Travaux Dirigés 2 (2h)

Auto-correctif 1 : Recherchons un extremum à l'aide de la méthode de Newton.

Soit la fonction

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 6x$$

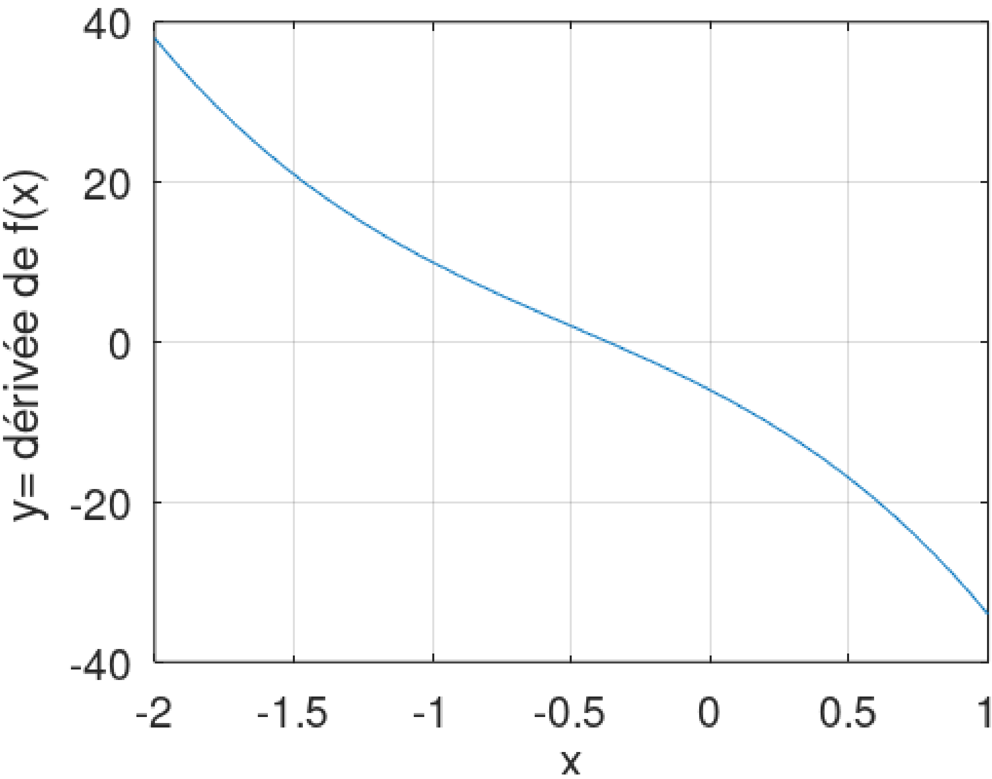
1. Utiliser une méthode analytique et une méthode graphique pour montrer que la fonction $f(x)$ admet un maximum en une valeur de x comprise entre -2 et 1.

