TD Révisions Calcul Embarqué ING3 (2h)

Exercice 1 : Recherche de racines par Newton-Raphson

1. Rappeler la méthode de Newton-Raphson, sans la redémontrer.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2. Élaborer une suite qui permet d'obtenir la racine quatrième d'un réel positif r :

$$x = r^{\frac{1}{4}}$$

(bien définir une fonction $f(x)$ correspondante).
On pose :

$$f(x) = x^4 - r$$

Alors, on aura : $f(r^{\frac{1}{4}}) = 0$. Il suffit d'appliquer la méthode de Newton-Raphson à $f(x)$ ainsi définie. On a $f'(x) = 4x^3$, donc il suffit de définir la suite par récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - r}{4x_n^3} = \frac{3}{4}x_n + \frac{r}{4x_n^3}$$

3. Appliquer à $r = 16$. Vérifier votre calcul (il faut utiliser la calculatrice).
Pour $r = 16$, il vient :

$$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{4}{x_n^3}$$

On utilise la touche ANS de la calculette, en commençant avec la valeur 10 par exemple :

$$3 * ANS/4 + 4/ANS^3$$

et on valide avec la touche ENTER jusqu'à ce que la valeur se stabilise : on trouve la valeur 2.00000000000. Ceci est bien logique car $16^{\frac{1}{4}} = 2$

4. Chercher à l'aide de la méthode de Newton-Raphson une racine de la fonction :

$$f(x) = x^2 - cos(x)$$

$$f'(x) = 2x + sin(x)$$

La suite de Newton-Raphson est définie selon :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - cos(x_n)}{2x_n + sin(x_n)}$$

On tape la valeur 10 par exemple sur la calculette et on valide, puis avec la touche ANS :

$$ANS - (ANS^2 - cos(ANS)) \div (2 * ANS + sin(ANS))$$

et on valide avec ENTER jusqu'à ce que la valeur converge à la calculette. On obtient alors :

$$x = 0,8241323123$$

Attention à avoir bien placé la calculette en mode RADIAN ! On vérifie que

$$f(0,8241323123) \simeq 0$$

Exercice 2 : Recherche de racines par Halley

1. Rappeler la méthode de Halley.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}$$

2. La démontrer.
   cf TD1, exercice 3.
3. Élaborer une suite qui permet d'obtenir la racine cinqième d'un réel positif r :

$$x = r^{\frac{1}{5}}$$

(bien définir une fonction $f(x)$ correspondante).
On pose :

$$f(x) = x^5 - r$$

et il suffit de chercher une racine de $f(x)$ car $f(r^{\frac{1}{5}}) = 0$

$$f'(x) = 5x^4$$

$$f''(x) = 20x^3$$

D'où la méthode de Halley nous donne la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^5 - r)5x_n^4}{50x_n^8 - (x_n^5 - r)20x_n^3}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{5x_n^9 - 5rx_n^4}{30x_n^8 + 20rx_n^3}$$

4. Appliquer à $r = 7$. Vérifier votre calcul (il faut utiliser la calculatrice).
Pour $r = 7$, il vient :
$$x_{n+1} = x_n - \frac{5x_n^9 - 35x_n^4}{30x_n^8 + 140x_n^3}$$
On tape 10 à la calculette, on valide, puis on saisit la formule en fonction de la touche ANS suivante :
$$ANS - (5ANS^9 - 35ANS^4) \div (30ANS^8 + 140ANS^3)$$
On valide un certain nombre de fois, et il y a convergence vers la valeur : $1,475773162$, qui est la solution recherchée ! On vérifie que :
$$1,475773162^5 = 7$$

