Numerisk løsning av banebevegelsen til planetene i solsystemet Bragul

Kandidat: 15251

(Dated: September 18, 2021)

I dette eksperimentet har vi simulert bevegelsen til de åtte planetene i solsystemet Bragul, og sett på hvordan disse går i bane rundt solen i solsystemet. Vi har brukt Newtons gravitasjonslov for å finne akselerasjonen til planetene, og videre brukt Newtons andre lov for å finne akselerasjonen deres fra denne kraften. Dermed har vi brukt Euler-Cromer for å simulere hvordan planetenes posisjonsvektor forandrer seg over tid. Fra Keplers første lov vet vi at planeter beveger seg i ellipsebaner med solen i det ene brennpunktet, og vi plottet derfor planetbanene, og sammenlignet disse med ellipser. Vi kom fram til at alle planetene hadde veldig sirkulære baner, noe som stemmer godt overens med at de også hadde svært lave eksentrisiteter. Vi fikk også at planetene hadde omløpstider som ble større jo lengre fra solen banene var, noe som stemmer overens med at banene med størst avstand fra solen også har lengre bane å følge. At alle planetbanene ble ellipsebaner rundt solen, med en omløpstid tilsvarende avstanden fra solen, tyder på at simuleringen var god og realistisk.

I. INTRODUKSJON

Kunnskap om planeters bevegelse er viktig når man skal bli kjent med et solsystem, og vi ønsker derfor å se på hvordan planetene i solsystemet vårt Bragul vil bevege seg over tid. Vi skal altså numerisk regne ut planetenes bane rundt solen, for å lære mer om celestialmekanikken i solsystemet vårt. En slik planetbane kan du se skissert i figur 1.

Vi ønsker å finne posisjonsvektoren til hver av de åtte planetene relativt til solen, ved forskjellige tidspunkter. Dermed kan vi bruke resultatet fra dette til å visualisere planetbanene. Vi kommer til å bruke Newtons gravitasjonslov for å finne kraften som virker på hver planet fra solen, og dermed bruke Newtons andre lov for å finne akselerasjonen deres fra denne kraften. Deretter skal vi bruke Euler-Cromer for å finne hastigheten og posisjonen til planetene over tid. Fra Keplers første lov vet vi at planeter går i ellipsebaner, med solen i det ene brennpunktet. Vi vil derfor forvente å se at også våre planeter går i ellipsebaner rundt solen.

I dette eksperimentet kommer vi til å anta at de eneste kreftene som virker er kreftene fra solen på planetene. Vi kommer altså til å se bort fra kreftene som virker mellom planetene, og kreftene som virker fra hver planet på solen. Til disse beregningene trenger vi en del informasjon om solsystemet vårt. Vi må vite startposisjonen og starthastigheten til hver planet, samt massen til planetene og solen vår. Det er også nyttig å kjenne til eksentrisiteten til hver planet, for å kunne sammenligne banene deres med tilsvarende ellipser. All denne informasjonen finner du i tabell I.

Planet	Startposisjon		Starthastighet			
	x [AU]	y [AU]	v_x [AU/yr]	v_y [AU/yr]	m [solmasser]	Eksentrisitet
1	$8.655 \cdot 10^{-2}$	0	0	10.88	$6.141 \cdot 10^{-6}$	$7.657 \cdot 10^{-3}$
2	-0.1163	$-9.864 \cdot 10^{-4}$	$-6.512 \cdot 10^{-2}$	-9.629	$2.400 \cdot 10^{-6}$	$4.641 \cdot 10^{-2}$
3	-0.2102	0.8991	-3.303	-0.9064	$2.796 \cdot 10^{-8}$	$6.159 \cdot 10^{-2}$
4	$8.071 \cdot 10^{-2}$	0.6601	-4.036	0.4004	$6.092 \cdot 10^{-9}$	$6.306 \cdot 10^{-2}$
5	$3.964 \cdot 10^{-2}$	-0.3775	5.284	0.2605	$3.362 \cdot 10^{-4}$	$6.228 \cdot 10^{-2}$
6	$3.220 \cdot 10^{-2}$	0.2306	-6.548	0.8851	$5.293 \cdot 10^{-8}$	$1.636 \cdot 10^{-2}$
7	$-1.779 \cdot 10^{-3}$	-0.1473	8.607	0.3773	$9.843 \cdot 10^{-7}$	$8.083 \cdot 10^{-2}$
8	$3.362 \cdot 10^{-2}$	$3.771 \cdot 10^{-2}$	-10.68	9.939	$4.143 \cdot 10^{-8}$	$4.599 \cdot 10^{-2}$
Solen					0.2617	

