Using the Gauss-Bonnet Theorem

Bradley McCoy

July 21, 2022

Contents

1 Preface

preface goes here.

2 Definiciones

En matemáticas, una matriz es todo conjunto de números o expresiones dispuestos en forma **rectangular**, formando filas y columnas. Una matriz se representa por medio de una letra mayúscula(A, B. ...).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1}$$

- Cada uno de los números de que consta la matriz se denomina **elemento**. Un elemento se distingue de otro por la posición que ocupa, es decir, la fila y la columna a la que pertenece. Para ello se usa un doble subíndice donde el primero indica la fila y el segundo la columna a la que pertenece.

  Una forma simplificada de representar una matriz es $A := ((a_{ij}))$

- El número de filas y columnas de una matriz se denomina **dimensión de una matriz**. A una matriz con n filas y m columnas se le denomina matriz n-por-m (escrito $n \times m$) donde n, m $\in \mathbb{N} - \{0\}$.

- Si la matriz tiene el mismo número de filas que de columnas, y es n, se dice que es de **orden** n.

- Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas, son iguales.
- El conjunto de las matrices de tamaño $n \times m$ se representa como $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K}$ es el campo al cual pertenecen las entradas. El tamaño de una matriz siempre se da con el número de filas primero y el número de columnas después.

3 Tipos de Matrices

Matriz fila: Una matriz fila está constituida por una sola fila.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix}$$

Matriz columna: La matriz columna tiene una sola columna.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Matriz rectangular: La matriz rectangular tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su dimensión $n \times m$. (Ver expresión (1)).

Matriz traspuesta: Dada una matriz A, se llama matriz traspuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas y se denota por A^t.

Si A = $((a_{ij}))$, entonces $A^t = ((a_{ji}))$

Cumplen las siguiente propiedades:

- $(A^t)^t = A$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(\alpha\cdot)^t = \alpha \cdot A^t$
- $(A \times B)^t = B^t \times A^t$.

Las operaciones con matrices se definen en el apartado 3.

Matriz nula: En una matriz nula todos los elementos son ceros. $A = ((a_{ij})) = ((0))$

Matriz cuadrada: La matriz cuadrada tiene el mismo número de filas que de columnas.

- Los elementos de la forma $((a_{ii}))$ constituyen **la diagonal principal**.
- La **diagonal secundaria** la forman los elementos con $i + j = n + 1$, siendo n el orden de la matriz.
- Existen los siguientes tipos de matrices cuadradas[1]

  Matriz triangular superior: En una matriz triangular superior los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$\mathbf{A}= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

[1]Las operaciones con matrices se definen en el apartado 3.

Matriz triangular inferior: En una matriz triangular inferior los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal: En una matriz diagonal todos los elementos que no están situados en la diagonal principal son nulos.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matriz escalar: Una matriz escalar es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

Matriz identidad o unidad: Una matriz identidad es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.

Matriz regular: Una matriz regular es una matriz cuadrada que tiene inversa.

Matriz singular: Una matriz singular no tiene matriz inversa.

Matriz indempotente: Una matriz, A, es indempotente si: $A^2 = A$.

Matriz involutiva: Una matriz, A, es involutiva si: $A^2 = I$.

Matriz simétrica: Una matriz simétrica es una matriz cuadrada que verifica: $A = A^t$. *Matriz antisimétrica o hemisimétrica:* Una matriz antisimétrica o hermisimétrica es una matriz cuadrada que verifica $A = -A^t$.

Matriz ortogonal: Una matriz es ortogonal si verifica que: $A \times A^t = I$

4 Operaciones con Matrices

Las operaciones que se pueden hacer con matrices provienen de sus aplicaciones, sobre todo de las aplicaciones en álgebra lineal. De ese modo las operaciones, o su forma muy particular de ser implementadas, no son únicas.

4.1 Suma o adición

Definición

Se define la operación de suma o adición de matrices como una operación binaria

$$+ : \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$$

tal que $(A, B) \longmapsto C = A + B$ y donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ en el que la operación de suma en la última expresión es la operación binaria correspondiente pero en el campo $\mathbb{K}$.

