Računanje izotropnih vektorjev

Avtor: Mirjam Pergar
Mentor: izred. prof. dr. Bor Plestenjak

24. november 2015

Vsebina

Vsebina

Vsebina

Vsebina

Problem

Za dano nesingularno, kvadratno $n \times n$ matriko A z realnimi ali kompleksnimi elementi, nas zanima izračun enotskega vektorja b z realnimi ali kompleksnimi elementi, tako da velja:

$$b^* A b = 0. \tag{1}$$

Vektor b, za katerega velja (1) in $b^* b = 1$ imenujemo **izotropni vektor**. Bolj splošen je problem inverzne zaloge vrednosti, kjer iščemo enotski vektor b, za katerega velja:

$$b^* A b = \mu, \tag{2}$$

kjer je μ dano kompleksno število.

- Problem (2) možno prevesti na problem (1) za drugo matriko, saj je (2) enako

$$b^*(A - \mu I)b = 0.$$

- Če μ lastna vrednost matrike A, potem je rešitev pripadajoč lastni vektor matrike A.
- Če μ ni lastna vrednost matrike A, je $A - \mu I$ nesingularna in je potreben izračun izotropnega vektorja te matrike.
- Od sedaj naprej bomo vse vrednosti enačili z 0.

Zaloga vrednosti

Definicija

Zaloga vrednosti *matrike $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je zaprta, konveksna podmnožica kompleksne ravnine, definirana kot*

$$W(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

Zaloga vrednosti

Definicija

Zaloga vrednosti *matrike $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je zaprta, konveksna podmnožica kompleksne ravnine, definirana kot*

$$W(A) = \{x^* A x : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}.$$

Očitno je zaloga vrednost $W(A)$ množica vseh Rayleighovih kvocientov matrike A. Če hočemo, da ima (1) vsaj eno rešitev, mora biti izhodišče v $W(A)$. Označimo s $\sigma(A)$ množico vseh lastnih vrednosti matrike A, ki jo imenujemo spekter.

Lastnosti zaloge vrednosti

1. $W(A)$ je konveksna, zaprta in omejena.
2. $\sigma(A) \subseteq W(A)$.
3. Za vsako unitarno matriko U je $W(U^*AU) = W(A)$.
4. $W(A + zI) = W(A) + z$ in $W(zA) = zW(A)$ za vsako kompleksno število z.
5. Rob zaloge vrednosti $W(A), \partial W(A)$ je kosoma algebrska krivulja, in vsaka točka v kateri $\partial W(A)$ ni diferenciabilna je lastna vrednost matrike A.
6. Če je A normalna, potem $W(A) = \mathrm{Co}(\sigma(A))$, kjer s Co označimo zaprto konveksno ogrinjačo množice.
7. $W(A)$ je daljica na realni osi, če in samo če je A hermitska.

Izrek

Naj imata A in b realne ali kompleksne elemente. Potem veljajo enakosti:

$$b^*Ab = 0 \Leftrightarrow b^*(A + A^*)b = 0 \ in \ b^*(A - A^*)b = 0.$$

Izrek

Naj imata A in b realne ali kompleksne elemente. Potem veljajo enakosti:

$$b^*Ab = 0 \Leftrightarrow b^*(A + A^*)b = 0 \textit{ in } b^*(A - A^*)b = 0.$$

- Če velja le $b^*(A + A^*)b = 0 \Rightarrow \Re(b^*Ab) = 0$.
- Če velja le $b^*(A - A^*)b = 0 \Rightarrow \Im(b^*Ab) = 0$.
- Ko sta b in A realna, je problem mnogo enostavnejši, saj moramo upoštevati le simetričen del matrike A.

Lema

Izotropni vektorji matrike A so identični izotropnim vektorjem njenega simetričnega dela.

Lema

Izotropni vektorji matrike A so identični izotropnim vektorjem njenega simetričnega dela.

Velja enakost:

$$b^T Ab = 0 \Leftrightarrow b^T(A + A^T)b = 0.$$

- Hermitski del matrike A bomo označili s $H = (A + A^*)/2$.
- Poševno-hermitski del matrike A bomo označili z $\tilde{K} = (A - A^*)/2 = \imath K$.

