Travaux Dirigés 1 (2h)

<u>Exercice 1</u> : Donnons une approximation de $\sqrt{2}$ à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson.

1. Montrer que l'on peut obtenir une estimation de la valeur de la racine carrée du nombre 2 en cherchant la racine positive de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.
2. Écrire l'algorithme et le code informatique qui permettent de calculer grâce à la méthode directe de Newton-Raphson une estimation de la valeur de $\sqrt{2}$ avec une précision $\epsilon = 1.10^{-9}$ et permettant d'évaluer le nombre d'itérations nécessaire. Conclure.
3. En considérant et développant mathématiquement l'algorithme de Newton-Raphson, appliqué à la fonction précédente, montrer que la suite (x_n) définie par récurrence selon (a étant un réel strictement positif) :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}) \end{cases}$$

   vérifie :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \sqrt{2}$$

4. Écrire l'algorithme et le code informatique qui permettent de calculer grâce à la suite (x_n) une estimation de la valeur de $\sqrt{2}$ avec une précision $\epsilon = 1.10^{-9}$ et permettant d'évaluer le nombre d'itérations nécessaire. Conclure.
5. Comparer les deux méthodes et conclure.
6. En généralisant, définir par récurrence la suite (x_n) qui convergerait vers $\sqrt{r}$, où r est un réel strictement positif. Montrer alors que :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{r}{x_n})$$

<u>Exercice 2</u> : Estimons l'ordre p d'une racine dans l'algorithme de Newton-Raphson lorsqu'il n'est pas connu d'avance, afin d'accélérer le calcul de la racine.

On rappelle que pour une racine d'ordre p, on peut écrire au voisinage de la racine α :

$$f(x) \simeq C(x - \alpha)^p$$

d'où : $s_1 = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{p}{x-\alpha}$ et ainsi $\alpha = x - p\frac{f(x)}{f'(x)}$

1. Rappeler alors la formule de récurrence qui définit la méthode de Newton-Raphson
2. On voudrait améliorer la méthode de Newton-Raphson en évaluant au cours de l'exécution de l'algorithme la valeur de p, ce qui permettrait d'éviter de fixer arbitrairement $p = 1$ quand p est inconnu, et ainsi la convergence serait plus rapide. On introduit alors la quantité :
$$s_2 = -s_1'$$
Calculer s_2 en fonction de s_1 et aussi $f(x)$ et $f''(x)$.
3. En déduire que proche de la racine α :
$$p \simeq \frac{s_1^2}{s_2}$$
4. En déduire que :
$$p \simeq \frac{1}{1 - \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2}}$$
5. Écrire alors un algorithme de Newton-Raphson modifié dans lequel on évalue, après par exemple 5 itérations, l'ordre p de la racine.

On appliquera cette méthode en TP.

Exercice 3 : Méthode de Halley

Nous allons concevoir une méthode intelligente, afin d'obtenir une méthode encore plus efficace que l'algorithme de Newton-Raphson. On se place, comme pour l'algorithme de Newton-Raphson, toujours dans le cas d'une racine α d'ordre p. Et, on se place près de la racine α, ainsi peut-on écrire $x = \alpha + h$ avec h petit.

1. Faire le développement de Taylor jusqu'à l'ordre deux de :
$$f(\alpha) = f(x - h)$$
2. En ne gardant que les trois premiers termes de ce développement, montrer que :
$$h = \frac{-f(x)}{-f'(x) + \frac{h}{2}f''(x)}$$
3. En approximant la valeur de h au dénominateur de la formule précédente par la même formule sans h au dénominateur (ce qui correspond à l'approximation de Newton-Raphson), montrer que l'on obtient :
$$h = \frac{-2f(x)f'(x)}{f(x)f''(x) - 2f'^2(x)}$$
4. En déduire la relation de récurrence de l'algorithme de Halley.
5. Quel(s) avantage(s) et inconvénient(s) peut-on envisager pour cet algorithme ?

Exercice 4 : Résolvons une équation non-linéaire à l'aide de l'algorithme de dichotomie et de de l'algorithme de Newton-Raphson.