Table I. Tabell over data fra solsystemet Bragul som blir brukt i beregning av planetbanene. I denne tabellen finner vi x- og y-komponentene til posisjons- og hastighetsvektorene til hver planet, massen til planetene, og eksentrisiteten til hver planet. I nederste linje har vi også tatt med massen til solen vår.

II. METODE

For å kunne simulere planetenes bevegelse i solsystemet trenger vi å kjenne til hvilke krefter som virker på hver planet. I vårt eksperiment gjør vi noen forenklinger, og tenker oss at det kun virker en kraft på hver planet fra solen. Vi ser altså bort fra krefter mellom planetene, og krefter på solen fra planetene. For å finne kraften på en planet fra solen kan vi bruke Newtons gravitasjonslov.

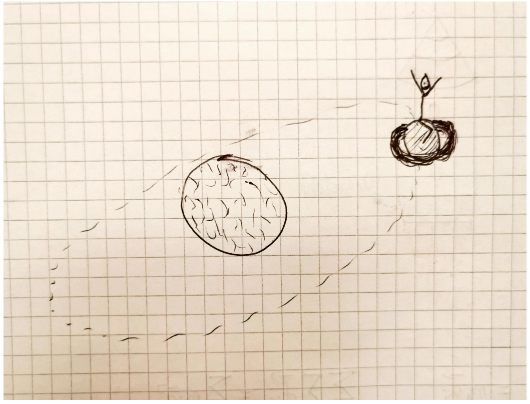

Figure 1. Skissering av eksperimentet, her med kun én planet: min hjemplanet Bragus. (Tegningen er ikke riktig skalert.)

Vi får følgende uttrykk:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \tag{1}$$

hvor $\vec{F}$ er kraften som virker på en planet fra solen, G er gravitasjonskonstanten, M er massen til solen, m er massen til planeten, r er avstanden mellom solen og planeten og $\hat{r}$ er enhetsvektoren som går fra solen til planeten. Illustrasjon av disse verdiene kan du se i figur 2

Siden vi antar at det ikke virker krefter mellom planetene er $\vec{F}$ som beskrevet i likning (1) den eneste kraften som virker på en planet. Siden vi kan finne denne kraften, kan vi bruke Newtons andre lov til å finne akselerasjonen til planeten.

$$\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{2}$$

hvor $\vec{a}$ er akselerasjonen til planeten, sett fra solen sitt referansepunkt. Vi tenker oss at vi sitter på solen, og dermed har dette referansepunktet, altså plasserer vi solen i origo i vårt koordinatsystem. Vi skal nå finne banen til hver planet rundt solen, altså posisjonen til hver planet relativt til solen til enhver tid. Vi beskriver posisjonen til en planet ved hjelp av en posisjonsvektor $\vec{r}$, som peker ut fra origo til sentrum av planeten. Vi tenker oss også at alle banene skjer i et plan, altså at vi kun jobber med to-dimensjonelle vektorer $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$. Posisjonen til hver planet ved tidspunkt $t = 0$ kan du se i tabell I.