5. Chercher à l'aide de la méthode de Halley une racine de la fonction :
$$f(x) = x^3 - 5cos(x)$$
On a :
$$f(x) = x^3 - 5cos(x)$$
$$f('x) = 3x^2 + 5sin(x)$$
$$f''(x) = 6x - 5sin(x)$$
On applique la méthode de Halley :
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}$$
Après calculs, et utilisation de la touche ANS à la calculette ; on trouve, en partant de $x_0 = 10$:
$$x \simeq 1,209287099$$
et on vérifie que l'on a bien :
$$f(1,209287099) \simeq 0$$

<u>Exercice 3</u> : Recherche de racines par Laguerre

On rappelle la formule de Laguerre :
$$x_{k+1} = x_k - \frac{nf(x_k)}{f'(x_k) + signe(f'(x_k))\sqrt{(\frac{n-p}{p})((n-1)f'^2(x_k) - nf(x_k)f''(x_k))}}$$
p : ordre de la racine ; n : degré du polynôme. Cette méthode est d'ordre 3 pour une racine simple, et d'ordre 1 pour une racine multiple.

1. La fonction :
$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5$$
possède une racine simple et une racine double. Les trouver à l'aide de la méthode de Laguerre.
$f(x)$ est un polynôme de degré 3, donc $n = 3$, et il y a une racine d'ordre 1 (simple) $(p = 1)$ et une autre racine d'ordre 2 $(p = 2)$. On a aussi :
$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 11$$
$$f''(x) = 6x - 14$$
Pour trouver la racine d'ordre 2, on écrit la suite de Laguerre :
$$x_{k+1} = x_k - \frac{3f(x_k)}{f'(x_k) + signe(f'(x_k))\sqrt{(\frac{3-2}{2})((3-1)f'^2(x_k) - 3f(x_k)f''(x_k))}}$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{3f(x_k)}{f'(x_k) + signe(f'(x_k))\sqrt{f'^2(x_k) - \frac{3}{2}f(x_k)f''(x_k)}}$$
On programme à la calculette par exemple les fonctions f, f' et f'' et on utilise cette relation de récurrence, avec la touche ANS sur la calculette. On part de $x_0 = 0$ et la méthode de Laguerre converge alors vers (la fonction signe est omise, son rôle est optionnel et ne sert que à accélérer la convergence) : $x = 5$. Comme on a trouvé $x = 5$ comme racine, il peut être utile de diviser le polynôme $f(x)$ par $(x-5)$ et on trouve de suite $f(x) = (x-5)(x-1)^2$ donc la seconde racine est 1, double. Aussi, la méthode de Laguerre a trouvé une racine simple, 5, alors qu'on la supposait double... Cela est du au fait que j'ai négligé le $signe(f'(x_k))$, c'est plus rapide mais moins fiable sur l'ordre des racines, et aussi parce que Laguerre n'est pas partie du bon x_0 et si une racine se présente il la détecte même si l'ordre n'est pas le bon, ce qui est très performant !
2. Calculer l'efficacité de cette méthode dans la recherche de chacune de ces deux racines.
$E = m^{\frac{1}{\theta}}$: laisser les élèves évaluer cela si le temps est suffisant car c'est assez rébarbatif ici...
3. Conclure.
Laguerre est très maniable et efficace sur les polynômes.

Exercice 4 : Recherche d'extremum

1. Rappeler la méthode de Newton-Raphson de recherche d'extremum.
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

2. Appliquer à :

$$f(x) = x^2 + 4cos(x)$$

entre -1 et 4.

$$f'(x) = 2x - 4sin(x)$$

$$f''(x) = 2 - 4cos(x)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n - 4sin(x_n)}{2 - 4cos(x_n)}$$

