ING3

Semestre 6

LIVRET D’EXERCICES CORRIGÉS

CALCUL EMBARQUÉ

Département d’Électronique
ECE École d’Ingénieurs – Engineering School

Table des matières

Méthodes de calcul numérique

SEMAINE 1

SEMAINE 2

SEMAINE 3

TD 1 : Racines d'équations

I. Applications directes

Exercice 1.1 : Méthode de dichotomie

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 8$$

On cherche à trouver une racine de cette équation à l'aide de la méthode de dichotomie.

AD1.1. Trouver une valeur approchée de la racine de cette équation par dichotomie en 5 itérations.

On prendra comme intervalle initial $[0\,;4]$.

1ère itération : dans l'intervalle $[\mathbf{0}\,;\mathbf{4}]$

$$f(a=0) = -0^3 + 2 \cdot\ 0^2 + 8 = 8$$

$$f(b=4) = -4^3 + 2 \cdot\ 4^2 + 8 = -24$$

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$$

$$f(m) = -2^3 + 2 \cdot 2^2 + 8 = 8$$

Le point milieu est du même signe que celui de la 1ère borne, donc la racine est dans l'intervalle $[m, b]$. Le nouveau a vaut donc $\frac{a+b}{2} = 2$

2nde itération : dans l'intervalle $[\mathbf{2}\,;\mathbf{4}]$

$$f(a=2) = 8$$

$$f(b=4) = -24$$

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$f(m) = -3^3 + 2 \cdot 3^2 + 8 = -1$$

Le point milieu est du même signe que celui de la 2nde borne, donc la racine est dans l'intervalle $[a, m]$. Le nouveau b vaut donc $\frac{a+b}{2} = 3$

3$^{\text{ème}}$ itération : dans l'intervalle $[\mathbf{2}\,;\mathbf{3}]$

$$f(a=2)=8$$

$$f(b=3)=-1$$

$$m=\frac{a+b}{2}=\frac{8-1}{2}=2{,}5$$

$$f(m)=-2{,}5^3+2\cdot 2{,}5^2+8=4{,}875$$

Le point milieu est du même signe que celui de la 1$^{\text{ère}}$ borne, donc la racine est dans l'intervalle $[a,m]$. Le nouveau a vaut donc $\frac{a+b}{2}=3{,}5$

4$^{\text{ème}}$ itération : dans l'intervalle $[\mathbf{2},\mathbf{5}\,;\mathbf{3}]$

$$f(a=2{,}5)=4{,}875$$

$$f(b=3)=-1$$

$$m=\frac{a+b}{2}=\frac{2{,}5+3}{2}=2{,}75$$

$$f(m)=-2{,}75^3+2\cdot 2{,}75^2+8=2{,}328$$

Le point milieu est du même signe que celui de la 1$^{\text{ère}}$ borne, donc la racine est dans l'intervalle $[a,m]$. Le nouveau a vaut donc $\frac{a+b}{2}=2{,}75$

5$^{\text{ème}}$ itération : dans l'intervalle $[\mathbf{2},\mathbf{75}\,;\mathbf{3}]$

$$f(a=2{,}75)=2{,}328$$

$$f(b=3)=-1$$

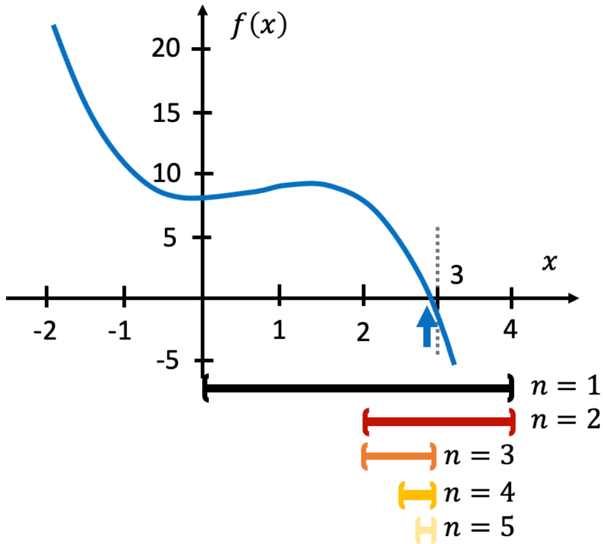
$$m=\frac{a+b}{2}=\frac{2{,}75+3}{2}=2{,}875$$

$$f(m)=-2{,}875^3+2\cdot 2{,}875^2+8=0{,}7676$$

Le point milieu est du même signe que celui de la 1$^{\text{ère}}$ borne, donc la racine est dans l'intervalle $[a,m]$. Le nouveau a vaut donc $\frac{a+b}{2}=2{,}875$

Conclusion en 5 itérations : la racine est comprise entre 2,875 et 3.

AD1.2. Illustrer la résolution par dichotomie à l'aide d'un graphique en 5 itérations.



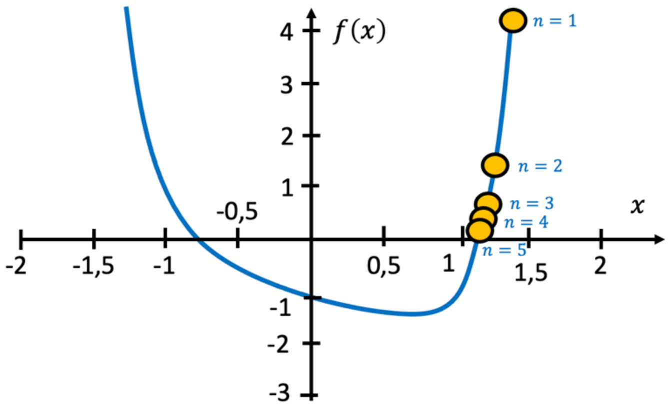
Exercice 1.2 : Méthode de Newton-Raphson

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

On cherche à déterminer la racine $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[1 ; 2]$.

AD1.3. Tracer la représentation graphique de la fonction $f(x)$.



AD1.4. Appliquer la méthode de Newton-Raphson

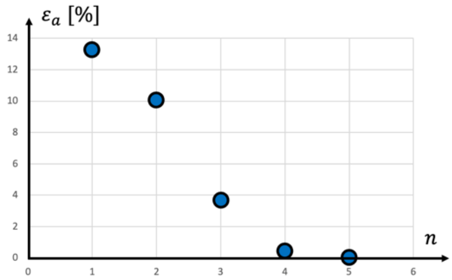
- Sur 5 itérations, avec 5 chiffres significatifs ;
- Avec comme valeur de départ $x_0 = 1{,}5$;
- Calculer à chaque itération l'erreur relative.

La dérivée de $f(x) = x^6 - x - 1$ est :

$$f'(x) = 6x^5 - 1$$

n	x_n	ε_a
0	**1,5**	
1	$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1{,}5 - \frac{8{,}89063}{44{,}5625} = \mathbf{1,30049}$	$\varepsilon_1 = \left\lvert \frac{1{,}5 - 1{,}3004}{1{,}5} \right\rvert = \mathbf{13,3\ \%}$
2	$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}30049 - \frac{2{,}53726}{21{,}31967} = \mathbf{1,18148}$	$\mathbf{10,07\ \%}$
3	$\mathbf{1,139\ 46}$	$\mathbf{3,69\ \%}$
4	$\mathbf{1,134\ 78}$	$\mathbf{0,41\ \%}$
5	$\mathbf{1,134\ 72}$	$\mathbf{0,004\ 92\ \%}$

AD1.5. Représenter les racines sur le graphique de la question **AD1.1** et tracer l'erreur absolue en fonction du n° d'itération.



