UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Mirjam Pergar

# Računanje izotropnih vektorjev

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Bor Plestenjak

Ljubljana, 2017

Kazalo

## Računanje izotropnih vektorjev


### Povzetek

Delo diplomskega seminarja se ukvarja z izračunom izotropnih vektorjev $b \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, ki so rešitev enačbe $b^*Ab = 0$ za dano matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{C}^{n\times n})$, $\det(A) \neq 0$. Pomemben pojem pri iskanju teh vektorjev je numerični zaklad, definiran kot $W(A) = \{x^*Ax \colon x \in \mathbb{C}^n,\ x^*x = 1\}$. Računanje izotropnih vektorjev ločimo na dva dela, in sicer, ko je $A$ realna in ko je kompleksna matrika. Ko imamo realno matriko, nas v resnici zanima problem $b^*Hb = 0$ za hermitsko matriko $H = (A+A^*)/2$. Pokažemo kako izračunamo dva izotropna vektorja iz dveh lastnih vektorjev, če je $A$ nedefinitna, in še več, če ima $H$ vsaj tri različne lastne vrednosti, ki ne smejo biti istega predznaka, pokažemo, da obstaja neskončno izotropnih vektorjev. Ko imamo kompleksno matriko, je problem težji in postopkov, kako pridemo do rešitve, več. Predstavimo tri teoretične postopke Meuranta, Cardna ter Chorianopoulosa, Psarrakosa in Uhliga. Meurantov algoritem najprej uporabi lastne vrednosti in vektorje poševno-hermitske matrike $K = (A-A^*)/2\imath$, če to ne deluje uporabi lastne vektorje hermitske matrike $H$, če pa še to ne deluje pa uporabi kombinacijo lastnih vektorjev $K$ in $H$. Po tem postopku tudi sprogramiramo kodo v Matlabu. Nadalje naš algoritem primerjamo z drugima algoritmoma na vseh možnih primerih in ugotovimo, da deluje najhitreje, če najde rešitev samo z lastnimi vektorji matrike $K$, drugače sta druga algoritma hitrejša.


## The computation of isotropic vectors


### Abstract

The batchelor thesis deals with the computation of isotropic vectors $b \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, that are solutions of the equation $b^*Ab = 0$ for a given matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{C}^{n\times n})$, $\det(A) \neq 0$. An important concept when searching for these vectors is the field of values (or numerical range), defined as $W(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n,\ x^*x = 1\}$. We divide the computation of isotropic vectors into two parts, that is when $A$ is a real or a complex matrix. When we have a real matrix, we are in fact interested in problem $b^*Hb = 0$ for a hermitian matrix $H = (A+A^*)/2$. We show how to compute two isotropic vectors from two eigevectors if $A$ is non-definitive, and furthermore, if $H$ has at least three distinct eigenvalues of different signs, then there exists an infinite number of isotropic vectors. When we are dealing with a complex matrix the problem is more difficult and more methods to find a solution exist. We present three theoretical procedures by Meurant, Carden, and Chorianopoulos, Psarrakos, Uhlig. Meurant's algorithm first uses eigenvalues and eigenvectors of the skew-Hermitian matrix $K = (A - A^*)/2\imath$, if this does not work it uses eigenvectors of the Hermitian matrix $H$, and if this also does not work it uses a combination of eigenvectors from $K$ and $H$. We write a code in Matlab after this algorithm. Further, we compare our algorithm with the algorithms from the other two papers on every possible example and we conclude that our algorithm is faster if we can find a solution with only one eigenanalysis of matrix $K$, otherwise the other two algorithms are faster.



**Math. Subj. Class. (2010): 15A60, 47A12**

**Ključne besede: izotropni vektor, numerični zaklad**

**Keywords: isotropic vector, field of values, numerical range**

# 1. Uvod

V uvodnem poglavju bomo predstavili problem iskanja izotropnih vektorjev ter vse pojme, ki nam bodo v nadaljnem pomagali pri računanju, kot je numerični zaklad. V ostalih poglavjih bomo problem razdelili na realne in kompleksne matrike, ter pojasnili kako izračunamo izotropne vektorje v vsakem primeru. Na koncu bomo en algoritem implementirali v Matlabu in ga primerjali s še dvema algoritmoma.
Sedaj pa opišimo glavni problem tega dela.

1.1. **Problem.** Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{C}^{n\times n})$, $\det(A) \neq 0$. Iščemo enotski vektor $b \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, da je

$$b^*Ab = 0, \tag{1}$$

pravimo mu *izotropni vektor*.
Bolj splošen je problem *inverznega numeričnega zaklada*, kjer iščemo enotski vektor $b$, za katerega velja:

$$b^*Ab = \mu, \tag{2}$$

kjer je $\mu$ dano kompleksno število.
Očitno je, da je problem (2) možno prevesti na problem (1) za drugo matriko, saj je (2) ekvivalentno

$$b^*(A - \mu I)b = 0.$$

Če je $\mu$ lastna vrednost matrike $A$, torej velja $Av = \mu v$, kjer je $v \neq 0$ lastni vektor, ki pripada $\mu$, potem je rešitev problema inverznega numeričnega zaklada vektor $v$. Če pa $\mu$ ni lastna vrednost matrike $A$, je $A - \mu I$ nesingularna in moramo lastne in izotropne vektorje izračunati. Tudi če matrika $A$ ni realna imamo opravka s kompleksno matriko, ko je $\mu$ kompleksno število.
Zato bomo od sedaj naprej vse vrednosti $\mu$ enačili z 0.

**Izrek 1.1.** [7] *Naj imata $A$ in $b$ realne ali kompleksne elemente. Potem velja:*

$$b^*Ab = 0 \Leftrightarrow b^*(A + A^*)b = 0 \quad in \quad b^*(A - A^*)b = 0.$$

*Dokaz.* ($\Rightarrow$) Če velja $b^*Ab = 0$, je tudi $(b^*Ab)^* = b^*A^*b = 0$. Če preoblikujemo prvo enačbo na desni v $b^*Ab + b^*A^*b$ dobimo 0. Drugo enačbo dokažemo na podoben način.
($\Leftarrow$) S seštevkom enačb na desni dobimo enačbo na levi:

$$\begin{aligned} b^*(A + A^*)b + b^*(A - A^*)b &= 0, \\ b^*(A + A^* + A - A^*)b &= 0, \\ b^*(2A)b &= 0, \\ b^*Ab &= 0. \end{aligned}$$

□

Če velja le $b^*(A+A^*)b = 0$, ugotovimo da je $\Re(b^*Ab) = 0$. Podobno, če velja samo $b^*(A - A^*)b = 0$, potem je $\Im(b^*Ab) = 0$. Ta dejstva bomo uporabili pri računanju rešitev za kompleksne matrike. Ko sta $b$ in $A$ realna, je problem mnogo enostavnejši, saj moramo upoštevati le simetričen del matrike $A$.
Hermitski in poševno-hermitski del matrike $A$ bomo označili s

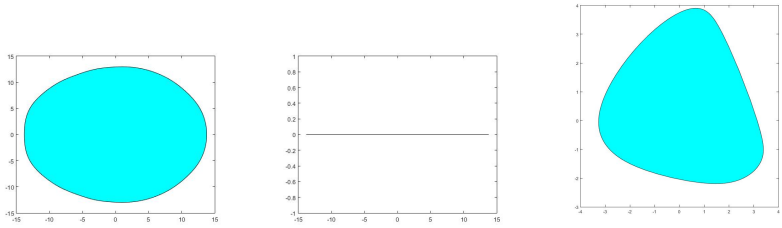
$$H = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{in} \quad K = \frac{A - A^*}{2\imath}.$$

## 1.2. **Numerični zaklad.**

**Definicija 1.2.** *Numerični zaklad* matrike $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podmnožica kompleksne ravnine, definirana kot

$$W(A) = \{x^*Ax \colon x \in \mathbb{C}^n,\ x^*x = 1\}.$$

Očitno je numerični zaklad $W(A)$ množica vseh Rayleighovih kvocientov matrike $A$. Podobno kot spekter (množica vseh lastnih vrednosti matrike) je numerični zaklad množica iz katere lahko razberemo informacije o matriki in pogosto da več informacij kot spekter sam. Lastne vrednosti hermitskih in normalnih matrik imajo uporabne lastnosti, s katerimi si pomagamo pri izračunu numeričnega zaklada. Če vzamemo hermitski del matrike, se numerični zaklad preslika na realno os in ostane le daljica, kar je podobno kot če bi vzeli realni del kompleksnega števila. Poleg tega ima ta daljica za robova najmanjšo in največjo lastno vrednost matrike. To prikazuje slika 1.



SLIKA 1. Numerični zaklad realne, hermitske in kompleksne matrike, narisan z algoritmom opisanem v [8], ki je dostopen v [9].

Če hočemo, da ima (1) vsaj eno rešitev, mora biti izhodišče vsebovano v $W(A)$.

Nekatere lastnosti numeričnega zaklada ([6], [8]) so:

(i) $W(A)$ je konveksna in kompaktna podmnožica $\mathbb{C}$.
(ii) $\sigma(A) \subseteq W(A)$, kjer $\sigma(A)$ označuje spekter.
(iii) Za vsako unitarno matriko $U$ je $W(U^*AU) = W(A)$.
(iv) Seštevanje s skalarjem: $W(A + zI) = W(A) + z$ za $\forall z \in \mathbb{C}$.
(v) Množenje s skalarjem: $W(zA) = zW(A)$ za $\forall z \in \mathbb{C}$.
(vi) Subaditivnost: Za $\forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ velja $W(A + B) \subseteq W(A) + W(B)$.
(vii) Projekcija: $W(H) = \Re(W(A))$, za $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kjer s $H$ označimo hermitski del matrike $A$.
(viii) Če je $A$ normalna, potem $W(A) = \mathrm{Co}(\sigma(A))$, kjer s Co označimo zaprto konveksno ogrinjačo množice.
(ix) $W(A)$ je daljica na realni osi, če in samo če, je $A$ hermitska.

*Dokaz.* (i) Konveksnost bomo dokazali v naslednjem poglavju. Kompaktnost: Množica $W(A)$ je zaloga vrednosti zvezne funkcije $x \to x^*Ax$ na definicijskem območju $\{x \colon x \in \mathbb{C}^n,\ x^*x = 1\}$ (površina enotske sfere), ki je kompaktna množica. Ker je $W(A)$ slika kompaktne množice pod zvezno funkcijo, sledi, da je $W(A)$ kompaktna.

(ii) Predpostavimo, da imamo $\lambda \in \sigma(A)$. Potem obstaja neničeln vektor $x \in \mathbb{C}^n$ (za katerega lahko predpostavimo, da je enotski), za katerega velja $Ax = \lambda x$

in zato je

$$\lambda = \lambda x^*x = x^*(\lambda x) = x^*Ax \in W(A).$$

(iii) Ker unitarna transformacija preslika enotsko sfero nazaj v enotsko sfero so kompleksna števila, ki sestavljajo množici $W(U^*AU)$ in $W(A)$, enaka. Če je $x \in \mathbb{C}^n$ in $x^*x = 1$, imamo

$$x^*(U^*AU)x = y^*Ay \in W(A),$$

kjer je $y = Ux$, torej

$$y^*y = x^*U^*Ux = x^*x = 1.$$

Torej je $W(U^*AU) \subseteq W(A)$.

