Računanje izotropnih vektorjev

Avtor: Mirjam Pergar
Mentor: ~~izred.~~ prof. dr. Bor Plestenjak

16. maj 2016

Vsebina

Problem

Za dano nesingularno, kvadratno $n \times n$ matriko A z realnimi ali kompleksnimi elementi, nas zanima izračun enotskega vektorja b z realnimi ali kompleksnimi elementi, tako da velja:

$$b^* A b = 0. \tag{1}$$

Vektor b, za katerega velja (1) in $b^* b = 1$ imenujemo **izotropni vektor**. Bolj splošen je inverzni problem zaloge vrednosti, kjer iščemo enotski vektor b, za katerega velja:

$$b^* A b = \mu, \tag{2}$$

kjer je μ dano kompleksno število.

- Problem (2) je možno prevesti na problem (1) za drugo matriko, saj je (2) enako

$$b^*(A - \mu I)b = 0.$$

- Če μ lastna vrednost matrike A, potem je rešitev pripadajoč lastni vektor matrike A.
- Če μ ni lastna vrednost matrike A, je $A - \mu I$ nesingularna in je potreben izračun izotropnega vektorja te matrike.
- Od sedaj naprej bomo vse vrednosti enačili z 0.

Zaloga vrednosti

Definicija

Zaloga vrednosti *matrike* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *je podmnožica kompleksne ravnine, definirana kot*

$$W(A) = \{x^* A x : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}.$$

Zaloga vrednosti

Definicija

***Zaloga vrednosti** matrike $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podmnožica kompleksne ravnine, definirana kot*

$$W(A) = \{x^* Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}.$$

- Očitno je $W(A)$ množica vseh Rayleighovih kvocientov matrike A.
- Izhodišče mora biti v $W(A)$, če hočemo, da ima (1) vsaj eno rešitev.
- Označimo s $\sigma(A)$ množico vseh lastnih vrednosti matrike A, ki jo imenujemo spekter.

Lastnosti zaloge vrednosti

1. $W(A)$ je konveksna, zaprta in omejena.
2. $\sigma(A) \subseteq W(A)$.
3. Za vsako unitarno matriko U je $W(U^*AU) = W(A)$.
4. $W(A + zI) = W(A) + z$ in $W(zA) = zW(A)$ za vsako kompleksno število z.
5. Rob zaloge vrednosti $W(A)$, $\partial W(A)$, je kosoma algebrska krivulja, in vsaka točka v kateri $\partial W(A)$ ni diferenciabilna je lastna vrednost matrike A.
6. Če je A normalna, potem $W(A) = \mathrm{Co}(\sigma(A))$, kjer s Co označimo zaprto konveksno ogrinjačo množice.
7. $W(A)$ je daljica na realni osi, če in samo če je A hermitska.

Izrek

Naj imata A in b realne ali kompleksne elemente. Potem veljajo enakosti:

$$b^* A b = 0 \Leftrightarrow b^*(A + A^*)b = 0 \quad \textit{in} \quad b^*(A - A^*)b = 0.$$

Izrek

Naj imata A in b realne ali kompleksne elemente. Potem veljajo enakosti:

$$b^*Ab = 0 \Leftrightarrow b^*(A + A^*)b = 0 \quad \textit{in} \quad b^*(A - A^*)b = 0.$$

- Če velja le $b^*(A + A^*)b = 0 \Rightarrow \Re(b^*Ab) = 0$.
- Če velja le $b^*(A - A^*)b = 0 \Rightarrow \Im(b^*Ab) = 0$.
- Označimo z $A_{sim} = (A + A^T)/2$ simetrični del matrike A in z $A_{psim} = (A - A^T)/2$ poševno-simetrični del matrike A.
- Hermitski del matrike A bomo označili s $H = (A + A^*)/2$.
- Poševno-hermitski del matrike A bomo označili z $\tilde{K} = (A - A^*)/2 = \imath K$.

Uporaba

- Preučevanje konvergence nekaterih iterativnih metod za reševanje linearnih sistemov, npr. GMRES.
- Aplikacije v numerični analizi, diferencialnih enačbah, teoriji sistemov itd.

Realne matrike

Ko je A realna matrika, nas zanima kako se izračuna rešitev enačbe:

$$b^* H b = 0, \tag{3}$$

kjer je H realna in simetrična matrika (t.j. $H = H^T$).

Realne matrike

Ko je A realna matrika, nas zanima kako se izračuna rešitev enačbe:

$$b^* H b = 0, \tag{3}$$

kjer je H realna in simetrična matrika (t.j. $H = H^T$).

Lema

Izotropni vektorji matrike A so identični izotropnim vektorjem njenega simetričnega dela.