Uporaba

- Preučevanje delne stagnacije GMRES algoritma za reševanje linearnih sistemov z realnimi matrikami.
- Preučevanje konvergence nekaterih iterativnih metod za reševanje linearnih sistemov.
- Aplikacije v numerični analizi, diferencialnih enačbah, teoriji sistemov itd.

Realne matrike

Ko je A realna matrika, nas zanima kako izračunati rešitev naslednje enačbe:

$$b^* H b = 0, \tag{3}$$

kjer je H realna in simetrična matrika (t.j. $H = H^T$).

Realne matrike

Ko je A realna matrika, nas zanima kako izračunati rešitev naslednje enačbe:

$$b^* H b = 0, \tag{3}$$

kjer je H realna in simetrična matrika (t.j. $H = H^T$).

Vemo:

- $W(A)$ simetrična glede na realno os.
- $0 \in W(A)$, če in samo če $\lambda_n \leq 0 \leq \lambda_1$, kjer sta λ_n in λ_1 najmanjša in največja lastna vrednost matrike H.

Naj bosta x_1 in x_n realna lastna vektorja, pripadajoča λ_1 in λ_n.Potem sta:

- $x_1^T A x_1 = x_1^T H x_1 = \lambda_1$.
- $x_n^T A x_n = x_n^T H x_n = \lambda_n$.

realni točki na skrajni levi in skrajni desni zaloge vrednosti $W(A)$ na realni osi.

Naj bosta x_1 in x_n realna lastna vektorja, pripadajoča λ_1 in λ_n.Potem sta:

- $x_1^T A x_1 = x_1^T H x_1 = \lambda_1$.
- $x_n^T A x_n = x_n^T H x_n = \lambda_n$.

realni točki na skrajni levi in skrajni desni zaloge vrednosti $W(A)$ na realni osi.

- Realne rešitve (3) izračunamo z uporabo lastnih vektorjev matrike H.
- Predpostavimo, da iščemo vektorje b z normo 1.

Naj bosta x_1 in x_n realna lastna vektorja, pripadajoča λ_1 in λ_n.Potem sta:

- $x_1^T A x_1 = x_1^T H x_1 = \lambda_1$.
- $x_n^T A x_n = x_n^T H x_n = \lambda_n$.

realni točki na skrajni levi in skrajni desni zaloge vrednosti $W(A)$ na realni osi.

- Realne rešitve (3) izračunamo z uporabo lastnih vektorjev matrike H.
- Predpostavimo, da iščemo vektorje b z normo 1.
- H zapišemo kot
$$H = X \Lambda X^T,$$
kjer je Λ matrika, ki ima na diagonali lastne vrednosti λ_i, ki so realna števila in X je ortogonalna matrika lastnih vektorjev, tako da $X^T X = I$.

- Uporabimo ta spektralni razcep v (3):

$$b^* H b = b^* X \Lambda X^T b = 0.$$

- Označimo s $c = X^T b$ vektor projekcije b na lastne vektorje matrike H.

- Uporabimo ta spektralni razcep v (3):

$$b^* H b = b^* X \Lambda X^T b = 0.$$

- Označimo s $c = X^T b$ vektor projekcije b na lastne vektorje matrike H.

Izrek

Naj bo b rešitev problema (3). *Potem vektor $c = X^T b$ s komponentami c_i zadošča naslednjima enačbama:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |c_i|^2 = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = 1. \tag{5}$$

Iskanje izotropnih vektorjev

Če predpostavimo, da nimajo vse lastne vrednosti H enakega predznaka, potem more za najmanjšo lastno vrednost λ_n veljati $\lambda_n < 0$. Naj bo $k > 1$ tak, da je $\lambda_k > 0$ in $0 < t < 1, t \in \mathbb{R}$. Označimo $|c_n|^2 = t, |c_k|^2 = 1 - t$ in $c_i \neq 0, i \neq n, k$, kar velja zaradi enačbe (5), $t + (1 - t) = 1$. Iz (4) mora veljati enačba:

$$\lambda_n t + \lambda_k (1 - t) = 0,$$

katere rešitev je:

$$t_s = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_n}. \tag{6}$$

- Absolutna vrednost c_1 (oz. c_k) je kvadratni koren od t_s (oz. $1 - t_s$).