For å finne banen til planetene må vi se hvordan $\vec{r}$ til hver planet forandrer seg over tid. Vi vil altså se hvordan planetene forflytter seg. Til dette skal vi bruke Euler-Cromer metoden. Denne er svært nyttig å bruke, siden vi kan utnytte at akselerasjon er definert som den deriverte av hastigheten, og videre at hastigheten er definert som den deriverte av posisjonen. Vi bruker altså at:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{3}$$

hvor $\vec{v}$ er hastighetsvektoren til planeten, og $\vec{r}$ er posisjonsvektoren til planeten. Når vi setter dette inn i Euler-Cromer får vi følgende likninger:

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta t \cdot \vec{a}(t) \tag{4}$$
$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \cdot \vec{v}(t + \Delta t) \tag{5}$$

hvor Δt er et lite tidssteg. I figur 3 kan du se en illustrasjon av Euler-Cromer. Ved å bruke Euler-Cromer kan vi gå mange slike små tidssteg, og dermed finne posisjonsvektoren for hver planet, ved hvert tidspunkt, og på denne måten finne banen til alle planetene i solsystemet. Til min simulering har jeg valgt å sette $\Delta t = 10^{-4}$ yr, og la simulasjonen gå over $T = 2$ yr. For å finne akkurat disse tallene prøvde jeg meg litt fram med forskjellige verdier, og fant at dersom jeg brukte en for stor Δt brøt noen av planetene ut av banen og ble slengt ut i solsystemet, og dersom jeg brukte en for liten T var simulasjonen så kortvarig at noen av planetene ikke bevegde seg en full bane.

Det kan være interessant å merke seg her at en Δt på 10^{-4} yr tilsvarer omtrent 53 minutter, noe som kan virke som veldig lenge når det skal være snakk om små tidssteg. Dersom vi ser på definisjonen i likning (3) bruker vi jo egentlig den deriverte, som jo tilsvarer infinitesimale endringer i tid. Likevel er et tidssteg på 53 minutter svært lite når vi ser på store planeter som jo beveger seg over store avstander. Vi kan jo for eksempel se på starthastigheten til planet 1 i tabell I, som jo beveger seg med en fart på 10.88 AU/yr, som altså tilsvarer omtrent 52 km/s. Videre kan vi jo tenke oss hvor mange tidssteg vi måtte gått dersom simulasjonen skulle gå over to år, med et tidssteg på under et sekund.

Etter å ha gjort de numeriske utregningene plottet jeg planetbanene, og bevegelsen deres langs x-aksen over tid, for å finne både formen på banene, og omløpstidene. Det er forventet at planetbanene skal være ellipsebaner, og jeg plottet derfor til slutt noen ellipser for å sammenligne planetbanene med. Til dette brukte jeg følgende formel:

$$r(\theta) = \frac{b}{\sqrt{1 - (e\cos\theta)^2}} \tag{6}$$

hvor r er lengden til et punkt på ellipsen fra sentrum, θ er vinkelen opp fra den store halvaksen, b er den lille halvaksen og e er eksentrisiteten til ellipsen. Denne formelen fant jeg på Wikipedia (2). I figur 4 kan du se en slik ellipse.

III. RESULTATER

I denne simuleringen regnet jeg ut banene til hver av de åtte planetene rundt solen i solsystemet Bragul. I figur 5 har jeg plottet disse banene, med solen i sentrum (markert med en svart prikk). Plottet viser x- og y-komponentene til hver av planetenes posisjonsvektor, for hvert tidspunkt. For litt ryddigere plot kan du se på

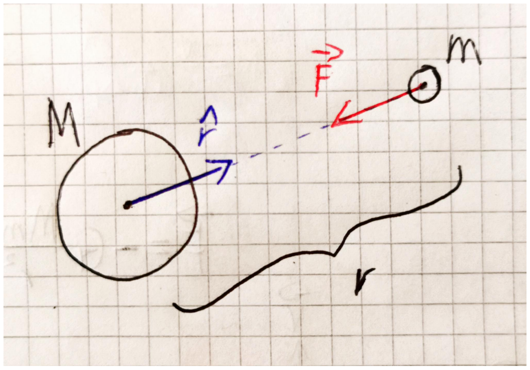

Figure 2. Illustrasjon av kraften som virker på en planet fra solen, som beskrevet i likning 1