Realne matrike

Ko je A realna matrika, nas zanima kako se izračuna rešitev enačbe:

$$b^* H b = 0, \tag{3}$$

kjer je H realna in simetrična matrika (t.j. $H = H^T$).

Lema

Izotropni vektorji matrike A so identični izotropnim vektorjem njenega simetričnega dela.

Vemo:

- $W(A)$ simetrična glede na realno os.
- $0 \in W(A)$, če in samo če $\lambda_n \leq 0 \leq \lambda_1$, kjer sta λ_n in λ_1 najmanjša in največja lastna vrednost matrike H.

Naj bosta x_1 in x_n realna lastna vektorja, pripadajoča λ_1 in λ_n. Potem sta:

- $x_1^T A x_1 = x_1^T H x_1 = \lambda_1$.
- $x_n^T A x_n = x_n^T H x_n = \lambda_n$.

realni točki na skrajni levi in skrajni desni zaloge vrednosti $W(A)$ na realni osi.

Naj bosta x_1 in x_n realna lastna vektorja, pripadajoča λ_1 in λ_n. Potem sta:

- $x_1^T A x_1 = x_1^T H x_1 = \lambda_1$.
- $x_n^T A x_n = x_n^T H x_n = \lambda_n$.

realni točki na skrajni levi in skrajni desni zaloge vrednosti $W(A)$ na realni osi.

- Realne rešitve (3) izračunamo z uporabo lastnih vektorjev matrike H.
- Predpostavimo, da iščemo vektorje b z normo 1.
- H zapišemo kot
$$H = X \Lambda X^T,$$
kjer je Λ matrika, ki ima na diagonali lastne vrednosti λ_i, ki so realna števila in X je ortogonalna matrika lastnih vektorjev, tako da $X^T X = I$.

- Uporabimo ta spektralni razcep v (3):

$$b^* H b = b^* X \Lambda X^T b = 0.$$

- Označimo s $c = X^T b$ vektor projekcije b na lastne vektorje matrike H.

- Uporabimo ta spektralni razcep v (3):

$$b^* H b = b^* X \Lambda X^T b = 0.$$

- Označimo s $c = X^T b$ vektor projekcije b na lastne vektorje matrike H.

Izrek

Naj bo b rešitev problema (3). *Potem vektor $c = X^T b$ s komponentami c_i zadošča naslednjima enačbama:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |c_i|^2 = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = 1. \tag{5}$$

Iskanje izotropnih vektorjev

Če predpostavimo, da nimajo vse lastne vrednosti H enakega predznaka, potem mora za najmanjšo lastno vrednost λ_n veljati $\lambda_n < 0$. Naj bo $k < n$ tak, da je $\lambda_k > 0$ in $0 < t < 1, t \in \mathbb{R}$. Izberemo taka c_n in c_k, da velja $|c_n|^2 = t$, $|c_k|^2 = 1 - t$ in $c_i = 0, i \neq n, k$, ker velja enačba (5) $t + (1 - t) = 1$.Iz (4) mora veljati enačba:

$$\lambda_n t + \lambda_k (1 - t) = 0,$$

katere rešitev je:

$$t_s = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_n}. \tag{6}$$

- Absolutna vrednost c_n (oz. c_k) je kvadratni koren od t_s (oz. $1 - t_s$).
- Ker je $b = Xc$, sta ~~dve~~ realni rešitvi:

$$b_1 = \sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k,$$

kjer sta x_n in x_k lastna vektorja pripadajoča λ_n in λ_k.

- Absolutna vrednost c_n (oz. c_k) je kvadratni koren od t_s (oz. $1 - t_s$).
- Ker je $b = Xc$, sta dve realni rešitvi:

$$b_1 = \sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k,$$

kjer sta x_n in x_k lastna vektorja pripadajoča λ_n in λ_k.
- Ker imata izraza v rešitvah enaka imenovalca, lahko rešitvi zapišemo kot:

$$b_1 = \sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k$$

.

- Absolutna vrednost c_n (oz. c_k) je kvadratni koren od t_s (oz. $1 - t_s$).
- Ker je $b = Xc$, sta dve realni rešitvi:

$$b_1 = \sqrt{t_s}x_n + \sqrt{1 - t_s}x_k, \quad b_2 = -\sqrt{t_s}x_n + \sqrt{1 - t_s}x_k,$$

kjer sta x_n in x_k lastna vektorja pripadajoča λ_n in λ_k.

- Ker imata izraza v rešitvah enaka imenovalca, lahko rešitvi zapišemo kot:

$$b_1 = \sqrt{\lambda_k}x_n + \sqrt{|\lambda_n|}x_k, \quad b_2 = -\sqrt{\lambda_k}x_n + \sqrt{|\lambda_n|}x_k$$

.