On part de $x_0 = 4$ et on applique :

$$ANS - (2ANS - 4sin(ANS)) \div (2 - 4cos(ANS))$$

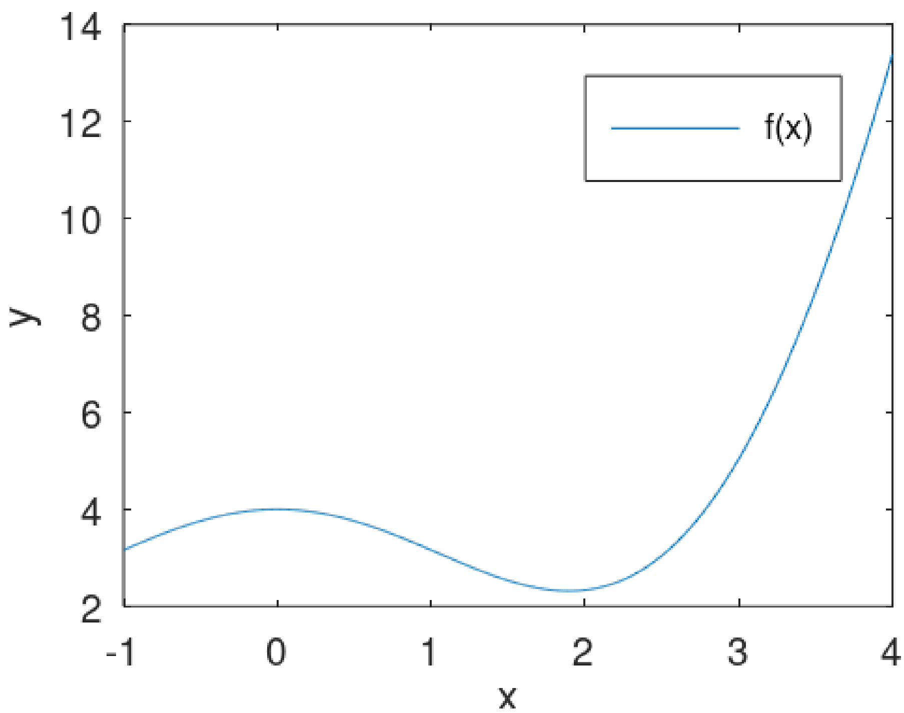
Ce processus converge vers $\alpha_1 = 1,895494267$. On observe aussi immédiatement que $\alpha_2 = 0$ est solution de ce processus !

