UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Mirjam Pergar

Računanje izotropnih vektorjev

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Bor Plestenjak

Ljubljana, 2016

Kazalo

Računanje izotropnih vektorjev

Povzetek

The computation of isotropic vectors

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords:

1. Uvod

1.1. **Problem.** Za dano nesingularno, kvadratno $n \times n$ matriko A z realnimi ali kompleksnimi elementi, nas zanima izračun enotskega vektorja b z realnimi ali kompleksnimi elementi, tako da velja:

$$b^*Ab = 0. \tag{1}$$

Vektor b, za katerega velja (1) in $b^*b = 1$ imenujemo **izotropni vektor**. Bolj splošen je problem inverzne zaloge vrednosti, kjer iščemo enotski vektor b, za katerega velja:

$$b^*Ab = \mu, \tag{2}$$

kjer je μ dano kompleksno število. Očitno je, da je problem (2) možno prevesti na problem (1) za drugo matriko, saj je (2) enako

$$b^*(A - \mu I)b = 0.$$

Če je μ lastna vrednost matrike A, torej velja $Av = \mu v$, kjer je v pripadajoči lastni vektor matrike A, potem je rešitev pripadajoč lastni vektor matrike A. Če pa μ ni lastna vrednost matrike A, je $A - \mu I$ nesingularna in je potreben izračun izotropnega vektorja te matrike. Tudi če matrika A ni realna imamo opravka s kompleksno matriko, ko je μ kompleksno število. Zato bomo od sedaj naprej vse vrednosti enačili z 0.

Definicija 1.1. Zaloga vrednosti matrike $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je zaprta, konveksna podmnožica kompleksne ravnine, definirana kot

$$W(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

Očitno je zaloga vrednost $W(A)$ množica vseh Rayleighovih kvocientov matrike A. Če hočemo, da ima (1) vsaj eno rešitev, mora biti izhodišče v $W(A)$. $W(A)$ si lahko predstavljamo kot preslikavo, ki slika iz $n \times n$ kompleksnih matrik v podmnožico kompleksne ravnine. Označimo s $\sigma(A)$ množico vseh lastnih vrednosti matrike A, ki jo imenujemo spekter. Lastnosti zaloge vrednosti ([5]):

(1) $W(A)$ je konveksna, zaprta in omejena.
(2) $\sigma(A) \subseteq W(A)$.
(3) Za vsako unitarno matriko U je $W(U^*AU) = W(A)$.
(4) $W(A + zI) = W(A) + z$ in $W(zA) = zW(A)$ za vsako kompleksno število z.
(5) Rob zaloge vrednosti $W(A), \partial W(A)$ je kosoma algebrska krivulja, in vsaka točka v kateri $\partial W(A)$ ni diferenciabilna je lastna vrednost matrike A.
(6) Če je A normalna, potem $W(A) = \mathrm{Co}(\sigma(A))$, kjer s Co označimo zaprto konveksno ogrinjačo množice.
(7) $W(A)$ je daljica na realni osi, če in samo če je A hermitska.

Dokaz. v nastajanju... □

Izrek 1.2. *Naj imata A in b realne ali kompleksne elemente. Potem veljajo enakosti:*

$$b^*Ab = 0 \Leftrightarrow b^*(A + A^*)b = 0 \ \mathit{in}\ b^*(A - A^*)b = 0.$$

Dokaz. (⇒) Če velja $b^*Ab = 0$, je tudi $(b^*Ab)^* = b^*A^*b = 0$. Če preoblikujemo prvo enačbo na desni v $b^*Ab + b^*A^*b$ dobimo 0. Drugo enačbo dokažemo na podoben način.

($\Leftarrow$) S seštevkom enačb na desni dobimo enačbo na levi:

$$\begin{aligned} b^*(A+A^*)b + b^*(A-A^*)b &= 0 \\ b^*(A+A^*+A-A^*)b &= 0 \\ b^*(2A)b &= 0 \\ b^*Ab &= 0 \end{aligned}$$

□

Če velja le $b^*(A+A^*)b = 0$, ugotovimo da je $\Re(b^*Ab) = 0$. Podobno, če velja samo $b^*(A-A^*)b = 0$, potem je $\Im(b^*Ab) = 0$. Ta dejstva bomo uporabili pri računanju rešitev za kompleksne matrike. Ko sta b in A realna, je problem mnogo enostavnejši, saj moramo upoštevati le simetričen del matrike A.