Exercice 1.3 : Méthode de Newton-Raphson

Soit la fonction suivante :

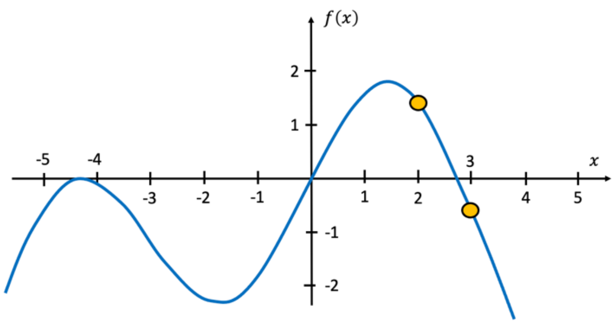
$$f(x) = 2\,sin(x) - \frac{x^2}{10}$$

où x est un angle en radian.

On cherche à déterminer la racine $f(x) = 0$ dans l'intervalle [2 ; 3].

AD1.6. Justifier l'existence d'une racine dans l'intervalle [2 ; 3].

La représentation graphique de la fonction $f(x)$ est la suivante :

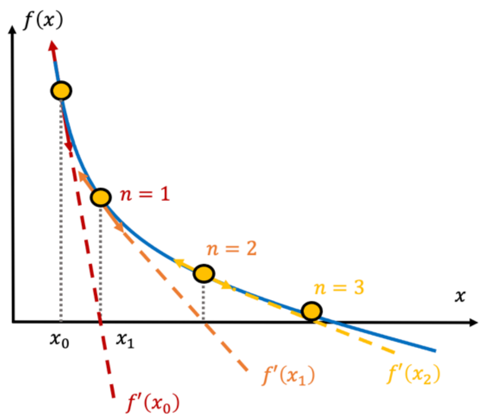


On a :

- f continue sur l'intervalle $[2\ ;3]$
- $f(2) = 2\ sin(2) - \frac{2^2}{10} = 1{,}4186$
- $f(3) = 2\ sin(3) - \frac{3^2}{10} = -0{,}6177$
- $0 \in [1{,}4186\ ;\ -0{,}6177]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une racine entre 2 et 3.

AD1.7. Illustrer graphiquement la méthode de Newton-Raphson pour un exemple quelconque.



AD1.8. Appliquer la méthode de Newton-Raphson sur 2 itérations, avec 4 chiffres significatifs et comme valeur de départ $x_0 = 2{,}5$.

La dérivée de $f(x) = 2\ sin(x) - \frac{x^2}{10}$ est :

$$f'(x) = 2\ cos(x) - \frac{x}{5}$$

On a donc :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2{,}5 - \frac{0{,}571944}{-2{,}102287} = \mathbf{2{,}772}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2{,}772 - \frac{-0{,}045927}{-2{,}419349} = \mathbf{2{,}753}$$

AD1.9. Quels seraient les changements à apporter si on voulait utiliser la méthode de la sécante à la place de la méthode de N-R ? Laquelle des deux méthodes convergerait la plus vite ?

Pour pouvoir utiliser la méthode de la sécante, il faut :

- Approximer la dérivée de la fonction
- Utiliser deux valeurs initiales

Cette méthode ne convergerait pas plus vite étant donné que l'on approxime la dérivée.

Exercice 1.4 : Méthode de Newton-Raphson

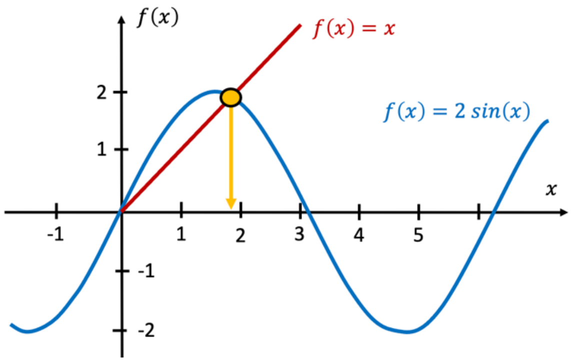
Soit la fonction suivante :

$$2\,sin(x) = x$$

On cherche à trouver la solution positive de cette équation en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

AD1.10. Résoudre le problème graphiquement en donnant une valeur approchée de la solution.

La solution de l'équation est l'abscisse de l'intersection positive entre les courbes des fonctions $f(x) = 2sin(x)$ et $f(x) = x$:



On a donc approximativement :

$$x \approx 1{,}9$$

AD1.11. Résoudre cette équation en utilisant la méthode de Newton-Raphson en 3 itérations. La valeur initiale pourra être celle trouvée à la question **AD1.10.**

On considère la fonction :

$$f(x) = 2sin(x) - x$$

Dont la dérivée est :

$$f'(x) = 2\,cos(x) - 1$$

On a donc :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1{,}9 - \frac{-0{,}00739}{-1{,}64658} = \mathbf{1,89551}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}89551 - \frac{-0{,}0000258}{-1{,}6380748} = \mathbf{1,895494}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}895494 - \frac{-0{,}00002577}{-1{,}63807487} = \mathbf{1,895478}$$

Remarque : Faire très attention lorsque l'on manipule des fonctions trigonométriques.
La calculatrice doit être en mode Radian.

Exercice 1.5 : Méthodes de Laguerre et de Halley

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = x^3 - 2x - 1$$

On cherche à trouver la racine positive de cette équation à l'aide de la méthode de Laguerre.

AD1.12. Utiliser la méthode de Laguerre sur quatre itérations en partant de $x_0 = 1$.

On rappelle que pour la méthode de Laguerre, on a :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{nf(x_k)}{f'(x_k) + sgn\big(f'(x_k)\big)\sqrt{\frac{n-p}{p}[(n-1)f'^2(x_k) - nf(x_k)f''(x_k)]}}$$

Le polynôme est de degré 3 donc $n = 3$ et on prend par défaut p = 1

Les dérivées sont :

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$f''(x) = 6x$$

1ère itération

$$x_1 = 1 - \frac{3 \cdot (-2)}{1 + \sqrt{2 \cdot [2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 6]}} = 1 - \frac{-6}{1 + \sqrt{52}} = \mathbf{1,7307}$$

2nde itération

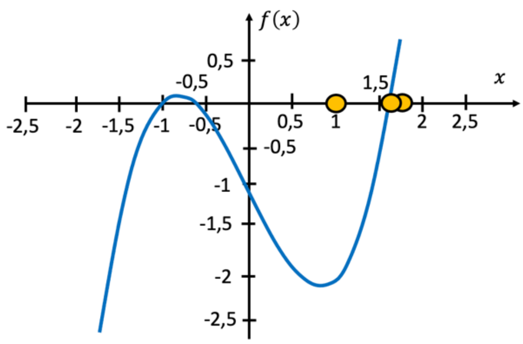
$$x_2 = 1{,}7307 - \frac{3 \cdot 0{,}7226}{6{,}9859 + \sqrt{2 \cdot [2 \cdot 48{,}8037 - 2 \cdot 0{,}7226 \cdot 3]}} = 1{,}7307 - \frac{2{,}1678}{6{,}9859 + \sqrt{186{,}5436}} = \mathbf{1,6256}$$

