Matte oblig RC-krets

Brage Losnegård Hansen

21.11.2024

I denne oppåva skal eg samanlikne den teoretiske spenningskurva til ein enkel RC-krets med ei kurve eg sjølv har målt.

1 Bakgrunnsteori

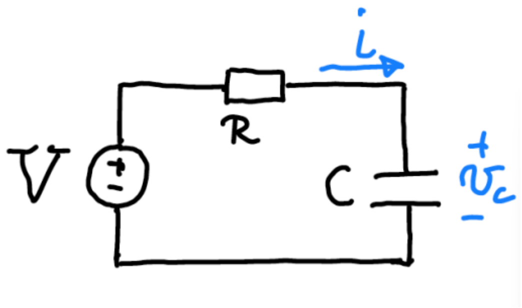

Figure 1: Ein enkel RC-krets

For å finne ei differensialligning for spenninga i kretsen over brukar vi kirchhoffs spenningslov. Den seier oss at energien levert av kjelda må vere lik summen som dei andre kretselementa mottar. Dermed kan vi setje opp likninga:

$$V = v_R + v_c \tag{1}$$

I dette tilfellet er V spenninga til nivolts batteriet, v_r er spenninga over motstanden og v_c er spenninga over kondensatoren. Spenninga over kondensatoren er gitt ved:

$$v(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(s)\, ds \tag{2}$$

og dermed bli den deriverte av spenninga lik:

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{C} \cdot i(t) \tag{3}$$

Med denne kan vi med litt algebra utleie ei likning for straumen i kresten:

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{C} \cdot i(t) \tag{4}$$

$$\dot{v}(t) \cdot C = C \cdot \frac{1}{C} i(t) \tag{5}$$

$$i(t) = C\dot{v}(t) \tag{6}$$

Visst eg så brukar Ohms lov for å finne spenninga over motstanden kan vi setje opp kirchhoffs spenningslov på nytt og få denne likninga:

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = 9 \tag{7}$$

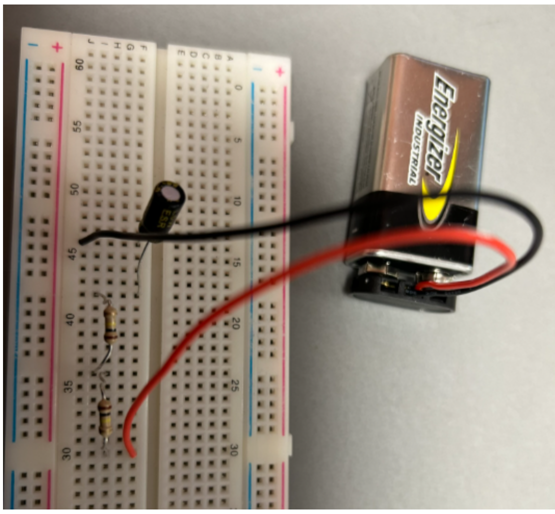

Figure 2: Kretsen eg kobla opp

2 Måling av spenning

Eg satte opp kretsen slik:
Kretsen består av to 100 kΩ motstandar kopla i serie slik at dei skal oppføre seg som ein 200 kΩ motsand, i lag med ein 100 μF kondensator og nivoltsbatteriet. Så målte eg med litt hjelp av Ascend-Oskar og fekk måla i følgande tabell:

Spenning (V)	Tid (s)
0	0
5	2.00
10	3.6
15	4.8
20	5.7
25	6.4
30	7.0
35	7.49
40	7.86
45	8.1
50	8.4
55	8.52
60	8.68
65	8.79
70	8.86
75	8.94
80	8.99
85	9.04
90	9.07
95	9.10
100	9.13
105	9.15
110	9.16
115	9.17
120	9.18
125	9.19
130	9.20
135	9.20

Table 1: Tabell for spenning i RC-kretsen over tid

Så brukte eg data eg samla til å plotte ei kurve i python for dei målte verdiane.