Lema 1.3. [4] *Izotropni vektorji matrike A so identični izotropnim vektorjem njenega simetričnega dela.*

Dokaz. To sledi iz $b^TAb = b^TA_{sim}b + b^TA_{psim}b = b^TA_{sim}b$, kjer je z A_{sim} označen simetrični del matrike A (t.j. $A = A^T$) in z A_{psim} poševno-simetrični del matrike A (t.j. $A = -A^T$). □

Velja enakost:

$$b^TAb = 0 \Leftrightarrow b^T(A+A^T)b = 0.$$

Hermitski in poševno-hermitski del matrike A bomo označili s $H = (A+A^*)/2$ in $\tilde{K} = (A-A^*)/2 = \imath K$.

1.2. **Uporaba.** Zanimanje za izračun izotropnih vektorjev je povezano s preučevanjem delne stagnacije GMRES algoritma za reševanje linearnih sistemov z realnimi matrikami. Zaloga vrednosti se uporablja za preučevanje konvergence nekaterih iterativnih metod za reševanje linearnih sistemov in ima mnogo aplikacij v numerični analizi, diferencialnih enačbah, teoriji sistemov itd.

2. Realne matrike

V tem razdelku bomo opisali kako izračunamo željeno število izotropnih vektorjev za realne matrike. To storimo z uporabo lastnih vektorjev matrike $H = (A+A^*)/2$. Ko je A realna matrika, nas zanima kako izračunati rešitev naslednje enačbe:

$$b^*Hb = 0, \tag{3}$$

kjer je H realna in simetrična matrika (t.j. $H = H^T$). Vemo, da je $W(A)$ simetrična glede na realno os in, da je $0 \in W(A)$, če in samo če $\lambda_n \le 0 \le \lambda_1$, kjer sta λ_n in λ_1 najmanjša in največja lastna vrednost matrike H. Naj bosta x_1 in x_n realna lastna vektorja, pripadajoča λ_1 in λ_n. Potem sta $x_1^TAx_1 = x_1^THx_1 = \lambda_1$ in $x_n^TAx_n = x_n^THx_n = \lambda_n$ realni točki na skrajni levi in skrajni desni zaloge vrednosti $W(A)$ na realni osi. Realne rešitve (3) izračunamo z uporabo lastnih vektorjev matrike H. Predpostavimo, da iščemo vektorje b z normo 1. Matriko H lahko zapišemo kot

$$H = X\Lambda X^T,$$

kjer je Λ matrika, ki ima na diagonali lastne vrednosti λ_i, ki so realna števila. X je ortogonalna matrika lastnih vektorjev, tako da $X^TX = I$. Potem uporabimo ta spektralni razcep v (3):

$$b^*Hb = b^*X\Lambda X^Tb = 0.$$

Označimo s $c = X^T b$ vektor projekcije b na lastne vektorje matrike H. Dobimo naslednji izrek.

Izrek 2.1. *Naj bo b rešitev problema* (3)*. Potem vektor $c = X^T b$ s komponentami c_i zadošča naslednjima enačbama:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |c_i|^2 = 0 \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = 1. \tag{5}$$

Dokaz. Enačbo (4) dokažemo tako, da $c = X^T b$ oz. $c^* = b^* X$ vstavimo v (3) in dobimo

$$b^* H b = b^* X \Lambda X^T b = c^* \Lambda c = 0.$$

Ker je Λ diagonalna matrika, lahko $c^* \Lambda c$ zapišemo kot vsoto komponent $\bar{c_i} \lambda_i c_i = \lambda_i |c_i|^2$, ko $i = 1, 2, ...n$. Za enačbo (5) vemo, da je $\|b\|_2 = 1$. Če normo zapišemo s c je dobimo

$$\|b\|_2 = \|Xc\|_2 = \|c\|_2 = 1,$$

saj je X ortogonalna matrika.

$\square$

Opomba: Enačbi veljata samo za realna števila. Zaradi izreka 2.1 mora biti 0 konveksna kombinacija lastnih vrednosti λ_i. Kot smo že videli, to pomeni, da če je A definitna matrika (pozitivno ali negativno), potem (3) nima netrivialne rešitve. Drugače je $0 \in W(A)$ in lahko vedno najdemo realno rešitev. V bistvu kadar je $n > 2$, imamo neskončno rešitev.