(iv) Imamo

$$\begin{aligned} W(A + zI) &= \{x^*(A + zI)x \colon x^*x = 1\} \\ &= \{x^*Ax + zx^*x \colon x^*x = 1\} \\ &= \{x^*Ax + z \colon x^*x = 1\} \\ &= \{x^*Ax \colon x^*x = 1\} + z \\ &= W(A) + z. \end{aligned}$$

(v) Imamo

$$\begin{aligned} W(zA) &= \{x^*(zA)x \colon x^*x = 1\} \\ &= \{zx^*Ax \colon x^*x = 1\} \\ &= z\{x^*Ax \colon x^*x = 1\} \\ &= zW(A). \end{aligned}$$

(vi) Imamo

$$\begin{aligned} W(A + B) &= \{x^*(A + B)x \colon x \in \mathbb{C}^n,\ x^*x = 1\} \\ &= \{x^*Ax + x^*Bx \colon x \in \mathbb{C}^n,\ x^*x = 1\} \\ &\subseteq \{x^*Ax \colon x \in \mathbb{C}^n,\ x^*x = 1\} + \{yx^*By \colon y \in \mathbb{C}^n,\ y^*y = 1\} \\ &= W(A) + W(B). \end{aligned}$$

(vii) Računamo

$$\begin{aligned} x^*Hx &= x^*\frac{1}{2}(A + A^*)x \\ &= \frac{1}{2}(x^*Ax + x^*A^*x) \\ &= \frac{1}{2}(x^*Ax + (x^*Ax)^*) \\ &= \frac{1}{2}(x^*Ax + \overline{x^*Ax}) \\ &= \Re(x^*Ax). \end{aligned}$$

(viii) Če je A normalna matrika, potem je $A = U^*\Lambda U$, kjer je $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ diagonalna in $U$ unitarna matrika. Po lastnosti (iii) je $W(A) = W(\Lambda)$ in ker je

$$x^*\Lambda x = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i x_i \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \lambda_i,$$

je $W(\Lambda)$ množica vseh konveksnih kombinacij diagonalnih elementov $\Lambda$ ($x^*x = 1$ implicira $\sum_i |x_i|^2 = 1$ in $|x_i|^2 \geq 0$). Ker so diagonalni elementi $\Lambda$ lastne vrednosti $A$, to pomeni da je $W(A) = \mathrm{Co}(\sigma(A))$

(ix) Ker je hermitska matrika tudi normalna, velja

$$W(H) = \mathrm{Co}(\sigma(H))$$

zaradi lastnosti (iii). Vemo, da se numerični zaklad hermitske matrike projecira na realno os ter da je $\sigma(H)$ množica vseh realnih lastnih vrednosti matrike $H$. Konveksna ogrinjača $\sigma(H)$ je množica vseh daljic med lastnimi vrednostmi matrike $H$ in, ker je numerični zaklad hermitske matrike daljica na realni osi, je to daljica, ki ima za krajišči najmanjšo in največjo realno lastno vrednostjo $H$.

□

1.2.1. *Konveksnost.* V tem poglavju bomo dokazali, da je numerični zaklad konveksen, kar je znano tudi kot Toeplitz-Hausdorffov izrek. Načinov kako dokazati konveksnost je več, npr. v [6], vendar bomo mi izrek dokazali tako kot je dokazan v [8], za to pa potrebujemo dodatno lemo.

**Lema 1.3.** [8] *Naj bo $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitska matrika in $\mu \in W(H)$. Potem je množica $\mathcal{L}_H(\mu) = \{x \in \mathbb{C}^n : x^*x = 1,\ x^*Hx = \mu\}$ povezana s potmi (t.j. obstaja pot med poljubnima dvema točkama iz te množice).*

*Dokaz.* Zaradi lastnosti (iii) in (iv) lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $\mu = 0$ in $H = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ realna diagonalna matrika. Potem je

$$W(H) = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} d_j |x_j|^2 \colon x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C},\ \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = 1 \Big\}.$$

Naj bosta $x = (x_j), y = (y_j) \in \mathcal{L}_H(0)$ t.j. $x, y$ sta enotska vektorja, za katera velja

$$\sum_{j=1}^{n} d_j |x_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} d_j |y_j|^2 = 0.$$

Pokazati želimo, da v $\mathcal{L}_H(0)$ obstaja zvezna pot, ki povezuje $x$ in $y$. Ker je vsak vektor

$$\begin{bmatrix} r_1 e^{i\theta_1} & r_2 e^{i\theta_2} & \ldots & r_n e^{i\theta_n} \end{bmatrix}^T \in \mathcal{L}_H(0)$$

($r_j \geq 0, \theta_j \in [0, 2\pi); j = 1, 2, \ldots, n$) povezan z realnim vektorjem

$$[r_1 \quad r_2 \quad \ldots \quad r_n]^T \in \mathcal{L}_H(0)$$

z zvezno krivuljo

$$\begin{bmatrix} r_1 e^{i\theta_1(1-t)} & r_2 e^{i\theta_2(1-t)} & \ldots & r_n e^{i\theta_n(1-t)} \end{bmatrix}^T; \quad t \in [0, 1],$$

ki je v $\mathcal{L}_H(0)$, sledi, da sta $x$ in $y$ realna in nenegativna. Potem zvezna krivulja

$$u(t) = (u_j(t)) = \left( \sqrt{(1-t)x_j^2 - t y_j^2} \right) \in \mathcal{L}_H(0) \cap \mathbb{R}^n; \quad t \in [0, 1]$$

zadošča pogojema $u(0) = x$ in $u(1) = y$, s čimer je lema dokazana. □

Seveda zgornja lema drži tudi, če $H$ pomnožimo s skalarjem. Še več, za realno diagonalno matriko $H = \text{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$, $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, vrednost $\sum_{j=1}^{n} d_j|x_j|^2$ (kjer je $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, $\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2 = 1$) doseže maksimum $d_1$, pri $|x_1| = 1$ in $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$ in doseže minimum $d_n$, pri $|x_n| = 1$ in $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$. Velja naslednja posledica.

**Posledica 1.4.** [8] *Naj bo $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitska matrika in $\mu$ njena najmanjša ali največja lastna vrednost. Potem množica $\mathcal{L}_H(\mu) = \{x \in \mathbb{C}^n : x^*x = 1,\ x^*Hx = \mu\}$ vsebuje vse enotske lastne vektorje matrike $H$, ki pripadajo $\mu$.*

**Izrek 1.5** (*Toeplitz-Hausdorffov izrek*)**.** [8] *Za $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je $W(A)$ konveksna.*

*Dokaz.* Dokazati moramo, da če vzamemo poljubni točki $\mu, \nu \in W(A)$, mora daljica s krajiščema $\mu$ in $\nu$ ležati v $W(A)$. Zaradi lastnosti (iv) lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da sta $\mu = 0$ in $\nu = 1$. Naj bosta $x, y \in \mathbb{C}^n$ taka enotska vektorja, da velja $x^*Ax = 0$ in $y^*Ay = 1$. Naj bo $H$ hermitski del matrike $A$ in $K$ poševnohermitski del matrike $A$, kot smo jih definirali v prejšnjem razdelku. Množica $\mathcal{L}_K(0) = \{x \in \mathbb{C}^n : x^*x = 1,\ x^*Kx = 0\}$ je zaradi prejšnje leme povezana s potmi. Ker sta $x, y \in \mathcal{L}_K(0)$, obstaja taka zvezna vektorska funkcija $z(t) : [0, 1] \to \mathcal{L}_K(0)$, da velja $z(0) = x$ in $z(1) = y$. Sledi, da je funkcija

$$\begin{aligned} f(t) := z(t)^*Az(t) &= z(t)^*Hz(t) + z(t)^*Kz(t) \\ &= z(t)^*Hz(t) \end{aligned}$$

realna in zvezna glede na spremenljivko $t$ in zadošča pogojema

$$f(0) = z(0)^*Az(0) = x^*Ax = 0$$

in

$$f(1) = z(1)^*Az(1) = y^*Ay = 1.$$

Sledi, da je daljica s krajiščema 0 in 1 vsebovana v $W(A)$. □

1.3. **Uporaba.** Zanimanje za izračun izotropnih vektorjev je povezano s preučevanjem delne stagnacije GMRES algoritma za reševanje linearnih sistemov z realnimi matrikami. Numerični zaklad se uporablja za preučevanje konvergence nekaterih iterativnih metod za reševanje linearnih sistemov in ima mnogo aplikacij v numerični analizi, diferencialnih enačbah, teoriji sistemov itd.

## 2. Realne matrike

V tem razdelku bomo opisali, kako izračunamo željeno število izotropnih vektorjev za realno matriko, kot je predstavljeno v članku [7]. To storimo z uporabo lastnih vektorjev matrike

$$H = \frac{A + A^*}{2}.$$

Ko je $A$ realna matrika, nas zanima, kako izračunati rešitev naslednje enačbe:

$$b^*Hb = 0, \tag{3}$$

kjer je $H$ realna in simetrična matrika (t.j. $H = H^T$).

**Lema 2.1.** [4] *Izotropni vektorji realne matrike $A$ so identični izotropnim vektorjem njenega simetričnega dela.*

*Dokaz.* To sledi iz $b^T Ab = b^T A_{sim} b + b^T A_{psim} b = b^T A_{sim} b$, kjer je z $A_{sim} = \frac{A+A^T}{2}$ označen simetrični del matrike $A$ in z $A_{psim} = \frac{A-A^T}{2}$ poševno-simetrični del matrike A. □

Velja enakost:

$$b^T Ab = 0 \Leftrightarrow b^T (A + A^T) b = 0.$$

Vemo, da je $W(A)$ simetrična glede na realno os in, da je $0 \in W(A)$, če in samo če $\lambda_n \leq 0 \leq \lambda_1$, kjer sta $\lambda_n$ najmanjša in $\lambda_1$ največja lastna vrednost matrike $H$. Naj bosta $x_1$ in $x_n$ realna lastna vektorja, pripadajoča $\lambda_1$ in $\lambda_n$. Potem sta $x_1^T Ax_1 = x_1^T Hx_1 = \lambda_1$ in $x_n^T Ax_n = x_n^T Hx_n = \lambda_n$ realni točki na skrajni levi in skrajni desni zaloge vrednosti $W(A)$ na realni osi.

Realne rešitve (3) izračunamo z uporabo lastnih vektorjev matrike $H$. Predpostavimo, da iščemo vektorje $b$ z normo 1. Matriko $H$ lahko zapišemo kot

$$H = X\Lambda X^T,$$

kjer je $\Lambda$ matrika, ki ima na diagonali lastne vrednosti $\lambda_i$, ki so realna števila. $X$ je ortogonalna matrika lastnih vektorjev, tako da $X^T X = I$. Potem uporabimo ta spektralni razcep v (3):

$$b^* Hb = b^* X\Lambda X^T b = 0.$$

Označimo s $c = X^T b$ vektor projekcije $b$ na lastne vektorje matrike $H$. Dobimo naslednji izrek.

**Izrek 2.2.** [7] *Naj bo b rešitev problema* (3)*. Potem vektor $c = X^T b$ s komponentami $c_i$ zadošča naslednjima enačbama:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |c_i|^2 = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = 1. \tag{5}$$

*Dokaz.* Enačbo (4) dokažemo tako, da $c = X^T b$ oz. $c^* = b^* X$ vstavimo v (3) in dobimo

$$b^* Hb = b^* X\Lambda X^T b = c^* \Lambda c = 0.$$

Ker je $\Lambda$ diagonalna matrika, lahko $c^*\Lambda c$ zapišemo kot vsoto komponent $\bar{c_i}\lambda_i c_i = \lambda_i |c_i|^2$ za $i = 1, 2, ...n$. Za enačbo (5) vemo, da je $\|b\|_2 = 1$. Če normo zapišemo s $c$, dobimo

$$\|b\|_2 = \|Xc\|_2 = \|c\|_2 = 1,$$

saj je $X$ ortogonalna matrika.