Ejemplo

Sea $A, B \in \mathcal{M}_{\ni}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

La entrada c_{12} es igual a la suma de los elementos a_{12} y b_{12} lo cual es $a_{12} + b_{12}$.

Propiedades

- *Asociatividad:* $(A + B) + C = A + (B + C)$
- *Conmutatividad:* $(A + B) = (B + A)$
- *Existencia del elemento neutro aditivo:* Existe $0 \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que $A + 0 = 0 + A = A$
- *Existencia del inverso aditivo:* Existe $D \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que $A + D = 0$ a esta matriz D se le denota por $-A$

Estructura algebraica

La operación binaria adición se dice que esta operación es una operación interna por lo que se cumple intrínsecamente la propiedad de que $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ es cerrado bajo adición. Con estas propiedades se tiene que $(\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}), +)$ es un grupo abeliano.

En el caso en que el conjunto al que pertenecen las entradas de la matriz sea un anillo $(A, +_A, \cdot_A)$, la operación de adición de matrices continúa dotando de estructura de grupo abeliano a $(\mathcal{M}_{n\times m}(A), +)$, ya que bajo un anillo $(A, +_A, \cdot_A)$ se tiene que $(A, +_A)$ es un grupo abeliano. En el caso de que las entradas estén en un grupo $(G, +_G)$, éste necesita ser un grupo abeliano para que la adición de matrices siga dotando de estructura de grupo abeliano a $(\mathcal{M}_{n\times m}(G), +)$

Programación

En psuedocódigo basado en Java, esta operación es:

Listado 1: Suma de Matrices

```
void main() {
  float [][] a = creaMatriz(n, m); // Capturamos los valores de la matriz A
  float [][] b = creaMatriz(n, m); // Capturamos los valores de la matriz A
  float [][] suma = suma (a, b); ; // Invocamos a la función que suma matrices.
}

// La suma de dos matrices es otra matriz
float [][] suma(float[][] matriz1, float [][] matriz2) {
   // Si no hay matrices no hay nada que hacer.
   if (matriz1 ==null || matriz2==null) return null;

   // Asumimos que el primer índice es la fila y el segundo es la columna.
   // El número de filas y columnas en ambas matrices tienen que ser iguales.
   if (matriz1.length != matriz2.length) return null; // Filas diferentes.
   else
     for (int i=0; 1<matriz1.length; i++) {
       if (matriz1[0].length != matriz1[i].length)
         return null; // Alguna fila tiene un número diferente de columnas

       if (matriz1[i].length != matriz2[i].length)
         return null; // matrices tienen columnas diferentes.
     }
   // Ya estamos en condiciones de empezar

   // Primero creamos la nueva matriz
   // Tiene tantas filas y columnas, como la primera (o segunda) matriz.
   float [][] sol = new float[matriz1.length][matriz1[0].length];

   // Completamos las celdillas de la nueva matriz con el típico bucle anidado.
   for (int i=0; i<sol.length; i++)
     for (int j=o; j<sol[i].length; j++)

       sol[i][j] = matriz1[i][j]+matriz2[i][j]; // En esta celdilla calcularemos la suma.
   return sol;
}
```

4.2 Producto por un escalar

Definición

Sea $A \in (\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se define la operación de producto por un escalar como una función

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$$

tal que $(\lambda, A) \mapsto B = \lambda A$ y donde $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ en donde el producto es la operación binaria correspondiente pero en el campo $\mathbb{K}$

Ejemplo

Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y $2 \in \mathbb{R}$

$$2\begin{bmatrix}1 & 8 & -3\\ 4 & -2 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2(1) & 2(8) & 2(-3)\\ 2(4) & 2(-2) & 2(6)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 16 & -6\\ 8 & -4 & 12\end{bmatrix}$$

Por ejemplo, la entrada b_{12} es igual al producto λa_{12}.