2.1. **Iskanje izotropnih vektorjev.** Najprej bomo za izračun uporabili dva lastna vektorja, pozneje pa bomo videli kako se izračuna več rešitev z uporabo treh lastnih vektorjev. Če predpostavimo, da nimajo vse lastne vrednosti H enakega predznaka, potem more za najmanjšo lastno vrednost λ_n veljati $\lambda_n < 0$. Naj bo $k > 1$ tak, da je $\lambda_k > 0$ in t naj bo pozitivno realno število, manjše od 1. Označimo $|c_n|^2 = t, |c_k|^2 = 1 - t$ in $c_i \neq 0, i \neq n, k$, kar velja zaradi enačbe (5), $t + (1 - t) = 1$. Iz (4) mora veljati enačba:

$$\lambda_n t + \lambda_k (1 - t) = 0,$$

katere rešitev je:

$$t_s = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_n}. \tag{6}$$

Ker je $\lambda_n < 0$, je imenovalec pozitiven in t_s pozitiven ter $t_s < 1$. Absolutna vrednost c_1 (oz. c_k) je kvadratni koren od t_s (oz. $1 - t_s$). Ker je $b = Xc$, sta dve realni rešitvi:

$$b_1 = \sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k,$$

kjer sta x_1 in x_k lastna vektorja, ki pripadata lastnima vrednostima λ_n in λ_k. Druge možnosti za predznak dajo rešitve, ki so v isti smeri kot ti dve. Ker imata izraza v rešitvah enaka imenovalca, lahko rešitvi zapišemo kot:

$$b_1 = \sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k$$

(sledi iz [4]). Vektor mora biti normiran.

$$b_1 = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_n + \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_n + \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_k.$$

V principu, lahko te b-je pomnožimo s $e^{i\theta}$, ampak nam to vrne rešitev v isti smeri. V bistvu lahko uporabimo vsak par pozitivnih in negativnih lastnih vrednosti. Ta postopek lahko vrne toliko rešitev kot je dvakratno število parov lastnih vrednosti matrike H z nasprotnimi predznaki, če so vse lastne vrednosti različne. Konstruirani rešitvi sta neodvisni in še več, ortogonalni, če $\lambda_k = -\lambda_n$. Predpostavimo, da je b realen.

Posledica 2.2. [4] *Dobljena izotropna vektorja sta ortogonalna ($b_1^T b_2 = 0$), če in samo če $\lambda_k = -\lambda_n$.*

Dokaz.

$$b_1^T b_2 = (\sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k)^T (-\sqrt{\lambda_k} x_1 + \sqrt{|\lambda_n|} x_k) = -(\lambda_n + \lambda_k).$$

□

Ko sta A in b realna smo dokazali naslednji izrek:

Izrek 2.3. *Če je A realna in nedefinitna (t.j. ni pozitivno in negativno definitna), potem obstajata najmanj dva neodvisna realna izotropna vektorja.*

Da bi pokazali, da imamo neskončno število realnih rešitev in, da bi jih nekaj izračunali, moramo vzeti vsaj tri različne lastne vrednosti z različnimi predznaki (ko obstajajo). Predpostavimo, da imamo $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$ in naj bo $t_1 = |c_1|^2$, $t_2 = |c_2|^2$. Veljati mora enačba (5)

$$\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 (1 - t_1 - t_2) = (\lambda_1 - \lambda_3) t_1 + (\lambda_2 - \lambda_3) t_2 + \lambda_3 = 0, \tag{7}$$

s pogoji: $t_i \geq 0, i = 1, 2$ in $t_1 + t_2 \leq 1$. Torej imamo

$$t_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} t_1,$$

ki definira premico v (t_1, t_2) ravnini. Preveriti moramo, če ta premica seka trikotnik, definiran s pogoji za t_1, t_2. Premica seka t_1-os pri $\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_1)$, kar je več kot 1, saj je $\lambda_1 < 0$, t_2-os pa pri $\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_2)$, kar je več kot 1. Ta premica ima negativen naklon. Vse dopustne vrednosti za t_1 in t_2 so dane z daljico v trikotniku. Zato obstaja neskončno število možnih pozitivnih parov (t_1, t_2). Primer $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ je podoben zgornjemu, le da premica seka t_2-os pod 1. Potem dobimo rešitve b s kombiniranjem pripadajočih treh lastnih vektorjev. Ta problem za iskanje koeficientov je v treh dimenzijah in možne rešitve t-ja so v eni dimenziji. Takšna konstrukcija pripelje do naslednjega izreka:

Izrek 2.4. *Če je $n > 2$ in A je realna in nedefinitna, ima matrika H vsaj tri različne lastne vrednosti z različnimi predznaki. Potem obstaja neskončno število realnih izotropnih vektorjev.*

Seveda lahko nadaljujemo z večanjem števila lastnih vrednosti. Če uporabimo štiri različne lastne vrednosti z različnimi predznaki, potem moramo na problem gledati v treh dimenzijah. Prostor, kjer je omejitvam zadoščeno, je tetraeder, torej moramo poiskati presek dane ravnine s tem tetraedrom. V splošnem, če imamo k

različnih lastnih vrednosti z različnimi predznaki, definira naš problem naslednja enačba:

$$\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i - \lambda_k)t_i + \lambda_k = 0, \quad t_i \geq 0, i = 1, \ldots, k-1, \sum_{i=1}^{k-1} t_i \leq 1. \tag{8}$$

Prva enačba opisuje hiperravnino v kateri moramo poiskati presečišča te hiperravnine z volumnom telesa definiranega s pogoji. Če je A realna matrika smo končali, saj smo pokazali, da lahko poračunamo toliko realnih rešitev kot hočemo. Posebej lahko sčasoma izračunamo n neodvisnih rešitev, čeprav to ne definira izotropni podprostor.

3. Kompleksne matrike

V tem razdelku si bomo pogledali kompleksne matrike. Predstavljeni bodo trije teoretični postopki, kako priti do izotropnih vektorjev, treh avtorjev iz [1],[2] in [3].

3.1. **Iskanje izotropnih vektorjev.**

3.1.1. *Meurant 1.* V nekaterih primerih lahko izračunamo rešitve s samo enim računanjem lastnih vrednosti in vektorjev matrike K, vendar to ne deluje vedno. Sredstvo, ki lahko pomaga je, da uporabimo lastne vektorje matrike H. Če ima matrika A kompleksne elemente, nam prejšnja konstrukcija za realne matrike vrne le vektorje za katere je $\Re(b^*Ab) = 0$. Najprej opazimo, da lahko v nekaterih primerih uporabimo podobno konstrukcijo kot v prejšnjem razdelku, ki najde množico rešitev za hermitsko matriko H z ničelnim realnim delom in pozitivnim in negativnim imaginarnim delom???. Z uporabo treh lastnih vektorjev H, obstaja neskončno rešitev dobljenih na daljici v trikotniku omejitev. Ko točko nenehno sprehajamo po daljici, se tudi imaginarni del rešitve nenehno spreminja. Če sta imaginarna dela, ki ustrezata robnima točkama daljice, različnih predznakov, potem iz izreka o povprečni vrednosti, da obstaja točka na daljici, ki ima ničeln imaginarni del.??To se lahko izračuna z dihotomijo??. Opomba: to vsebuje samo izračun kvadratne forme x^*Ax. Ne potrebujemo nobenih izračunov lastnih vrednosti in vektorjev. Vendar, se sprememba predznaka v vrednostih x^*Ax ne zgodi za nobene trojčke lastnih vrednosti.

3.1.2. *Meurant 2.* Druga konstrukcija algoritma v [1] uporabi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $K = (A - A^*)/(2i)$, ki je hermitska. Konstrukcija v 2. razdelku vrne vektorje b, tako da je $\Im(b^*Ab) = 0$. S kombiniranjem lastnih vektorjev matrike K pripadajočim k pozitivnim in negativnim lastnim vrednostim, lahko (v nekaterih primerih) izračunamo dva vektorja b_1 in b_2, taka da $\alpha_1 = \Re(b_1^*Ab_1) < 0$ in $\alpha_2 = \Re(b_2^*Ab_2) > 0$.