- Vektor mora biti normiran:

$$b_1 = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k + |\lambda_n|}}x_n + \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{\lambda_k + |\lambda_n|}}x_k,$$

$$b_2 = -\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k + |\lambda_n|}}x_n + \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{\lambda_k + |\lambda_n|}}x_k.$$

Število rešitev

Uporabimo vsak par pozitivnih in negativnih lastnih vrednosti, tako lahko postopek vrne toliko rešitev kot je dvakratno število parov lastnih vrednosti matrike H z nasprotnimi predznaki, če so vse lastne vrednosti različne.
Predpostavimo, da je b realen.

Število rešitev

Uporabimo vsak par pozitivnih in negativnih lastnih vrednosti, tako lahko postopek vrne toliko rešitev kot je dvakratno število parov lastnih vrednosti matrike H z nasprotnimi predznaki, če so vse lastne vrednosti različne.
Predpostavimo, da je b realen.

Posledica

Dobljena izotropna vektorja sta ortogonalna ($b_1^T b_2 = 0$), če in samo če $\lambda_k = -\lambda_n$.

Neskončno rešitev

Ko sta A in b realna smo dokazali naslednji izrek:

Izrek

Če je A realna in nedefinitna (t.j. ni pozitivno in negativno definitna), potem obstajata najmanj dva neodvisna realna izotropna vektorja.

Neskončno rešitev

Ko sta A in b realna smo dokazali naslednji izrek:

Izrek

Če je A realna in nedefinitna (t.j. ni pozitivno in negativno definitna), potem obstajata najmanj dva neodvisna realna izotropna vektorja.

- Pokazati želimo, da imamo neskončno število realnih rešitev in jih izračunati.
- Vzeti moramo vsaj tri različne lastne vrednosti, ki ne smejo biti istega predznaka (ko obstajajo).

- Predpostavimo, da $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$.

- Predpostavimo, da $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$.
- Naj bo $t_1 = |c_1|^2$, $t_2 = |c_2|^2$.

- Predpostavimo, da $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$.
- Naj bo $t_1 = |c_1|^2$, $t_2 = |c_2|^2$.

Veljati mora enačba (5)

$$\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 (1 - t_1 - t_2) = 0$$

oz.

$$(\lambda_1 - \lambda_3) t_1 + (\lambda_2 - \lambda_3) t_2 + \lambda_3 = 0,$$

s pogoji: $t_i \geq 0, i = 1, 2$ in $t_1 + t_2 \leq 1$.

Neskončno rešitev

- Dobimo premico definirano v (t_1, t_2) ravnini z enačbo:

$$t_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} t_1 .$$

Neskončno rešitev

- Dobimo premico definirano v (t_1, t_2) ravnini z enačbo:

$$t_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} t_1 .$$

- Pogoji za t_1, t_2 definirajo trikotnik.
- Potrebno je preveriti, če premica seka trikotnik.
- Vse dopustne vrednosti za t_1 in t_2 so dane z daljico v trikotniku.
- Zato obstaja neskončno število možnih pozitivnih parov (t_1, t_2).

Zgled

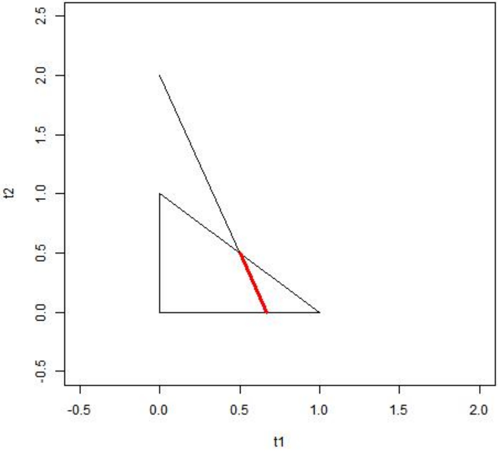
Poglejmo si enostaven zgled za matriko 3x3 z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 2$.
Matrika lastnih vektorjev X je enaka I.
Enačba premice je ~~tedaj~~ $t_2 = 2 - 3t_1$ s pogoji $t_1, t_2 \geq 0$ in $t_1 + t_2 \leq 1$.

Zgled

Dopustne rešitve za t_1 in t_2 so dane z daljico v trikotniku.

Zgled

Dopustne rešitve za t_1 in t_2 so dane z daljico v trikotniku.



Zgled

Iz daljice lahko izberemo katerikoli par točk (t_1, t_2), npr. $(0.5, 0.5)$. Potem vemo kako izgleda vektor $c = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \\ 0 \end{bmatrix}$. Iz enačbe $c = X^T b$~~,~~ dobimo

$$b = Xc = c = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Seveda je rešitev tudi $b = -c$. Tako dobimo neskončno izotropnih vektorjev b.