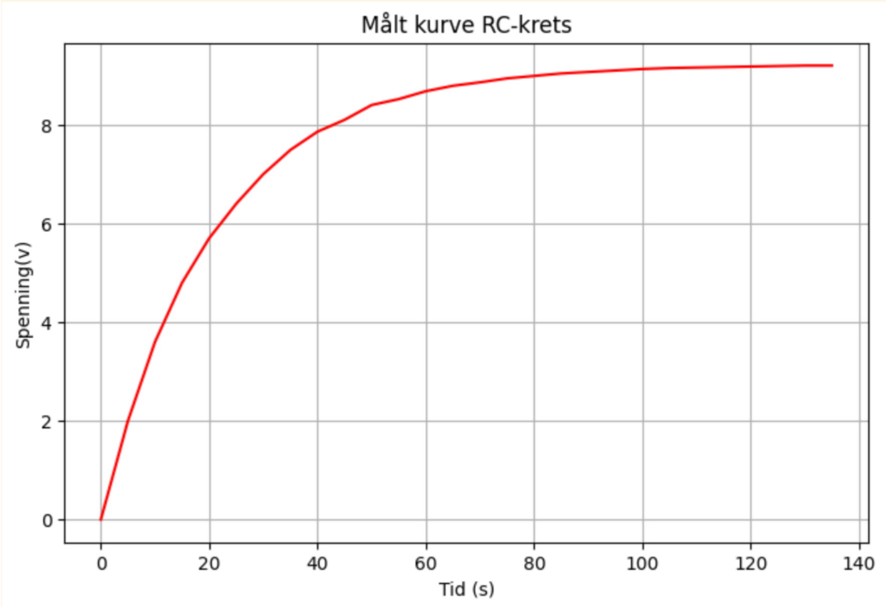

Figure 3: Den målte kurva plotta i python

3 Plotting av teoretisk spenning og målt spenning

For å plotte den eksakte grafen i python, løyser eg først differensialligninga. I dette tilfellet er $R = 200 \cdot 10^3 \Omega$ og $C = 100 \cdot 10^{-6}\ F$.

$$\begin{aligned}
RC\dot{v}(t) + v(t) &= 9 \\
\dot{v}(t) + \frac{1}{RC}v(t) &= \frac{9}{RC} \\
e^{\frac{1}{RC}t}\dot{v}(t) + \frac{1}{RC}e^{\frac{1}{RC}t} &= \frac{9}{RC} \\
\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{RC}t} + v(t)\right) &= \frac{9}{RC}e^{\frac{1}{RC}t} \\
e^{\frac{1}{RC}t} \cdot v(t) &= \frac{9}{RC}\int e^{\frac{1}{RC}t} \\
e^{\frac{1}{RC}t} \cdot v(t) &= \frac{9}{RC} \cdot RC \cdot e^{\frac{1}{RC}t} + c \\
v(t) &= 9 + c \cdot e^{\frac{1}{RC}t}
\end{aligned}$$

Så finn eg c med initialbetingelsen, som er $v(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
v(0) &= 9 + c \cdot e^{\frac{1}{RC}\cdot 0} \\
0 &= 9 + c \cdot 1 \\
c &= -9
\end{aligned}$$

Dette vil dermed seie at den løyste likinga vil sjå slik ut:

$$v(t) = 9(1 - e^{\frac{1}{RC}t})$$

Denne funksjonen plotta eg dermed opp mot den målte grafen med koden:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

tid_målt = [i for i in range(0,136, 5)]
spenning_målt = [0, 2.00, 3.6,..., 9.19, 9.20, 9.20]

def v(t):
    R = 200 * 10**3
    C = 100*10**(-6)
    return 9*(1 - math.e**(-1/(R*C)*t))

tid = np.linspace(0,135, 100)

V = [v(t) for t in tid]

plt.figure(figsize=(8,5))
plt.plot(tid_målt,spenning_målt, label='Målt kurve', color='r')
plt.plot(tid, V, label='Teoretisk kurve', color='b')
plt.title('Målt kurve RC-krets')
plt.xlabel('Tid (s)')
plt.ylabel('Spenning(v)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