Lema 3.1. *Naj bosta b_1 in b_2 enotska vektorja z $\Im(b_i^*Ab_i) = 0$, $i = 1, 2$ in $\alpha_1 = \Re(b_1^*Ab_1) < 0, \alpha_2 = \Re(b_2^*Ab_2) > 0$. Naj bo $b(t, \theta) = e^{-i\theta}b_1 + tb_2, t, \theta \in \mathbb{R}, \alpha(\theta) = e^{i\theta}b_1^*Ab_2 + e^{-i\theta}b_2^*Ab_1$. Potem je*

$$b(t, \theta)^*Ab(t, \theta) = \alpha_2 t^2 + \alpha(\theta)t + \alpha_1,$$

$\alpha(\theta) \in \mathbb{R}$, ko $\theta = arg(b_2^*Ab_1 - b_1^T\bar{A}\bar{b_2})$. Za $t_1 = (-\alpha(\theta) + \sqrt{\alpha(\theta)^2 - 4\alpha_1\alpha_2})/(2\alpha_2)$, imamo

$$b(t_1, \theta) \neq 0, \quad \frac{b(t_1, \theta)^*}{\|b(t_1, \theta)\|} A \frac{b(t_1, \theta)}{\|b(t_1, \theta)\|} = 0.$$

Lema 3.1 prikazuje kako se izračuna rešitev iz b_1 in b_2. Če imamo b_1 in b_2, taka da $\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0$ in $\alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0$, smo končali.
Opomba: Ko je A realna in imamo $b_1 = x_1, b_2 = x_2$ za lastne vektorje H, potem je $\theta = 0$ in lema 3.1 pove, kako se izračuna en izotropni vektor. Vendar v kompleksnem primeru, ne moremo vedno najti primerne vektorje b_1 in b_2. Posebej, y_i lastni vektorji K, če imajo vrednosti $\Re(y_i^* H y_j)$ enak predznak, konstrukcija ne deluje. Ekstremen primer je Jordanski blok z kompleksno vrednostjo α na diagonali in elementi 1 na naddiagonali. Potem imamo $\Re(y_i^* H y_j) = 0, i \neq j$ in $y_i^* H y_i = -\Re(\alpha)$. Zato so realni deli $b^* A b$ za vse vektorje b, ki se lahko konstruirajo, enaki.
Ko ni možno izračunati vseh vektorjev b_1 in b_2 potrebnih za lemo 3.1, izračunamo lastne vektorje H in uporabimo enako tehniko za matriko iA. V primeru neuspeha, kombiniramo lastne vektorje H in K. Naj bo x (oz. y) lastna vrednost K (oz. H), upoštevamo vektorje $X_\theta = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Ko gre θ od 0 do π, $X_\theta^* A X_\theta$ opisuje elipso v zalogi vrednosti. Za dan par lastnih vektorjev x, y iščemo presečišča elipse z realno osjo. Opazimo, da je $A = H + iK$, torej imamo:

$$\begin{aligned} X_\theta^* A X_\theta &= \cos^2(\theta)(x^* H x + i x^* K x) \\ &+ \sin^2(\theta)(y^* H y + i y^* K y) \\ &+ \sin(\theta)\cos(\theta)(x^* H y + y^* H x + i[x^* K y + y^* K x]). \end{aligned}$$

Naj bo $\alpha = \Im(x^* H x + i x^* K x), \beta = \Im(y^* h y + i y^* K y)$ in $\gamma = \Im(x^* H y + y^* H x + i[x^* K y + y^* K x])$. Ko enačimo imaginarni del $X_\theta^* A X \theta$ z 0, dobimo enačbo:

$$\alpha \cos^2(\theta) + \beta \sin^2(\theta) + \gamma \sin(\theta)\cos(\theta) = 0.$$

Predpostavimo, da $\cos(\theta) \neq 0$ in delimo, dobimo kvadratno enačbo za $t = \tan(\theta)$,

$$\beta t^2 + \gamma t + \alpha = 0.$$

Če ima ta enačba realne rešitve, potem dobimo vrednosti θ, ki nam vrnejo take vektorje X_θ, da $\Im(X_\theta^* A X_\theta) = 0$. Ko je velikost problema velika, ne uporabimo te konstrukcije za vse pare lastnih vektorjev, saj nas to lahko preveč stane. Uporabimo samo lastne vektorje, ki pripadajo par najmanjšim in največjim lastnim vrednostim. Če tudi ta konstrukcija ne deluje, uporabimo algoritem iz [3], ki je opisan malo naprej v nalogi.

