TD Révisions Calcul Embarqué ING3 (2h)

Exercice 1 : Recherche de racines par Newton-Raphson

1. Rappeler la méthode de Newton-Raphson, sans la redémontrer.
2. Élaborer une suite qui permet d'obtenir la racine quatrième d'un réel positif r :

$$x = r^{\frac{1}{4}}$$

(bien définir une fonction $f(x)$ correspondante).

3. Appliquer à $r = 16$. Vérifier votre calcul (il faut utiliser la calculatrice).
4. Chercher à l'aide de la méthode de Newton-Raphson une racine de la fonction :

$$f(x) = x^2 - cos(x)$$

Exercice 2 : Recherche de racines par Halley

1. Rappeler la méthode de Halley.
2. La démontrer.
3. Élaborer une suite qui permet d'obtenir la racine cinqième d'un réel positif r :

$$x = r^{\frac{1}{5}}$$

(bien définir une fonction $f(x)$ correspondante).

4. Appliquer à $r = 7$. Vérifier votre calcul (il faut utiliser la calculatrice).
5. Chercher à l'aide de la méthode de Halley une racine de la fonction :

$$f(x) = x^3 - 5cos(x)$$

Exercice 3 : Recherche de racines par Laguerre

On rappelle la formule de Laguerre :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{nf(x_k)}{f'(x_k) + signe(f'(x_k))\sqrt{(\frac{n-p}{p})((n-1)f'^2(x_k) - nf(x_k)f''(x_k))}}$$

p : ordre de la racine ; n : degré du polynôme. Cette méthode est d'ordre 3 pour une racine simple, et d'ordre 1 pour une racine multiple.

1. La fonction :
$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5$$
possède une racine simple et une racine double. Les trouver à l'aide de la méthode de Laguerre.
2. Calculer l'efficacité de cette méthode dans la recherche de chacune de ces deux racines.
3. Conclure.

Exercice 4 : Recherche d'extremum

1. Rappeler la méthode de Newton-Raphson de recherche d'extremum.
2. Appliquer à :
$$f(x) = x^2 + 4cos(x)$$
entre -1 et 4.
3. Quel est le maximum ? Le minimum ? (préciser leurs positions et valeurs, justifier)
4. Même travail si $f(x) = x^3 + 7cos(x)$ entre -1 et 3.

Exercice 5 : Recherche d'un minimum par la méthode du gradient conjugué

Appliquer la méthode du gradient conjugué pour trouver le minimum de la fonction :

$$f(u, v) = u^2 + u.v + \frac{1}{2}v^2 - 3u - 2v$$

Exercice 6 : Méthodes de Euler et de Runge-Kutta 2

1. Soit l'équation différentielle :
$$y' + 5y = 0$$
avec $y(0) = 1$ Résoudre analytiquement cette équation.
2. Donner un algorithme pour résoudre par Euler cette équation.
3. Prendre $x_0 = 0$ et un pas $h = 0,01$ puis calculer les trois premiers points y_1, y_2 et y_3 par cette méthode de Euler. Comparer aux valeurs exactes et conclure.
4. Donner un algorithme pour résoudre par RK2 (de votre choix) cette équation.
5. Prendre $x_0 = 0$ et un pas $h = 0,01$ puis calculer les trois premiers points y_1, y_2 et y_3 par cette méthode de RK2. Comparer aux valeurs exactes et conclure.
6. Que faudrait-il faire pour améliorer la précision (si cela est nécessaire) ?