3ème itération

$$x_3 = 1{,}6256 - \frac{3 \cdot 0{,}04457}{5{,}9277 + \sqrt{2 \cdot [2 \cdot 35{,}1379 - 2 \cdot 0{,}04457 \cdot 3]}} = 1{,}6256 - \frac{0{,}13371}{5{,}9277 + \sqrt{140{,}0167}} = \mathbf{1,6181}$$

4ème itération

$$x_4 = 1{,}6181 - \frac{3 \cdot 0{,}000386}{5{,}8547 + \sqrt{2 \cdot [2 \cdot 34{,}2780 - 2 \cdot 0{,}000386 \cdot 3]}} = 1{,}6181 - \frac{0{,}001158}{5{,}8547 + \sqrt{68{,}5537}} = \mathbf{1,6181}$$



AD1.13. Utiliser cette fois-ci la méthode de Halley, toujours sur quatre itérations et en partant de $x_0 = 1$. Que remarque-t-on ?

On rappelle que pour la méthode de Halley, on a :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n) \cdot f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}$$

La valeur initiale doit être proche de la racine.

Les dérivées sont :

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$f''(x) = 6x$$

1ère itération

$$x_1 = 1 - \frac{2 \cdot (-2) \cdot 1}{2 \cdot 1 - (-2) \cdot 6} = 1 - \frac{4}{14} = \mathbf{0,71429}$$

2nde itération

$$x_2 = 0{,}71429 - \frac{2 \cdot (-2{,}0641) \cdot (-0{,}46938)}{2 \cdot 0{,}22032 - (-2{,}06413) \cdot 4{,}28571} = 0{,}71429 - \frac{1{,}93769}{9{,}2869} = \mathbf{0,50564}$$

3ème itération

$$x_3 = 0{,}50564 - \frac{2 \cdot (-1{,}8820) \cdot (-1{,}2329)}{2 \cdot 1{,}52025 - (-1{,}8820) \cdot 3{,}03384} = 0{,}50564 - \frac{4{,}64063}{8{,}7502} = \mathbf{0,18395}$$

4ème itération

$$x_4 = 0{,}48395 - \frac{2 \cdot (-1{,}361675) \cdot (-1{,}89848)}{2 \cdot 3{,}60425 - (-1{,}36167) \cdot 1{,}1037} = 0{,}48395 - \frac{5{,}17023}{8{,}71138} = -\mathbf{0,10955}$$

Conclusion : La résolution avec la méthode de Halley diverge.

AD1.14. Reprendre la question **AD1.13** à partir de $x_0 = 1{,}6$ sur deux itérations.

1ère itération

$$x_1 = 1{,}6 - \frac{2 \cdot (-0{,}104) \cdot 5{,}68}{2 \cdot 32{,}2624 - (-0{,}104) \cdot 9{,}6} = 1{,}6 - \frac{-1{,}77216}{65{,}5232} = \mathbf{1,6270}$$

2nde itération

$$x_2 = 1{,}6270 - \frac{2 \cdot 0{,}05288 \cdot 5{,}9414}{2 \cdot 35{,}3001 - 0{,}05288 \cdot 9{,}762} = 1{,}6270 - \frac{0{,}628362}{70{,}08399} = \mathbf{1,6180}$$

Exercice 1.7 : Méthode de la Sécante

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

On cherche à trouver la racine positive de cette équation à l'aide de la méthode de la Sécante.

AD1.15. Utiliser la méthode de la Sécante sur cinq itérations en partant de $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$

On rappelle la méthode de la Sécante :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

1ère itération

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 - (-5) \cdot \frac{1 - 0}{-5 - (-10)} = \mathbf{2}$$

2nde itération

$$x_3 = 2 - 14 \cdot \frac{2 - 1}{14 - (-5)} = \mathbf{1,26316}$$

3ème itération

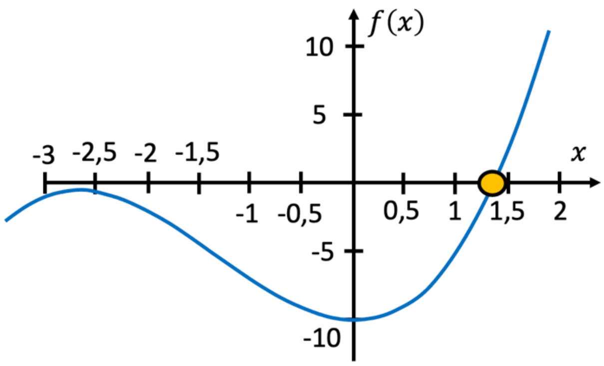
$$x_4 = 1{,}26316 - (-1{,}602243) \cdot \frac{1{,}26316 - 2}{-1{,}602243 - 14} = \mathbf{1,33883}$$

4ème itération

$$x_5 = 1{,}33883 - (-0{,}43033) \cdot \frac{1{,}33883 - 1{,}26316}{-0{,}43033 - (-1{,}602243)} = \mathbf{1,36662}$$

5ème itération

$$x_6 = 1{,}36662 - 0{,}022969 \cdot \frac{1{,}36662 - 1{,}33883}{0{,}022969 - (-0{,}43033)} = \mathbf{1,365212}$$



L'Essentiel

Méthode de Dichotomie

$$m \leftarrow {}^{(a+b)}/_{2}$$

Si $f(a) \cdot f(m) \leq 0$ alors $b \leftarrow m$ sinon $a \leftarrow m$

Avantages	Inconvénients
• Convergence assurée • Encadrement de la solution • Un seul calcul à chaque itération	• Vitesse de convergence linéaire donc lente • Sensible aux erreurs d'arrondi et aux fonctions qui changent beaucoup de fois de signe

Méthode de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Avantages	Inconvénients
• Converge rapidement quand elle converge • Relativement stable et peu sensible aux erreurs d'arrondi si la dérivée (dénominateur) n'est pas trop petite	• Peut diverger ou converger vers un autre zéro si l'on choisit mal la valeur de départ • Nécessite le calcul de la dérivée (long si on ne connait pas explicitement la fonction) • Chaque étape nécessite deux évaluations de fonction

Méthode de Laguerre

$$x_{k+1} = x_k - \frac{nf(x_k)}{f'(x_k) + sgn\big(f'(x_k)\big)\sqrt{\frac{n-p}{p}\left[(n-1)f'^2(x_k) - nf(x_k)f''(x_k)\right]}}$$

Avantages	Inconvénients
• Fonctionne très bien avec des polynômes • Très rapide : une grande précision du résultat dès la $1^{ère}$ itération	• Il faut connaître f, f' et f'' • Beaucoup d'opérations mathématiques (processeur++) à chaque itération

TD 2 : Recherche d'Extrema

I. Applications directes

Exercice 2.1 : Recherche d'extrema à l'aide de Newton et de Halley

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = x^5 - 5x$$

AD2.1. Montrer analytiquement que cette fonction admet un extremum local dans les $x > 0$.

On a :

$$f'(x) = 5x^4 - 5$$

$$f''(x) = 20x^3$$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, on a $f''(x) > 0$.

On en déduit que la fonction $f(x)$ est bien convexe sur l'ensemble des réels positifs.
$f(x)$ possède un extremum qui est un **minimum local**.