3.1.3. *Carden.* V tem razdelku opišemo idejo za Cardenov algoritem za dano matriko $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in $\mu \in \mathbb{C}$. Naj bo $\varepsilon > 0$ toleranca (npr. $\varepsilon = 10^{-16}\|A\|$ za dvojno natančnost).
Najprej izračunamo najbolj levo in najbolj desno lastno vrednost $H_\theta = (e^{i\theta}A + e^{-i\theta}A^*)/2$ za $\theta = 0, \pi/2$. S tem dobimo zunanjo aproksimacijo zaloge vrednosti, ki jo seka v v robnih točkah $\partial W(A)$. Zunanja aproksimacijo bo pravokotnik, katerega stranice so vzporedne z realno in imaginarno osjo. Če μ ni v zunanji aproksimaciji, potem $\mu \notin W(A)$ in ustavimo algoritem, drugače nadaljujemo. Če je višina ali širina zunanje aproksimacije manj kot ε, potem je $W(A)$ približno hermitska ali poševnohermitska (ali kompleksen premik katere od teh). Če sta višina in širina zunanje aproksimacije manj kot ε, potem je zaloga vrednosti približno točka. V obeh primerih je potrebno ugotoviti ali $\mu \in W(A)$ ter, če je, je potrebno poiskati pripadajoč izotropni vektor. Če $\mu \notin W(A)$ nadaljujemo z konstrukcijo notranje aproksimacije $W(A)$ z uporabo lastnih vektorjev najbolj leve in desne lastne vrednosti H_θ. Notranja aproksimacija bo štirikotnih z oglišči v robnih točkah $\partial W(A)$. Če μ leži

v notranji aproksimaciji, lahko poiščemo izotropni vektor, ki generira μ (način bo opisan pozneje). Če μ ne leži v notranji aproksimaciji je potrebno določiti katera stranica notranje aproksimacije mu leži najbližje. Potrebno je izračunati $\hat{\mu}$, ki je najbližja točka do μ od notranje aproksimacije. Če je $|\hat{\mu} - \mu| < \varepsilon$, lahko izračunamo izotropni vektor za $\hat{\mu}$ in ga sprejmemo kot izotropni vektor za μ ter ustavimo algoritem. V naslednjem koraku je potrebno posodobiti notranjo in zunanjo aproksimacijo z izračunom največje lastne vrednosti in pripadajočega lastnega vektorja H_θ, kjer je smer θ pravokotna na stranico notranje aproksimacije, ki je najbližja μ. Če ne dobimo nove robne točke, ki se ni dotikala notranje aproksimacije, potem $\mu \notin W(A)$. Drugače ponovno preverimo, če je μ v novi zunanji aproksimaciji. Če je, ponovimo isti postopek, drugače $\mu \notin W(A)$.
Ta algoritem ne izkoristi dejstva, da je zaloga vrednosti 2×2 matrike elipsa. Ta lastnost nakazuje, da z točkami in pripadajočimi izotropnimi vektorji za notranjo aproksimacijo, lahko natančno določimo izotropne vektorje za točke zunaj notranje aproksimacije. V nadaljevanju bomo algoritem spremenili, da bo upošteval to lasnost.