Neskončno rešitev

Takšna konstrukcija pripelje do naslednjega izreka:

Izrek

Če je $n > 2$ in A je realna in nedefinitna, ima matrika H vsaj tri različne lastne vrednosti z različnimi predznaki. Potem obstaja neskončno število realnih izotropnih vektorjev.

Neskončno rešitev

Takšna konstrukcija pripelje do naslednjega izreka:

Izrek

Če je $n > 2$ in A je realna in nedefinitna, ima matrika H vsaj tri različne lastne vrednosti z različnimi predznaki. Potem obstaja neskončno število realnih izotropnih vektorjev.

Splošen zapis

$$\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i - \lambda_k)t_i + \lambda_k = 0, \quad t_i \geq 0, i = 1, \ldots, k-1, \sum_{i=1}^{k-1} t_i \leq 1.$$

Kompleksne matrike

Predstavljeni bodo algoritmi naslednjih avtorjev:

1. *Meurant*.
2. *Carden*.
3. *Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig*.

Algoritme bomo numerično primerjali, saj bi radi, da algoritem vrne izotropni vektor s čim manj računanja.

Meurant 1

- V nekaterih primerih lahko izračunamo rešitve s samo enim računanjem lastnih vrednosti in vektorjev matrike K, vendar to ne deluje vedno.
- Uporabimo lastne vektorje matrike H.
- Z uporabo treh lastnih vektorjev H, obstaja neskončno rešitev dobljenih na daljici v trikotniku omejitev.
- Če sta imaginarna dela, ki ustrezata robnima točkama daljice, različnih predznakov, potem iz izreka o povprečni vrednosti sledi, da obstaja točka na daljici, ki ima ničeln imaginarni del.

Meurant 2

- Uporabimo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $K = (A - A^*)/(2i)$, ki je hermitska.
- S kombiniranjem lastnih vektorjev matrike K pripadajočim k pozitivnim in negativnim lastnim vrednostim, lahko (v nekaterih primerih) izračunamo taka vektorja b_1 in b_2, ~~taka~~ da

$$\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0$$

in

$$\alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0.$$

Meurant 2

Lema

Naj bosta b_1 *in* b_2 *enotska vektorja z* $\Im(b_i^* A b_i) = 0$, $i = 1, 2$ *in* $\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0, \alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0$. *Naj bo* $b(t, \theta) = e^{-i\theta} b_1 + t b_2, t, \theta \in \mathbb{R}, \alpha(\theta) = e^{i\theta} b_1^* A b_2 + e^{-i\theta} b_2^* A b_1$. *Potem je*

$$b(t, \theta)^* A b(t, \theta) = \alpha_2 t^2 + \alpha(\theta) t + \alpha_1,$$

$\alpha(\theta) \in \mathbb{R}$, *ko* $\theta = \arg(b_2^* A b_1 - b_1^T \bar{A} \bar{b}_2)$. *Za* $t_1 = (-\alpha(\theta) + \sqrt{\alpha(\theta)^2 - 4\alpha_1\alpha_2})/(2\alpha_2)$, *imamo*

$$b(t_1, \theta) \neq 0, \qquad \frac{b(t_1, \theta)^*}{\|b(t_1, \theta)\|} A \frac{b(t_1, \theta)}{\|b(t_1, \theta)\|} = 0.$$

Algoritem

1. S kombiniranjem lastnih vektorjev K, pripadajočim pozitivnim in negativinim lastnim vrednostim, izračunamo vektorja b_1 in b_2, taka da $\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0$ in $\alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0$. Uporabimo lemo in končamo.
2. Če ne najdemo b_1, b_2 potrebna za lemo 8, izračunamo še lastne vektorje matrike H. Ponovimo korak 1. za matriko $\imath A$.
3. Če postopek ne deluje niti za $\imath A$, uporabimo kombinacijo lastnih vektorjev K in H, kjer z x označimo lastni vektor K in z y lastni vektor H.
4. Upoštevamo vektorje $X_\theta = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y$, $0 \leq \theta \leq \pi$. $X_\theta^* A X_\theta$ opiše elipso znotraj zaloge vrednosti.