□

**Opomba 2.3.** Enačbi veljata samo za realna števila. Zaradi izreka 2.2 mora biti 0 konveksna kombinacija lastnih vrednosti $\lambda_i$. Kot smo že videli, to pomeni, da če je $A$ definitna matrika (pozitivno ali negativno), potem (3) nima netrivialne rešitve. Drugače je $0 \in W(A)$ in lahko vedno najdemo realno rešitev. V bistvu, kadar je $n > 2$, lahko najdemo neskončno izotropnih vektorjev.

2.1. **Iskanje izotropnih vektorjev.** Najprej bomo pokazali kako izračunamo izotropne vektorje, če imamo dve lastni vrednosti, kasneje pa za tri lastne vrednosti in nedefinitno matriko $A$.

Če niso vse lastne vrednosti $H$ enako predznačene, potem mora za najmanjšo lastno vrednost $\lambda_n$ veljati $\lambda_n < 0$. Naj bo $k < n$ tak, da je $\lambda_k > 0$ in naj bo $t$ pozitivno realno število manjše od 1. Izberemo taka $c_n$ in $c_k$, da velja $|c_n|^2 = t$, $|c_k|^2 = 1 - t$ in $c_i = 0, i \neq n, k$, ker velja enačba (5), $t + (1 - t) = 1$. Iz (4) mora veljati enačba:

$$\lambda_n t + \lambda_k (1 - t) = 0,$$

katere rešitev je:

$$t_s = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_n}. \tag{6}$$

Ker je $\lambda_n < 0$, je imenovalec pozitiven in $t_s$ pozitiven ter $t_s < 1$. Absolutna vrednost $c_n$ (oz. $c_k$) je kvadratni koren $t_s$ (oz. $1 - t_s$). Ker je $b = Xc$, sta realni rešitvi:

$$b_1 = \sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k,$$

kjer sta $x_n$ in $x_k$ lastna vektorja, ki pripadata lastnima vrednostima $\lambda_n$ in $\lambda_k$. Druge možnosti za predznak dajo rešitve, ki so v isti smeri kot ti dve. Ker imata izraza v rešitvah enaka imenovalca, lahko rešitvi zapišemo kot:

$$b_1 = \sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k$$

(sledi iz [4]). Vektor mora biti normiran, zato

$$b_1 = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_n + \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_n + \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_k.$$

Predpostavimo, da je $b$ realen.

**Posledica 2.4.** [4] *Dobljena izotropna vektorja sta ortogonalna ($b_1^T b_2 = 0$), če in samo če $\lambda_k = -\lambda_n$.*

*Dokaz.*

$$b_1^T b_2 = (\sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k)^T (-\sqrt{\lambda_k} x_1 + \sqrt{|\lambda_n|} x_k) = -(\lambda_n + \lambda_k).$$

□

Konstruirani rešitvi sta neodvisni in še več, ortogonalni, če $\lambda_k = -\lambda_n$.

Ko sta $A$ in $b$ realna smo dokazali naslednji izrek:

**Izrek 2.5.** [7] *Če je $A$ realna in nedefinitna (t.j. ni pozitivno ali negativno definitna), potem obstajata najmanj dva neodvisna realna izotropna vektorja.*

Za ta postopek lahko uporabimo vsak par pozitivne in negativne lastne vrednosti, uporaba najmanjše lastne vrednosti $\lambda_n$ torej ni nujna. Tako lahko postopek vrne toliko rešitev kot je dvakratno število parov lastnih vrednosti matrike $H$ z nasprotnimi predznaki, če so vse lastne vrednosti različne.
Da bi pokazali, da imamo neskončno število realnih rešitev in, da bi jih nekaj izračunali, moramo vzeti vsaj tri različne lastne vrednosti, ki ne smejo biti istega

predznaka (ko obstajajo). Predpostavimo, da imamo $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$ in naj bo $t_1 = |c_1|^2$, $t_2 = |c_2|^2$. Veljati mora enačba (5)

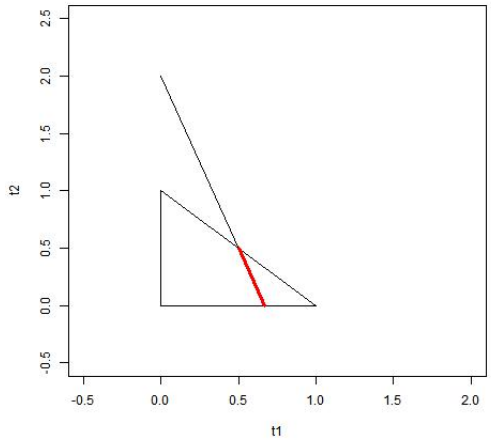
$$\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3(1 - t_1 - t_2) = (\lambda_1 - \lambda_3)t_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)t_2 + \lambda_3 = 0 \tag{7}$$

s pogoji: $t_i \geq 0, i = 1, 2$ in $t_1 + t_2 \leq 1$. Torej velja zveza

$$t_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} t_1.$$

S tem je definirana premica v $(t_1, t_2)$-ravnini in preveriti moramo, če ta premica seka trikotnik, definiran s pogoji za $t_1, t_2$. Premica seka $t_1$-os pri $\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_1)$, kar je več kot 1, saj je $\lambda_1 < 0$, $t_2$-os pa pri $\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_2)$, kar je tudi več kot 1. Ta premica ima negativen naklon. Vse dopustne vrednosti za $t_1$ in $t_2$ so dane z daljico v trikotniku. Zato obstaja neskončno število možnih pozitivnih parov $(t_1, t_2)$.

**Primer 2.6.** Poglejmo si enostaven zgled za $3 \times 3$ matriko z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 2$. Matrika lastnih vektorjev $X$ je enaka identiteti $I$. Enačba premice je $t_2 = 2 - 3t_1$ s pogoji $t_1, t_2 \geq 0$ in $t_1 + t_2 \leq 1$. Dopustne rešitve za $t_1$ in $t_2$ so dane z daljico v trikotniku, slika 2.




Slika 2. Dopustne rešitve so na rdeči daljici v trikotniku omejitev.

Iz daljice lahko izberemo katerikoli par točk $(t_1, t_2)$, npr. $(0.5, 0.5)$, saj potem vemo kako izgleda vektor

$$c = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz enačbe $c = X^T b$ pa dobimo rešitev

$$b = Xc = c = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Seveda je rešitev tudi $b = -c$. Tako lahko izračunamo neskončno izotropnih vektorjev $b$.

Primer $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ je podoben zgornjemu, le da premica seka $t_2$-os pod 1. Potem dobimo rešitve $b$ s kombiniranjem pripadajočih treh lastnih vektorjev. Takšna konstrukcija pripelje do naslednjega izreka:

**Izrek 2.7.** [7] *Če je $n > 2$ in je $A$ realna in nedefinitna, potem ima matrika $H$ vsaj tri različne lastne vrednosti z različnimi predznaki. Potem obstaja neskončno število realnih izotropnih vektorjev.*

Seveda lahko nadaljujemo z večanjem števila lastnih vrednosti. Če uporabimo štiri različne lastne vrednosti z različnimi predznaki, potem moramo na problem gledati v treh dimenzijah. Prostor, kjer je omejitvam zadoščeno, je tetraeder, torej moramo poiskati presek dane ravnine s tem tetraedrom. V splošnem, če imamo $k$ različnih lastnih vrednosti z različnimi predznaki, definira naš problem naslednja enačba:

$$\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i - \lambda_k)t_i + \lambda_k = 0, \quad t_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, k-1, \quad \sum_{i=1}^{k-1} t_i \leq 1. \tag{8}$$

Prva enačba opisuje hiperravnino v kateri moramo poiskati presečišča te hiperravnine z volumnom telesa definiranega s pogoji. Če je $A$ realna matrika smo končali, saj smo pokazali, da lahko poračunamo toliko realnih rešitev kot hočemo.

## 3. Kompleksne matrike

V tem razdelku si bomo pogledali kako se računa izotropne vektorje, ko je $A$ kompleksna matrika. Predstavljeni bodo trije teoretični postopki iz [7],[1] in [3], kako priti do izotropnih vektorjev.

### 3.1. **Iskanje izotropnih vektorjev.**

3.1.1. *Meurant 1.* V nekaterih primerih lahko izračunamo rešitve s samo enim računanjem lastnih vrednosti in vektorjev matrike $K$, vendar to ne deluje vedno. Sredstvo, ki lahko pomaga, je, da uporabimo lastne vektorje matrike $H$. Če ima matrika $A$ kompleksne elemente, nam prejšnja konstrukcija za realne matrike vrne le vektorje za katere je $\Re(b^*Ab) = 0$. Najprej opazimo, da lahko v nekaterih primerih uporabimo podobno konstrukcijo kot v prejšnjem razdelku, ki najde množico rešitev za hermitsko matriko $H$ z ničelnim realnim delom ter pozitivnim in negativnim imaginarnim delom. Z uporabo treh lastnih vektorjev $H$ obstaja neskončno rešitev dobljenih na daljici v trikotniku omejitev. Ko poljubno točko iz daljice nenehno sprehajamo po tej daljici, se tudi imaginarni del rešitve nenehno spreminja. Če sta imaginarna dela, ki ustrezata robnima točkama daljice, različnih predznakov, potem iz izreka o povprečni vrednosti sledi, da obstaja točka na daljici, ki ima ničeln imaginarni del.

3.1.2. *Meurant 2.* Druga konstrukcija algoritma iz [7] uporabi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $K = (A - A^*)/(2i)$, ki je hermitska. S konstrukcijo iz 2. razdelka lahko poiščemo tak vektor $b$, da je $\Im(b^*Ab) = 0$. S kombiniranjem lastnih vektorjev matrike $K$ pripadajočim k pozitivnim in negativnim lastnim vrednostim lahko (v nekaterih primerih) izračunamo taka vektorja $b_1$ in $b_2$, da $\alpha_1 = \Re(b_1^*Ab_1) < 0$ in $\alpha_2 = \Re(b_2^*Ab_2) > 0$.

**Lema 3.1.** [7],[6] *Naj bosta $b_1$ in $b_2$ enotska vektorja z $\Im(b_i^* A b_i) = 0$, $i = 1, 2$, in $\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0, \alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0$. Naj bo*

$$b(t, \theta) = e^{-i\theta} b_1 + t b_2, \quad t, \theta \in \mathbb{R},$$

$$\alpha(\theta) = e^{i\theta} b_1^* A b_2 + e^{-i\theta} b_2^* A b_1.$$

*Potem je*

$$b(t, \theta)^* A b(t, \theta) = \alpha_2 t^2 + \alpha(\theta) t + \alpha_1, \quad \alpha(\theta) \in \mathbb{R},$$

*ko*

$$\theta = \arg(b_2^* A b_1 - b_1^T \bar{A} \bar{b_2}).$$

*Za*

$$t_1 = \frac{-\alpha(\theta) + \sqrt{\alpha(\theta)^2 - 4\alpha_1\alpha_2}}{2\alpha_2}$$

*imamo*

$$b(t_1, \theta) \neq 0, \quad \frac{b(t_1, \theta)^*}{\|b(t_1, \theta)\|} A \frac{b(t_1, \theta)}{\|b(t_1, \theta)\|} = 0.$$

Lema 3.1 prikazuje, kako se izračuna rešitev iz $b_1$ in $b_2$. Če imamo $b_1$ in $b_2$, taka da $\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0$ in $\alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0$, smo končali.