   En dérivant la fonction f, il vient

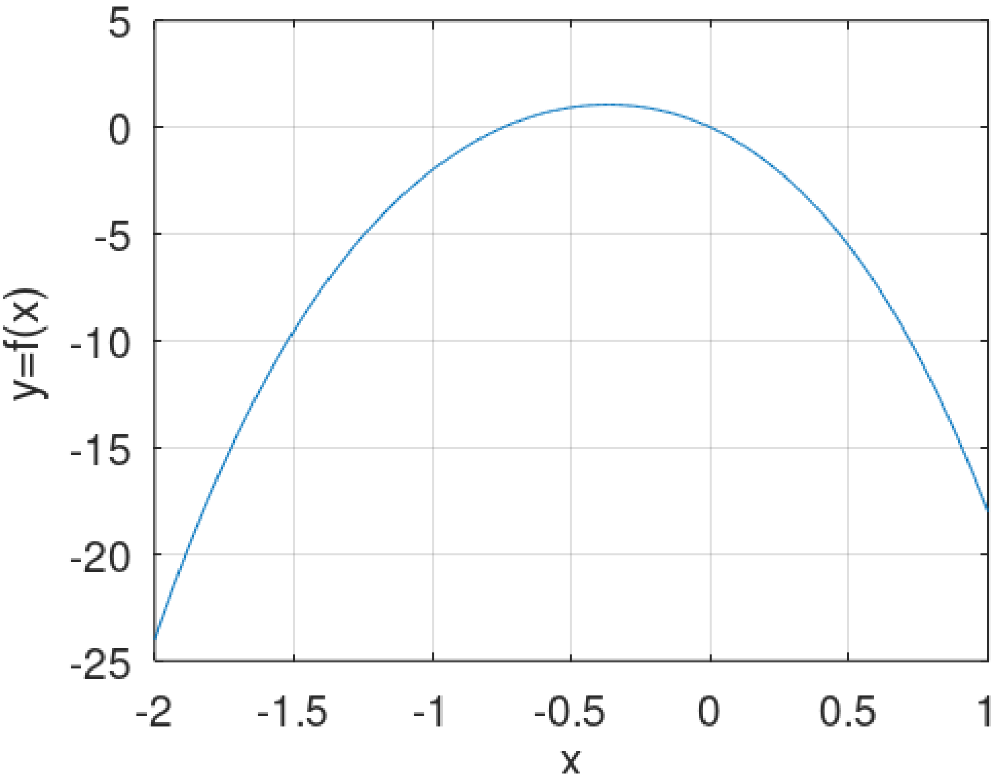
   $$f'(x) = -4x^3 - 6x^2 - 18x - 6$$

   $$f''(x) = -12x^2 - 12x - 18 = -12(x^2 + x + 1,5)$$

   Sur $[-2; 1]$, $f''(x)$ est strictement négative, donc $f'(x)$ est strictement décroissante ; comme $f'(-2)f'(1) < 0$, on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires que $f'(x)$ admet une racine sur cet intervalle. En traçant $f'(x)$ sur cet intervalle $[-2; 1]$, il vient le graphique suivant qui confirme cette analyse :



On conclu que $f(x)$ admet un extremum en une valeur de x de cet intervalle, qui est un maximum car $f''(x) < 0$ On donne aussi à titre illustratif la courbe de $f(x)$ sur $[-2;1]$, on observe bien le maximum :



2. Appliquer alors la méthode de Newton, que vous rappellerez, pour obtenir la position et la valeur du maximum. On utilisera la calculette et la touche ANS ou REP, et il sera utile de remplir un tableau. Prendre comme valeur initiale par exemple $x_0 = 0$.

   La méthode de Newton de recherche de la position d'extremum s'écrit selon la formule de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

   Donc, connaissant les deux premières dérivées calculées au 1, il vient :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-4x_n^3 - 6x_n^2 - 18x_n - 6}{-12x_n^2 - 12x_n - 18}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n^3 + 3x_n^2 + 9x_n + 3}{6x_n^2 + 6x_n + 9}$$

   A la calculette, on entre alors la valeur 0 et on valide ; puis on tape la formule suivante :

$$ANS - (2 * ANS^3 + 3 * ANS^2 + 9 * ANS + 3) \div (6 * ANS^2 + 6 * ANS + 9)$$

   Ce qui nous permet de remplir le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0	-0,3333333333	-0,3671497585	-0,3672899404	-0,3672899424	-0,3672899424