Algoritem

5. Za dan par (x, y) iščemo presečišča elipse $X_\theta^* A X_\theta$ z realno osjo. Z upoštevanjem, da je $A = H + iK$, računamo:

$$
\begin{aligned}
X_\theta^* A X_\theta = {} & \cos^2(\theta)(x^* Hx + ix^* Kx) \\
& + \sin^2(\theta)(y^* Hy + iy^* Ky) \\
& + \sin(\theta)\cos(\theta)(x^* Hy + y^* Hx + i[x^* Ky + y^* Kx]).
\end{aligned}
$$

Naj bo $\alpha = \Im(x^* Hx + ix^* Kx), \beta = \Im(y^* hy + iy^* Ky)$ in $\gamma = \Im(x^* Hy + y^* Hx + i[x^* Ky + y^* Kx])$. Ko enačimo imaginarni del $X_\theta^* AX\theta$ z 0, dobimo enačbo:

$$\alpha \cos^2(\theta) + \beta \sin^2(\theta) + \gamma \sin(\theta)\cos(\theta) = 0.$$

Predpostavimo, da $\cos(\theta) \neq 0$ in delimo, dobimo kvadratno enačbo za $t = \tan(\theta)$,

$$\beta t^2 + \gamma t + \alpha = 0.$$

Algoritem

6. Če ima ta enačba realne rešitve, potem dobimo vrednosti θ, ki nam vrnejo take vektorje X_θ, da $\Im(X_\theta^* A X_\theta) = 0$.
7. Če tudi ta konstrukcija ne deluje, uporabimo algoritem CPU.

Opombe:

- Če imamo b_1 in b_2, taka da $\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0$ in $\alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0$, smo končali.
- Ko je A realna in imamo $b_1 = x_1, b_2 = x_2$ za lastne vektorje H, potem je $\theta = 0$ in nam lema pove, kako se izračuna en izotropni vektor.
- Konstrukcija ne deluje, če imajo vrednosti $\Re(y_i^* H y_i)$ enak predznak, kjer so y_i lastni vektorji K.
- Ko je velikost problema velika, uporabimo samo lastne vektorje, ki pripadajo par najmanjšim in največjim lastnim vrednostim.

Carden

Kot smo omenili v prvem poglavju, je vseeno, če rešujemo problem 2 ali problem 1 za matriko $A - \mu I$.

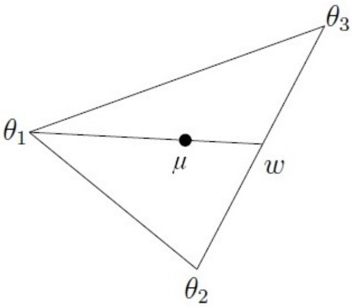
Carden

Kot smo omenili v prvem poglavju, je vseeno, če rešujemo problem 2 ali problem 1 za matriko $A - \mu I$.

- Predpostavimo, da je μ v konveksni ogrinjači treh točk $\theta_i \in W(A)$, za katere smo lahko izračunali izotropne vektorje b_i.
- Konveksna ogrinjača teh treh točk θ_i je trikotnik (lahko je izrojen).
- Radi bi, da je μ na daljici, ki ima take robne točke, da za njih vemo ali lahko izračuamo izotropne vektorje. BSŠ predpostavimo, da je θ_1 ena od robnih točk te daljice. Za drugo robno točko vzamemo w, ki je presečišče daljice med θ_2 in θ_3 s premico, ki teče skozi θ_1 in μ.

Carden

- *w* je konveksna kombinacija θ_2 in θ_3, zato mu lahko določimo pripadajoč izotropni vektor. Ker pa je μ konveksna kombinacija *w* in θ_1, lahko tudi njemu določimo izotropni vektor.



Algoritem

Naj bo $\varepsilon > 0$ toleranca (npr. $\varepsilon = 10^{-16}\,\|A\|$ za dvojno natančnost).

1. Poiščemo zunanjo aproksimacijo $W(A)$, tako da izračunamo najbolj levo in najbolj desno lastno vrednost $H_\theta = (e^{i\theta}A + e^{-i\theta}A^*)/2$ za $\theta = 0, \pi/2$. Če μ ni v zunanji aproksimaciji, potem $\mu \notin W(A)$ in ustavimo algoritem, drugače nadaljujemo.
2. Če je višina ali širina zunanje aproksimacije manj kot ε, potem je $W(A)$ približno hermitska ali poševno-hermitska in je zaloga vrednosti približno točka. V obeh primerih ugotovimo ali je $\mu \in W(A)$. Če je, poiščemo pripadajoč izotropni vektor.

Algoritem

3. Če $\mu \notin W(A)$, nadaljujemo s konstrukcijo notranje aproksimacije $W(A)$ z uporabo lastnih vektorjev najbolj leve in desne lastne vrednosti H_θ.
4. Če μ leži v notranji aproksimaciji, lahko poiščemo izotropni vektor. Uporabimo postopek, ki je bil opisan na začetku. Če μ ne leži v notranji aproksimaciji, določimo katera stranica notranje aproksimacije mu leži najbližje.
5. Izračunamo $\hat{\mu}$, ki je najbližja točka do μ, ki leži na notranji aproksimaciji. Če je $|\hat{\mu} - \mu| < \varepsilon$, izračunamo izotropni vektor za $\hat{\mu}$ in ga sprejmemo kot izotropni vektor za μ ter ustavimo algoritem.

