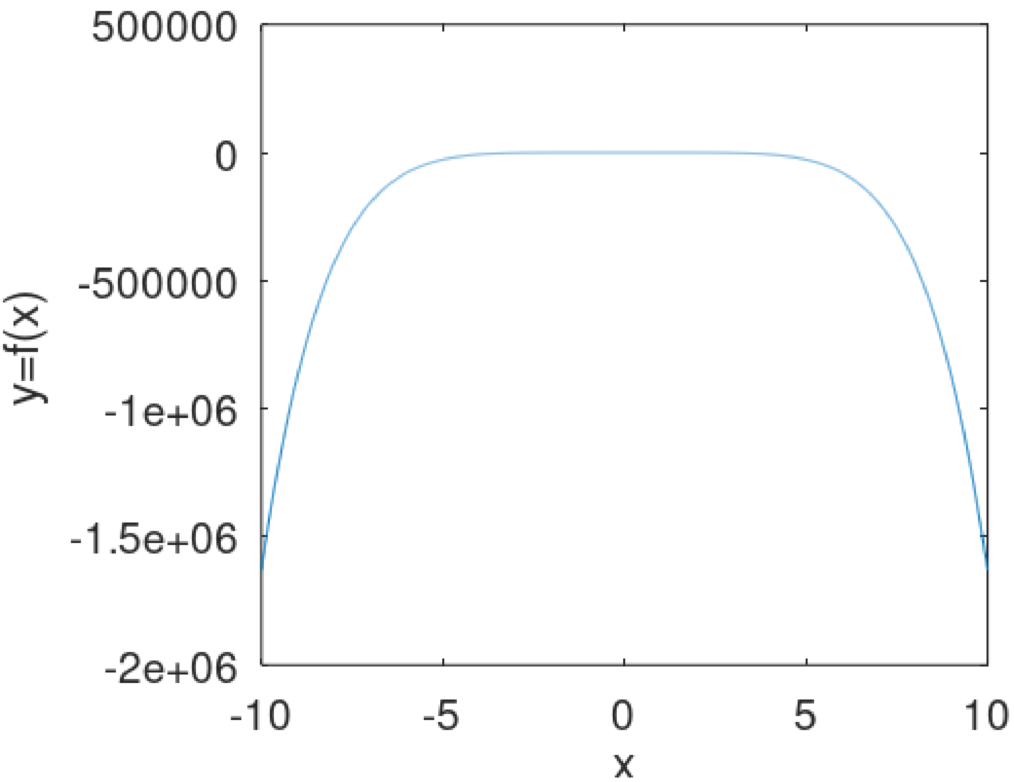
Travaux Dirigés 2 (2h) - CORRECTION

Exercice 1 : Recherchons un extremum à l'aide de la méthode de Newton.

Soit la fonction :

$$f(x) = -1,6x^6 - 3x^4 + 10x$$

dont l'allure est donnée ci-dessous :



1. Démontrer analytiquement que cette fonction est concave pour toutes valeurs de x. Que peut-on en déduire ?
   On calcule facilement :

$$f'(x) = -9,6x^5 - 12x^3 + 10$$

$$f''(x) = -48x^4 - 36x^2$$

Comme pour tout réel x, on a $f''(x) < 0$, on en déduit que la fonction $f(x)$ est bien concave sur l'ensemble des réels. On en déduit que $f(x)$ possède un extremum qui est un maximum global.

2. Dériver cette fonction et appliquer la méthode de Newton pour trouver la position x du maximum de $f(x)$ et sa valeur. On utilisera la calculatrice et la touche ANS ou REP. Il peut être utile de remplir un tableau rassemblant les résultats obtenus. On partira de $x_0 = 1$.

La méthode de Newton s'écrit sous la forme d'une suite définie par récurrence selon :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

qui va converger vers la position de l'extremum proche de $x_0 = 1$. Explicitons cette relation de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-9,6x_n^5 - 12x_n^3 + 10}{-48x_n^4 - 36x_n^2}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{9,6x_n^5 + 12x_n^3 - 10}{48x_n^4 + 36x_n^2}$$

On tape à la calculatrice la valeur 1 (x_0) puis on valide ; ensuite on tape à l'aide de la touche ANS ou REP (selon le modèle de calculatrice) :

$$ANS - (9,6 * ANS^5 + 12 * ANS^3 - 10) \div (48 * ANS^4 + 36 * ANS^2)$$

et à chaque fois que l'on tape sur la touche validation de la calculatrice, la valeur de x_n s'affiche. Ceci nous permet de remplir le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
x_n	1	0,8619047619	0,8196412369	0,8161720549	0,8161502321	0,8161502313

n	6	7	8
x_n	0,8161502313	0,8161502313	0,8161502313

On observe bien que la suite a convergé, donc une très bonne approximation de l'abscisse du maximum est donnée par $x \simeq 0,8161502313$ et la valeur du maximum est $f(0,8161502313) \simeq 6,357561119$. Cette valeur a été obtenue avec une précision de 10 décimales en seulement 5 itérations !