AD2.2. À l'aide de la méthode de Newton, trouver l'extremum local de $f(x)$.

On partira de $x_0 = 0{,}8$ et on déroulera 3 itérations.

La méthode de Newton s'écrit :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

Cette relation de récurrence va converger vers l'extremum proche de $x_0 = 0{,}8$.

Sa forme explicite est :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{5x_n^4 - 5}{20x_n^3}$$

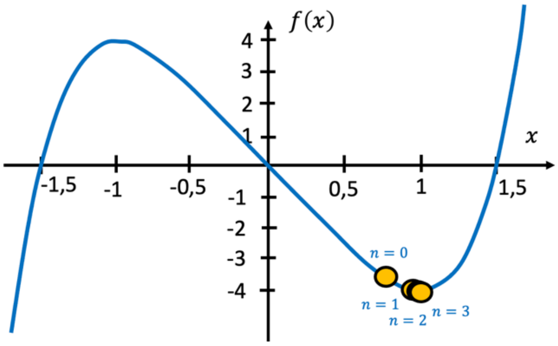
$$x_1 = x_0 - \frac{5x_0^4 - 5}{20x_0^3} = 0{,}8 - \frac{5 \cdot 0{,}8^4 - 5}{20 \cdot 0{,}8^3} = \mathbf{1{,}08828125}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{5x_1^4 - 5}{20x_1^3} = 1{,}08828125 - \frac{5 \cdot 1{,}08828125^4 - 5}{20 \cdot 1{,}08828125^3} = \mathbf{1{,}0101729}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{5x_2^4 - 5}{20x_2^3} = 0{,}8 - \frac{5 \cdot 1{,}08828125^4 - 5}{20 \cdot 1{,}08828125^3} = \mathbf{1{,}00015264}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{5x_3^4 - 5}{20x_3^3} = 0{,}8 - \frac{5 \cdot 1{,}00015264^4 - 5}{20 \cdot 1{,}00015264^3} = \mathbf{1{,}00000003}$$

AD2.3. Illustrer la résolution numérique à l'aide d'un graphique



AD2.4. Reprendre la question **AD2.2.** à l'aide de la méthode de Halley.

La méthode de Halley s'écrit :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)f''(x_n)}{2f''^2(x_n) - f'(x_n)f'''(x_n)}$$

Sa forme explicite est :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(5x_n^4 - 5)\cdot(20x_n^3)}{2\cdot(20x_n^3)^2 - (5x_n^4 - 5)\cdot(60x_n^2)} = x_n - \frac{100x_n^7 - 100x_n^3}{500x_n^6 + 300x_n^2}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{100x_0^7 - 100x_0^3}{500x_0^6 + 300x_0^2} = 0{,}8 - \frac{100\cdot 0{,}8^7 - 100\cdot 0{,}8^3}{500\cdot 0{,}8^6 + 300\cdot 0{,}8^2} = \mathbf{0,89356577}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{100x_1^7 - 100x_1^3}{500x_1^6 + 300x_1^2} = 0{,}8 - \frac{100\cdot 0{,}89356577^7 - 100\cdot 0{,}89356577^3}{500\cdot 0{,}89356577^6 + 300\cdot 0{,}89356577^2} = \mathbf{0,94590899}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{100x_2^7 - 100x_2^3}{500x_2^6 + 300x_2^2} = 0{,}8 - \frac{100\cdot 0{,}94590899^7 - 100\cdot 0{,}94590899^3}{500\cdot 0{,}94590899^6 + 300\cdot 0{,}94590899^2} = \mathbf{0,97284751}$$

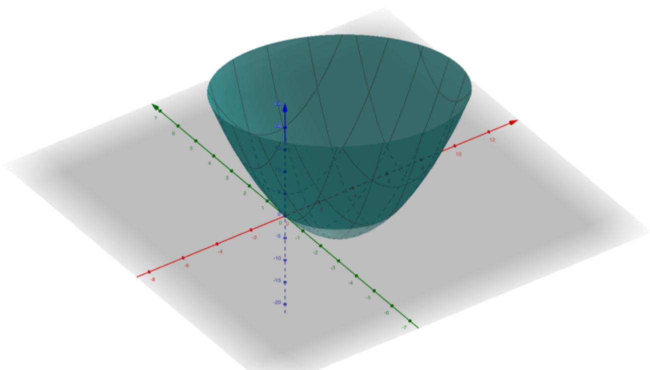
$$x_4 = x_3 - \frac{100x_3^7 - 100x_3^3}{500x_3^6 + 300x_3^2} = 0{,}8 - \frac{100\cdot 0{,}97284751^7 - 100\cdot 0{,}97284751^3}{500\cdot 0{,}97284751^6 + 300\cdot 0{,}97284751^2} = \mathbf{0,98641073}$$

Exercice 2.2 : Minimum d'une fonction quadratique

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = f(u,v) = u^2 + 3v^2 + uv - 5u$$

La représentation 3D de $f(x)$ est la suivante :



AD2.5. Écrire $f(x)$ sous forme matricielle.

On rappelle l'algorithme du gradient conjugué :

$$|r_k\rangle = A|x_k\rangle - |b\rangle$$

$$|p_{k+1}\rangle = |r_k\rangle - \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\langle p_i|r_k\rangle_A}{\langle p_i|p_i\rangle_A}|p_i\rangle$$

$$|x_{k+1}\rangle = |x_k\rangle + \frac{\langle p_{k+1}|b\rangle}{\langle p_{k+1}|p_{k+1}\rangle_A}|p_{k+1}\rangle$$

On rappelle également que l'on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$$

La dimension de la fonction est $n = 2$

$$u^2 + 3v^2 + uv - 5u$$

$$u^2 + 3v^2 + uv = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (u^2 + 3v^2 + uv) = \frac{1}{2} \cdot (2u^2 + 6v^2 + 2uv)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2) = \frac{1}{2}\left[(u \quad v) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\left[(u \quad v) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right]$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$-5u = (-5 \quad 0)x = -(5 \quad 0)x = -b^T x$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}^T x$$

AD2.6. Dérouler l'algorithme du gradient conjugué afin de trouver le minimum de $f(x)$.

1ère itération

$$|x_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|r_0\rangle = A|x_0\rangle - |b\rangle = -|b\rangle = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|p_1\rangle = |r_0\rangle = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|x_1\rangle = |x_0\rangle + \frac{\langle p_1|b\rangle}{\langle p_1|p_1\rangle_A}|p_1\rangle$$

Avec

$$\langle p_1|b\rangle = p_1^T b = (-5 \quad 0)\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = -5 \cdot 5 + 0 \cdot 0 = -25$$

$$\langle p_1|p_1\rangle_A = \langle p_1|Ap_1\rangle = p_1^T A p_1 = \begin{pmatrix}-5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-10\\-5\end{pmatrix} = 50$$

$$|x_1\rangle = |x_0\rangle - \frac{25}{50}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\0\end{pmatrix}$$

2nde itération

$$|r_1\rangle = A|x_1\rangle - |b\rangle = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2{,}5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2{,}5\end{pmatrix}$$

$$|p_2\rangle = |r_1\rangle - \frac{\langle p_1|r_1\rangle_A}{\langle p_1|p_1\rangle_A}|p_1\rangle$$

