če nobena od možnih elips ne seka realno os na vsaki strani 0, potem preverimo, če to stori njihova skupna množica in ponovimo isti postopek.

10. Če ne najdemo take elipse niti za skupno množico, potem izračunamo še več lastnih vrednosti in lastnih vektorjev za $A(\theta) = \cos(\theta)H + \sin(\theta)iK$ za kote $\theta \neq 0, \pi/2$ in delamo bisekcijo med točkami *rm*, *rM*, *im*, *iM*.

11. Končamo, ko najdemo definitno matriko $A(\theta)$ ali elipso, ki seka realno os na obeh straneh 0, nakar lahko uporabimo lemo 6.

Numerična analiza

Označimo algoritme z `AlgM`, `AlgC` in `AlgCPU`. Za vsak algoritem preverimo:

- v kolikšnem času je našel (ali ni našel) rešitev,
- koliko izračunov lastnih vrednosti in vektorjev je potreboval (označimo kot „Koraki”),
- kako velika je napaka $|b^* A b|$ (je `Inf` če ni rešitve).

A in μ kompleksna

$$B = F + \imath M$$

```
A=B+(-3+5i)*ones(200)-(200+500i)*eye(200)
```

Tabela: A kompleskna, $\mu = 12000 + 10000\imath$.

Algoritem	Čas	Koraki	Napaka
`AlgM`	0.433484	2	1.7053e-13
`AlgC`	0.656863	7	9.0949e-12
`AlgCPU`	0.03295	4	1.8190e-12

A realna, μ kompleksen

Poglejmo primer iz članka [3], za matriko

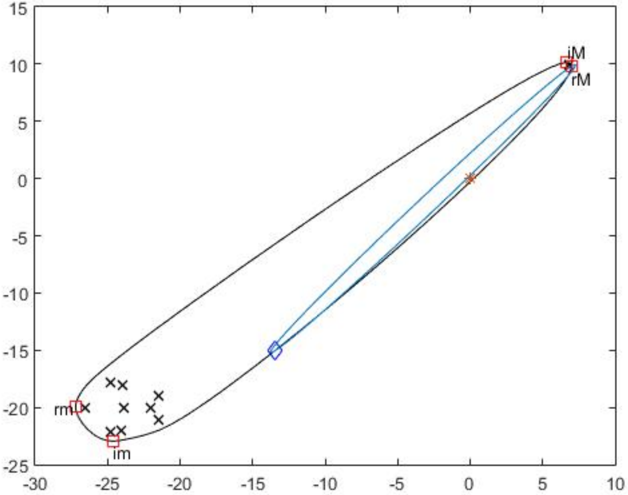
```
A = randn(10)+(3+3i)*ones(10).
```

Tabela: A realen, $\mu = 23.2 + 20\imath$ in naš algoritem ne najde rešitve.

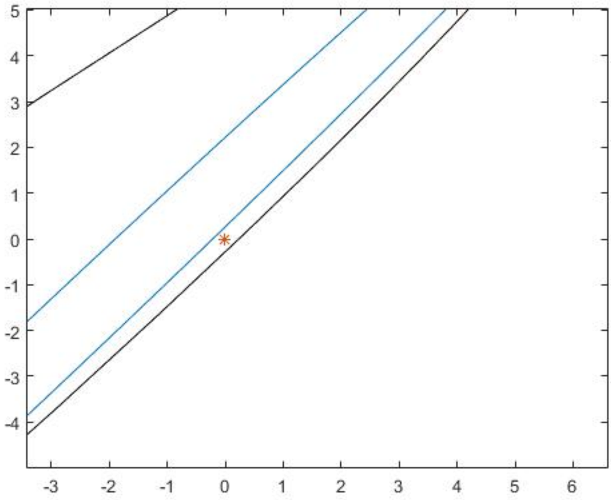
Algoritem	Čas	Koraki	Napaka
`AlgM`	0.013259	2	Inf
`AlgC`	0.022176	6	1.1235e-14
`AlgCPU`	0.001088	3	1.7764e-15