Exercice 2 : Recherchons un extremum à l'aide de la méthode de Halley.

Soit la fonction :

$$f(x) = -1,6x^6 - 3x^4 + 10x$$

Nous allons obtenir la méthode de Halley afin d'obtenir un extremum de n'importe quelle fonction f et l'appliquer à notre présent exemple.

1. Rappeler la formule de récurrence de la méthode de Halley de recherche d'une racine.
La méthode de Halley de recherche d'une racine d'une fonction $f(x)$ est une suite définie par récurrence selon :
$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}$$

2. En déduire la formule de récurrence pour obtenir la position x d'un extremum de $f(x)$.
Comme en un extremum de position x, on a $f'(x) = 0$, il suffit d'appliquer la recherche de racine de la méthode de Halley à la fonction $f'(x)$, d'où la nouvelle méthode de recherche d'extremum :
$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f'(x_n)f''(x_n)}{2f''^2(x_n) - f'(x_n)f'''(x_n)}$$
Il est visible que maintenant il faut la connaissance, en plus de celle de $f'(x)$ et $f''(x)$, aussi de $f'''(x)$!
3. Appliquer alors à notre exemple de fonction $f(x)$ en écrivant la formule de récurrence correspondante.
Comme on a :
$$\begin{aligned} f'(x) &= -9,6x^5 - 12x^3 + 10 \\ f''(x) &= -48x^4 - 36x^2 \\ f'''(x) &= -192x^3 - 72x \end{aligned}$$
On écrit maintenant la méthode de recherche d'extremum selon Halley :
$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(-9,6x_n^5 - 12x_n^3 + 10)(-48x_n^4 - 36x_n^2)}{2(-48x_n^4 - 36x_n^2)^2 - (-9,6x_n^5 - 12x_n^3 + 10)(-192x_n^3 - 72x_n)}$$
que l'on ne simplifie pas, mais qu'on utilisera tel quel, pour éviter les calculs trop longs (même si cela est possible et faisable...).
4. En utilisant la touche ANS ou REP de la calculatrice, en déduire la position x du maximum de $f(x)$ et sa valeur. Il peut être utile de remplir un tableau rassemblant les résultats obtenus. On partira aussi de $x_0 = 1$.
A l'aide de la calculatrice, saisir la valeur 1 (x_0) et valider, puis taper toujours à la calculatrice, sur une même ligne, à l'aide de la touche ANS ou REP (selon le modèle de calculatrice) :
$$ANS - (2(-9,6ANS^5 - 12ANS^3 + 10)(-48ANS^4 - 36ANS^2))$$
$$\div(2(-48ANS^4 - 36ANS^2)^2 - (-9,6ANS^5 - 12ANS^3 + 10)(-192ANS^3 - 72ANS))$$
Ceci nous permet de remplir le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
x_n	1	0,826124197	0,8162402239	0,8161510029	0,8161502379	0,8161502313

n	6	7	8
x_n	0,8161502313	0,8161502313	0,8161502313

On observe bien que la suite a convergé, donc une très bonne approximation de l'abscisse du maximum est donnée par $x \simeq 0,8161502313$ et la valeur du maximum est $f(0,8161502313) \simeq 6,357561119$. Cette valeur a été obtenue avec une précision de 10 décimales en seulement 5 itérations !

5. Comparer vos résultats par rapport à la méthode de Newton vue à l'exercice 1. Conclure (et donner quelques comparaisons, avantages/inconvénients).

   On a obtenu la même précision (10 décimales de justes) en le même nombre exactement d'itérations avec la méthode de Halley ou la méthode de Newton, alors que la méthode de Halley est ici beaucoup plus consommatrice de calculs ! Elle était donc inutile à priori, la méthode de Newton, moins consommatrice de calculs, est suffisante... Elle peut rendre cependant de bons services dans certains cas où la précision recherchée est supérieure (il existe des situation dans certains domaines où des valeurs doivent être connues avec 64 décimales justes...), donc elle reste valable à connaitre car elle peut s'avérer très précieuse dans ces cas là !