Avec

$$\langle p_1|r_1\rangle_A = p_1^T A r_1 = \begin{pmatrix}-5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2{,}5\\15\end{pmatrix} = -{}^{25}/_{2} = -12{,}5$$

$$|p_2\rangle = |r_1\rangle - \frac{12{,}5}{50}|p_1\rangle = \begin{pmatrix}0\\2{,}5\end{pmatrix} - \frac{-12{,}5}{50}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2{,}5\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-{}^{5}/_{4}\\{}^{5}/_{2}\end{pmatrix}$$

$$|x_2\rangle = |x_1\rangle + \frac{\langle p_2|b\rangle}{\langle p_2|p_2\rangle_A}|p_2\rangle$$

Avec

$$\langle p_2|b\rangle = p_2^T b = \begin{pmatrix}-{}^{5}/_{4} & {}^{5}/_{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = -{}^{25}/_{4}$$

$$\langle p_2|p_2\rangle_A = \langle p_2|Ap_2\rangle = p_2^T A p_2 = \begin{pmatrix}-{}^{5}/_{4} & {}^{5}/_{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-{}^{5}/_{4}\\{}^{5}/_{2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-{}^{5}/_{4} & {}^{5}/_{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\{}^{27}/_{2}\end{pmatrix} = {}^{135}/_{4}$$

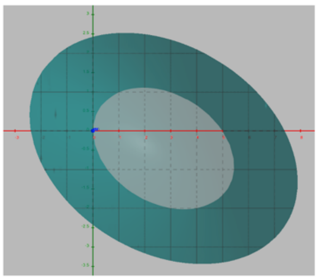
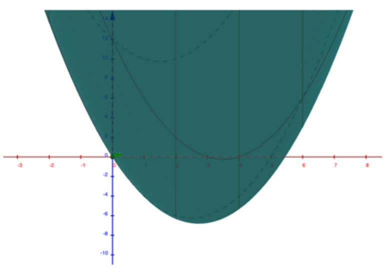
$$|x_2\rangle = \begin{pmatrix}{}^{5}/_{2}\\0\end{pmatrix} + \frac{-{}^{25}/_{4}}{{}^{135}/_{4}}\cdot\begin{pmatrix}-{}^{5}/_{4}\\{}^{5}/_{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^{5}/_{2}\\0\end{pmatrix} - \frac{5}{27}\cdot\begin{pmatrix}-{}^{5}/_{4}\\{}^{5}/_{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^{295}/_{108}\\-{}^{25}/_{54}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}\mathbf{2,73}\\\mathbf{-0,46}\end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\nabla f_{|x_2\rangle} = A|x_2\rangle - |b\rangle = 0$$

Le minimum recherché est donc situé en

$$f(2{,}73; -0{,}46) = \mathbf{-6,8180}$$

L'Essentiel

À 1 dimension

Le signe de la dérivée seconde $f''(x)$ permet de savoir s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum :

- $f''(x) < 0$: maximum
- $f''(x) > 0$: minimum

Afin de trouver l'extrema, on cherche simplement la racine de la dérivée.
Cela peut se faire à l'aide des méthodes classiques vues dans le COURS 1.

Méthode de Newton	$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$
Méthode de Halley	$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)f''(x_n)}{2f''^2(x_n) - f'(x_n)f'''(x_n)}$$

À n dimensions

La méthode du gradient conjugué est une méthode itérative permettant de résoudre les systèmes linéaires $Ax = n$ dont la matrice A est définie positive.

Méthode du gradient conjugué	❶ Réécriture de la fonction sous sa forme matricielle $$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$$ Pour $n = 2$ $$f(x) = \frac{1}{2}[au^2 + 2buv + cv^2] - b_1 u - b_2 v$$ $$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$ ❷ Calcul des différents vecteurs n fois avec n dimension de la fonction $$\lvert r_k\rangle = A\lvert x_k\rangle - \lvert b\rangle$$ $$\lvert p_{k+1}\rangle = \lvert r_k\rangle - \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\langle p_i \lvert r_k\rangle_A}{\langle p_i \lvert p_i\rangle_A} \lvert p_i\rangle$$ $$\lvert x_{k+1}\rangle = \lvert x_k\rangle + \frac{\langle p_{k+1} \lvert b\rangle}{\langle p_{k+1} \lvert p_{k+1}\rangle_A} \lvert p_{k+1}\rangle = \lvert x_k\rangle + \frac{p_{k+1}^T b}{p_{k+1}^T A p_{k+1}} \lvert p_{k+1}\rangle$$

TD 3 : Valeur d'un polynôme en un point

I. Applications directes

Exercice 3.1 : Algorithme de Clenshaw

Soit la fonction suivante :

$$y(x) = 10x^2 + 3x^5 + 5x^3 - 20$$

AD3.1. Donner la valeur de y en 2 par calcul direct et donner le nombre de multiplication.

On a

$$y(x) = 10 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + (-20) = \mathbf{156}$$

Il y a 10 multiplications.

AD3.2. Appliquer l'algorithme de Clenshaw pour faire ce même calcul et donner le nombre de multiplications.

Les coefficients c_k sont :

$$c_5 = 3$$

$$c_3 = 5$$

$$c_2 = 10$$

$$c_0 = -20$$

On applique l'algorithme ($n = 5$) :

$$u_5 = c_5 = 3$$

$$u_4 = c_4 + x \cdot u_5 = 0 + 2 \cdot 3 = 6$$

$$u_3 = c_3 + x \cdot u_4 = 5 + 2 \cdot 6 = 17$$

$$u_2 = c_2 + x \cdot u_3 = 10 + 2 \cdot 17 = 44$$

$$u_1 = c_1 + x \cdot u_2 = 0 + 2 \cdot 44 = 88$$

$$u_0 = c_0 + x \cdot u_1 = -20 + 2 \cdot 88 = \mathbf{156}$$

Il y a 5 multiplications.

L'Essentiel

L'algorithme de Clenshaw est un bon moyen d'optimiser le temps de calcul de la valeur d'un polynôme en un point.

Méthode de Clenshaw (schéma de Hörner)	Soit la fonction $$y(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$$ Dans le cas d'un polynôme (schéma de Hörner) : $$\varphi_k(x) = x^k$$ L'algorithme de Clenshaw s'écrit : $$y(x) = \sum_{k=n-1}^{0} c_k + x \cdot u_{k+1}$$

TD 4 : Intégration numérique

I. Applications directes

Exercice 4.1 : Intégration numérique à l'aide des méthodes classiques

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

On souhaite calculer l'intégrale de la fonction $f(x)$ entre $a = 0$ et $b = 0{,}8$

AD4.1. Donner une solution analytique de

$$I = \int_{a=0}^{b=0,8} f(x)dx$$

$$I = \int_{a=0}^{b=0,8} (0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)dx$$

$$= \left[0{,}2x + \frac{25}{2}x^2 - \frac{200}{3}x^3 + \frac{675}{4}x^4 - \frac{900}{5}x^5 + \frac{400}{6}x^6\right]_0^{0,8} = \mathbf{1{,}64053}$$

AD4.2. Estimer la valeur de l'intégrale en utilisant la méthode des trapèzes puis commenter le résultat en s'appuyant sur une représentation graphique de la fonction.