Soit l'équation à résoudre :

$$cos(x) = x^3 - 1$$

1. Tracer l'allure des deux courbes pour donner une approximation de l'intervalle d'étude.
2. Quelle fonction $f(x)$ doit-on introduire pour utiliser les deux algorithmes cités dans le titre de l'exercice ? La définir.
3. Appliquer la méthode de dichotomie sur l'intervalle $[0; 2]$ et en déduire une approximation de la racine α recherchée à 10^{-3} près (on utilisera la calculatrice pour effectuer les calculs).
4. Appliquer la méthode de Newton-Raphson en prenant simplement $p = 1$ (racine d'ordre 1, ce qui "fonctionne" au moins toujours) pour donner une approximation de la racine α à 10^{-10} près (on utilisera la calculatrice pour effectuer les calculs).
5. Commentaires (comparer le nombre d'itérations possibles, la vitesse de convergence et la précision de chacun des deux algorithmes utilisés ici).
6. Conclusion : justifier l'emploi préalable de la dichotomie sur un petit nombre d'itérations suivi de la méthode de Newton-Raphson pour augmenter rapidement la précision.

Exercice supplémentaire : Méthode de la sécante

Supposons une situation où l'on veuille employer la méthode de Newton-Raphson, mais malheureusement on ne connait pas explicitement la fonction dérivée $f'(x)$ mais seulement la fonction $f(x)$ (peut-être aussi parce que le calcul de $f'(x)$ est rébarbatif ou trop compliqué voire impossible). On va tenter dans cet exercice d'utiliser un équivalent de la méthode de Newton-Raphson dans cette situation précise, pour n'importe quelle fonction $f(x)$ donc.

1. Rappeler la formule de récurrence sur une suite x_n qui définit l'algorithme de Newton-Raphson pour déterminer une racine d'ordre p de la fonction $f(x)$.
2. Dans la méthode de la sécante, on remplace dans la formule précédente $f'(x_n)$ pente de la tangente à la courbe C_f au point $(x_n, f(x_n))$ en considérant qu'elle est approximée par la pente de la droite qui joint les points proches $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ et $(x_n, f(x_n))$. Justifier ce choix et donner l'approximation de $f'(x_n)$.
3. En déduire la méthode de la sécante par une relation de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - p.\frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}}$$

4. Donner l'algorithme correspondant.
5. Donner un programme informatique correspondant.
6. Quelles prévisions peut-on faire sur cette méthode (rapidité, précision, etc...) ?

7. On désire calculer l'ordre de convergence de la méthode de la sécante. En considérant conformément au cours : $\epsilon_n = \alpha - x_n$ où $f(\alpha) = 0$ et en faisant des développements limités jusqu'à l'ordre 2, montrer tout d'abord que :

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \simeq f'(\alpha) - \frac{f''(\alpha)}{2}(\epsilon_n + \epsilon_{n-1}) + \frac{f'''(\alpha)}{6}(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-1}\epsilon_n + \epsilon_n^2) + ...$$

8. Montrer en poursuivant les calculs que, à l'ordre 2, on a :

$$\frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = -\epsilon_n - \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\epsilon_{n-1}\epsilon_n$$

9. En déduire :

$$x_{n+1} \simeq x_n + \epsilon_n + \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\epsilon_{n-1}\epsilon_n$$

10. Finir le calcul en concluant que :

$$\epsilon_{n+1} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\epsilon_{n-1}\epsilon_n = \lambda\epsilon_{n-1}\epsilon_n$$

avec $\lambda = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$

11. Calculons l'ordre de la méthode de la sécante, que l'on note m. On a donc d'après le cours :

$$\epsilon_{n+1} = C\epsilon_n^m$$

avec C une constante. Montrer que l'on a : $m = 1 + \frac{1}{m}$. En déduire la valeur exacte de m. Comment se nomme cette valeur ?

12. En déduire au final que la convergence de la méthode de la sécante se situe entre une convergence linéaire et une convergence quadratique.

    On testera numériquement cette méthode en TP.