*Dokaz.* Imamo enotska vektorja $b_1, b_2$ za katera velja $\Im(b_i^* A b_i) = 0$ za $i = 1, 2$ in $\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0$, $\alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0$. Radi bi, da velja

$$\Re(b(t, \theta)^* A b(t, \theta)) = 0, \quad t, \theta \in \mathbb{R}.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
b(t, \theta)^* A b(t, \theta) &= (e^{-i\theta} b_1 + t b_2)^* A (e^{-i\theta} b_1 + t b_2) \\
&= (b_1^* (\overline{e^{-i\theta}})^T + b_2^* t) A (e^{-i\theta} b_1 + t b_2) \\
&= (b_1^* (e^{i\theta})^T A + b_2^* t A)(e^{-i\theta} b_1 + t b_2) \\
&= b_1^* e^{i\theta} A e^{-i\theta} b_1 + b_1^* e^{i\theta} A t b_2 + b_2^* t A e^{-i\theta} b_1 + b_2^* t A t b_2 \\
&= b_1^* A b_1 + e^{i\theta} b_1^* A b_2 t + e^{-i\theta} b_2^* A b_1 t + t^2 b_2^* A b_2.
\end{aligned}$$

Če gledamo samo realni del zadnje vrstice, dobimo naslednjo kvadratno enačbo:

$$\alpha_1 + \alpha(\theta) t + \alpha_2 t^2 = 0.$$

Ena rešitev te enačbe je

$$t_1 = \frac{-\alpha(\theta) + \sqrt{\alpha(\theta)^2 - 4\alpha_1\alpha_2}}{2\alpha_2}.$$

Preveriti je potrebno le še kdaj bo

$$\alpha(\theta) = e^{i\theta} b_1^* A b_2 + e^{-i\theta} b_2^* A b_1 \in \mathbb{R}.$$

To bo držalo, ko bo

$$\theta = \arg(b_2^* A b_1 - \overline{b_1^* A b_2}) = \arg(b_2^* A b_1 - b_1^T \bar{A} \bar{b_2}).$$

□

Algoritem:

1. S kombiniranjem lastnih vektorjev $K$, pripadajočim pozitivnim in negativinim lastnim vrednostim, izračunamo vektorja $b_1$ in $b_2$, taka da $\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0$ in $\alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0$. Uporabimo lemo 3.1 in končamo.
2. Če ne najdemo $b_1$, $b_2$ potrebna za lemo 3.1, izračunamo še lastne vektorje matrike $H$. Ponovimo korak 1. za matriko $\imath A$.
3. Če postopek ne deluje niti za $\imath A$, uporabimo kombinacijo lastnih vektorjev $K$ in $H$, kjer z $x$ označimo lastni vektor $K$ in z $y$ lastni vektor $H$.
4. Upoštevamo vektorje $X_\theta = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y$, $0 \leq \theta \leq \pi$. $X_\theta^* A X_\theta$ opiše elipso znotraj numeričnega zaklada.
5. Za dan par $(x, y)$ iščemo presečišča elipse $X_\theta^* A X_\theta$ z realno osjo. Z upoštevanjem, da je $A = H + iK$, računamo:
$$\begin{aligned} X_\theta^* A X_\theta = \cos^2(\theta)(x^* H x + i x^* K x) + \sin^2(\theta)(y^* H y + i y^* K y) \\ + \sin(\theta)\cos(\theta)(x^* H y + y^* H x + i[x^* K y + y^* K x]). \end{aligned}$$
Naj bo $\alpha = \Im(x^* H x + i x^* K x), \beta = \Im(y^* h y + i y^* K y)$ in $\gamma = \Im(x^* H y + y^* H x + i[x^* K y + y^* K x])$. Ko izenačimo imaginarni del $X_\theta^* A X \theta$ z 0, dobimo enačbo:
$$\alpha \cos^2(\theta) + \beta \sin^2(\theta) + \gamma \sin(\theta)\cos(\theta) = 0.$$
Predpostavimo, da $\cos(\theta) \neq 0$ in delimo, dobimo kvadratno enačbo za $t = \tan(\theta)$,
$$\beta t^2 + \gamma t + \alpha = 0.$$
6. Če ima ta enačba realne rešitve, potem dobimo vrednosti $\theta$, ki nam vrnejo take vektorje $X_\theta$, da $\Im(X_\theta^* A X_\theta) = 0$.
7. Če tudi ta konstrukcija ne deluje, uporabimo algoritem iz [3], opisan čez dva razdelka.

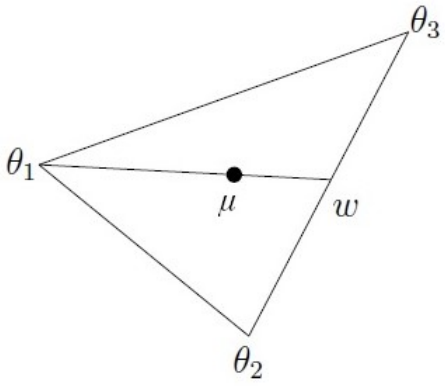
**Opomba 3.2.** Ko je $A$ realna in imamo $b_1 = x_1, b_2 = x_2$ za lastne vektorje $H$, potem je $\theta = 0$ in lema 3.1 pove, kako se izračuna en izotropni vektor. Vendar v kompleksnem primeru ne moremo vedno najti primernih vektorjev $b_1$ in $b_2$. Konstrukcija ne deluje, če imajo vrednosti $\Re(y_i^* H y_j)$ enak predznak, kjer so $y_i$ lastni vektorji $K$. Ekstremen primer je Jordanov blok s kompleksno vrednostjo $\alpha$ na diagonali in elementi 1 na naddiagonali. Potem je $\Re(y_i^* H y_j) = 0$, ko $i \neq j$, in $y_i^* H y_i = -\Re(\alpha)$. Zato so realni deli $b^* A b$ za vse vektorje $b$, ki se lahko konstruirajo, enaki.

**Opomba 3.3.** Ko je velikost problema velika, ne uporabimo zadnje konstrukcije za vse pare lastnih vektorjev, saj nas to lahko preveč stane. Uporabimo samo lastne vektorje, ki pripadajo nekaj najmanjšim in največjim lastnim vrednostim.

3.1.3. *Carden.* V tem razdelku opišemo idejo za Cardenov algoritem [1] za dano matriko $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $\mu \in \mathbb{C}$. Kot smo omenili v prvem poglavju, je vseeno, če rešujemo problem (2) ali problem (1) za matriko $A - \mu I$. Preden se lotimo algoritma, je potrebno opisati postopek iskanja izotropnega vektorja, ki ga bomo uporabili v algoritmu. Predpostavimo, da je $\mu$ v konveksni ogrinjači treh točk $\theta_i \in W(A)$, za katere smo lahko izračunali izotropne vektorje $b_i$. Konveksna ogrinjača teh treh točk $\theta_i$ je trikotnik (lahko je izrojen). Radi bi, da je $\mu$ na daljici, ki ima take robne točke, da za njih vemo ali lahko izračuamo izotropne vektorje. Zato lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $\theta_1$ ena od robnih točk te daljice. Za drugo robno točko vzamemo $w$, ki je presečišče daljice med $\theta_2$ in $\theta_3$ s premico, ki teče skozi $\theta_1$ in $\mu$.

Ker je $w$ konveksna kombinacija $\theta_2$ in $\theta_3$, mu lahko določimo pripadajoč izotropni vektor. Ker pa je $\mu$ konveksna kombinacija $w$ in $\theta_1$, lahko tudi njemu določimo izotropni vektor, slika 3.

Naj bo $\varepsilon > 0$ toleranca (npr. $\varepsilon = 10^{-16}\,\|A\|$ za dvojno natančnost).




Slika 3. Ilustracija postopka določanja izotropnega vektorja za točko v konveksni ogrinjači treh točk iz $W(A)$.

Algoritem:

1. Poiščemo zunanjo aproksimacijo $W(A)$ (je pravokotnik, katerega stranice so vzporedne z realno in imaginarno osjo), tako da izračunamo najbolj levo in najbolj desno lastno vrednost $H_\theta = (e^{i\theta}A + e^{-i\theta}A^*)/2$ za $\theta = 0, \pi/2$. Če $\mu$ ni v zunanji aproksimaciji, potem $\mu \notin W(A)$ in ustavimo algoritem, drugače nadaljujemo.
2. Če je višina ali širina zunanje aproksimacije manj kot $\varepsilon$, potem je $W(A)$ približno hermitska ali poševno-hermitska (ali kompleksen premik katere od teh). Če sta višina in širina zunanje aproksimacije manj kot $\varepsilon$, potem je $W(A)$ približno točka. V obeh primerih lahko ugotovimo ali je $\mu \in W(A)$. Če je, poiščemo pripadajoč izotropni vektor, drugače nadaljujemo.
3. Nadaljujemo s konstrukcijo notranje aproksimacije $W(A)$ (je štirikotnik z oglišči v robnih točkah $\partial W(A)$) z uporabo lastnih vektorjev najbolj leve in desne lastne vrednosti $H_\theta$.
4. Če $\mu$ leži v notranji aproksimaciji, lahko poiščemo izotropni vektor, ki generira $\mu$. Uporabimo postopek, ki je bil opisan v začetku tega razdelka. Če $\mu$ ne leži v notranji aproksimaciji, določimo katera stranica notranje aproksimacije mu leži najbližje.
5. Izračunamo $\hat{\mu}$, ki je najbližja točka do $\mu$, ki leži na notranji aproksimaciji. Če je $|\hat{\mu} - \mu| < \varepsilon$, izračunamo izotropni vektor za $\hat{\mu}$ in ga sprejmemo kot izotropni vektor za $\mu$ ter ustavimo algoritem.
6. Posodobimo notranjo in zunanjo aproksimacijo z izračunom največje lastne vrednosti in pripadajočega lastnega vektorja $H_\theta$, kjer je smer $\theta$ pravokotna na stranico notranje aproksimacije, ki je najbližja $\mu$. Če ne dobimo nove robne točke, ki se ni dotikala notranje aproksimacije, potem $\mu \notin W(A)$.
7. Ponovno preverimo, če je $\mu$ v novi zunanji aproksimaciji. Če je, se vrnemo na četrti korak, drugače $\mu \notin W(A)$.

**Opomba 3.4.** Korake 4.-7. ponavljamo, dokler ni notranja aproksimacija $\varepsilon$ blizu $\mu$ ali dokler zunanja aproksimacija ne vsebuje $\mu$. Carden trdi, da se v večini primerov postopek konča v koraku 4. po le nekaj ponavljanjih.

3.1.4. *Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig.* V tem razdelku opišemo algoritem Chorianopoulosa, Psarrakosa in Uhliga (označimo s CPU) za inverzen problem numeričnega zaklada. Algoritem je hitrejši in daje natančne numerične rezultate tam, kjer se zgornja algoritma mnogokrat ustavita. Tak primer je ko $\mu$ ($\mu \in W(A)$ ali $\mu \notin W(A)$) leži zelo blizu roba numeričnega zaklada. Ta algoritem uporabi za iskanje izotropnih vektorjev le nekaj najbolj osnovnih lastnosti numeričnega zaklada poleg konveksnosti, kot sta (iv) in (v).