La méthode des trapèzes donne :

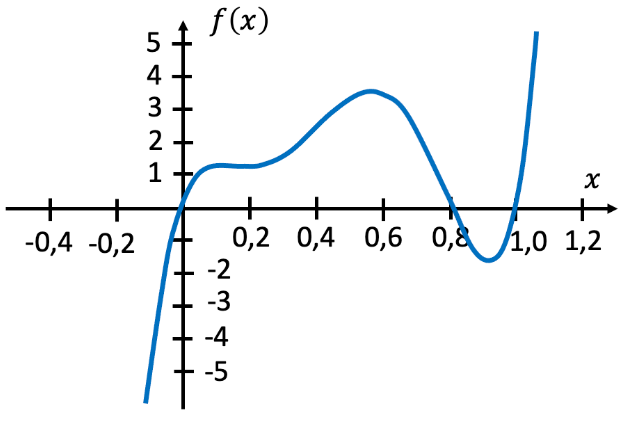
$$I = (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

On a donc :

$$I = (0{,}8 - 0) \cdot \frac{f(0) + f(0{,}8)}{2}$$

$$= 0{,}4 \cdot [0{,}2 + 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}8 - 200 \cdot 0{,}8^2 + 675 \cdot 0{,}8^3 - 900 \cdot 0{,}8^4 + 400 \cdot 0{,}8^5]$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}432 = \mathbf{0{,}173}$$



TD4

La méthode des trapèzes donne une mauvaise approximation de I car $f(a) \approx f(b) \approx 0$ alors que la fonction est strictement positive sur cet intervalle et passe par un maxima local $\sim f(0{,}56) \approx 3{,}5$

AD4.3. Calculer cette fois-ci l'intégrale à l'aide de la méthode composite.

On rappelle qu'elle s'écrit :

$$I = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

On fera le calcul sur 4 points puis sur 10 points.

Calcul sur 4 points

$$h = \frac{b-a}{4} = \frac{0{,}8-0}{4} = 0{,}2$$

$$I_4 = \frac{0{,}2}{2}[f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(b)] = 0{,}2\left[f(0) + 2f\left(\frac{0{,}8}{3}\right) + 2f\left(2\cdot\frac{0{,}8}{3}\right) + f(0{,}8)\right]$$

$$= 0{,}1[f(0) + 2f(0{,}267) + 2f(0{,}533) + f(0{,}8)] = 0{,}2[0{,}2 + 1{,}433 + 3{,}487 + 0{,}232] = \mathbf{1{,}027}$$

Calcul sur 10 points

$$h = \frac{b-a}{10} = \frac{0{,}8-0}{10} = 0{,}08$$

$$I_{10} = \frac{0{,}08}{2}[f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_8) + f(b)]$$

$$= 0{,}04\left[f(0) + 2f\left(\frac{0{,}8}{9}\right) + \cdots + 2f\left(8\cdot\frac{0{,}8}{9}\right) + f(0{,}8)\right]$$

$$= 0{,}04[f(0) + 2f(0{,}089) + 2f(0{,}179) + \cdots + 2f(711) + f(0{,}8)]$$

$$= 0{,}04[0{,}2 + 2\cdot 1{,}262 + 2\cdot 1{,}288 + \cdots + 2\cdot 2{,}163 + 0{,}232] = \mathbf{1{,}448}$$

AD4.4. Reprendre la question **AD4.2.** à l'aide de la méthode de Simpson.

On rappelle que l'on a :

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Calcul sur 4 points

$$h = \frac{b-a}{4} = \frac{0,8-0}{4} = 0,2$$

$$I = \frac{h}{3}[f(a) + 4[f(x_1) + f(x_3)] + 2f(x_2) + f(b)]$$

$$= \frac{0,2}{3}[f(0) + 4[f(0,2) + f(0,6)] + 2f(0,4) + f(0,8)]$$

$$= \frac{0,2}{3}[0,2 + 4 \cdot (1,288 + 3,464) + 2 \cdot 2,456 + 0,232] = \mathbf{1,623}$$

Calcul sur 10 points

$$h = \frac{b-a}{10} = \frac{0,8-0}{10} = 0,08$$

$$I = \frac{h}{3}[f(a) + 4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)] + 2 \cdot [f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)] + f(b)]$$

$$= \frac{0,08}{3}[f(0) + 4[f(0,08) + f(0,24) + f(0,4) + f(0,56) + f(0,72)] + 2 \cdot [f(0,16) + f(0,32) + f(0,48) + f(0,64)] + f(0,8)]$$

$$= 0,0267 \cdot [0,2 + 4 \cdot 9,408 + 2 \cdot 10,564 + 0,232] = \mathbf{1,578}$$

Exercice 4.2 : Intégration numérique à l'aide de la méthode de Romberg

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{x}dx$$

On souhaite calculer l'intégrale de la fonction $f(x)$ entre $a = 1$ et $b = 2$

AD4.5. Donner une solution analytique de

$$I = \int_{a=1}^{b=2} f(x)dx$$

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \mathbf{\ln(2)} = \mathbf{0,69314718191} \ldots$$

AD4.6. Calculer cette intégrale à l'aide de la méthode de Romberg en 5 itérations.

On commence par calculer les termes R_i^0 qui correspondent aux calculs d'intégrale en utilisant la méthode des trapèzes à $n = 1,2,4,6 \ldots$ points.

k	n	R_k^0
1	1	$R_1^0 = \frac{1}{2}\big(f(0) + f(2)\big) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 0,75$

2	2	$R_2^0 = 0{,}5 \cdot \frac{1}{1{,}5} + \frac{0{,}5}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 0{,}70833333333$
3	4	$R_3^0 = 0{,}25 \cdot \left(\frac{1}{1{,}25} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{1{,}75}\right) + \frac{0{,}25}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 0{,}69702380952$
4	8	$R_4^0 = 0{,}69412185037$
5	16	$R_5^0 = 0{,}69314718191$

On calcule ensuite les éléments des colonnes suivantes :

$$
\begin{array}{ccccc}
R_1^0 & & & & \\
R_2^0 & R_2^1 & & & \\
R_3^0 & R_3^1 & R_3^2 & & \\
R_4^0 & R_4^1 & R_4^2 & R_4^3 & \\
R_5^0 & R_5^1 & R_5^2 & R_5^3 & R_5^4
\end{array}
$$

En utilisant la formule suivante :

$$R_k^i = \frac{4^i R_k^{i-1} - R_{k-1}^{i-1}}{4^i - 1}$$

On obtient :

0,75				
0,70833333333	$R_2^1 = \frac{4R_2^0 - R_1^0}{3} = 0{,}694444$			
0,69702380952	$R_3^1 = \frac{4R_3^0 - R_2^0}{3} = 0{,}693253$	$R_3^2 = \frac{4R_3^1 - R_2^1}{3} = 0{,}693253$		
0,69412185037	$R_4^1 = \frac{4R_4^0 - R_3^0}{3} = 0{,}69315453065$	$R_4^2 = \frac{4R_4^1 - R_3^1}{3} = 0{,}69314790148$	$R_4^3 = \frac{4R_4^2 - R_3^2}{3} = 0{,}69214747764$	
0,69314718191	$R_5^1 = \frac{4R_5^0 - R_4^0}{3} = 0{,}69314765281$	$R_5^2 = \frac{4R_5^1 - R_4^1}{3} = 0{,}69314719429$	$R_5^3 = \frac{4R_5^2 - R_4^2}{3} = 0{,}69314718307$	0,69314718191