Propiedades

Sean $A, B \in (\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es un campo, entonces se cumplen las siguientes propiedades para la operación producto por un escalar

- *Asociatividad:* $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- *Distribuitividad respecto de la suma de matrices:* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- *Distribuitividad respecto de la suma en el campo:* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- *Producto por el neutro multiplicativo del campo:* $1_{\mathbb{K}}A = A$

Estructura algebráica

Por como se definió la operación de producto por escalares se dice que $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ es cerrado bajo producto por escalares. Con estas propiedades y las de la adición se tiene que $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalares definidas antes.

En el caso de que las entradas y los escalares no estén en un campo sino en un anillo entonces no necesariamente existe el neutro multiplicativo. En caso de que exista, con lo cual el anillo es un anillo con uno, se dice que $\mathcal{M}_{n\times m}(A)$ es un módulo sobre A.

Programación

En psuedocódigo basado en Java, esta operación es:

Listado 2: Suma de Matrices

```
void main() {
  float [][] a = creaMatriz(n, m); // Capturamos los valores de la matriz A
  float L = leeCte; // Capturamos el valor de la constante.
  float [][] sol = productoEscalarMatriz (L, a); // Calculamos el producto.
}

// La suma de dos matrices es otra matriz
float [][] suma(float lambda, float[][] matriz) {
   // Si no hay matrices no hay nada que hacer.
   if (matriz1 ==null) return null;

   // Primero creamos la nueva matriz
   // Tiene tantas filas y columnas, como la primera (o segunda) matriz.
   float [][] sol = new float[matriz.length][matriz[0].length];

   // Completamos las celdillas de la nueva matriz con el típico bucle anidado.
   for (int i=0; i<sol.length; i++)
     for (int j=o; j<sol[i].length; j++)
```

```
20          sol[i][j] = lambda * matriz[i][j]; // En esta celdilla calcularemos el producto

22      return sol;
23  }
```

4.3 Producto Matricial

Su definición depende del contexto. Cuando proviene de la composición de aplicaciones lineales el tamaño de la matriz corresponde con las dimensiones de los espacios vectoriales entre los cuales se establece la aplicación lineal. De ese modo el producto de matrices representa la composición de aplicaciones lineales.

En efecto, en ciertas bases tenemos que $f : V \longrightarrow W$ se puede representar como $f(x) = Ax$ donde x es la representación de un vector de V en la base que se ha elegido para V en forma de vector columna. Si tenemos dos aplicaciones lineales $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$ entonces $f(x) = g(f(x)) = g(Bx) = AB(x)$ donde AB es el producto de las representaciones matriciales de f, g. Nótese que la composición no se puede dar entre cualquier aplicación sino entre aplicaciones que vaya de $V \to W \to U$, en particular debe de haber una relación entre las dimensiones de los espaciones vectoriales. Una vez dicho esto podemos definir el producto de la siguiente manera.

Definición

Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times p}(K)$. Se define el producto de matrices como una función

$$\cdot : \mathcal{M}_{n\times m}(K) \times \mathcal{M}_{m\times p}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times p}(K)$$

tal que $(A, B) \mapsto C = AB$ y donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$ para toda i, j, es decir

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$$

Ejemplo

Sean $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(R)$ y $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(R)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) + 0(2) + 2(1) & 1(1) + 0(1) + 2(0) \\ -1(3) + 3(2) + 1(1) & -1(1) + 3(1) + 1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

donde la matriz es como habíamos establecido en la definición: una matriz $Cin\mathcal{M}_{2\times 2}(R)$. Por ejemplo, la entrada $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + \ldots + a_{1m}b_{m2}$

Propiedades

- *Asociatividad:* $A(BC) = (AB)C$
- *Distribuitividad respecto de la suma de matrices por la izquierda:* $A(B + C) = AB + AC$

Estructura algebraica

El producto de matrices no es conmutativo, si lo fuera la composición de funciones lineales sería conmutativa y eso en general no sucede. Obviamente existen casos particulares de algunos tipos de matrices en los que sí hay conmutatividad. En el caso de que tengamos $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tendremos que el producto entre matrices en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ también está en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En ese caso, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ además de espacio vectorial es un álgebra sobre un campo. En el caso de que el conjunto al que pertenecen las entradas sea un anillo conmutativo con uno, entonces $\mathcal{M}_n(A)$ además de módulo es un álgebra sobre un anillo. Más aún $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ con $\cdot$ el producto de matrices es un anillo.