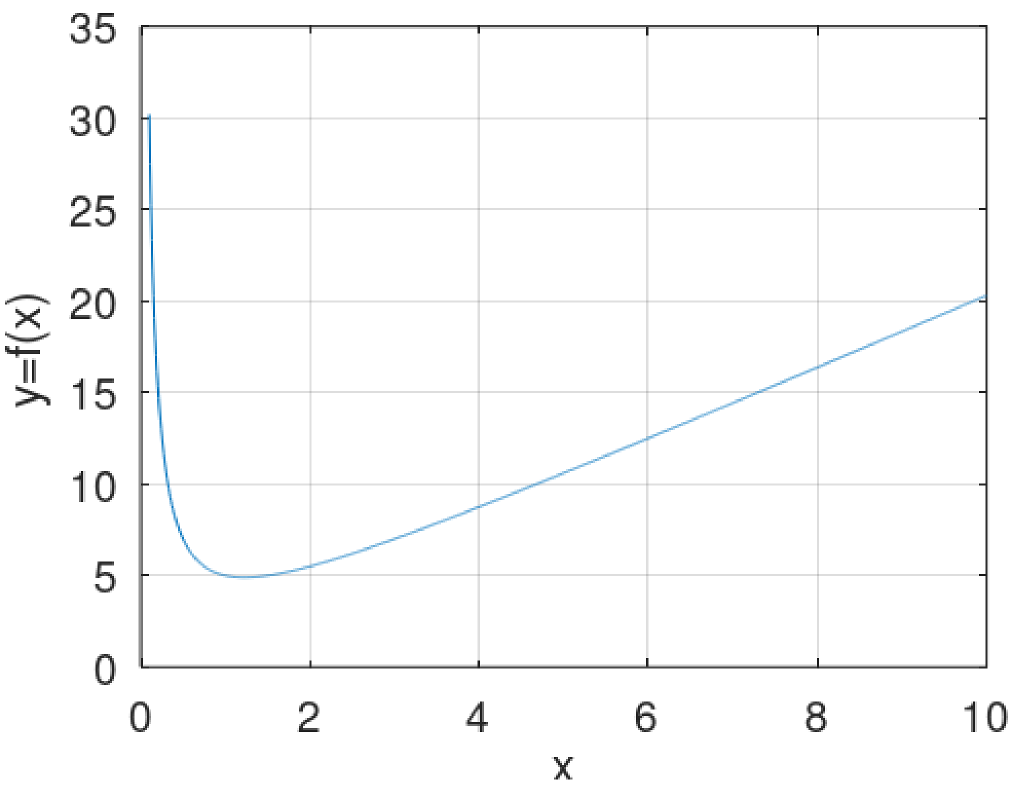
   On observe que 4 itérations ont suffi pour faire converger la méthode avec 10 décimales justes ! On en déduit que le maximum se situe en $x \simeq -0,3672899424$ et a pour valeur $f(-0,3672899424) \simeq 1,070520239$, ce qui est bien cohérent avec la représentation graphique.

Auto-correctif 2 : Recherchons un extremum à l'aide de la méthode d'interpolation parabolique.

Soit la fonction

$$f(x) = 2x + \frac{3}{x}$$

1. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $f(x)$ sur les valeurs réelles positives.
   A l'aide du traceur de courbe, il vient :



2. Réaliser 8 itérations de la méthode parabolique pour localiser le minimum. On partira de $x_0 = 0,1$, $x_1 = 0,5$ et $x_2 = 1$.
   On rappelle que la méthode d'interpolation parabolique s'écrit :

$$x_3 = \frac{f(x_0)(x_1^2 - x_2^2) + f(x_1)(x_2^2 - x_0^2) + f(x_2)(x_0^2 - x_1^2)}{2f(x_0)(x_1 - x_2) + 2f(x_1)(x_2 - x_0) + 2f(x_2)(x_0 - x_1)}$$

   puis la permutation proposée est :

$$x_0 \leftarrow x_{1precedent}$$

$$x_1 \leftarrow x_{2precedent}$$

$$x_2 \leftarrow x_{3precedent}$$

On obtient alors, après de nombreux calculs :
Étape 1 : $f(x_0) = f(0,1) = 30,2$, $f(x_1) = f(0,5) = 7$ et $f(x_2) = f(1) = 5$, donc :

$$x_{3;1} = \frac{30,2(0,5^2 - 1^2) + 7(1^2 - 0,1^2) + 5(0,1^2 - 0,5^2)}{2.30,2(0,5-1) + 2.7(1-0,1) + 2.5(0,1-0,5)} \simeq 0,783333333333$$