- Absolutna vrednost c_1 (oz. c_k) je kvadratni koren od t_s (oz. $1 - t_s$).
- Ker je $b = Xc$, sta dve realni rešitvi:

$$b_1 = \sqrt{t_s}x_n + \sqrt{1 - t_s}x_k, \quad b_2 = -\sqrt{t_s}x_n + \sqrt{1 - t_s}x_k,$$

kjer sta x_1 in x_k lastna vektorja pripadajoča λ_n in λ_k.

- Absolutna vrednost c_1 (oz. c_k) je kvadratni koren od t_s (oz. $1 - t_s$).
- Ker je $b = Xc$, sta dve realni rešitvi:

$$b_1 = \sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k,$$

  kjer sta x_1 in x_k lastna vektorja pripadajoča λ_n in λ_k.
- Ker imata izraza v rešitvah enaka imenovalca, lahko rešitvi zapišemo kot:

$$b_1 = \sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k$$

  .

- Absolutna vrednost c_1 (oz. c_k) je kvadratni koren od t_s (oz. $1 - t_s$).
- Ker je $b = Xc$, sta dve realni rešitvi:

$$b_1 = \sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{t_s} x_n + \sqrt{1 - t_s} x_k,$$

kjer sta x_1 in x_k lastna vektorja pripadajoča λ_n in λ_k.
- Ker imata izraza v rešitvah enaka imenovalca, lahko rešitvi zapišemo kot:

$$b_1 = \sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k, \quad b_2 = -\sqrt{\lambda_k} x_n + \sqrt{|\lambda_n|} x_k$$

.
- Vektor mora biti normiran:

$$b_1 = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_n + \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_k,$$

$$b_2 = -\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_n + \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{\lambda_k + |\lambda_n|}} x_k.$$

Število rešitev

Uporabimo lahko vsak par pozitivnih in negativnih lastnih vrednosti. Ta postopek lahko vrne toliko rešitev kot je dvakratno število parov lastnih vrednosti matrike H z nasprotnimi predznaki, če so vse lastne vrednosti različne. Predpostavimo, da je b realen.

Število rešitev

Uporabimo lahko vsak par pozitivnih in negativnih lastnih vrednosti. Ta postopek lahko vrne toliko rešitev kot je dvakratno število parov lastnih vrednosti matrike H z nasprotnimi predznaki, če so vse lastne vrednosti različne. Predpostavimo, da je b realen.

Posledica

Dobljena izotropna vektorja sta ortogonalna ($b_1^T b_2 = 0$), če in samo če $\lambda_k = -\lambda_n$.

Število rešitev

Uporabimo lahko vsak par pozitivnih in negativnih lastnih vrednosti. Ta postopek lahko vrne toliko rešitev kot je dvakratno število parov lastnih vrednosti matrike H z nasprotnimi predznaki, če so vse lastne vrednosti različne. Predpostavimo, da je b realen.

Posledica

Dobljena izotropna vektorja sta ortogonalna ($b_1^T b_2 = 0$), če in samo če $\lambda_k = -\lambda_n$.

Ko sta A in b realna smo dokazali naslednji izrek:

Izrek

Če je A realna in nedefinitna (t.j. ni pozitivno in negativno definitna), potem obstajata najmanj dva neodvisna realna izotropna vektorja.

Neskončno rešitev

- Pokazati želimo, da imamo neskončo število realnih rešitev in jih izračunati.

Neskončno rešitev

- Pokazati želimo, da imamo neskončo število realnih rešitev in jih izračunati.
- Potrebujemo vsaj 3 različne lastne vrednosti z različnimi predznaki.

Neskončno rešitev

- Pokazati želimo, da imamo neskončo število realnih rešitev in jih izračunati.
- Potrebujemo vsaj 3 različne lastne vrednosti z različnimi predznaki.
- Predpostavimo, da $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Neskončno rešitev

- Pokazati želimo, da imamo neskončo število realnih rešitev in jih izračunati.
- Potrebujemo vsaj 3 različne lastne vrednosti z različnimi predznaki.
- Predpostavimo, da $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$.
- Naj bo $t_1 = |c_1|^2$, $t_2 = |c_2|^2$.