3. Quel est le maximum ? Le minimum ? (préciser leurs positions et valeurs, justifier)

$$f''(\alpha_1) \simeq 3,276.. > 0$$

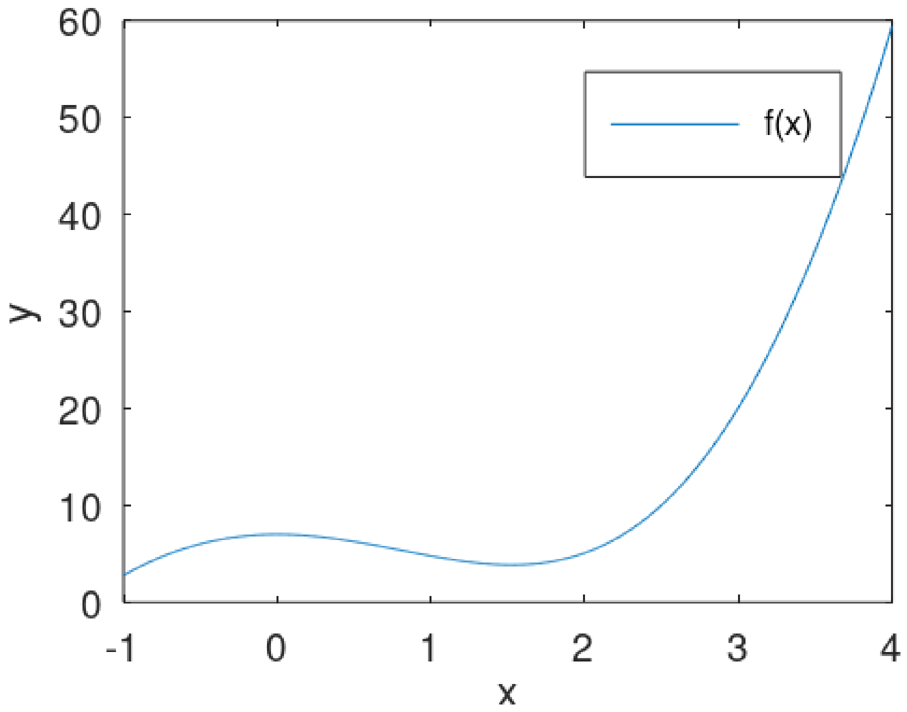
$$f''(\alpha_2) = -2 < 0$$

Donc, en $x = \alpha_1$ se situe un minimum de valeur $f(\alpha_1) \simeq 2,3168...$ et en $x = \alpha_2$ se situe un maximum de valeur $f(\alpha_2) = 4$



4. Même travail si $f(x) = x^3 + 7cos(x)$ entre -1 et 3.

Même travail... avec une petite indication :



Exercice 5 : Recherche d'un minimum par la méthode du gradient conjugué

Appliquer la méthode du gradient conjugué pour trouver le minimum de la fonction :

$$f(u, v) = u^2 + u.v + \frac{1}{2}v^2 - 3u - 2v$$

La solution est $(u, v) = (1, 1)$

Exercice 6 : Méthodes de Euler et de Runge-Kutta 2

1. Soit l'équation différentielle :

$$y' + 5y = 0$$

   avec $y(0) = 1$ Résoudre analytiquement cette équation.
   Il est évident que :

$$y(x) = y(0)exp(-5x) = exp(-5x)$$

2. Donner un algorithme pour résoudre par Euler cette équation.
   L'algorithme de Euler est ci-dessous :

Algorithm 1: méthode d'Euler

Data: h, x_0, y_0, x_{max}

Initialiser x à x_0 et y à y_0

while $x < x_{max}$ **do**

  $f = f(x, y)$

  $y = y + hf$

  $x = x + h$

  afficher le point solution (x, y)

end

Donc, il suffit de l'appliquer en prenant pour la fonction f : $f(x, y(x)) = -5y$:

3. Prendre $x_0 = 0$ et un pas $h = 0,01$ puis calculer les trois premiers points y_1, y_2 et y_3 par cette méthode de Euler. Comparer aux valeurs exactes et conclure.

x	0	$0,01$	$0,02$	$0,03$
y_{euler}	1	0,95	0,9025	0,857375
y_{exact}	1	0,9512294245	0,904837418	0,8607079764

On en conclue que cette méthode est pour ce pas assez précise déjà.

4. Donner un algorithme pour résoudre par RK2 (de votre choix) cette équation.

On choisit $\beta = 1$, et donc la relation de récurrence est :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n))$$

5. Prendre $x_0 = 0$ et un pas $h = 0,01$ puis calculer les trois premiers points y_1, y_2 et y_3 par cette méthode de RK2. Comparer aux valeurs exactes et conclure.

$h = 0,01$ donc $x_n = 0,01n$ et :

$$y_{n+1} = y_n + 0,01f(0,01n + 0,005, y_n + 0,005f(0,01n, y_n))$$

et comme $f = -5y$:

$$y_{n+1} = y_n + 0,01f(0,01n + 0,005, y_n + 0,005 * -5 * y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + 0,01f(0,01n + 0,005; 0,975y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + 0,01 * -5 * 0,975y_n$$

$$y_{n+1} = y_n - 0,04875y_n$$

$$y_{n+1} = 0,95125y_n$$

x	0	$0,01$	$0,02$	$0,03$
y_{RK2}	1	0,95125	0,9048765625	0,8607638301
y_{exact}	1	0,9512294245	0,904837418	0,8607079764

On en conclue que cette méthode est plus précise que Euler !

6. Que faudrait-il faire pour améliorer la précision (si cela est nécessaire) ?

On pourrait diminuer la valeur de h ou utiliser RK4 par exemple.