Exercice 3 : Minimum d'une forme quadratique

On considère la fonction à deux variables suivante :

$$f(x) = f(u,v) = u^2 + \frac{3}{2}v^2 + uv - 7u - 16v$$

On rappelle l'algorithme du gradient conjugué :

$$|r_k >= A|x_k > -|b >$$

$$|p_{k+1} >= |r_k > - \sum_{i=1}^{i=k} \frac{< p_i|r_k >_A}{< p_i|p_i >_A} |p_i >$$

$$|x_{k+1} >= |x_k > + \frac{< p_{k+1}|b >}{< p_{k+1}|p_{k+1} >_A} |p_{k+1} >$$

On rappelle que l'on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$$

1. Écrire alors la matrice A et le vecteur b. Quelle est la dimension n ?

   On obtient de suite que la dimension est $n = 2$ et que A et b valent :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

2. En combien d'étapes de l'algorithme du gradient conjugué doit-on trouver le minimum de la fonction f ?

   D'après le cours, l'algorithme du gradient conjugué converge en n étapes, donc ici en deux étapes.

3. Procéder à la première étape.

$|x_0>= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|r_0>= A|x_0> - |b>= -|b>= \begin{pmatrix} -7 \\ -16 \end{pmatrix}$

$|p_1>= |r_0>= \begin{pmatrix} -7 \\ -16 \end{pmatrix}$

$$|x_1>= |x_0> + \frac{<p_1|b>}{<p_1|p_1>_A}|p_1>$$

avec : $<p_1|b>= p_1^T b = (-7 - 16)\begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix} = -305$

$<p_1|p_1>_A = <p_1|Ap_1>= p_1^T Ap_1 = (-7 - 16)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -16 \end{pmatrix} = 1090$

$$|x_1>= |x_0> + \frac{<p_1|b>}{<p_1|p_1>_A}|p_1>$$

$$|x_1>= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{305}{1090}\begin{pmatrix} -7 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$|x_1>= \frac{61}{218}\begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

4. Procéder à le seconde étape.

$$|r_1>= A|x_1> - |b>= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{61}{218}\begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{218}\begin{pmatrix} 304 \\ -133 \end{pmatrix}$$

$$|p_2>= |r_1> - \frac{<p_1|r_1>_A}{<p_1|p_1>_A}|p_1>$$

avec : $<p_1|r_1>_A = p_1^T Ar_1 = -\frac{1805}{218}$ et on sait déjà que $<p_1|p_1>_A = 1090$ donc :

$$|p_2>= \frac{1}{218}\begin{pmatrix} 304 \\ -133 \end{pmatrix} - \frac{361}{47524}\begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$|p_2>= \frac{1}{218^2}\begin{pmatrix} 63745 \\ -34770 \end{pmatrix}$$

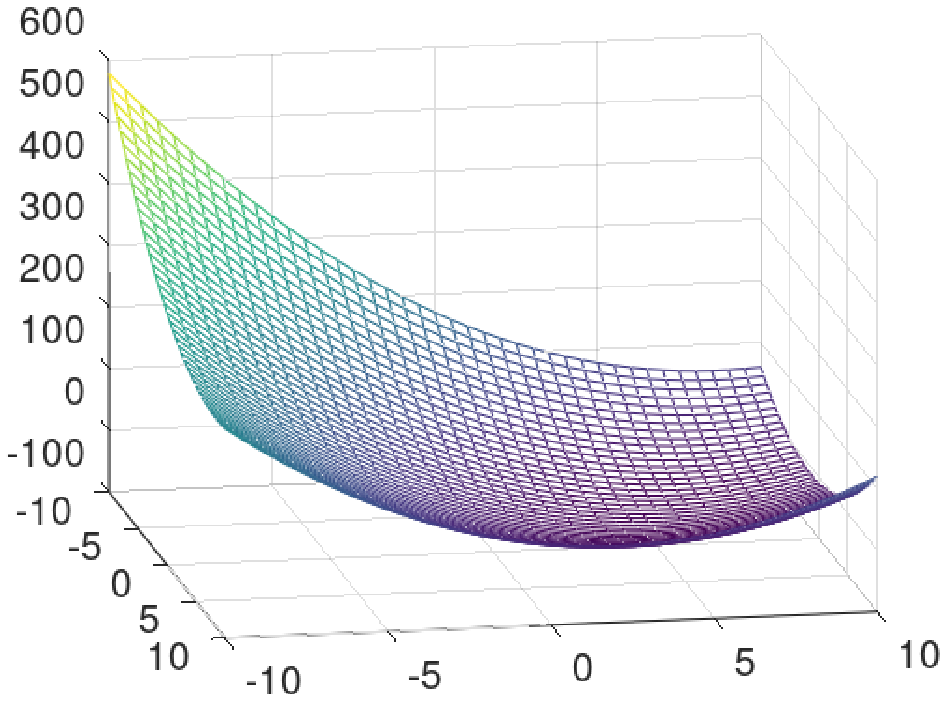
$$|x_2>= |x_1> + \frac{<p_2|b>}{<p_2|p_2>_A}|p_2>$$