Algoritem:

1. Izračunamo do štiri robne točke numeričnega zaklada $p_i$ in njihove izotropne vektorje $b_i$ za $i = 1, 2, 3, 4$ tako, da izračunamo ekstremne lastne vrednosti, ki pripadajo enotskim lastnim vektorjem $x_i$ matrike $H$ in $K$.
2. Nastavimo $p_i = b_i^* A b_i$. Dobimo štiri točke $p_i$, ki označujejo ekstremne vrednosti $W(A)$, tj. najmanjši in največji horizontalni in vetikalni razteg. Označimo jih z $rM$ in $rm$ za maksimalen in minimalen horizontalni razteg $W(A)$ in z $iM$ in $im$ za maksimalen in minimalen vertikalen razteg $W(A)$. Če je $|p_i| < 10^{-13}$ za $i = 1, 2, 3, 4$, potem je naš izotropni vektor kar pripadajoč enotski vektor.
3. Če med računanjem lastnih vektorjev in lastnih vrednosti ugotovimo, da je ena izmed matrik $H$ in $K$ definitna, t.j. da imajo njene lastne vrednosti vse enak predznak, potem vemo, da $\mu \notin W(A)$, in algoritem ustavimo.
4. Narišemo elipse, ki so preslikave velikega kroga kompleksne sfere $\mathbb{C}^n$, ki gredo skozi vse možne pare točk $rm, rM, im$ in $iM$, ki imajo nasprotno predznačene imaginarne dele. Nato izračunamo presečišča vsake dobljene elipse z realno osjo.
5. Če so izračunana presečišča na obeh straneh 0, potem izračunamo izotropni vektor z lemo 3.1.
6. Če presečišča niso na obeh straneh 0, potem moramo rešiti kvadratno enačbo

$$(9)\quad \begin{aligned}(tx + (1-t)y)^* A(tx + (1-t)y) = (x^*Ax + y^*Ay - (x^*Ay + y^*Ax))t^2 \\ + (-2y^*Ay + (x^*Ay + y^*Ax))t + y^*Ay.\end{aligned}$$

   Njene ničle določajo koordinatne osi $W(A)$ točk na elipsah skozi točke $x^*Ax$, $y^*Ay \in \partial W(A)$ in so generirane s točkami v $\mathbb{C}^n$ na velikem krogu skozi $x$ in $y$.
7. To je kvadratna enačba s kompleksnimi števili. Nas zanimajo samo rešitve, ki imajo imaginaren del enak 0, saj želimo uporabiti lemo 3.1. Če imaginarni del enačbe (9) enačimo z 0, dobimo naslednjo polinomsko enačbo z realnimi koeficienti:

$$(10)\quad t^2 + gt + \frac{p}{f} = 0$$

   za $q = \Im(x^*Ax)$, $p = \Im(y^*Ay)$ in $r = \Im(x^*Ay + y^*Ax)$. Označimo $f = p + q - r$ in $g = (r - 2p)/f$.

8. Enačba (10) ima realni rešitvi $t_i$, $i = 1, 2$, ki vrneta generirajoča vektorja $b_i = t_i x + (1 - t_i)y$ $(i = 1, 2)$ za realni točki. Z normalizacijo dobimo izotropne vektorje.
9. Če nobena od možnih elips ne seka realne osi na vsaki strani 0, potem preverimo, če to stori njihova skupna množica in ponovimo isti postopek.
10. Če ne najdemo take elipse niti za skupno množico, potem izračunamo še več lastnih vrednosti in lastnih vektorjev za $A(\theta) = \cos(\theta)H + \sin(\theta)K$ za kote $\theta \neq 0, \pi/2$ in delamo bisekcijo med točkami $rm$, $rM$, $im$, $iM$.
11. Končamo, ko najdemo definitno matriko $A(\theta)$ ali elipso, ki seka realno os na obeh straneh 0, nakar lahko uporabimo lemo 3.1.

## 4. Numerična analiza

V tem poglavju bomo na kratko opisali naš algoritem, ki je povzet po algoritmu poglavja 3.1.2 iz [7], a mu ni identičen, in ga primerjali z algoritmoma Cardna iz [2] in CPU iz [10] na različnih primerih problema iskanja izotropnih vektorjev.

4.1. **Opis algoritma.** Najprej na kratko opišimo kako naš algoritem, opisan v poglavju 6, deluje.
Prva stvar, ki jo algoritem naredi, je da problem (2) preobrne v začetni problem (1). Nato preveri, če je matrika $A$ realna in če je, pokliče funkcijo `izotropniMeurantR`, ki vrne dva izotropna vektorja, izračunana kot v poglavju 2. Nadalje algoritem uporabi isti postopek kot je opisan v poglavju 3.1.2, tako da poskusi rešiti problem z lastnimi vektorji matrike $K$, če to ne deluje poskusi z lastnimi vektorji matrike $H$ in na koncu še s kombinacijo lastnih vektorjev matrike $K$ in $H$. V članku [7] ni napisano koliko lastnih vektorjev je potrebno oz. se jih splača izračunati, zato smo to določili sami in sicer naš algoritem računa z lastnimi vektorji, ki pripadajo trem največjim in trem najmanjšim lastnim vrednostim. Edina razlika med našim algoritmom in algoritmom iz 3.1.2 nastane zaradi premalo informacij iz članka [7] o tem kako najti vektorja $b_1$ in $b_2$, da lahko uporabimo lemo 3.1. Naš algoritem najde $b_1$ in $b_2$ tako kot je opisano v koraku 4. in 5. algoritma, ko kombiniramo lastne vektorje matrike $K$ in $H$, kar naredi funckija `xtheta`. Torej upoštevamo vektorje $X_\theta = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y$, $0 \leq \theta \leq \pi$, kjer $X_\theta^* A X_\theta$ opiše elipso znotraj numeričnega zaklada. Za dan par $(x, y)$ iščemo presečišča elipse $X_\theta^* A X_\theta$ z realno osjo, kjer sta $x$ in $y$ lastna vektorja matrike $K$ ali matrike $H$ in ti presečišči vzamemo kot kandidata za $b_1$ in $b_2$. Vendar naš algoritem ta korak še izboljša, saj maksimizira elipso $X_\theta^* A X_\theta$ tako, da $X_\theta$ definiramo kot

$$X_\theta(\varphi) = \cos(\theta) x e^{\varphi \imath} + \sin(\theta) y,$$

kjer je

$$\varphi = \frac{1}{2\imath} \ln(x^* A y (y^* A x)^{-1}).$$

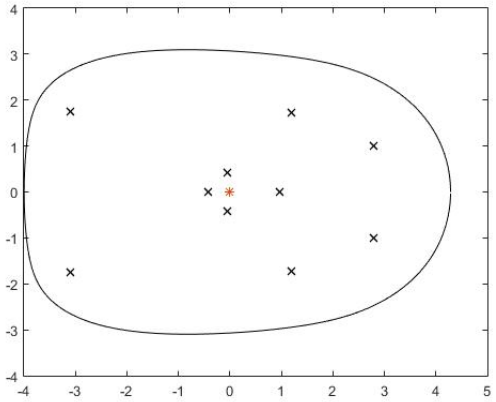
Če maksimiziramo elipso, je večja verjetnost, da bo vsebovala izhodišče in s tem je večja verjetnost, da najdemo rešitev v manj korakih. Če najdemo primerna $b_1$ in $b_2$, da lahko uporabimo lemo 3.1, ki je definirana s funkcijo `lema31`, smo končali.

4.2. **Primerjava.** Označimo algoritme z `AlgM`, `AlgC` in `AlgCPU`. Numerične zaklade bomo narisali s funkcijo iz [5], ki s križci nariše tudi lastne vrednosti matrike $A$. Za vsak algoritem bomo preverili v kolikšnem času je našel (ali ni našel) rešitev, koliko izračunov lastnih vrednosti in vektorjev je potreboval (označimo kot "Koraki") ter kako velika je napaka $|b^* A b|$. Če algoritem ne najde rešitve, rečemo, da je napaka

neskončna. A algoritma `AlgC` in `AlgCPU` v takem primeru povesta še, da $\mu \notin W(A)$ oz. `AlgCPU` pove tudi, da je ena od matrik $H$ ali $K$ definitna. Naš algoritem tega ne pove, razen v primeru, ko sta $A$ in $\mu$ realna.

4.2.1. *$A$ in $\mu$ realna.* Za prvi primer vzamimo naključno generirano $10 \times 10$ realno matriko $A$ in $\mu = 1.0419$, ki je znotraj numeričnega zaklada, slika 4.

```
A = randn(10)
```




Slika 4. Numerični zaklad premaknjene matrike A in z rdečo $*$ označeno izhodišče.

Tabela 1. A realna, $\mu = 1.0419$ in obstaja rešitev

| Algoritem | Čas | Koraki | Napaka |
|---|---|---|---|
| `AlgM` | 0.024636 | 1 | 1.4988e-15 |
| `AlgC` | 0.059675 | 4 | 5.2369e-16 |
| `AlgCPU` | 0.041832 | 2 | 7.0217e-16 |

Iz tabele 1 vidimo, da je naš algoritem `AlgM` najhitrejši, saj je samo enkrat računal lastne vektorje in lastne vrednosti, medtem ko sta druga dva algoritma to računala 4- in 2-krat. Naša napaka je malenkost večja kot od ostalih, vendar še vedno sprejemljiva, glede na to da smo natančnost nastavili na $10^{-10}$.
Za drugi primer vzamimo $\mu = 0$ in matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

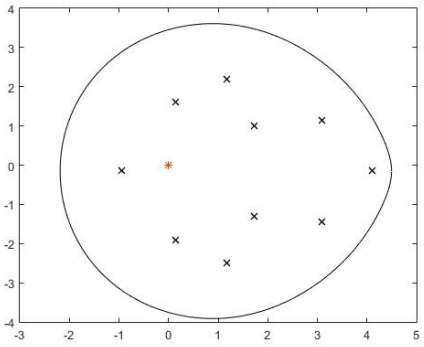
Matrika $A$ je definitna, zato noben algoritem ne bi smel najti rešitve.

Tabela 2. A realna in ne obstaja rešitev.

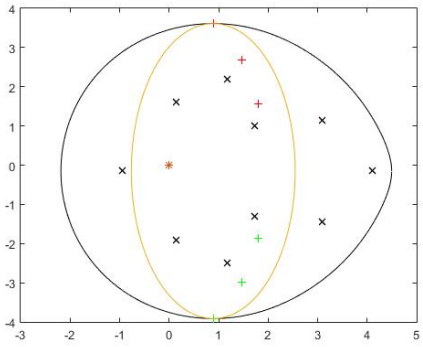
| Algoritem | Čas | Koraki | Napaka |
|---|---|---|---|
| `AlgM` | 0.017245 | 1 | Inf |
| `AlgC` | 0.378286 | 4 | Inf |
| `AlgCPU` | 0.009840 | 1 | Inf |

Kot vidimo v tabeli 2, res noben algoritem ne najde rešitve. Najhitreje to naredi algoritem `AlgCPU`, skoraj dvakrat počasneje pa naš algoritem, saj sta algoritma samo enkrat računala lastne vrednosti in lastne vektorje. `AlgC` je porabil veliko več časa, saj je lastne vrednosti in vektorje računal kar štirikrat.

4.2.2. *A realna, $\mu$ kompleksen.* Naj bo $A$ naključno generirana realna $10\times10$ matrika in $\mu = -1.4575 + 0.1514\imath$ kompleksno število iz numeričnega zaklada, slika 5A.



(A) Z rdečo $*$ označimo izhodišče.



(B) Rdeči + so največji lastni vektorji, zeleni pa najmanjši lastni vektorji matrike K.[1]

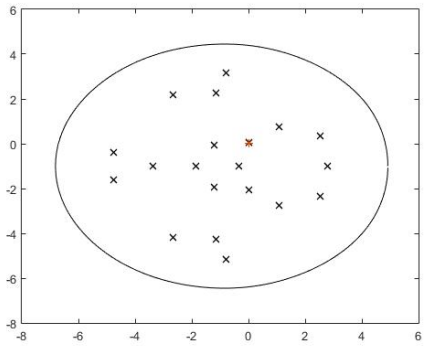
Slika 5. Numerični zaklad premaknjene matrike A in kako grafično najdemo rešitev v enem koraku.

Tabela 3. A realen, $\mu = -1.4575 + 0.1514\imath$.