Finalement,

$$R_5^4 = \mathbf{0,69314718191}$$

Pour rappel, le calcul analytique donnait

$$I = 0{,}69314718191$$

L'Essentiel

Objectif : Calculer l'intégrale d'une fonction

Approche : calculer l'aire sous la courbe

- **Méthode des trapèzes** : adapté pour les polynômes de degré 1 (il faut que $f''(x) = 0$)
- **Méthode des trapèzes composite :** on applique n fois la méthode des trapèzes sur n segments
  - L'erreur est divisée par 4 à chaque fois que l'on double le nombre de segments
- **Méthode de Simpson :** adaptées aux polynômes d'ordre élevé
  - Plus précis que la méthode des trapèzes
  - Peut être appliquée de façon composite mais il faut des points equi-espacés, un nombre pair de segments et un nombre impair de points
- **Méthode de Romberg :** la plus utilisée dans l'industrie et la plus précise

Méthode des trapèzes	$$I = (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
Méthode des trapèzes composite	$$I = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right]$$ $$h = \frac{b-a}{n}$$
Méthode de Simpson	$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6,\ldots}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)\right]$$ $$h = \frac{b-a}{n}$$
Méthode de Romberg	❶ Calcul des coefficients de la première colonne R_k^0 à l'aide de la méthode des trapèzes composite On prend $k = 1,2,3\ldots$ et $n = 1,2,4,8,16\ldots$ ❷ Calcul des coefficients des autres colonnes : $$R_k^i = \frac{4^i R_k^{i-1} - R_{k-1}^{i-1}}{4^i - 1}$$

TD 5 : Résolution d'équations différentielles ordinaires

I. Applications directes

Exercice 5.1 : Méthode d'Euler

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y' = -y + t + 1$$

On prend $0 \leq t \leq 5$

Et on donne comme condition initiale $y(0) = 1$.

AD5.1. Résoudre l'équation différentielle en utilisant la méthode d'Euler avec un pas de $h = 0{,}2$.

On rappelle la méthode d'Euler :

$$y(t_{i+1}) \approx w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i)$$

$$w_0 = y_0$$

On a :

$$w_0 = y_0 = 1$$

$$w_1 = w_0 + h \cdot f(t_0, w_0) = 1 + 0{,}2 \cdot (-1 + 0 + 1) = 1$$

$$w_2 = w_1 + h \cdot f(t_1, w_1) = 1 + 0{,}2 \cdot (-1 + 0{,}2 + 1) = 1{,}04$$

$$w_3 = w_2 + h \cdot f(t_3, w_3) = 1{,}04 + 0{,}2 \cdot (-1{,}04 + 0{,}4 + 1) = 1{,}112$$

$$w_4 = w_3 + h \cdot f(t_4, w_4) = 1{,}112 + 0{,}2 \cdot (-1{,}112 + 0{,}6 + 1) = 1{,}2096$$

$$w_5 = w_4 + h \cdot f(t_5, w_5) = 1{,}2096 + 0{,}2 \cdot (-1{,}2096 + 0{,}8 + 1) = 1{,}32768$$

La solution exacte de cette équation différentielle est :

$$y(x) = e^{-t} + t$$

AD5.2. Calculer l'erreur absolue de la solution donnée par la méthode d'Euler avec un pas de 0,2.

L'erreur absolue est :

$$\delta = |y_i - w_i|$$

i	t_i	w_i	y_i	δ_i
0	0	1	1	**0**
1	0,2	1	1,018730	**0,01873**
2	0,4	1,04	1,070320	**0,03032**
3	0,6	1,112	1,148811	**0,03681**
4	0,8	1,2096	1,249328	**0,03940**
5	1,0	1,32768	1,367879	**0,04012**

TD5

Exercice 5.2 : Méthode de Runge-Kutta 2

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y' = yx^2 - y$$

On prend $0 \leq x \leq 1$

Et on donne comme condition initiale $y(0) = 0{,}25$.

AD5.3. Résoudre l'équation différentielle en utilisant la méthode de Runge-Kutta 2 avec un pas de 0,25.

On rappelle la méthode de RK2 :

$$y_{i+1} = y_i + hk_2$$

Avec :

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

1ère itération : $i = 0$

$x_1 = x_0 + 0{,}25 = 0 + 0{,}25 = 0{,}25$

$$k_1 = y_0 x_0^2 - y_0 = 0{,}25 \cdot 0^2 - 0{,}25 = -0{,}25$$

$x_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0{,}25}{2} = 0{,}125$

$y_0 + \frac{h}{2}k_1 = 0{,}25 + 0{,}125 \cdot (-0{,}25) = 0{,}21875$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = 0{,}21875 \cdot 0{,}125^2 - 0{,}21875 = -0{,}2153$$

D'où

$$y_1 = y_0 + hk_2 = 0{,}25 + 0{,}25 \cdot (-0{,}2153) = \mathbf{0,1962}$$

2nde itération : $i = 1$

$x_2 = x_1 + 0{,}25 = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$

$$k_1 = y_1 x_1^2 - y_1 = 0{,}1962 \cdot 0{,}25^2 - 0{,}1962 = -0{,}1842$$

$x_1 + \frac{h}{2} = 0{,}25 + \frac{0{,}25}{2} = 0{,}375$

$y_1 + \frac{h}{2}k_1 = 0{,}1962 + 0{,}125 \cdot (-0{,}1842) = 0{,}1732$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = 0{,}1732 \cdot 0{,}375^2 - 0{,}1732 = -0{,}1488$$

D'où

$$y_2 = y_1 + hk_2 = 0{,}25 + 0{,}25 \cdot (-0{,}1488) = \mathbf{0,159}$$

3ème itération : $i = 2$

$x_3 = x_2 + 0{,}25 = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$

$$k_1 = y_2 x_2^2 - y_2 = 0{,}159 \cdot 0{,}5^2 - 0{,}159 = -0{,}11925$$

$x_2 + \frac{h}{2} = 0{,}5 + \frac{0{,}25}{2} = 0{,}625$

$y_2 + \frac{h}{2} k_1 = 0{,}159 + 0{,}125 \cdot 0{,}625 = 0{,}2371$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2} k_1\right) = 0{,}2371 \cdot 0{,}625^2 - 0{,}2371 = -0{,}1445$$

D'où

$$y_3 = y_3 + hk_2 = 0{,}159 + 0{,}25 \cdot (-0{,}1445) = \mathbf{0{,}1229}$$

4ème itération : $i = 3$

$x_4 = x_3 + 0{,}25 = 0{,}75 + 0{,}25 = 1{,}00$

$$k_1 = y_3 x_3^2 - y_3 = 0{,}1229 \cdot 0{,}75^2 - 0{,}1229 = -0{,}0538$$

$x_3 + \frac{h}{2} = 0{,}75 + \frac{0{,}25}{2} = 0{,}825$

$y_3 + \frac{h}{2} k_1 = 0{,}1229 + 0{,}125 \cdot (-0{,}0538) = 0{,}1162$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2} k_1\right) = 0{,}1162 \cdot 0{,}825^2 - 0{,}1162 = -0{,}0371$$

D'où

$$y_3 = y_3 + hk_2 = 0{,}1229 + 0{,}25 \cdot (-0{,}0371) = \mathbf{0{,}1136}$$

Conclusion

i	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,25	0,5	0,75	1,0
y_i	0,25	0,1962	0,159	0,1229	0,1136

Exercice 5.3 : Méthode de Runge-Kutta 4

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y' = -1{,}2y + 7e^{-0{,}3x}$$

On prend $0 \leq x \leq 1{,}5$

Et on donne comme conditions initiales :

$$y(0) = 3$$

AD5.4. Résoudre l'équation différentielle en utilisant la méthode de Runge-Kutta 4 avec un pas de $h = 0{,}5$.