Neskončno rešitev

- Pokazati želimo, da imamo neskončo število realnih rešitev in jih izračunati.
- Potrebujemo vsaj 3 različne lastne vrednosti z različnimi predznaki.
- Predpostavimo, da $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$.
- Naj bo $t_1 = |c_1|^2$, $t_2 = |c_2|^2$.
- Veljati mora enačba (5)

$$\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3(1 - t_1 - t_2) = (\lambda_1 - \lambda_3)t_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)t_2 + \lambda_3 = 0,$$

s pogoji: $t_i \geq 0, i = 1, 2$ in $t_1 + t_2 \leq 1$.

Neskončno rešitev

- Dobimo premico definirano v (t_1, t_2) ravnini

$$t_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} t_1 .$$

Neskončno rešitev

- Dobimo premico definirano v (t_1, t_2) ravnini

$$t_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} t_1 .$$

- Pogoji za t_1, t_2 definirajo trikotnik.
- Potrebno je preveriti, če premica seka trikotnik.

Neskončno rešitev

- Dobimo premico definirano v (t_1, t_2) ravnini

$$t_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} t_1 .$$

- Pogoji za t_1, t_2 definirajo trikotnik.
- Potrebno je preveriti, če premica seka trikotnik.
- t_1-os seka pri $\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_1) > 1$.
- t_2-os seka pri $\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_2) < 1$.

Neskončno rešitev

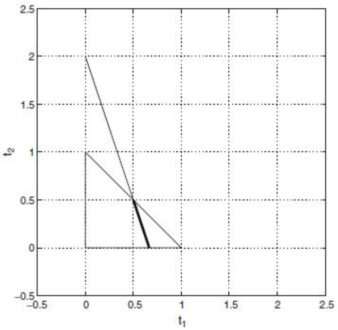
- Dobimo premico definirano v (t_1, t_2) ravnini

$$t_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} t_1 .$$

- Pogoji za t_1, t_2 definirajo trikotnik.
- Potrebno je preveriti, če premica seka trikotnik.
- t_1-os seka pri $\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_1) > 1$.
- t_2-os seka pri $\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_2) < 1$.
- Vse dopustne vrednosti za t_1 in t_2 so dane z daljico v trikotniku.
- Zato obstaja neskončno število možnih pozitivnih parov (t_1, t_2).

Zgled

Poglejmo zgled, ko imamo lastne vrednosti $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ in $\lambda_3 = 2$. Enačba premice je $t_2 = 2 - 3t_1$.



Neskončno rešitev

Ta problem za iskanje koeficientov je v treh dimenzijah in možne rešitve t-ja so v eni dimenziji. Takšna konstrukcija pripelje do naslednjega izreka:

Izrek

Če je $n > 2$ in A je realna in nedefinitna, ima matrika H vsaj tri različne lastne vrednosti z različnimi predznaki. Potem obstaja neskončno število realnih izotropnih vektorjev.

Neskončno rešitev

Ta problem za iskanje koeficientov je v treh dimenzijah in možne rešitve t-ja so v eni dimenziji. Takšna konstrukcija pripelje do naslednjega izreka:

Izrek

Če je $n > 2$ in A je realna in nedefinitna, ima matrika H vsaj tri različne lastne vrednosti z različnimi predznaki. Potem obstaja neskončno število realnih izotropnih vektorjev.

Splošen zapis

$$\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i - \lambda_k)t_i + \lambda_k = 0, \quad t_i \geq 0, i = 1, \ldots, k-1, \sum_{i=1}^{k-1} t_i \leq 1.$$

Kompleksne matrike

Predstavljene bodo grobe ideje algoritmov naslednjih avtorjev:

1. *Meurant*.
2. *Carden*.
3. *Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig*.

Meurant 1.

- V nekaterih primerih lahko izračunamo rešitve s samo enim računanjem lastnih vrednosti in vektorjev matrike K.

Meurant 1.

- V nekaterih primerih lahko izračunamo rešitve s samo enim računanjem lastnih vrednosti in vektorjev matrike K.
- Uporabimo lastne vektorje matrike H.

Meurant 1.