Algoritem

6. Posodobimo notranjo in zunanjo aproksimacijo z izračunom največje lastne vrednosti in pripadajočega lastnega vektorja H_θ, kjer je smer θ pravokotna na stranico notranje aproksimacije, ki je najbližja μ. Če ne dobimo nove robne točke, ki se ni dotikala notranje aproksimacije, potem $\mu \notin W(A)$.
7. Ponovno preverimo, če je μ v novi zunanji aproksimaciji. Če je, se vrnemo na 4. korak, drugače $\mu \notin W(A)$.

Algoritem

Opombe:

- Korake 4.-7. ponavljamo, dokler ni notranja aproksimacija ε blizu μ ali dokler zunanja aproksimacija ne vsebuje μ. Carden trdi, da se v večini primerov postopek konča v koraku 4. po le nekaj ponavljanjih.
- Zunanja aproksimacija bo pravokotnik, katerega stranice so vzporedne z realno in imaginarno osjo.
- Notranja aproksimacija pa štirikotnik z oglišči v robnih točkah $\partial W(A)$.

Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig - CPU

Ta algoritem naj bi bil hitrejši in dajal natančne numerične rezultate tam, kjer se prejšnja algoritma mnogokrat ustavita. Tak primer je ko:

- $\mu \in W(A)$ ali
- $\mu \notin W(A)$ ali
- μ leži zelo blizu roba zaloge vrednosti $\partial W(A)$.

Ta algoritem uporabi za iskanje izotropnih vektorjev le nekaj najbolj osnovnih lastnosti zaloge vrednosti poleg konveksnosti, kot je $W(\alpha A + \beta I) = \alpha W(A) + \beta$.

Algoritem

1. Izračunamo do 4 robne točke zaloge vrednosti p_i in njihove izotropne vektorje b_i~~,~~ za $i = 1, 2, 3, 4$, tako da izračunamo ekstremne lastne vrednosti, ki pripadajo enotskim lastnim vektorjem x_i matrike H in K.
2. Nastavimo $p_i = b_i^* A b_i$, ki jih označimo z rM in rm za maksimalen in minimalen horizontalni razteg $W(A)$ in z iM in im za maksimalen in minimalen vertikalen razteg $W(A)$. Če je $|p_i| < 10^{-13}$~~,~~ za $i = 1, 2, 3, 4$, potem je naš izotropni vektor kar pripadajoč enotski vektor.
3. Če med računanjem lastnih vektorjev in lastnih vrednosti ugotovimo, da je ena od matrik H in iK definitna, potem vemo da $\mu \notin W(A)$ in algoritem ustavimo.

Algoritem

4. Narišemo elipse, ki gredo skozi vse možne pare točk *rm*, *rM*, *im* in *iM*, ki imajo nasprotno predznačene imaginarne dele. Nato izračunamo presečišča vsake dobljene elipse z realno osjo.
5. Če so izračunana presečišča na obeh straneh 0, potem izračunamo izotropni vektor z lemo.
6. Če presečišča niso na obeh straneh 0, potem moramo rešiti kvadratno enačbo s kompleksnimi števili

$$(tx + (1-t)y)^* A(tx + (1-t)y) =$$

$$(x^*Ax + y^*Ay - (x^*Ay + y^*Ax))t^2 +$$

$$+(-2y^*Ay + (x^*Ay + y^*Ax))t + y^*Ay.$$

Algoritem

7. Nas zanimajo samo rešitve, ki imajo imaginaren del enak 0, saj želimo uporabiti lemo. Če imaginarni del enačbe enačimo z 0, dobimo naslednjo polinomsko enačbo z realnimi koeficienti:

$$t^2 + gt + \frac{p}{f} = 0$$

za $q = \Im(x^*Ax)$, $p = \Im(y^*Ay)$ in $r = \Im(x^*Ay + y^*Ax)$. Označimo $f = p + q - r$ in $g = (r - 2p)/f$.

8. Enačba ima realni rešitvi t_i, $i = 1, 2$, ki vrneta generirajoča vektorja $b_i = t_i x + (1 - t_i)y$ $(i = 1, 2)$ za realni točki. Z normalizacijo dobimo izotropne vektorje.