Autres étapes : On réalise les permutations à chaque étape, et on obtient :

$$x_{3;2} \simeq 1.011111111111111$$

$$x_{3;3} \simeq 1.133209876543068$$

$$x_{3;4} \simeq 1.164645762840989$$

$$x_{3;5} \simeq 1.209665910868315$$

$$x_{3;6} \simeq 1.221593224690340$$

$$x_{3;7} \simeq 1.224279127539980$$

$$x_{3;8} \simeq 1.224722010996627$$

3. Discuter de la convergence des résultats.

   On observe que la valeur se stabilise au fur et à mesure, pour 8 itérations il apparait que au moins 3 décimales sont justes.

4. Vérifier ce résultat par un calcul analytique.

   Il est évident ici que :

$$f'(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$$

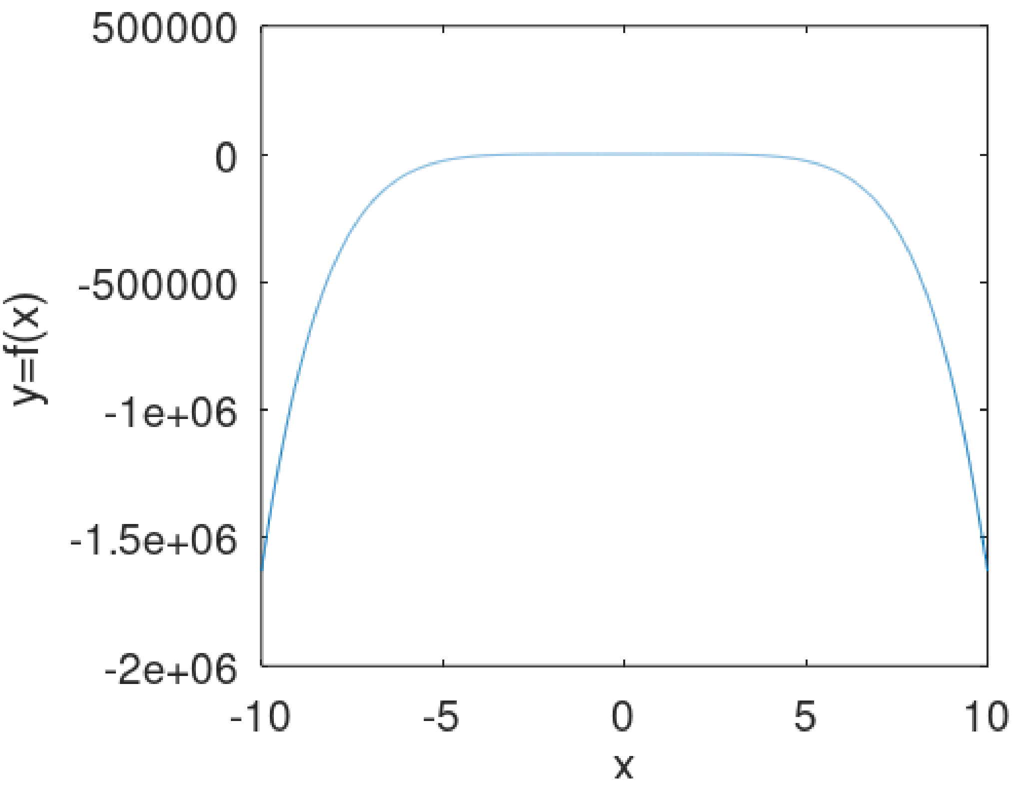
   donc $f'(x) = 0$ a pour solution évidente $x = \sqrt{1,5} \simeq 1,224744871$, donc on a bien obtenu 4 décimales justes avec 8 itérations, ce qui est moyennement performant comparé à d'autres méthodes, mais néanmoins confortable.