- V nekaterih primerih lahko izračunamo rešitve s samo enim računanjem lastnih vrednosti in vektorjev matrike K.
- Uporabimo lastne vektorje matrike H.
- Če ima matrika A kompleksne elemente, nam prejšnja konstrukcija za realne matrike vrne le vektorje za katere je $\Re(b^* A b) = 0$.

Meurant 1.

- V nekaterih primerih lahko izračunamo rešitve s samo enim računanjem lastnih vrednosti in vektorjev matrike K.
- Uporabimo lastne vektorje matrike H.
- Če ima matrika A kompleksne elemente, nam prejšnja konstrukcija za realne matrike vrne le vektorje za katere je $\Re(b^* Ab) = 0$.
- Z uporabo treh lastnih vektorjev H, obstaja neskončno rešitev dobljenih na daljici v trikotniku omejitev.

Meurant 1.

- V nekaterih primerih lahko izračunamo rešitve s samo enim računanjem lastnih vrednosti in vektorjev matrike K.
- Uporabimo lastne vektorje matrike H.
- Če ima matrika A kompleksne elemente, nam prejšnja konstrukcija za realne matrike vrne le vektorje za katere je $\Re(b^* A b) = 0$.
- Z uporabo treh lastnih vektorjev H, obstaja neskončno rešitev dobljenih na daljici v trikotniku omejitev.
- Če sta imaginarna dela, ki ustrezata robnima točkama daljice, različnih predznakov, potem iz izreka o povprečni vrednosti sledi, da obstaja točka na daljici, ki ima ničeln imaginarni del.

Opomba: to vsebuje samo izračun kvadratne forme $x^* Ax$. Ne potrebujemo nobenih izračunov lastnih vrednosti in vektorjev.

Meurant 2.

- Uporabimo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $K = (A - A^*)/(2i)$, ki je hermitska.
- S kombiniranjem lastnih vektorjev matrike K pripadajočim k pozitivnim in negativnim lastnim vrednostim, lahko (v nekaterih primerih) izračunamo dva vektorja b_1 in b_2, taka da

$$\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0$$

in

$$\alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0.$$

Meurant 2.

Lema

Naj bosta b_1 in b_2 enotska vektorja z $\Im(b_i^* A b_i) = 0$, $i = 1, 2$ in $\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0, \alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0$. Naj bo $b(t, \theta) = e^{-i\theta} b_1 + t b_2, t, \theta \in \mathbb{R}, \alpha(\theta) = e^{i\theta} b_1^* A b_2 + e^{-i\theta} b_2^* A b_1$. Potem je

$$b(t, \theta)^* A b(t, \theta) = \alpha_2 t^2 + \alpha(\theta) t + \alpha_1,$$

$\alpha(\theta) \in \mathbb{R}$, ko $\theta = arg(b_2^* A b_1 - b_1^T \bar{A} \bar{b}_2)$. Za $t_1 = (-\alpha(\theta) + \sqrt{\alpha(\theta)^2 - 4\alpha_1\alpha_2})/(2\alpha_2)$, imamo

$$b(t_1, \theta) \neq 0, \quad \frac{b(t_1, \theta)^*}{\|b(t_1, \theta)\|} A \frac{b(t_1, \theta)}{\|b(t_1, \theta)\|} = 0.$$

Meurant 2.

- Če imamo b_1 in b_2, taka da $\alpha_1 = \Re(b_1^* A b_1) < 0$ in $\alpha_2 = \Re(b_2^* A b_2) > 0$, smo končali.
- Ko je A realna in imamo $b_1 = x_1, b_2 = x_2$ za lastne vektorje H, potem je $\theta = 0$ in nam lema pove, kako se izračuna en izotropni vektor.
- V kompleksnem primeru, ne moremo vedno najti primerne vektorje b_1 in b_2.
- y_i lastni vektorji K. Če imajo vrednosti $\Re(y_i^* H y_j)$ enak predznak, konstrukcija ne deluje.
- Ko ne moremo izračunati b_1 in b_2 potrebnih za lemo, izračunamo lastne vektorje H in uporabimo enako tehniko za matriko iA.
- V primeru neuspeha, kombiniramo lastne vektorje H in K.

Meurant 2.