Algoritem

9. Če nobena od možnih elips ne seka realno os na vsaki strani 0, potem preverimo, če to stori njihova skupna množica in ponovimo isti postopek.
10. Če niti skupna množica ne gre, potem izračunamo še več lastnih vrednosti in lastnih vektorjev za $A(\theta) = \cos(\theta)H + \sin(\theta)iK$ za kote $\theta \neq 0, \pi/2$ in delamo bisekcijo med točkami *rm*, *rM*, *im*, *iM*.
11. Končamo, ko najdemo definitno matriko $A(\theta)$ ali elipso, ki seka realno os na obeh straneh 0, nakar lahko uporabimo lemo.

Primer

Poglejmo si primer za algoritma Cardna in CPU za Matlabovo Grcar matriko A s kompleksnim premikom z.

```
A=gallery('grcar',32);
z=1+3i;
```

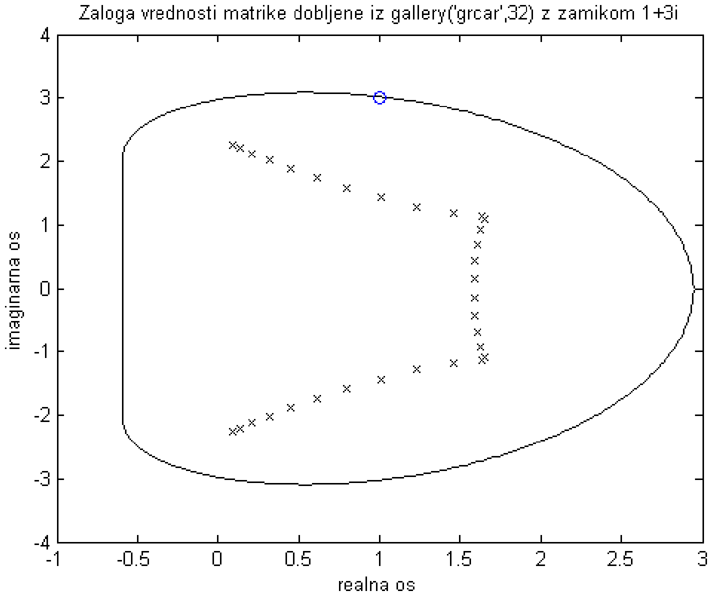
Uporabili bomo ukaza:

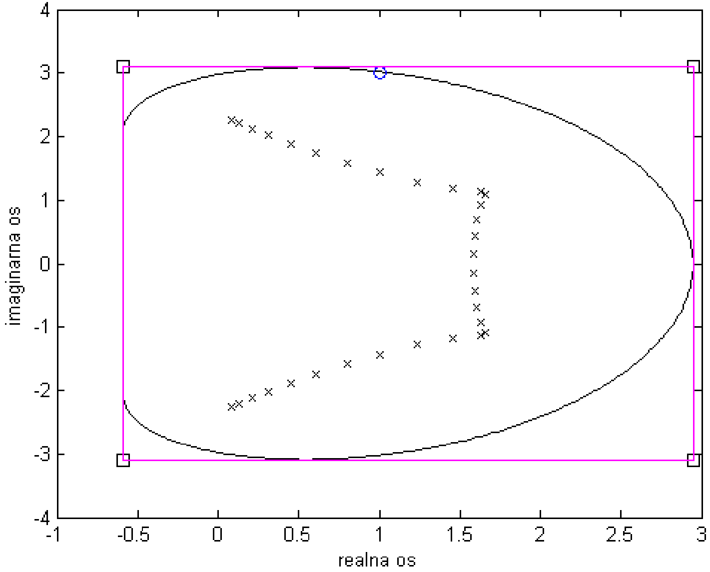
```
[bC no_eigC]=inversefov(A,z,0,10^-16,500)
```

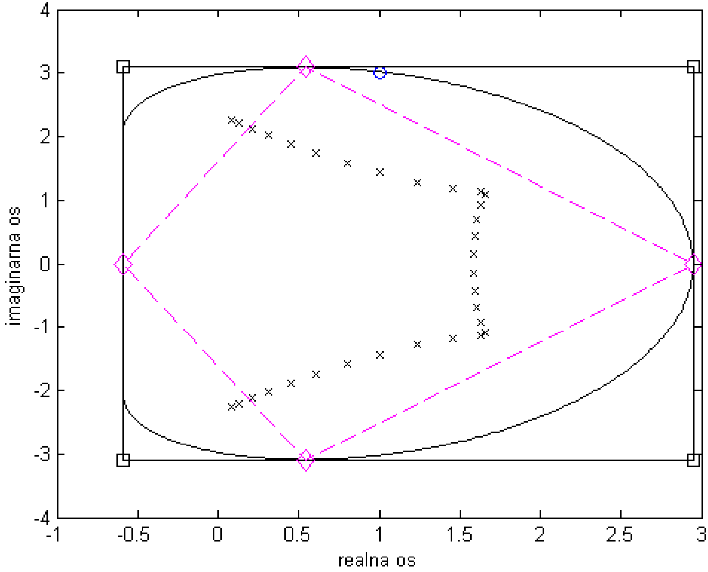
```
[bCPU napaka no_eigCPU]=invfovCPU(A,z,1,1)
```