3.1.4. *Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig.* V tem razdelku opišemo algoritem Chorianopoulosa, Psarrakosa in Uhliga za inverzen problem zaloge vrednosti. Algoritem je hitrejši in daje natančne numerične rezultate tam, kjer se zgornja algoritma mnogokrat ustavita. Tak primer je ko μ, $\mu \in W(A)$ ali $\mu \notin W(A)$, leži zelo blizu roba zaloge vrednosti $\partial W(A)$. Ta algoritem uporabi za iskanje izotropnih vektorjev le nekaj najbolj osnovnih lastnosti zaloge vrednosti poleg konveksnosti kot je $W(\alpha A + \beta I) = \alpha W(A) + \beta$.
Za iskanje izotropnih vektorjev izračunamo do 4 robne točke zaloge vrednost p_i in njihove izotropne vektorje b_i za $i = 1, 2, 3, 4$. To storimo z izračunom ekstremnih lastnih vrednosti, ki pripradajo enotskim lastnim vektorjem x_i matrike H in K. Iz $p_i = b_i^* A b_i$ dobimo 4 točke zaloge vrednosti p_i, ki so ekstremni horizontalni in vertikalni raztegi zaloge vrednosti $W(A)$. Te točke bomo označili s rM in rm za maksimalen in minimalen horizontalni razteg $W(A)$ in s iM in im za maksimalen in minimalen vertikalen razteg $W(A)$. Če katera od teh točk leži absolutno v bližini 10^{-13} točke 0, potem je naš izotropni vektor kar pripadajoč enotski vektor. Če pa med izračunom lastnih vrednosti in vektorjev ugotovimo, da je ena od hermitskih matrik H in iK definitna, potem vemo da $\mu \notin W(A)$ in algoritem ustavimo.
V naslednjem koraku moramo poiskati presečišča realne osi z elipsami velikega kroga, ki grejo skozi vse naše možne pare (kjer imajo imaginarni deli nasprotne predzanke) robnih točk $p_i = x^* A x, p_j = y^* A y$. Če dobimo presečišča na obeh straneh 0, potem izračunamo generirajoč enotski vektor za $0 \in W(A)$ z uporabo leme 3.1. V nasprotnem primeru moramo poračunati kvadratno enačbo, katere ničle določijo koordinatne osi $W(A)$ točk na elipsah skozi točke $x^* A x, y^* A y \in \partial W(A)$ ki se generirajo s točkami v $\mathbb{C}^n$ na velikem krogu skozi x in y.

$$(9) \quad \begin{aligned} (tx + (1-t)y)^* A (tx + (1-t)y) = {} & (x^* A x + y^* A y - (x^* A y + y^* A x)) t^2 \\ & + (-2y^* A y + (x^* A y + y^* A x)) t + y^* A y. \end{aligned}$$

To je kvadratna enačba z kompleksnimi števili. Nas zanimajo samo rešitve, ki imajo imaginaren del enak 0, saj želimo uporabiti lemo 3.1. Če imaginarni del enačbe (9) enačimo z 0, dobimo naslednji polinom z realnimi koeficienti:

$$(10) \qquad t^2 + gt + \frac{p}{f} = 0$$

za $q = \Im(x^*Ax)$, $p = \Im(y^*Ay)$ in $r = \Im(x^*Ay + y^*Ax)$. Označimo $f = p + q - r$ in $g = (r - 2p)/f$. Enačba (10) ima dve realni rešitvi t_i, $i = 1, 2$, ki vrneta dva generirajoča vektorja $b_i = t_i x + (1 - t_i) y$ $(i = 1, 2)$, za dve realni točki. Z normalizacijo dobimo željene entoske izotropne vektorje. Če nobena od možnih elips ne vrne dve realni točki zaloge vrednosti na vsaki strani 0, potem preverimo, če to stori njihova skupna množica. Če ne, potem izračunamo še več lastnih vrednosti in lastnih vektorjev za $A(\theta) = \cos(\theta)H + \sin(\theta)iK$, za kote θ drugačne od $\theta \neq 0, \pi/2$. To delamo dokler dobljene elipse generirane z velikim krogom znotraj $W(A)$ ne sekajo realne osi na obeh straneh 0 in lahko izračunamo izotropne vektorje z lemo 3.1 ali dokler ena od matrik $A(\theta)$ ne postane definitna.

4. Algoritmi/Numerična analiza

5. Zaključek

Literatura

[1] G. Meurant, *The computation of isotropic vectors*, Numer. Alg. **60** (2012) 193–204.

[2] R. Carden, *A simple algorithm for the inverse field of values problem*, Inverse Probl. **25** (2009) 1–9

[3] C. Chorianopoulos, P. Psarrakos in F. Uhlig, *A method for the inverse numerical range problem*, Electron. J. Linear Algebra **20** (2010) 198–206

[4] N. Ciblak, H. Lipkin, *Orthonormal isotropic vector bases*, In: Proceedings of DETC'98, 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences (1998).

[5] Johnson, C. R., *Numerical determination of the field of values of a general complex matrix*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978) 595–602.