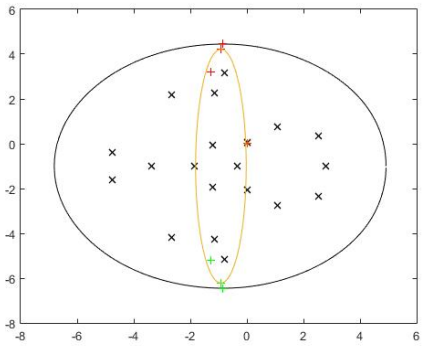
| Algoritem | Čas | Koraki | Napaka |
|---|---|---|---|
| `AlgM` | 0.018268 | 1 | 1.0484e-15 |
| `AlgC` | 0.059066 | 4 | 1.1322e-15 |
| `AlgCPU` | 0.032536 | 2 | 3.1525e-16 |

Naš algoritem je spet samo enkrat računal lastne vektorje in lastne vrednosti, zato je tudi najhitrejši kot vidimo v tabeli 3.
Za drugi primer vzamemo realno naključno generirano $20\times20$ matriko A in $\mu = 1+\imath$, slika 6A.

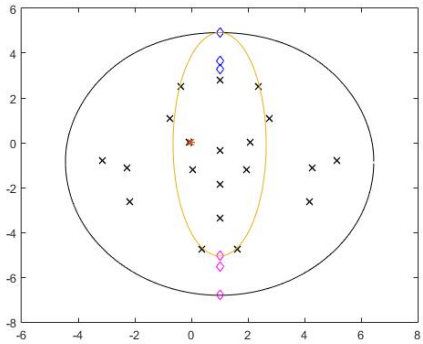
[1]Tukaj ne mislimo, da so v numeričnem zakladu narisani lastni vektorji, ampak točke, ki so izračunane s tem lastnim vektorjem. Npr. če je x naš lastni vektor, smo točko v numeričnem zakladu izračunali kot $x^*Ax$.



(A) Z rdečo $*$ označimo izhodišče.



(B) Rdeči + so največji lastni vektorji, zeleni pa najmanjši lastni vektorji matrike $K$.[1] Z nobeno kombinacijo ne dobimo dovolj velike elipse, ki bi vsebovala izhodišče.



(C) Modri $\diamond$ so največji lastni vektorji, roza pa najmanjši lastni vektorji matrike $H$.[1] Rišemo elipse za matriko $\imath A$.

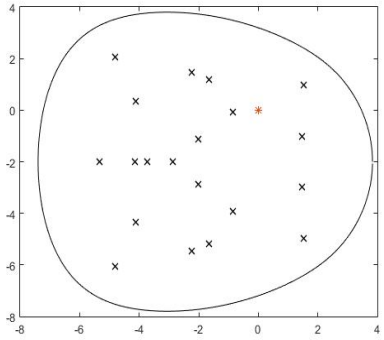
SLIKA 6. Numerični zaklad premaknjene matrike $A$ in kako grafično najdemo rešitev v dveh korakih.

V tabeli 4 vidimo, da je naš algoritem v tem primeru dvakrat računal lastne vrednosti in lastne vektorje, kar ga je dodatno upočasnilo.

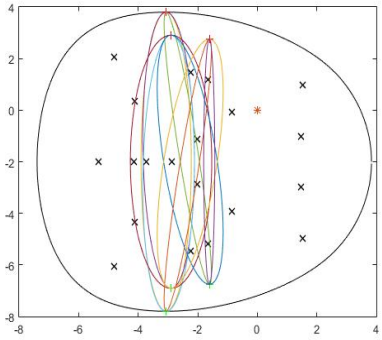
TABELA 4. A realen, $\mu = 1 + \imath$.

| Algoritem | Čas | Koraki | Napaka |
|---|---|---|---|
| `AlgM` | 0.025899 | 2 | 5.3363e-15 |
| `AlgC` | 0.017477 | 4 | 7.1089e-16 |
| `AlgCPU` | 0.012385 | 2 | 5.5511e-17 |

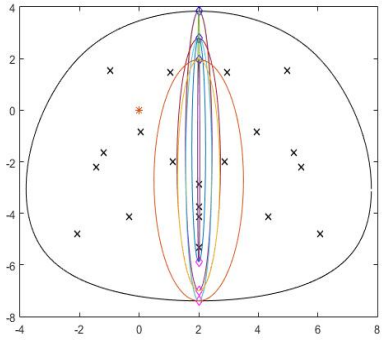
Za tretji primer vzamemo realno naključno generirano $20 \times 20$ matriko A in $\mu = 2 + 2\imath$, slika 7A.



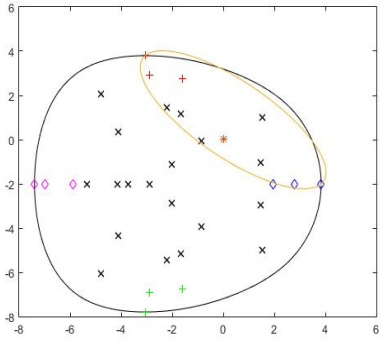
(A) Z rdečo $*$ označimo izhodišče.



(B) Rdeči + so največji lastni vektorji, zeleni pa najmanjši lastni vektorji matrike $K$.[1] Z nobeno kombinacijo ne dobimo dovolj velike elipse, ki bi vsebovala izhodišče.



(C) Modri $\diamond$ so največji lastni vektorji, roza pa najmanjši lastni vektorji matrike $H$.[1] Rišemo elipse za matriko $\imath A$. Z nobeno kombinacijo ne dobimo dovolj velike elipse, ki bi vsebovala izhodišče.



(D) Gledamo vse kombinacije lastnih vektorjev $K$ in $H$ na matriki $A$.[1]

Slika 7. Numerični zaklad premaknjene matrike $A$ in kako grafično najdemo rešitev v treh korakih.

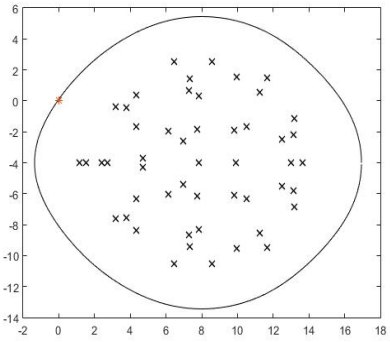
V tabeli 5 vidimo, da naš algoritem potrebuje dva izračuna lastnih vektorjev in lastnih vrednosti, vendar je v tem primeru uporabil kombinacijo le-teh matrik $K$ in $H$. Tudi `AlgCPU` porabi dva izračuna in je hitrejši od našega, `AlgC` pa porabi štiri izračune in je hitrejši od našega algoritma.

Tabela 5. A realen, $\mu = 2 + 2\imath$.

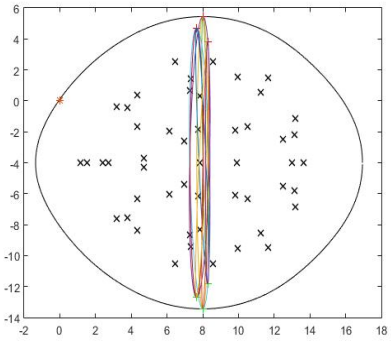
| Algoritem | Čas | Koraki | Napaka |
|---|---|---|---|
| `AlgM` | 0.033775 | 2 | 3.7752e-16 |
| `AlgC` | 0.020296 | 4 | 9.9301e-16 |
| `AlgCPU` | 0.012049 | 2 | 4.9651e-16 |

Poglejmo si grafično kako deluje naš algoritem, ko je $\mu$ zunaj numeričnega zaklada, za realno naključno generirano $50 \times 50$ matriko A in $\mu = -8 + 4\imath$, slika 8. V takem

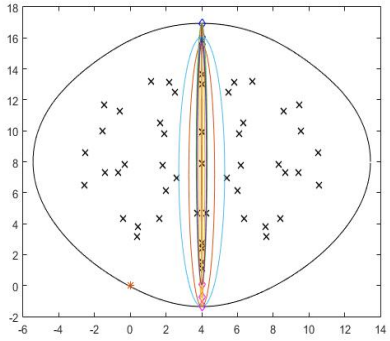
primeru naš algoritem ne ugotavlja ali je $\mu$ v numeričnem zakladu ali ne, saj do zadnjega trenutka išče možne kombinacije elips. To bi bila ena od možnih izboljšav algroritma.



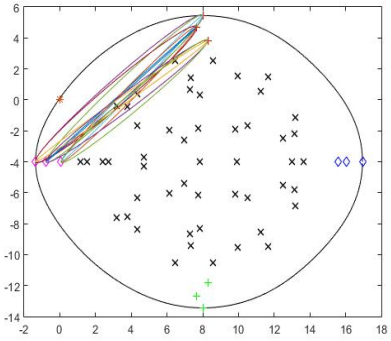
(A) Z rdečo $*$ označimo izhodišče.



(B) Rdeči + so največji lastni vektorji, zeleni pa najmanjši lastni vektorji matrike $K$.[1] Z nobeno kombinacijo ne dobimo dovolj velike elipse, ki bi vsebovala izhodišče.



(C) Modri $\diamond$ so največji lastni vektorji, roza pa najmanjši lastni vektorji matrike $H$.[1] Rišemo elipse za matriko $\imath A$. Z nobeno kombinacijo ne dobimo dovolj velike elipse, ki bi vsebovala izhodišče.



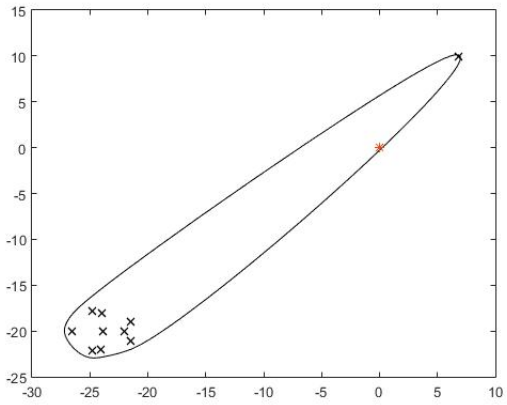
(D) Gledamo vse kombinacije lastnih vektorjev $K$ in $H$ na matriki $A$.[1] Narisane so le tiste elipse, ki imajo možnost vsebovati izhodišče.

Slika 8. Numerični zaklad premaknjene matrike $A$ in kako grafično ne najdemo rešitve.

Poglejmo primer iz članka [3], kjer naš algoritem ne najde rešitve, čeprav je izhodišče znotraj numeričnega zaklada, slika 9, druga algoritma pa jo najdeta. Kako bi se izognili takšnim primerom opišemo v naslednjem razdelku.

Tabela 6. A realen, $\mu = 23.2 + 20\imath$ in naš algoritem ne najde rešitve.

| Algoritem | Čas | Koraki | Napaka |
|---|---|---|---|
| `AlgM` | 0.013259 | 2 | Inf |
| `AlgC` | 0.022176 | 6 | 1.1235e-14 |
| `AlgCPU` | 0.001088 | 3 | 1.7764e-15 |




Slika 9. Numerični zaklad matrike in izhodišče, kjer naš algoritem ne deluje, čeprav bi moral.

4.2.3. *A in $\mu$ kompleksna.* V tem poglavju bomo za matriko $A$ vzeli matriko, ki je uporabljena tudi v [7] in [3], velikosti $200 \times 200$, ki se konstruira iz Fiedlerjeve $F$ in Molerjeve $M$ matrike. Potem je $B = F + \imath M$ in A (v Matlab kodi):

```
A=B+(-3+5i)*ones(200)-(200+500i)*eye(200)
```

Za prvi primer vzamimo $\mu = 5000 + 10000\imath$, slika 10. V tabeli 7 vidimo, da je naš algoritem najhitrejši, saj je računal samo lastne vrednosti in vektorje matrike $K$ in tudi napaka je najmanjša.