4 Resultat

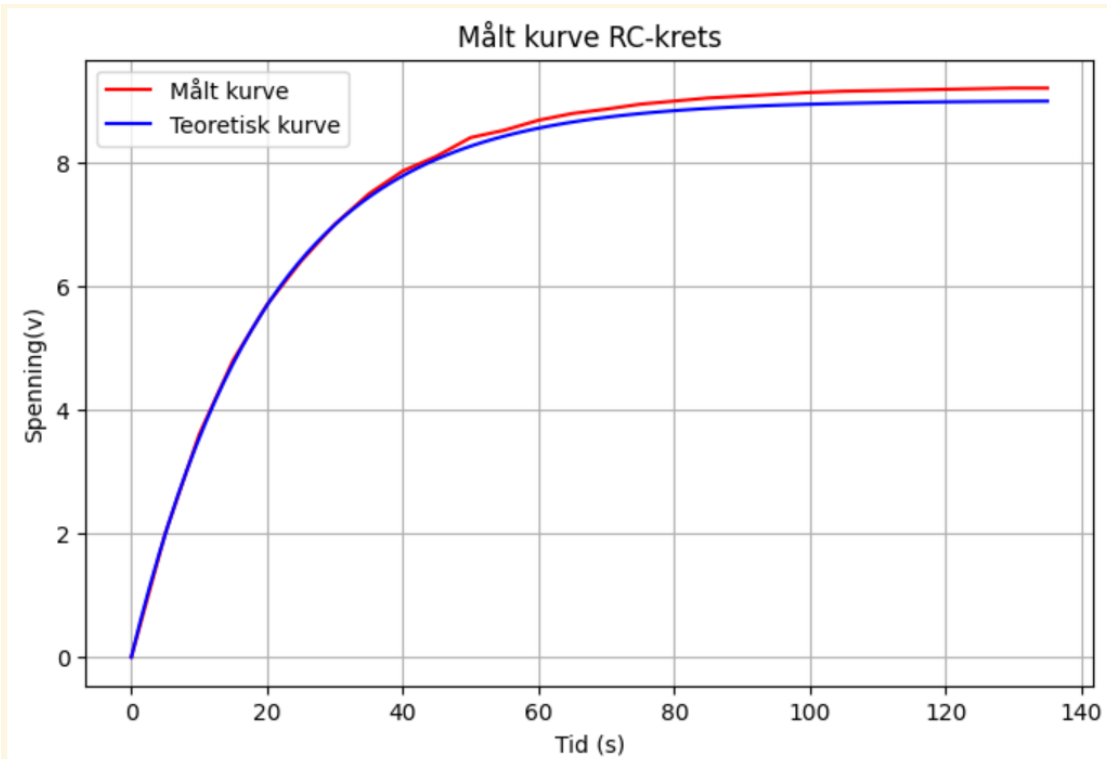

Figure 4: Målt og teoretisk graf plotta saman

Som du kan sjå på grafen over stemde målingane overraskande bra vil eg seie. Etter ca. 40 sekund ser vi at den målte kurva tek litt av, dette er fordi stasjonærverdien til den målte kurva er på 9.20, ikkje 9, tross at batteriet eg brukte var eit nivoltsbatteri. Om vi tek hensyn til at batteriet ikkje gir ut 9 volt nøyaktig, men 9.20 får vi denne grafen:

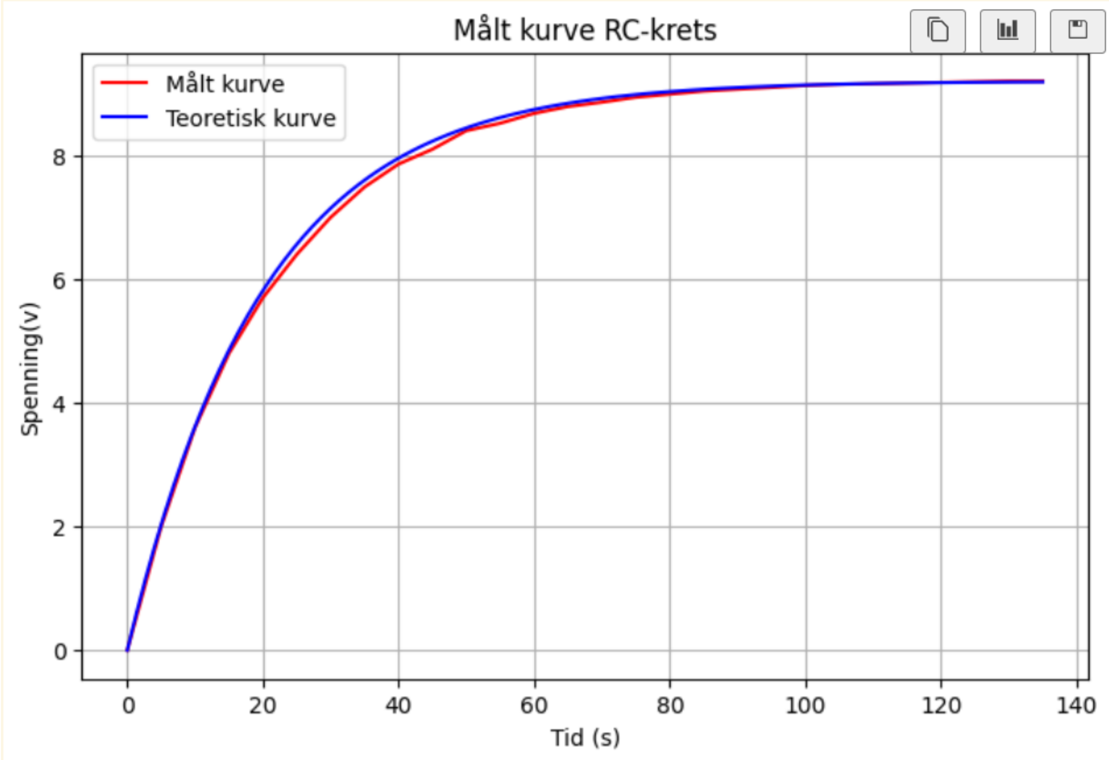

Figure 5: Graf med tilpassa verdi for batteriet

Denne kan vi sjå at passar betre. Einaste forskjellen er at den stig litt saktare enn den eksakte grafen mellom $t = 20$ og $t = 80$. Dette kan skyldes unøyaktigheit i målingane eller andre ytre forstyrrelsar. Konklusjonen er at den teoretiske modellen er god og gir eit godt bilete for korleis spenninga oppfører seg i ein enkel RC-krets.