On a :

$$x_{i+1} = x_i + h = x_i + 0{,}5$$

Les valeurs de y_{i+1} sont calculées comme suit :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Avec :

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$$

1ère itération : $i = 0$

$x_1 = x_0 + 0{,}5 = 0 + 0{,}5 = 0{,}5$

$$k_1 = h \cdot (-1{,}2y_0 + 7e^{-0{,}3x_0}) = 0{,}5 \cdot (-1{,}2 \cdot 3 + 7e^{-0{,}3 \cdot 0}) = 1{,}7$$

$x_0 + \frac{1}{2}h = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

$y_0 + \frac{1}{2}k_1 = 3 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}7 = 3{,}85$

$$k_2 = h \cdot f\left(-1{,}2 \cdot \left(y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) + 7e^{-0{,}3 \cdot \left(x_0 + \frac{1}{2}h\right)}\right) = 0{,}5 \cdot (-1{,}2 \cdot 3{,}85 + 7e^{-0{,}3 \cdot 0{,}25}) = 0{,}937$$

$y_0 + \frac{1}{2}k_2 = 3 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}937 = 3{,}469$

$$k_3 = h \cdot \left(-1{,}2 \cdot \left(y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) + 7e^{-0{,}3 \cdot \left(x_0 + \frac{1}{2}h\right)}\right) = 1{,}1655$$

$y_0 + k_3 = 3 + 1{,}1655 = 4{,}1655$

$$k_4 = h \cdot (-1{,}2 \cdot 4{,}1655 + 7e^{-0{,}3 \cdot 0{,}5}) = 0{,}513$$

D'où :

$$y_1 = 3 + \frac{1}{6}(1{,}7 + 2 \cdot 0{,}937 + 2 \cdot 1{,}1655 + 0{,}513) = \mathbf{4{,}069}$$

2nde itération : $i = 1$

$x_2 = x_1 + 0{,}5 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$

$$k_1 = h \cdot (-1{,}2y_1 + 7e^{-0{,}3x_1}) = 0{,}5 \cdot (-1{,}2 \cdot 4{,}069 + 7e^{-0{,}3 \cdot 0{,}5}) = 0{,}571$$

$x_1 + \frac{1}{2}h = 0{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 = 0{,}75$

$y_1 + \frac{1}{2}k_1 = 4{,}069 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}571 = 4{,}355$

$$k_2 = h \cdot \left(-1{,}2 \cdot \left(y_1 + \frac{1}{2}k_1\right) + 7e^{-0{,}3\left(x_1 + \frac{1}{2}h\right)}\right) = 0{,}5 \cdot (-1{,}2 \cdot 4{,}355 + 7e^{-0{,}3 \cdot 0{,}75}) = 0{,}1818$$

$y_1 + \frac{1}{2}k_2 = 4{,}069 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1818 = 4{,}16$

$$k_3 = h \cdot \left(-1{,}2 \cdot \left(y_1 + \frac{1}{2}k_2\right) + 7e^{-0{,}3 \cdot \left(x_1 + \frac{1}{2}h\right)}\right) = 0{,}5 \cdot (-1{,}2 \cdot 4{,}16 + 7e^{-0{,}3 \cdot 0{,}75}) = 0{,}2988$$

$y_1 + k_3 = 4{,}069 + 0{,}2988 = 4{,}368$

$$k_4 = h \cdot \left(-1{,}2 \cdot (y_1 + k_3) + 7e^{-0{,}3(x_1 + h)}\right) = 0{,}5 \cdot (-1{,}2 \cdot 4{,}368 + 7e^{-0{,}3 \cdot 1{,}0}) = -0{,}02795$$

D'où :

$$y_2 = 4{,}069 + \frac{1}{6}(0{,}571 + 2 \cdot 0{,}1818 + 2 \cdot 0{,}2988 - 0{,}02795) = \mathbf{4{,}32}$$

3ème itération : $i = 2$

$x_3 = x_2 + 0{,}5 = 1{,}0 + 0{,}5 = 1{,}5$

$$k_1 = h \cdot (-1{,}2y_2 + 7e^{-0{,}3x_2}) = 0{,}5 \cdot (-1{,}2 \cdot 4{,}32 + 7e^{-0{,}3 \cdot 1{,}0}) = 0{,}000864$$

$x_2 + \frac{1}{2}h = 1{,}0 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 = 1{,}25$

$y_2 + \frac{1}{2}k_1 = 4{,}32 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}000864 = 4{,}320$

$$k_2 = h \cdot \left(-1{,}2 \cdot \left(y_2 + \frac{1}{2}k_1\right) + 7e^{-0{,}3\left(x_2 + \frac{1}{2}h\right)}\right) = 0{,}5 \cdot (-1{,}2 \cdot 4{,}320 + 7e^{-0{,}3 \cdot 1{,}25}) = -0{,}1865$$

$y_2 + \frac{1}{2}k_2 = 4{,}32 + \frac{1}{2} \cdot (-0{,}1865) = 4{,}227$

$$k_3 = h \cdot \left(-1{,}2 \cdot \left(y_2 + \frac{1}{2}k_2\right) + 7e^{-0{,}3 \cdot \left(x_2 + \frac{1}{2}h\right)}\right) = 0{,}5 \cdot (-1{,}2 \cdot 4{,}227 + 7e^{-0{,}3 \cdot 1{,}25}) = -0{,}1307$$

$y_2 + k_3 = 4{,}32 + (-0{,}1307) = 4{,}189$

$$k_4 = h \cdot \left(-1{,}2 \cdot (y_2 + k_3) + 7e^{-0{,}3(x_2 + h)}\right) = 0{,}5 \cdot (-1{,}2 \cdot 4{,}189 + 7e^{-0{,}3 \cdot 1{,}5}) = -0{,}2817$$

D'où :

$$y_3 = 4{,}069 + \frac{1}{6}(0{,}000864 + 2 \cdot (-0{,}1865) + 2 \cdot (-0{,}1307) - 0{,}2817) = \mathbf{4{,}167}$$

Conclusion

i	1	2	3	4
x_i	0,0	0,5	1,0	1,5
y_i	3,0	4,069	4,32	4,167

L'Essentiel

Objectif : Résoudre numériquement une équation différentielle de type :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Méthode d'Euler	$y(t_{i+1}) \approx w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i)$ $w_0 = y_0$

Objectif : Résoudre numériquement une équation différentielle de type :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Méthode de Runge-Kutta ordre 2 (version méthode du point milieu)	$x_{i+1} = x_i + h$ $y_{i+1} = y_i + hk_2$ $k_1 = f(x_i, y_i)$ $k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$
Méthode de Runge-Kutta ordre 4	$x_{i+1} = x_i + h$ $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$ $k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$ $k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$ $k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$