Tabela 7. A kompleskna, $\mu = 5000 + 10000\imath$.

| Algoritem | Čas | Koraki | Napaka |
|---|---|---|---|
| `AlgM` | 0.012503 | 1 | 4.0030e-16 |
| `AlgC` | 0.029377 | 4 | 1.2561e-15 |
| `AlgCPU` | 0.017893 | 2 | 4.7429e-16 |

Za drugi primer vzamemo $\mu = 12000 + 10000\imath$, ki je bližje robu, slika 10. V tabeli 8 lahko vidimo, da ker naš algoritem najde rešitev v dveh korakih, ni več najhitrejši, ampak ima pa še vedno najmanjšo napako.

Tabela 8. A kompleksna, $\mu = 12000 + 10000\imath$.

| Algoritem | Čas | Koraki | Napaka |
|---|---|---|---|
| `AlgM` | 0.433484 | 2 | 1.7053e-13 |
| `AlgC` | 0.656863 | 7 | 9.0949e-12 |
| `AlgCPU` | 0.03295 | 4 | 1.8190e-12 |

Za tretji primer vzamemo $\mu = 12500 + 10000\imath$, ki je še bližje robu kot v prejšnjem primeru, slika 10. V tabeli 9 vidimo, da ko naš algoritem uporabi kombinacijo lastnih vektorjev in lastnih vrednosti matrik $K$ in $H$, sta druga algoritma hitrejša.

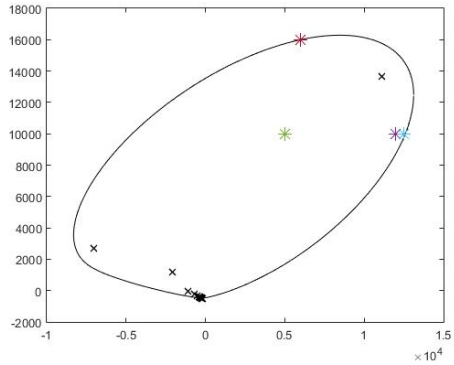
TABELA 9. A kompleksna, $\mu = 12500 + 10000\imath$.

| Algoritem | Čas | Koraki | Napaka |
|---|---|---|---|
| `AlgM` | 0.407477 | 2 | 1.8270e-12 |
| `AlgC` | 0.453814 | 8 | 9.2751e-12 |
| `AlgCPU` | 0.016621 | 5 | 7.7901e-13 |

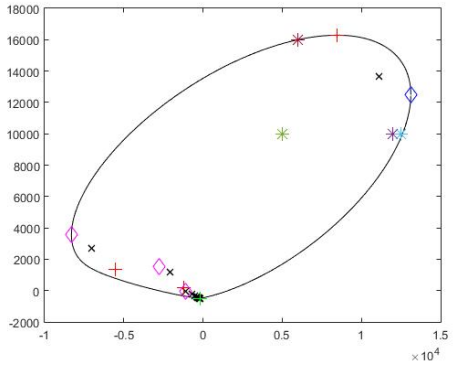
Za zadnji primer vzamimo $\mu = 6000 + 16000\imath$, ki je blizu roba, ampak vseeno ni v numeričnem zakladu, slika 10.

TABELA 10. A kompleksna, $\mu = 6000 + 16000\imath$ in algoritem ne najde rešitve.

| Algoritem | Čas | Koraki | Napaka |
|---|---|---|---|
| `AlgM` | 0.423094 | 2 | Inf |
| `AlgC` | 0.466800 | 11 | Inf |
| `AlgCPU` | 0.032628 | 10 | Inf |




(A) Zelena $* = 5000 + 10000\imath$
Vijolična $* = 12000 + 10000\imath$
Modra $* = 12500 + 10000\imath$
Rdeča $* = 6000 + 16000\imath$




(B) Rdeči + so največji lastni vektorji, zeleni pa najmanjši lastni vektorji matrike K. Modri $\diamond$ so največji lastni vektorji, roza pa najmanjši lastni vektorji matrike $H$.[1]

SLIKA 10. Numerični zaklad matrike A z dodanimi lastnimi vektorji iz katere lahko za vsak primer hitro ugotovimo koliko korakov potrebujemo, da najdemo elipso, ki bo ali ne bo vsebovala $\mu$.

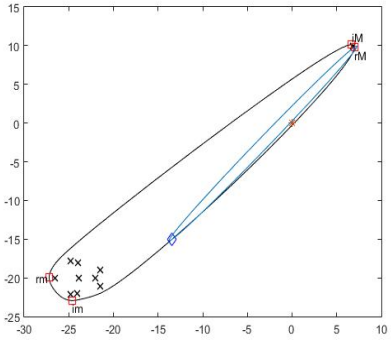
4.3. **Izboljšava.** Čeprav naš algoritem že izboljša Meurantov originalen algoritem, bi ga lahko še izboljšali, da bi deloval tudi v primerih, ko je izhodišče zelo blizu roba. To bi storili z bisekcijo kotov, podobno kot v desetem koraku CPU algoritma. Za podrobnejši opis si iz CPU algoritma sposodimo nekaj oznak za točke, ki označujejo ekstremne vrednosti $W(A)$, tj. najmanjši in največji horizontalni in vetikalni razteg. Označimo jih z $rM$ in $rm$ za maksimalen in minimalen horizontalni razteg $W(A)$ in z $iM$ in $im$ za maksimalen in minimalen vertikalen razteg $W(A)$. Ko naš algoritem ne najde primerne elipse tudi, če pogledamo vse kombinacije lastnih vektorjev $K$ in $H$, si pomagamo z izračunom lastnih vektorjev in vrednosti $A(\theta) = \cos(\theta)H + \sin(\theta)K$

za kote $\theta \neq 0, \pi/2$. Odvisno od položaja izhodišča glede na numerični zaklad lahko ločimo štiri primere:

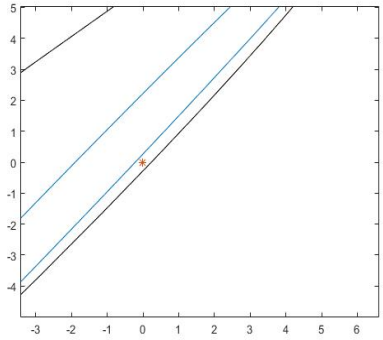
- Če so vsa presečišča elipse z realno osjo pozitivna in je $\Im(rm) < 0$, potem naredimo bisekcijo kota $\pi/2$ in $\pi$ in izračunamo največjo lastno vrednost $A(3/4\pi)$ ter pripadajoč lastni vektor $x_{nov}$. $p = x_{nov}^* A x_{nov}$ je točka na robu numeričnega zaklada med točkama $rm$ in $iM$. Če je $\Im(p) < 0$, potem iščemo presečišča $p$-$iM$ elipse z realno osjo, če pa je $\Im(p) > 0$, potem iščemo presečišča $rm$-$p$ elipse z realno osjo.
- Če so vsa presečišča elipse z realno osjo pozitivna in je $\Im(rm) > 0$, potem naredimo bisekcijo kota $3/2\pi$ in $\pi$ in izračunamo največjo lastno vrednost $A(5/4\pi)$ ter pripadajoč lastni vektor $x_{nov}$. $p = x_{nov}^* A x_{nov}$ je točka na robu numeričnega zaklada med točkama $im$ in $rm$. Če je $\Im(p) < 0$, potem iščemo presečišča $p$-$rm$ elipse z realno osjo, če pa je $\Im(p) > 0$, potem iščemo presečišča $im$-$p$ elipse z realno osjo.
- Če so vsa presečišča elipse z realno osjo negativna in je $\Im(rM) < 0$, potem naredimo bisekcijo kota 0 in $\pi/2$ in izračunamo največjo lastno vrednost $A(1/4\pi)$ ter pripadajoč lastni vektor $x_{nov}$. $p = x_{nov}^* A x_{nov}$ je točka na robu numeričnega zaklada med točkama $rM$ in $iM$. Če je $\Im(p) < 0$, potem iščemo presečišča $p$-$iM$ elipse z realno osjo, če pa je $\Im(p) > 0$, potem iščemo presečišča $rM$-$p$ elipse z realno osjo.
- Če so vsa presečišča elipse z realno osjo negativna in je $\Im(rM) > 0$, potem naredimo bisekcijo kota $3/2\pi$ in $2\pi$ in izračunamo največjo lastno vrednost $A(7/4\pi)$ ter pripadajoč lastni vektor $x_{nov}$. $p = x_{nov}^* A x_{nov}$ je točka na robu numeričnega zaklada med točkama $im$ in $rM$. Če je $\Im(p) < 0$, potem iščemo presečišča $p$-$rM$ elipse z realno osjo, če pa je $\Im(p) > 0$, potem iščemo presečišča $im$-$p$ elipse z realno osjo.

Bisekcijo izvajamo poljubno dolgo, dokler ne najdemo presečišči elipse z realno osjo na obeh straneh 0, ali dokler $A(\theta)$ ne postane definitna.

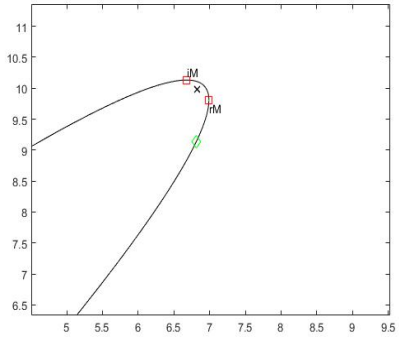
Vrnimo se k primeru iz tabele 8 in poglejmo kako bi uporabili bisekcijo kota v tem primeru. Očitno bomo uporabili zadnjo točko iz bisekcije, saj so vsa presečišča negativna in $\Im(rM) > 0$. Kako smo našli rešitev je grafično predstavljeno na sliki 11.



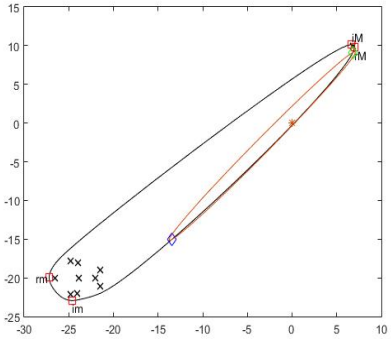

(A) Prva točka $p$, ki jo dobimo iz bisekcije, je označena z modrim $\diamond$. Očitno moramo iskati presečišči $p$-$rM$ elipse z realno osjo.



(B) Vidimo, da izhodišče ni vsebovano v elipsi, kar pomeni, da ne najdemo presečišči z realno osjo na vsaki strani ničle.




(C) Drugo točko $p$ dobimo iz bisekcije kota $7/4\pi$ in $2\pi$, označeno z zelenim $\diamond$.




(D) Očitno moramo iskati presečišči $p$-$p_{star}$ elipse z realno osjo. Tokrat je izhodišče vsebovano v elipsi in končamo.

Slika 11. Kako najdemo rešitev z uporabo bisekcije kota v dveh korakih.