Tous calculs faits (...) , on obtient :

$$|x_2>= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5. Conclure. Préciser en particulier la solution recherchée.

On constate que l'on a trouvé le minimum cherché car $(gradf)_{|x_2>} = A|x_2> - |b>= 0$. Le minimum cherché est donc situé en $x = (u; v) = (1; 5)$ et vaut $f(1; 5) = -43,5$



Exercice 4 : Algorithme de Clenshaw.

On considère les polynômes de la base canonique $\varphi_k(x) = x^k$. On veut appliquer l'algorithme de Clenshaw à cette base de polynômes pour évaluer n'importe quelle valeur de la somme suivante :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k(x)$$

x et les coefficients c_k étant connus, en un minimum d'opérations.

1. Rappeler la formule de récurrence entre φ_{k+1}, φ_k et φ_{k-1}.
   On a $\varphi_{k+1}(x) = x^{k+1} = x.x^k = x\varphi_k(x)$ donc :

$$\varphi_{k+1} - x\varphi_k = 0$$

   à comparer avec la relation :

$$\varphi_{k+1} + a_k\varphi_k + b_k\varphi_{k-1} = 0$$

2. En déduire la valeur des coefficients $a_k(x)$ et $b_k(x)$.
   On en déduit :

$$a_k(x) = -x$$

$$b_k(x) = 0$$

3. Appliquer alors l'algorithme de Clenshaw (appelé dans ce cas précis algorithme de Hörner), cf. le cours ; on n'oubliera pas de détailler le calcul de la suite u_k.
   Comme on définit la suite u_k par :
   $$u_{n+1} = u_{n+2} = 0$$
   $$u_k = c_k - a_k u_{k+1} - b_{k+1} u_{k+2}$$
   il vient alors :
   $$u_k = c_k + x u_{k+1}$$
   pour $k = n, ..., 1$ et en particulier $u_n = c_n$. On montre alors, cf cours, que :
   $$y(x) = u_0$$

4. Application : on veut calculer la valeur du polynôme suivant en $x = 2$:
   $$P(x) = 3x^5 + 8x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 7$$
   Faire d'abord un calcul direct de $P(2)$. Evaluer au passage le nombre de multiplications réalisées.
   Par calcul direct,
   $$P(2) = 195$$
   On a réalisé alors : $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ multiplications !

5. Appliquer maintenant l'algorithme de Hörner pour calculer $P(2)$. Evaluer aussi le nombre de multiplications.
   Par l'algorithme de Hörner, il vient tout d'abords : $c_5 = 3$, $c_4 = 8$, $c_3 = -5$, $c_2 = 2$, $c_1 = -2$, et $c_0 = 7$. On applique l'algorithme selon $(n = 5)$:
   $$u_5 = c_5 = 3$$
   $$u_4 = c_4 + x * u_5 = 8 + 2 * 3 = 14$$
   $$u_3 = c_3 + x * u_4 = -5 + 2 * 14 = 23$$
   $$u_2 = c_2 + x * u_3 = 2 + 2 * 23 = 48$$
   $$u_1 = c_1 + x * u_2 = -2 + 2 * 48 = 94$$
   $$u_0 = c_0 + x * u_1 = 7 + 2 * 94 = 195$$
   Dons on a obtenu :
   $$P(2) = u_0 = 195$$
   On remarque que le nombre de multiplications réalisées est maintenant seulement de 5 ! Soit trois fois moins sur cet exemple de polynôme de degré 5 !

6. Conclure.
   Les deux méthodes donnent bien entendu le même résultat, mais la méthode de Hörner est bien plus économe en termes de calculs réalisés. Sur les petits degrés de polynômes cela ne se ressent pas trop, mais cet algorithme est recommandé pour les polynômes de grand degré... !