Naj bo x (oz. y) lastna vrednost K (oz. H), upoštevamo vektorje $X_\theta = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Ko gre θ od 0 do π, $X_\theta^* A X_\theta$ opisuje elipso v zalogi vrednosti. Za dan par lastnih vektorjev x, y iščemo presečišča elipse z realno osjo. Opazimo, da je $A = H + iK$, torej imamo:

Meurant 2.

Naj bo x (oz. y) lastna vrednost K (oz. H), upoštevamo vektorje $X_\theta = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Ko gre θ od 0 do π, $X_\theta^* A X_\theta$ opisuje elipso v zalogi vrednosti. Za dan par lastnih vektorjev x, y iščemo presečišča elipse z realno osjo. Opazimo, da je $A = H + iK$, torej imamo:

$$
\begin{aligned}
X_\theta^* A X_\theta = {} & \cos^2(\theta)(x^* H x + i x^* K x) \\
& + \sin^2(\theta)(y^* H y + i y^* K y) \\
& + \sin(\theta)\cos(\theta)(x^* H y + y^* H x + i[x^* K y + y^* K x]).
\end{aligned}
$$

Meurant 2.

Naj bo x (oz. y) lastna vrednost K (oz. H), upoštevamo vektorje $X_\theta = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Ko gre θ od 0 do π, $X_\theta^* A X_\theta$ opisuje elipso v zalogi vrednosti. Za dan par lastnih vektorjev x, y iščemo presečišča elipse z realno osjo. Opazimo, da je $A = H + iK$, torej imamo:

$$\begin{aligned} X_\theta^* A X_\theta = {} & \cos^2(\theta)(x^* Hx + ix^* Kx) \\ & + \sin^2(\theta)(y^* Hy + iy^* Ky) \\ & + \sin(\theta)\cos(\theta)(x^* Hy + y^* Hx + i[x^* Ky + y^* Kx]). \end{aligned}$$

Ko enačimo imaginarni del $X_\theta^* AX\theta$ z 0, dobimo enačbo:

Meurant 2.

Naj bo x (oz. y) lastna vrednost K (oz. H), upoštevamo vektorje $X_\theta = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Ko gre θ od 0 do π, $X_\theta^* A X_\theta$ opisuje elipso v zalogi vrednosti. Za dan par lastnih vektorjev x, y iščemo presečišča elipse z realno osjo. Opazimo, da je $A = H + iK$, torej imamo:

$$
\begin{aligned}
X_\theta^* A X_\theta = {} & \cos^2(\theta)(x^* Hx + ix^* Kx) \\
& + \sin^2(\theta)(y^* Hy + iy^* Ky) \\
& + \sin(\theta)\cos(\theta)(x^* Hy + y^* Hx + i[x^* Ky + y^* Kx]).
\end{aligned}
$$

Ko enačimo imaginarni del $X_\theta^* AX\theta$ z 0, dobimo enačbo:

$$\alpha \cos^2(\theta) + \beta \sin^2(\theta) + \gamma \sin(\theta)\cos(\theta) = 0.$$

Meurant 2.

Predpostavimo, da $\cos(\theta) \neq 0$ in delimo, dobimo kvadratno enačbo za $t = \tan(\theta)$,

$$\beta t^2 + \gamma t + \alpha = 0.$$

- Če ima ta enačba realne rešitve, potem dobimo vrednosti θ, ki nam vrnejo take vektorje X_θ, da $\Im(X_\theta^* A X_\theta) = 0$.
- Ko je velikost problema velika, ne uporabimo te konstrukcije za vse pare lastnih vektorjev, saj nas to lahko preveč stane. Uporabimo samo lastne vektorje, ki pripadajo par najmanjšim in največjim lastnim vrednostim.
- Če tudi ta konstrukcija ne deluje, uporabimo algoritem *Chorianopoulosa, Psarrakosa in Uhliga*.

Carden.

Opišemo idejo za Cardenov algoritem za dano matriko $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in $\mu \in \mathbb{C}$. Naj bo $\varepsilon > 0$ toleranca (npr. $\varepsilon = 10^{-16} \|A\|$ za dvojno natančnost).

Carden.

Opišemo idejo za Cardenov algoritem za dano matriko $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in $\mu \in \mathbb{C}$. Naj bo $\varepsilon > 0$ toleranca (npr. $\varepsilon = 10^{-16} \|A\|$ za dvojno natančnost).