Programación

En psuedocódigo basado en Java, esta operación es:

Listado 3: Suma de Matrices

```
void main() {
  float [][] a = creaMatriz(n, m); // Capturamos los valores de la matriz A
  float [][] b = creaMatriz(m, k); // Capturamos los valores de la matriz B
  float [][] sol = producto (a, b);  // Calculamos el producto
}

// El producto de dos matrices es otra matriz
float [][] producto (float[][] matriz1, float[][] matriz2) {
   // Si no hay matrices no hay nada que hacer.
   if (matriz1==null || matriz2==null) return null;

   // Asumimos que el primer índice es la fila y el segundo es la columna.
   // El número de columnas de la primera tienen que ser igual al número
   // de filas de la primera.
   if (matriz1[0].length != matriz2.length) return null;

   // Aquí habría que poner el código para comprobar que todos los vectores
   // tienen la misma longitud.  Ver el código de cómo sumar (ahí está desarrollado).

   // Ya estamos en condiciones de empezar

   // Primero creamos la nueva matriz
   // Tiene tantas filas, como filas tiene la primera.
   //Tiene tantas columnas, como columnas tiene la segunda.
   // Asumimos que matriz2[i]==matriz2[0]
   float [][] sol = new float[matriz1.length][matriz2[0].length];

   // Completamos las celdillas de la nueva matriz con el típico bucle anidado.
   for (int i=0; i<sol.length; i++)
     for (int j=o; j<sol[i].length; j++) {
       // En esta celdilla calcularemos una suma, así que inicializamos a cero.
       sol[i][j] = 0;

       // Hacemos tantas sumas como números de columnas tiene la primera.
       // Para los índices (i, j), recorremos la fila i de la primera
       // y la columna j de la segunda.
       for (int k=0; k<matriz1[i].length; k++) {
         sol[i][j] += matriz1[i][k] * matriz2[k][j];
       }
     }

   return sol;
}
```

5 Matrices Binarias y Grafos

5.1 Relaciones binarias

En matemáticas, una relación binaria es una relación matemática $\mathcal{R}$ definida entre los elementos de dos conjuntos A y B. Una relación $\mathcal{R}$ de A en B se puede representar mediante pares ordenador $8a, b)$ para los cuales se cumple una propiedad $\mathcal{P}(a, b)$, de forma que $(a, b) \in A \times B$, y se anota:

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times B \mid \mathcal{P}(a, b)\}$$

Que se lee: la relación binaria $\mathcal{R}$ es el conjunto de pares ordenados (a, b) pertenecientes al producto cartesiano $a \times B$, y para los cuales se cumple la propiedad $\mathcal{P}$ que los relaciona.

Las propiedades siguientes son correctas para representar la relación binaria $\mathcal{R}$ entre los elementos a y b:

$$a\mathcal{R}b \qquad o \qquad \mathcal{R}(a, b) \qquad o \ bien \qquad (a, b) \in \mathcal{R}$$

Una relación binaria homogénea es la que se da entre los elementos de un único conjunto, llamando A al conjunto, tendríamos: $R(a, b) : (a, b) \in A^2$.

También podemos representar una relación binaria homogénea como una correspondencia de A sobre $A : R : A \to A$

Tomando como conjunto inicial al conjunto A y como final también al conjunto A, nos permite asociar un elemento incial a otro final dentro de un mismo conjunto, determinando una operación matemática o función de cálculo y no una estructura interna, teniendo siempre en cuenta, que si bien el conjunto inicial y final son un mismo conjunto, la relación es unidireccional, y si el elemento a está relacionado con el b no implica, necesariamente, que el b li esté con el a.