Exercice 1 : Recherchons un extremum à l'aide de la méthode de Newton.

Soit la fonction :

$$f(x) = -1,6x^6 - 3x^4 + 10x$$

dont l'allure est donnée ci-dessous :



1. Démontrer analytiquement que cette fonction est concave pour toutes valeurs de x. Que peut-on en déduire ?
2. Dériver cette fonction et appliquer la méthode de Newton pour trouver la position x du maximum de $f(x)$ et sa valeur. On utilisera la calculatrice et la touche ANS ou REP. Il peut être utile de remplir un tableau rassemblant les résultats obtenus. On partira de $x_0 = 1$.

Exercice 2 : Recherchons un extremum à l'aide de la méthode de Halley.

Soit la fonction :

$$f(x) = -1,6x^6 - 3x^4 + 10x$$

Nous allons obtenir la méthode de Halley afin d'obtenir un extremum de n'importe quelle fonction f et l'appliquer à notre présent exemple.

1. Rappeler la formule de récurrence de la méthode de Halley de recherche d'une racine.
2. En déduire la formule de récurrence pour obtenir la position x d'un extremum de $f(x)$.
3. Appliquer alors à notre exemple de fonction $f(x)$ en écrivant la formule de récurrence correspondante.
4. En utilisant la touche ANS ou REP de la calculatrice, en déduire la position x du maximum de $f(x)$ et sa valeur. Il peut être utile de remplir un tableau rassemblant les résultats obtenus. On partira aussi de $x_0 = 1$.

5. Comparer vos résultats par rapport à la méthode de Newton vue à l'exercice 1. Conclure (et donner quelques comparaisons, avantages/inconvénients).

Exercice 3 : Minimum d'une forme quadratique

On considère la fonction à deux variables suivante :

$$f(x) = f(u,v) = u^2 + \frac{3}{2}v^2 + uv - 7u - 16v$$

On rappelle l'algorithme du gradient conjugué :

$$|r_k >= A|x_k > -|b >$$

$$|p_{k+1} >= |r_k > - \sum_{i=1}^{i=k} \frac{< p_i|r_k >_A}{< p_i|p_i >_A} |p_i >$$

$$|x_{k+1} >= |x_k > + \frac{< p_{k+1}|b >}{< p_{k+1}|p_{k+1} >_A} |p_{k+1} >$$

On rappelle que l'on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$$

1. Écrire alors la matrice A et le vecteur b. Quelle est la dimension n ?
2. En combien d'étapes de l'algorithme du gradient conjugué doit-on trouver le minimum de la fonction f ?
3. Procéder à la première étape.
4. Procéder à le seconde étape.
5. Conclure. Préciser en particulier la solution recherchée.

Exercice 4 : Algorithme de Clenshaw.

On considère les polynômes de la base canonique $\varphi_k(x) = x^k$. On veut appliquer l'algorithme de Clenshaw à cette base de polynômes pour évaluer n'importe quelle valeur de la somme suivante :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k(x)$$

x et les coefficients c_k étant connus, en un minimum d'opérations.

1. Rappeler la formule de récurrence entre φ_{k+1}, φ_k et φ_{k-1}.
2. En déduire la valeur des coefficients $a_k(x)$ et $b_k(x)$.
3. Appliquer alors l'algorithme de Clenshaw (appelé dans ce cas précis algorithme de Hörner), cf. le cours ; on n'oubliera pas de détailler le calcul de la suite u_k.
4. Application : on veut calculer la valeur du polynôme suivant en $x = 2$:

$$P(x) = 3x^5 + 8x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 7$$

Faire d'abord un calcul direct de $P(2)$. Evaluer au passage le nombre de multiplications réalisées.

5. Appliquer maintenant l'algorithme de Hörner pour calculer $P(2)$. Evaluer aussi le nombre de multiplications.
6. Conclure.