- Izračunamo najbolj levo in najbolj desno lastno vrednost $H_\theta = (e^{i\theta} A + e^{-i\theta} A^*)/2$ za $\theta = 0, \pi/2$.
- Dobimo zunanjo aproksimacijo zaloge vrednosti, ki jo seka v robnih točkah $\partial W(A)$.
- Zunanja aproksimacijo bo pravokotnik, katerega stranice so vzporedne z realno in imaginarno osjo.
- μ ni v zunanji aproksimaciji, potem $\mu \notin W(A)$ in ustavimo algoritem, drugače nadaljujemo.
- Če višina ali širina zunanje aproksimacije manj kot ε, potem $W(A)$ približno hermitska ali poševno-hermitska (ali kompleksen premik katere od teh).
- Če višina in širina zunanje aproksimacije manj kot ε, potem zaloga vrednosti približno točka.

Carden.

- Ugotovimo ali $\mu \in W(A)$ ter, če je, je potrebno poiskati pripadajoč izotropni vektor.
- Če $\mu \notin W(A)$ nadaljujemo z konstrukcijo notranje aproksimacije $W(A)$ z uporabo lastnih vektorjev najbolj leve in desne lastne vrednosti H_θ.
- Notranja aproksimacija bo štirikotnih z oglišči v robnih točkah $\partial W(A)$.
- Če μ leži v notranji aproksimaciji, lahko poiščemo izotropni vektor, ki generira μ.
- Če μ ne leži v notranji aproksimaciji je potrebno določiti katera stranica notranje aproksimacije mu leži najbližje. Potrebno je izračunati $\hat{\mu}$, ki je najbližja točka do μ od notranje aproksimacije. Če je $|\hat{\mu} - \mu| < \varepsilon$, lahko izračunamo izotropni vektor za $\hat{\mu}$ in ga sprejmemo kot izotropni vektor za μ ter ustavimo algoritem.

Carden.

- V naslednjem koraku je potrebno posodobiti notranjo in zunanjo aproksimacijo z izračunom največje lastne vrednosti in pripadajočega lastnega vektorja H_θ, kjer je smer θ pravokotna na stranico notranje aproksimacije, ki je najbližja μ.
- Če ne dobimo nove robne točke, ki se ni dotikala notranje aproksimacije, potem $\mu \notin W(A)$. Drugače ponovno preverimo, če je μ v novi zunanji aproksimaciji. Če je, ponovimo isti postopek, drugače $\mu \notin W(A)$.
- Ta algoritem ne izkoristi dejstva, da je zaloga vrednosti 2×2 matrike elipsa.
- Ta lastnost nakazuje, da z točkami in pripadajočimi izotropnimi vektorji za notranjo aproksimacijo, lahko natančno določimo izotropne vektorje za točke zunaj notranje aproksimacije.

Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig.

Opišemo algoritem Chorianopoulosa, Psarrakosa in Uhliga za inverzen problem zaloge vrednosti. Algoritem je hitrejši in daje natančne numerične rezultate tam, kjer se zgornja algoritma mnogokrat ustavita. Tak primer je ko μ, $\mu \in W(A)$ ali $\mu \notin W(A)$, leži zelo blizu roba zaloge vrednosti $\partial W(A)$.

Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig.

Opišemo algoritem Chorianopoulosa, Psarrakosa in Uhliga za inverzen problem zaloge vrednosti. Algoritem je hitrejši in daje natančne numerične rezultate tam, kjer se zgornja algoritma mnogokrat ustavita. Tak primer je ko μ, $\mu \in W(A)$ ali $\mu \notin W(A)$, leži zelo blizu roba zaloge vrednosti $\partial W(A)$.

- Za iskanje izotropnih vektorjev izračunamo do 4 robne točke zaloge vrednost p_i in njihove izotropne vektorje b_i za $i = 1, 2, 3, 4$. To storimo z izračunom ekstremnih lastnih vrednosti, ki pripradajo enotskim lastnim vektorjem x_i matrike H in K.
- Iz $p_i = b_i^* A b_i$ dobimo 4 točke zaloge vrednosti p_i, ki so ekstremni horizontalni in vertikalni raztegi zaloge vrednosti $W(A)$.

Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig.

- Označimo točke s *rM* in *rm* za maksimalen in minimalen horizontalni razteg $W(A)$ in s *iM* in *im* za maksimalen in minimalen vertikalen razteg $W(A)$.
- Če katera od točk leži absolutno v bližini 10^{-13} točke 0, potem je naš izotropni vektor kar pripadajoč enotski vektor.
- Če ugotovimo, da je ena od hermitskih matrik H in iK definitna, potem vemo da $\mu \notin W(A)$ in algoritem ustavimo.
- Poiskati presečišča realne osi z elipsami velikega kroga, ki grejo skozi vse naše možne pare robnih točk $p_i = x^*Ax, p_j = y^*Ay$.
- Če dobimo presečišča na obeh straneh 0, izračunamo generirajoč enotski vektor za $0 \in W(A)$ z uporabo leme, ki smo jo opisali pri algoritmu *Meurant 2.*
- Drugače moramo poračunati kvadratno enačbo, katere ničle določijo koordinatne osi $W(A)$ točk na elipsah skozi točke $x^*Ax, y^*Ay \in \partial W(A)$.

Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig.

$$(tx+(1-t)y)^*A(tx+(1-t)y) = (x^*Ax+y^*Ay-(x^*Ay+y^*Ax))t^2 \\ +(-2y^*Ay+(x^*Ay+y^*Ax))t+y^*Ay. \quad (7)$$

To je kvadratna enačba z kompleksnimi števili. Nas zanimajo samo rešitve, ki imajo imaginaren del enak 0, saj želimo uporabiti lemo iz *Meurant 2.*

Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig.

$$(tx+(1-t)y)^*A(tx+(1-t)y) = (x^*Ax+y^*Ay-(x^*Ay+y^*Ax))t^2 + (-2y^*Ay + (x^*Ay + y^*Ax))t + y^*Ay. \quad (7)$$

To je kvadratna enačba z kompleksnimi števili. Nas zanimajo samo rešitve, ki imajo imaginaren del enak 0, saj želimo uporabiti lemo iz *Meurant 2.*
Če imaginarni del enačbe (7) enačimo z 0, dobimo naslednji polinom z realnimi koeficienti:

$$t^2 + gt + \frac{p}{f} = 0 \quad (8)$$

za $q = \Im(x^*Ax)$, $p = \Im(y^*Ay)$ in $r = \Im(x^*Ay + y^*Ax)$.
Označimo $f = p + q - r$ in $g = (r - 2p)/f$.

Chorianopoulos, Psarrakos in Uhlig.

- Enačba (8) ima dve realni rešitvi t_i, $i = 1, 2$, ki vrneta dva generirajoča vektorja $b_i = t_i x + (1 - t_i) y$ $(i = 1, 2)$, za dve realni točki.
- Z normalizacijo dobimo željene entoske izotropne vektorje.
- Če nobena od možnih elips ne vrne dve realni točki zaloge vrednosti na vsaki strani 0, potem preverimo, če to stori njihova skupna množica. Če ne, potem izračunamo še več lastnih vrednosti in lastnih vektorjev za $A(\theta) = \cos(\theta) H + \sin(\theta) iK$, za kote θ drugačne od $\theta \neq 0, \pi/2$.
- To delamo dokler dobljene elipse generirane z velikim krogom znotraj $W(A)$ ne sekajo realne osi na obeh straneh 0 in lahko izračunamo izotropne vektorje z lemo iz *Meurant 2.* ali dokler ena od matrik $A(\theta)$ ne postane definitna.

Literatura

1. G. Meurant, *The computation of isotropic vectors*, Numer. Alg. **60** (2012) 193–204.
2. R. Carden, *A simple algorithm for the inverse field of values problem*, Inverse Probl. **25** (2009) 1–9
3. C. Chorianopoulos, P. Psarrakos in F. Uhlig, *A method for the inverse numerical range problem*, Electron. J. Linear Algebra **20** (2010) 198–206
4. N. Ciblak, H. Lipkin, *Orthonormal isotropic vector bases*, In: Proceedings of DETC'98, 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences (1998).
5. Johnson, C. R., *Numerical determination of the field of values of a general complex matrix*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978) 595–602.