# 5. Zaključek

V delu diplomskega seminarja smo pokazali kako najdemo izotropne vektorje, če imamo realno ali kompleksno začetno matriko. Za realne matrike smo opisali enostaven algoritem, ki nam vrne poljubno število izotropnih vektorjev, pod pogojem, da imamo tri različne lastne vrednosti, ki ne smejo biti istega predznaka. Za kompleksne matrike smo opisali tri različne algoritme treh različnih avtorjev. Algoritem Meuranta išče izotropne vektorje s pomočjo lastnih vektorjev in lastnih vrednosti matrike $K$, če to ne deluje poskusi z matriko $H$, če pa še to ne deluje pa kombinira lastne vektorje matrik $K$ in $H$. Algoritem najde izotropne vektorje tako, da poišče presečišči realne osi z elipso, ki gre skozi pare točke, ki smo jih izračunali z lastnimi vektorji, nato uporabi lemo 3.1. Algoritem Cardna deluje tako, da najde tri take točke, da je 0 v njihovi konveksni ogrinjači in da za njih pozna pripadajoče izotropne vektorje, potem je iskan izotropni vektor konveksna kombinacija drugih izotropnih vektorjev. Algoritem CPU najprej izračuna ekstremne vrednosti numeričnega zaklada, potem pa išče presečišči elipse, ki gre skozi vsak par teh točk, z realno osjo. Če najde taki točki izračuna rešitev z uporabo leme 3.1, če ne pa uporabi bisekcijo kota in ponovi postopek. Algoritem Meuranta smo tudi sprogramirali v Matlabu in preizkusili na primerih, ko sta $A$ in $\mu$ realna, ko je $A$ realen in $\mu$ kompleksen ter ko sta $A$ in $\mu$ kompleksna. Opazili smo, da naš algoritem deluje najhitreje, če najde rešitev samo z lastnimi vektorji in lastnimi vrednostmi matrike $K$, drugače sta ostala algoritma hitrejša. Vključili smo tudi primere, ko algoritem ne deluje. To je, ko je $A$ definitna ali ko je $\mu$ zunaj numeričnega zaklada ali zelo blizu robu. V primerih, ko je $\mu$ znotraj numeričnega zaklada, a naš algoritem ne najde rešitve, smo opisali možno izboljšavo. Ta postopek je bisekcija kota, ki glede na položaj izhodišča, poišče novo točko na robu numeričnega zaklada. Potem iščemo presečišči realne osi z elipso nove točke in primerne ekstremne točke numeričnega zaklada. Če sta novi presečišči na vsaki strani izhodišča uporabimo lemo 3.1 in končamo, če ne ponovimo bisekcijo. Tako lahko v večini primerov najdemo izotropni vektor.

```
function [b, napaka, korak] = izotropniMeurant(A, mu)
%ce je mozno, ta funkcija izracuna izotropne vektorje b, ki so
%resitev enacbe mu=b'Ab.
%Vhod: A...realna ali kompleksna matrika
%      mu ... kompleksno stevilo
%
%
%Izhod:  b...izotropni vektor za mu
%        napaka ... norm(b'Ab-mu)
%        korak ... 0, če algoritem ne izračuna nobenih l. vekt.
%                  1, če algoritem izračuna le lastne vektorje K
%                  2, če algoritem izračna še lastne vektorje H
%                  3, če algoritem uporabi lastne vektorje K in H
warning off

if nargin ==1,
    mu=0;
    %tol = 1e-14;
end

[n, m] = size(A);
%preverimo, ce A kvadratna matrika
if n~=m,
    disp('Matrika A ni kvadratna!')
    return
end

%problem preobrnemo v b*(A-muI)b=0
A = A-mu*eye(n);

%A realna, algoritem za realne mtr.
if isreal(A)==1,
    [b, napaka, korak] = izotropniMeurantR(A);
    return
end

H=(A+A')/2;
K=(A-A')/(2*1i);
opts.disp = 0;
opts.maxit = 1000;
opts.tol = 10^-4;

napaka = Inf;
korak = 0;
b = 0;

[x, vred_k1] = eigs(K,3,'lr',opts);
```

```
[y, vred_k2] = eigs(K,3,'sr',opts);

korak = korak + 1;

X = [x,y];
LV = [diag(vred_k1);diag(vred_k2)];
for k=1: size(X,2)-1,
    for j = (k+1):size(X,2),
        if (LV(k,:)*LV(j,:) < 0),
            fi = (log(X(:,k)'*A*X(:,j)*inv(X(:,j)'*A*X(:,k))))/(2i);
            %#ok<*MINV>
            [b1, b2] = xtheta(X(:,k)*exp(fi*1i), X(:,j), A);


            if sum(abs(b1)<ones(n,1)*1e-10)==0 &&
                sum(abs(b2)<ones(n,1)*1e-10)==0,
                b1 = b1/norm(b1);
                b2 = b2/norm(b2);

                if (abs(imag(b1'*A*b1))<1e-10) &&
                    (abs(imag(b2'*A*b2))<1e-10),
                    b = lema_31(b1,b2,A);
                    if sum(abs(b)<ones(n,1)*1e-10)==0,
                        napaka = abs(b'*A*b);
                        return
                    end
                end
            end
        end
    end

end


%ponovimo isti postopek za H in matriko iA
[xx, vred_h1] = eigs(H,3,'lr');

[yy, vred_h2] = eigs(H,3,'sr');

korak = korak + 1;

XX = [xx,yy];
LV1 = [diag(vred_h1);diag(vred_h2)];

for k=1: size(XX,2)-1,
    for j = (k+1): size(XX,2),
        if (LV1(k,:)*LV1(j,:)< 0),
          fi=(log(XX(:,k)'*A*XX(:,j)*inv(XX(:,j)'*A*XX(:,k))))/(2i);
```

```
            %#ok<*MINV>
            [b1, b2] = xtheta(XX(:,k)*exp(fi*1i), XX(:,j), 1i*A);

            if sum(abs(b1)<ones(n,1)*1e-10)==0 &&
                sum(abs(b2)<ones(n,1)*1e-10)==0,
                b1 = b1/norm(b1);
                b2 = b2/norm(b2);

                if (abs(imag(b1'*(1i*A)*b1))<1e-10) &&
                    (abs(imag(b2'*(1i*A)*b2))<1e-10),
                    b = lema_31(b1,b2,(1i*A));
                    if sum(abs(b)<ones(n,1)*1e-10)==0,
                        napaka = abs(b'*(1i*A)*b);
                        return
                    end
                end
            end
        end
    end
end

korak = korak +1;

for k=1:size(X,2),
    for j = 1: size(XX,2),
            fi=(log(X(:,k)'*A*XX(:,j)*inv(XX(:,j)'*A*X(:,k))))/(2i);
            %#ok<*MINV>
            [b1, b2] = xtheta(X(:,k)*exp(fi*1i), XX(:,j), A);

            if sum(abs(b1)<ones(n,1)*1e-10)==0 &&
                sum(abs(b2)<ones(n,1)*1e-10)==0,
                b1 = b1/norm(b1);
                b2 = b2/norm(b2);

                if (abs(imag(b1'*A*b1))<1e-10) &&
                    (abs(imag(b2'*A*b2))<1e-10),
                    b = lema_31(b1,b2,A);
                    if sum(abs(b)<ones(n,1)*1e-10)==0,
                        napaka = abs(b'*A*b);
                        return
                    end
                end
            end
    end
end
disp('Algoritem ne najde resitve, uporabi algoritem CPU')

end
```

```
function [b, napaka, korak] = izotropniMeurantR(A)
%Resi problem iztotropnih vektorjev, če je matrika A realna in mi
%realen oz. 0

%racunamo b'Hb=0
H=(A+A')/2;

opts.disp = 0;
opts.maxit = 1000;
opts.tol = 10^-4;

[x, vred_h1] = eigs(H,1,'la',opts);

[y, vred_h2] = eigs(H,1,'sa',opts);

if (vred_h1 * vred_h2) < 0,
    b1 = sqrt(vred_h1 / (vred_h1 + abs(vred_h2)))*y +
    sqrt( abs(vred_h2) / (vred_h1 + abs(vred_h2)))*x;
    b2 = -sqrt(vred_h1 / (vred_h1 + abs(vred_h2)))*y +
    sqrt( abs(vred_h2) / (vred_h1 + abs(vred_h2)))*x;
    b = [b1 ,b2];
    napaka = [abs(b1'*H*b1),abs(b2'*H*b2)];
    korak = 1;
else
    b = 0;
    napaka = Inf;
    korak = 0;
    disp('H je definitna')
end

function [b1,b2] = xtheta(x,y,A)

H=(A+ A')/2;
K=(A- A')/(2*1i);

alfa = imag(x'*H*x + 1i*x'*K*x);
beta = imag(y'*H*y + 1i*y'*K*y);
gama = imag(x'*H*y + y'*H*x + 1i*(x'*K*y + y'*K*x));

%resimo enacbo beta*t^2 + gama*t + alfa = 0
t1 = (-gama + sqrt(gama^2 -4*beta*alfa))/(2*beta);
t2 = (-gama - sqrt(gama^2 -4*beta*alfa))/(2*beta);

%preverimo, če sta resitvi realni
if (abs(imag(t1))<1e-10),
    theta1 = atan(real(t1));%t = tan(theta)
    %(predpostavili smo, da cos(theta)~=0
    b1 = cos(theta1)*x + sin(theta1)*y;
else
```

```
    b1 = 0;
end

if (abs(imag(t2))<1e-10),
    theta2 = atan(real(t2));
    b2 = cos(theta2)*x + sin(theta2)*y;
else
    b2 = 0;
end
end

function [b] = lema_31(b1,b2,A)
%Vhod: enotska vektorja b1 in b2, za katera velja imag(bi'*A*bi)=0 za
%i=1,2, za dano matriko A
%Izhod: izotropni vektor b

a1 = real(b1'*A*b1);
a2 = real(b2'*A*b2);

if a1<0,
    if a2>0,
        alfa1 = a1;
        alfa2 = a2;
    else
        b=0;
        return
    end
elseif a1>0,
    if a2<0,
        alfa2 = a1;
        alfa1 = a2;
        [b2, b1] = deal(b1, b2);
    else
        b=0;
        return
    end
else
    b = 0;
    return
end
bb = @(t,th) exp(-1i*th)*b1 + t*b2;
al = @(th) exp(1i*th)*b1'*A*b2 + exp(-1i*th)*b2'*A*b1;

th = angle(b2'*A*b1 - b1.'*conj(A)*conj(b2));
t1 = (-al(th) + sqrt(al(th)^2 -4*alfa1*alfa2))/(2*alfa2);

b = bb(t1,th)/norm(bb(t1,th));

end
```

## Slovar strokovnih izrazov

**convex hull** konveksna ogrinjača
**eigenanalysis** izračun lastnih vrednosti in vektorjev
**field of values/numerical range** numerični zaklad
**inverse field of values problem/inverse numerical range problem** problem inverznega numeričnega zaklada
**isotropic vector/generating vector** izotropni vektor
**origin** izhodišče, točka $(0, 0)$
**skew-Hermitian matrix** poševno-hermitska matrika
**tetrahedron** tetraeder

## Literatura


[1] R. Carden, *A simple algorithm for the inverse field of values problem*, Inverse Probl. **25** (2009) 1–9

[2] R. Carden, *inversefov.m*, verzija 6. 2. 2011, [ogled 5. 5. 2016], dostopno na `http://www.caam.rice.edu/tech_reports/2009/`.

[3] C. Chorianopoulos, P. Psarrakos in F. Uhlig, *A method for the inverse numerical range problem*, Electron. J. Linear Algebra **20** (2010) 198–206

[4] N. Ciblak, H. Lipkin, *Orthonormal isotropic vector bases*, In: Proceedings of DETC'98, 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences (1998).

[5] W. Henao, *fovals.m*, [ogled 27. 7. 2016], dostopno na `https://www.mathworks.com/matlabcentral/mlc-downloads/downloads/submissions/4679/versions/1/previews/fovals.m/index.html?access_key=`.

[6] Johnson, C. R., *Numerical determination of the field of values of a general complex matrix*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978) 595–602.

[7] G. Meurant, *The computation of isotropic vectors*, Numer. Alg. **60** (2012) 193–204.

[8] P. Psarrakos, M. Tsatsomeros, *Numerical range: (in) a matrix nutshell* Math. Notes from Washington State University, Vol 45, No. 2 (2002)

[9] P. Psarrakos, *nr.m*, [ogled 12. 6. 2017], dostopno na `http://www.math.wsu.edu/faculty/tsat/files/matlab/nr.m`.

[10] F. Uhlig, *invfovCPU.m*, verzija 22. 3. 2011, [ogled 5. 5. 2016], dostopno na `http://www.auburn.edu/~uhligfd/m_files/invfovCPU.m`.