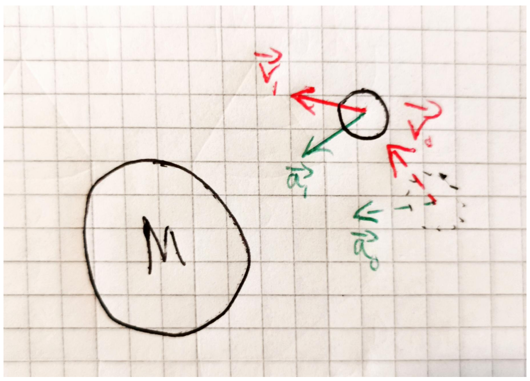

Figure 3. Her kan du se hvordan vi simulerer en planets bevegelse ved hjelp av Euler-Cromer. Legg spesielt merke til hvordan den nye posisjonen til planeten er i retning $\vec{v}_0$ fra den forrige, og den nye hastigheten $\vec{v}_1$ peker mer i retning av $\vec{a}_0$. Disse er ment som illustrasjon, og er ikke nøyaktig skalerte.

figur 6, 7 og 8, som inneholder plot av henholdsvis de innerste, midterste og ytterste banene rundt solen.

Jeg har også valgt å ta med plot av x-posisjonen til disse banene over tid, for å få et bedre bilde av omløpstiden til planetene. Disse plottene kan du se i figur 9, 10 og 11, som henholdsvis viser plot for de innerste, de midterste, og de ytterste planetbanene. Alle disse plottene viser $x(t)$ over en periode på to år. Vi kan finne omløpstiden for en planet fra et slikt plot ved å se på tiden det tar mellom to bølgetopper, siden dette er

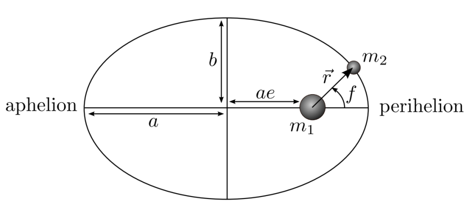

Figure 4. Illustrasjon av en ellipse, hentet fra (1). I denne illustrasjonen kalles vinkelen f, men vi har valgt å heller bruke θ.

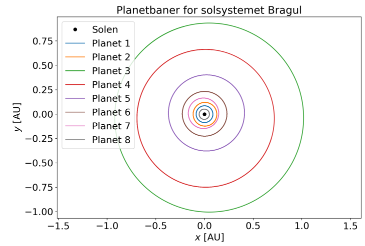

Figure 5. Plot av banene til hver planet i solsystemet Bragul.

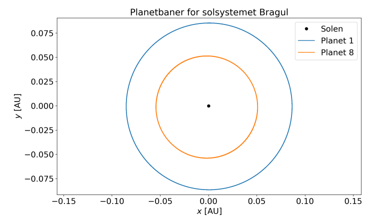

Figure 6. Plot av de innerste planetbanene (banene hvor perihel er på $x < 0.1$ AU.

tiden det tar for planeten å bevege seg fra perihel, en tur rundt solen, og tilbake til perihel. Vi kan fra disse plottene se at planet 1 og 8 har svært korte omløpstider, siden kurvene har ganske høy frekvens, og vi derfor har mange bølgetopper over perioden på to år. Altså går planetene mange ganger rundt solen i løpet av perioden. Vi ser at planet 2, 6 og 7, som er de midterste banene har litt lengre omløpstid, siden det er lengre avstand mellom bølgetoppene. Planet 3, 4 og 5 har de lengste omløpstidene, hvor planet 3 har den lengste, med en omløpstid på litt under to år.

IV. DISKUSJON

I dette eksperimentet har vi gjort et par antagelser, som vi skal se nærmere på nå.

Vi har antatt at det ikke virker noen kraft på solen fra planetene. I tabell I ser vi at massen til solen er veldig mye større enn massen til planetene (se figur 12). Solen har over 700 ganger så stor masse som selv den største planeten (planet 5), og over 40 000 ganger så stor som den nest største planeten (planet 1). Fra Newtons tredje lov vet vi at kraften som virker på solen fra planeten er like stor som kraften som virker på planeten fra solen, men fra newtons andre lov (2) ser vi at akselerasjonen til solen fra denne kraften er proporsjonal med massen. Siden massen til solen er så mye større enn massen til planetene vil denne akselerasjonen derfor bli veldig liten sammenlignet med akselerasjonen til planetene. Å se bort fra kreftene som virker på solen er dermed ikke en veldig dårlig tilnærming, og simuleringen vår vil nok være ganske god til tross for denne forenklingen.