Primer: Carden `inversefov`

```
bC =

  -0.0065 - 0.0580i
   0.0554 - 0.0679i
   0.1132 - 0.0259i
   0.1368 + 0.0571i
   0.0887 + 0.1539i

no_eigC =

     5

napakaC =

   2.3915e-15
```


Zaloga vrednosti matrike dobljene iz gallery('grcar',32) z zamikom 1+3i
imaginarna os
realna os
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

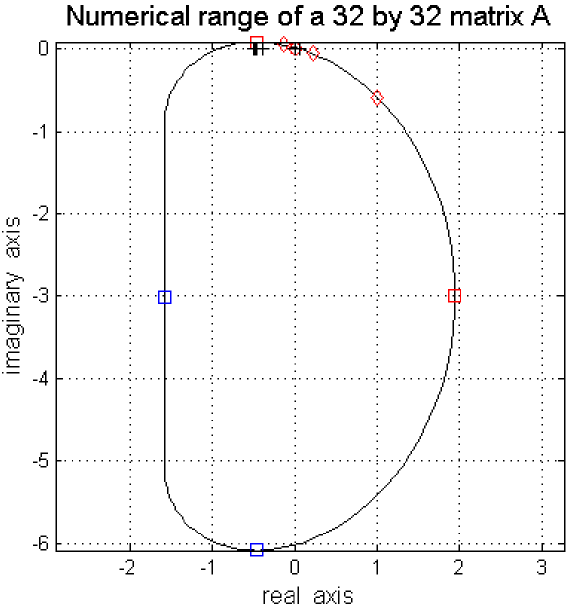

4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
imaginarna os
realna os

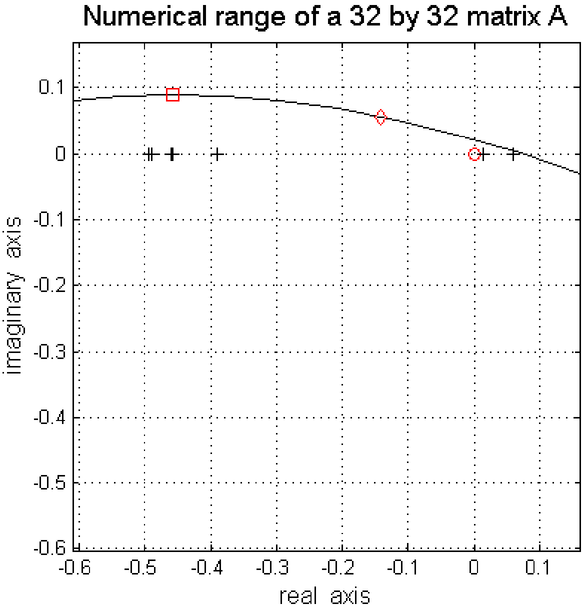


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
imaginarna os
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
realna os

Primer: CPU `invfovCPU`

```
bCPU =

  -0.0271 - 0.0299i
  -0.0024 - 0.0610i
   0.0395 - 0.0704i
   0.0876 - 0.0530i
   0.1197 + 0.0032i

no_eigCPU =

     5

napaka =

   6.8450e-17
```


Numerical range of a 32 by 32 matrix A
imaginary axis
real axis
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-2
-1
0
1
2
3


Numerical range of a 32 by 32 matrix A
imaginary axis
real axis
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1

Literatura

1. G. Meurant, *The computation of isotropic vectors*, Numer. Alg. **60** (2012) 193–204.
2. R. Carden, *A simple algorithm for the inverse field of values problem*, Inverse Probl. **25** (2009) 1–9
3. C. Chorianopoulos, P. Psarrakos in F. Uhlig, *A method for the inverse numerical range problem*, Electron. J. Linear Algebra **20** (2010) 198–206
4. N. Ciblak, H. Lipkin, *Orthonormal isotropic vector bases*, In: Proceedings of DETC'98, 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences (1998).

5. Johnson, C. R., *Numerical determination of the field of values of a general complex matrix*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978) 595–602.
6. R. Carden, *inversefov.m*, verzija 6. 2. 2011, [ogled 5. 5. 2016], dostopno na http://www.caam.rice.edu/tech_reports/2009/.
7. F. Uhlig, *invfovCPU.m*, verzija 22. 3. 2011, [ogled 5. 5. 2016], dostopno na http://www.auburn.edu/~uhligfd/m_files/invfovCPU.m.