Travaux Pratiques 2 (2h)

Application 1 : Recherchons un extremum

Soit la fonction dont on cherche les extrema :

$$f(x) = 2x + \frac{3}{x}$$

1. Commencer par appliquer une méthode de dichotomie pour cerner un intervalle initial $[a, b]$ que l'on précisera, où se situe l'extremum.
   On calcule tout d'abord :
   $$f'(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$$
   On constate que l'extremum peut être localisé analytiquement en $\sqrt{\frac{3}{2}} \simeq 1,224744871...$ mais on va "jouer le jeu" et utiliser les méthodes proposées... Aussi, rapidement par dichotomie, on peut choisir comme intervalle d'étude $[1; 2]$.
2. Appliquer ensuite une méthode de Newton-Raphson pour déterminer l'extremum.
   On applique la méthode de Newton-Raphson en partant de $x_0 = 1,5$:
   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$
   avec
   $$f'(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$$
   et
   $$f''(x) = \frac{6}{x^3}$$
   donc la suite par récurrence qui converge vers l'extremum est définie selon NEwton-Raphson par :
   $$x_{n+1} = x_n - \frac{2 - \frac{3}{x_n^2}}{\frac{6}{x_n^3}}$$
   $$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{6}(2x_n^3 - 3x_n)$$
   On tape la valeur $1,5$ à la calculette puis on valide par ENTER, et ensuite on tape à l'aide de la touche ANS ou REP :
   $$ANS - (2 * ANS^3 - 3 * ANS) \div 6$$
   et on tape sur la touche ENTER jusqu'à ce que la valeur se stabilise à l'affichage de la calculatrice :

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	1,5	1,125	1,212890625	1,224573322	1,224744835	1,224744871	1,224744871

On peut donc constater que la méthode converge bien vers la solution $1,224744871$...

3. Est-ce un maximum ou un minimum ? Global ou local ?
   C'est un minimum car $f''(1,224744871) > 0$. Il est global sur $x > 0$ car quel que soit $x_0 > 0$ on obtient la même valeur !

Application 2 : Trajectoire d'une balle

La trajectoire d'une balle peut être calculée selon l'équation :

$$y = (tan\theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2cos^2\theta_0}x^2 + y_0$$

où y est la hauteur, θ_0 l'angle initial, v_0 la vitesse initiale et g l'intensité de la pesanteur.
Déterminer la hauteur maximale atteinte.
Données : $g = 9,81$ SI, y_0=2 m, v_0=24 m/s, θ_0=52 degrés.

On pose :

$$f(x) = (tan\theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2cos^2\theta_0}x^2 + y_0$$

donc, avec les valeurs numériques, cela fournit :

$$f(x) = 1,2799x - 0,0225x^2 + 2$$

On applique rapidement la méthode de Newton-Raphson :

$$f'(x) = 1,2799 - 0,045x$$

$$f''(x) = -0,0450$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1,2799 - 0,0450x_n}{-0,0450}$$

A la calculatrice : en partant de 10

$$ANS + (1,2799 - 0,0450 * ANS) \div 0,0450$$

Cette méthode converge rapidement vers : $x \simeq 28,44$ environ, cela correspond à une hauteur maximale $f(28,44) \simeq 20,20$ m. A comparer à la valeur exacte théorique $20,23$!

Application 3 : Recherchons un extremum à l'aide de la méthode d'interpolation parabolique (calculs à réaliser à l'aide de l'Arduino DUE).

Soit la fonction :

$$f(x) = -1,6x^6 - 3x^4 + 10x$$

On rappelle la formule d'interpolation parabolique :

$$x_3 = \frac{f(x_0)(x_1^2 - x_2^2) + f(x_1)(x_2^2 - x_0^2) + f(x_2)(x_0^2 - x_1^2)}{2f(x_0)(x_1 - x_2) + 2f(x_1)(x_2 - x_0) + 2f(x_2)(x_0 - x_1)}$$

puis la permutation proposée :

$$x_0 \leftarrow x_{1precedent}$$

$$x_1 \leftarrow x_{2precedent}$$

$$x_2 \leftarrow x_{3precedent}$$

1. Rechercher la position x de l'extremum de $f(x)$ et sa valeur à l'aide de la méthode d'interpolation parabolique. On partira de $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ et on réalisera trois itérations minimum. Il peut être utile de remplir un tableau rassemblant les résultats obtenus.

   Voici le résultat obtenu en fin d'itérations maximales :

   ```
   0.8186855471756194546
   0.8161502378615253405
   0.8161502523310225853
   0.8161501499034867990
   0.7963800904977374806
   0.8161502365689916160
   0.8161502149299712627
   0.8161501580845788694
   ```

   On peut considérer que la précision maximale avec cette méthode est de 5 décimales environ et la solution est $x \simeq 0,81615$.

   Le code est téléchargeable sur le site de l'école ECE : parabolic.ino (fichier fourni aux correcteurs)

2. Comparer vos résultats par rapport à une méthode de Newton. Conclure (et donner quelques comparaisons, avantages/inconvénients).

   Par la méthode de Newton, on obtient :

   ```
   x=1.000000000000000
   x=0.861904761904762
   x=0.819641236857515
   x=0.816172054860548
   x=0.816150232136639
   x=0.816150231278625
   nombre d iterations = 6
   ```

   Le code est téléchargeable sur le site de l'école ECE : nr.ino (fichier fourni aux correcteurs)

   On peut considérer que la solution est $x \simeq 0,816150231278625$ On vérifie bien que $f'(0,816150231278625) \simeq 0$!

   On constate que l'approximation fournie par la méthode de l'interpolation parabolique est moyenne, mais fiable à 5 décimales environ ici. L'interpolation parabolique a l'avantage de ne demande la connaissance d'aucune dérivée ! Son inconvénient majeur est le manque de grande précision... !

Application 4 : Algorithme du gradient conjugué (calculs à réaliser à l'aide de l'Arduino DUE).

Soit la fonction :

$$f(x) = f(u,v) = u^2 + \frac{3}{2}v^2 + uv - 7u - 16v$$

On rappelle l'algorithme du gradient conjugué :

$$|r_k >= A|x_k > -|b >$$

$$|p_{k+1} >= |r_k > - \sum_{i=1}^{i=k} \frac{< p_i|r_k >_A}{< p_i|p_i >_A} |p_i >$$

$$|x_{k+1} >= |x_k > + \frac{< p_{k+1}|b >}{< p_{k+1}|p_{k+1} >_A} |p_{k+1} >$$

On rappelle que l'on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$$

1. Donner la dimension n et la matrice A et le vecteur b.
   $n = 2$ et :
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$
2. Écrire un algorithme puis un code pour Arduino DUE qui implémente la méthode du gradient conjugué
   Voir le code gradientconj2.ino fourni au correcteur.
3. L'appliquer alors à la fonction f vue ci-dessus, et en déduire son minimum.
   On obtient la position du minimum : $x = (1; 5)$.
4. Même travail si maintenant $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   Voir le code gradientconj3.ino fourni au correcteur.
   On obtient la solution suivante : le minimum se situe en $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{7})$.
5. Écrire la fonction à 3 variables a, b, c correspondante, et donner alors son minimum.
   On sait que :
   $$f(x) = f(a,b,c) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$$
   Après calculs, il vient :
   $$f(a,b,c) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{2}b^2 + \frac{7}{2}c^2 - ab - a - b - 2c$$
   Le minimum vaut :
   $$f(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{7}) \simeq -1,2857...$$