5.2 Grafos

Las relaciones binarias homogéneas se pueden representar mediante grafos.

En matemáticas y ciencias de la computación, un grafo (del griego grafo: dibujo, imagen) es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto o un objeto de estudio dela teoría de grafos. Típicamente, un grafo se representa gráficamente como un conjunto de punto (vértices o nodos) unidos por líneas (aristas).

Desde un punto de vista práctico, los grafos nos permiten estudiar las interrelaciones entre unidades que interactúan unas con otras. Por ejemplo, una red de computadoras puede representarse y estudiarse mediante un grafo, en el cual los vértices representan terminales y las aristas representan conexiones (las cuales, a su vez, pueden ser cables o conexiones inalámbricas).

Un grafo G es un par ordenado $G = (V, E)$, donde :

- V es un conjunto de vértices o nodos, y
- E es un conjunto de aristas o arcos, que relacionan estos nodos.

Normalmente V suele ser finito. Muchos resultados importantes sobre grafos no son aplicables para grados infinitos.

- Se llama orden del grafo G a su número de vértices, .
- El grado de un vértice o nodo $v \in V$ es igual al número de arcos que lo tienen como extremo.

Tipos de Grafos

Los grafos pueden ser dirigidos, no dirigidos o mixtos.

- Un grafo dirigido o digrafo es un grafo $G = (V, E)$ donde:
  - $V \neq \emptyset$
  - $E \subseteq \{(a, b) \in V \times V : a \neq b\}$ es un conjunto de pares ordenados de elementos de V.

  Dada una arista (a, b), a es un nodo inicial y b su nodo final.
- Un grafo no dirigido es un grafo $G = (V, E)$ donde:
  - $V \neq \emptyset$
  - $E \subseteq \{x \in \mathcal{P}(V) : |x| = 2\}$ es un conjunto de pares ordenados de elementos de V.

Un par no ordenado es un conjunto de la forma (a, b), de manera que $(a, b) = (b, a)$. Para los grafos, estos conjuntos pertenecen al conjunto potencia de V, denotado $\mathcal{P}(V)$, y son de cardinalidad 2.

Un ejemplo es la figura 2.

- Un grafo mixto es aquel que se define con la capacidad de poder contener aristas dirigidas y no dirigidas. Tano los grafos dirigidos como los no dirigidos son casos particulares de este.

5.3 Representación de grafos

Una matriz lógica, matriz binaria, matriz de relación, matriz booleana o matriz $(0, 1)$, es una matriz con entradas del dominio booleano $B = 0, 1$. Tal matriz puede ser usada para representar una relación binaria entre un par de conjuntos finitos y en particular a los grafos.

Las dos representaciones principales de grafos son las siguientes:

Matriz de adyacencia (MA): Se utiliza una matriz de tamaño $n \times m$ donde las filas y las columnas hacen referencia a los vértices para almacenar en cada casilla la longitud entre cada par de vértices del grafo. La celda $M[i, j]$ almacena la longitud entre el vértice i y el vértice j. Si su valor es infinito significa que no existe arista entre esos vértices, y y $MA[i, j] = 0$.

En pseudocódigo basado en Java, para construir la matriz de adyacencia de la Figura 3 es:

Listado 4: Matriz de Adyacencia

```
boolean [][] grafo = new int[5][5]; // Grafo sobre 5 elementos.

for (int i=0; i < grafo.length; i++)
  for (int j=o; j < grafo[i].length; j++)  {
    boolean hayUno = ((i0 || i== 4) && (j==1 || j==3)) ||
             ((i=1 || i== 3) && (j==0 || j==1 || j==4));

    if (hayUno) grafo[i][j]=1;
    else grafo[i][j] = 0;
   }
}
```

Lista de adyacencia (LA): Se utiliza un vector de tamaño n (un elemento por cada vértice) donde $LA[i]$ almacena la referencia a una lista de los vértices adyacentes a i. En una red esta lista almacenará también la longitud de la arista que va desde i al vértice adyacente.

6 Maxima