Videre antok vi at det heller ikke virker krefter mel-

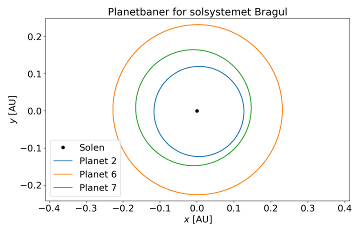

Figure 7. Plot av de midterste planetbanene (banene hvor perihel er på $0.1 < x < 0.25$ AU.

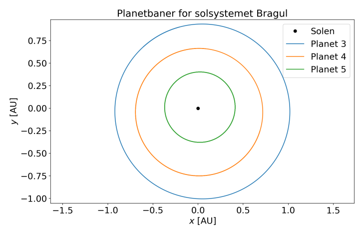

Figure 8. Plot av de ytterste planetbanene (banene hvor perihel er på $x > 0.25$ AU.

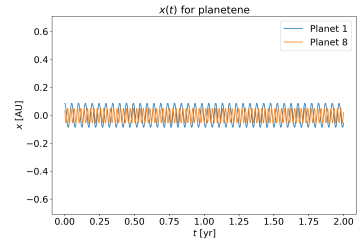

Figure 9. Plot av de innerste planetbanenes x-komponent over tid t.

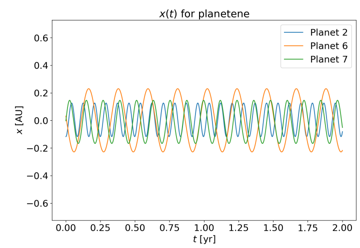

Figure 10. Plot av de midterste planetbanenes x-komponent over tid t.

lom planetene, noe det selvsagt ville gjort i den virkelige verden. Igjen har vi at solen har veldig mye større masse enn planetene, og kraften som virker på planeten fra solen vil være mye større enn kreftene fra de andre planetene. Denne antagelsen er altså også en grei antagelse for simuleringen vår, med de nøyaktighetene vi krever.

La oss se på resultatet vårt for omløpstidene i figur 9, 10 og 11. Vi ser at det er en tydelig sammenheng her mellom avstanden til banen ut fra solen, og omløpstiden. De banene som er nærmest solen (de med laveste bølgetopper) er også de banene som har kortest omløpstid (avstand mellom to bølgetopper. Dette gir mening, siden jo lengre planetene er fra solen, jo større baner må de bevege seg over, og da må de også bruke lenger tid på å komme gjennom hele banen. Bildet vi får av planetbanene fra disse figurene er altså svært realistiske.

La oss også se på resultatet vi fikk for planetbanene i figur 5. Plottet har like akser, og representerer dermed korrekt form på planetbanene. Det første jeg legger merke til med disse banene, er at de er veldig sirkulære, og har ikke så tydelige ellipseformer som jeg gjerne forventet i utgangspunktet. Dersom vi ser på de innerste banene som ligger tett inntil hverandre kan vi likevel se at det er noen forskyvninger der, altså at banene ikke er perfekte sirkler med solen i sentrum. Her er det lett å tenke at banene er veldig sirkulære på grunn av antagelsen vår om at det ikke virker krefter på solen, og at den dermed ikke flytter på seg. Dette vil kunne påvirke, men dette er nok i svært liten grad, slik som diskutert tidligere.