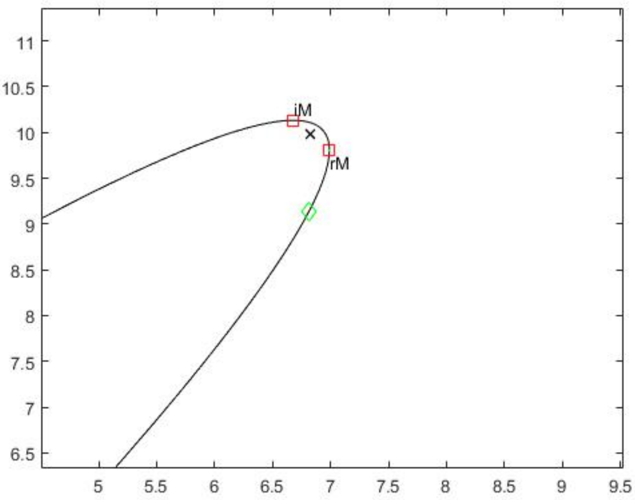
Bisekcija kota

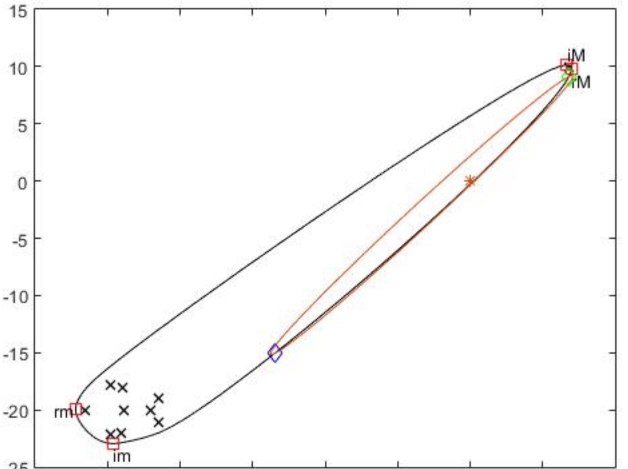
- Vsa presečišča elipse z realno osjo negativna in je $\Im(rM) > 0 \Rightarrow$ bisekcija kota $3/2\pi$ in 2π .
- Izračunamo največjo lastno vrednost $A(7/4\pi)$ ter pripadajoč lastni vektor x_{nov}.
- $p = x_{nov}^* A x_{nov}$ je točka na robu numeričnega zaklada med točkama *im* in *rM*.
- Če je $\Im(p) < 0$, potem iščemo presečišča *p*-*rM* elipse z realno osjo, če pa je $\Im(p) > 0$, potem iščemo presečišča *im*-*p* elipse z realno osjo.
- Ponavljamo, dokler ne najdemo presečišči elipse z realno osjo na obeh straneh 0, ali dokler $A(\theta)$ ne postane definitna.



iM
rM
rm
im
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6


iM
rM
11
10.5
10
9.5
9
8.5
8
7.5
7
6.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
9.5


15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
iM
rM
rm
im

Zaključek

Naš boljši, če samo en korak. Carden hitrejši za manjše matrike. CPU boljši od vseh.

Literatura I

[1] R. Carden, *A simple algorithm for the inverse field of values problem*, Inverse Probl. **25** (2009) 1–9.

[2] R. Carden, `inversefov.m`, verzija 6. 2. 2011, [ogled 5. 5. 2016], dostopno na `http://www.caam.rice.edu/tech_reports/2009/`.

[3] C. Chorianopoulos, P. Psarrakos in F. Uhlig, *A method for the inverse numerical range problem*, Electron. J. Linear Algebra **20** (2010) 198–206.

[4] N. Ciblak, H. Lipkin, *Orthonormal isotropic vector bases*, v: Proceedings of DETC'98, 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences (1998).

Literatura II

[5] W. Henao, `fovals.m`, [ogled 27. 7. 2016], dostopno na `https://www.mathworks.com/matlabcentral/mlc-downloads/downloads/submissions/4679/versions/1/previews/fovals.m/index.html?access_key=`.

[6] Johnson, C. R., *Numerical determination of the field of values of a general complex matrix*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978) 595–602.

[7] G. Meurant, *The computation of isotropic vectors*, Numer. Alg. **60** (2012) 193–204.

[8] P. Psarrakos, M. Tsatsomeros, *Numerical range: (in) a matrix nutshell*, Math. Notes from Washington State University, Vol **45**, No. 2 (2002) 45–57.

Literatura III

[9] P. Psarrakos, *nr.m*, [ogled 12. 6. 2017], dostopno na http://www.math.wsu.edu/faculty/tsat/files/matlab/nr.m.

[10] F. Uhlig, *invfovCPU.m*, verzija 22. 3. 2011, [ogled 5. 5. 2016], dostopno na http://www.auburn.edu/~uhligfd/m_files/invfovCPU.m.