La oss heller ta en titt på eksentrisiteten (e) til planetene i tabell I, og se hvordan dette påvirker planetbanene. Vi vet at eksentrisiteten til en planet sier noe om formen på planetens bane rundt solen. Dersom vi har $0 \leq e < 1$ har vi en ellipsebane, hvor $e = 0$ blir en sirkel (som er en undergruppe av ellipse). Dersom vi har $e = 1$ eller $e > 1$ får vi henholdsvis parabol- og hyperbol-baner. I tabell I ser vi at alle planetene har en veldig lav eksentrisitet, hvor planet 7 har den største: $e = 8.083 \cdot 10^{-2}$. I figur 13 har jeg tegnet opp tre forskjellige ellipser, med forskjellig eksentrisitet. Her kan vi se at ellipsen med eksentrisitet $e = 0.1$ (som er større enn eksentrisiteten for alle planetene våre) er svært lik ellipsen med eksentrisitet $e = 0$, som jo er en perfekt sirkel. Siden eksentrisiteten til alle planetene i solsystemet er mindre enn $e = 0.1$ vil vi forvente at alle planetene følger baner som ligner på sirkler i stor grad. De sirkulære banene i figur 5 ser altså riktige ut, og vi har dermed en veldig troverdig simulering.

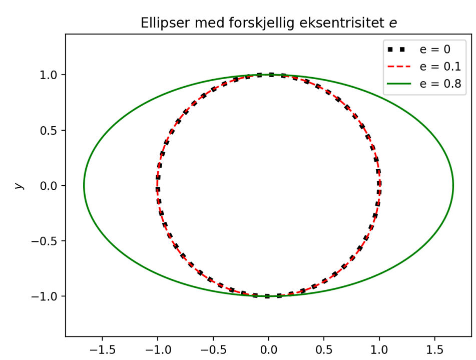

Figure 13. Plot av ellipser med eksentrisitet $e = 0$, $e = 0.1$ og $e = 0.8$.

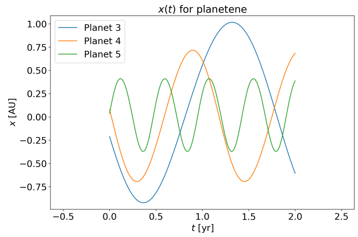

Figure 11. Plot av de ytterste planetbanenes x-komponent over tid t.

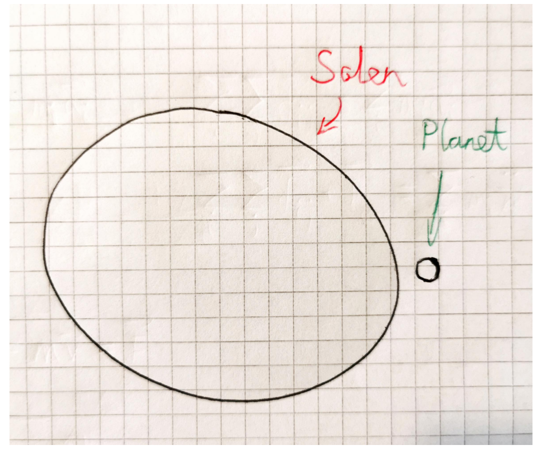

Figure 12. Illustrasjon av den store masseforskjellen mellom solen og planetene. Dette er kun for å illustrere, og tegningen er ikke nødvendigvis riktig skalert.

V. KONKLUSJON

Vi har sett på planetenes bevegelse i solsystemet Bragul, og numerisk regnet ut planetenes posisjon over tid, relativt til solen de går i bane rundt. Vi har gjort antagelser om at det ikke virker krefter på solen fra planetene, og at det også ikke virker noen krefter mellom planetene. Disse antagelsene ser ikke ut til å ha påvirket simuleringen i noen alvorlig grad, og resultatet fra utregningene er svært troverdige. Vi har fått ellipsebaner som i stor grad ligner sirkler, noe som stemmer overens med de lave eksentrisiteten til planetene. Omløpstiden til planetene samsvarer også godt med avstanden deres fra solen, og er større jo lengre unna solen banen går. Vi har altså fått gode og troverdige planetbaner rundt solen, som stemmer godt overens med forventningene til hvordan planeter skal bevege seg i et solsystem.

REFERANSER

(1) Hansen, F. K., 2017, Forelesningsnotat 1B i kurset AST2000

(2) https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse#Polar_form_relative_to_center