

Analyse av data fra stjernemålinger

Kandidat: 15251
(Dated: October 5, 2021)

I dette eksperimentet har vi sett på målinger av hvordan bølgelengden og lysfluksen fra fem forskjellige stjerner varierer over tid. Vi har analysert disse målingene for å finne hastigheten til stjernene, og avgjøre om stjernene hadde planeter som går i bane rundt dem. Dette gjorde vi ved å se på hvordan hastigheten til stjernene varierte. Dersom hastigheten oscillerte med regelmessige svingninger konkluderte vi med at stjernene hadde en planet som gikk i bane. Dette var tilfellet for fire av de fem planetene. Vi så også på lysfluksen fra stjernene, og lette etter regelmessige fall i plottet. Dersom vi hadde slike fall kunne dette være fordi planeten til stjerna befant seg mellom jorden og stjerna, og at vi derfor fikk en formørkelse. Vi konkluderte med at tre av de fire planetene ga en slik formørkelse. Dessverre var formørkelsene kortvarige, og vi kunne derfor ikke hente noe mer informasjon fra de. Vi kunne likevel bruke variasjonen i hastigheten til stjernene for å finne en nedre verdi for massen til planetene som gikk i bane rundt stjernene. Vi gjorde dette både ved å lese av plottene, og ved å bruke minste kvadraters metode for å finne en modell for hastigheten uten støy. Til slutt sammenlignet vi resultatet for planetmassen som vi fikk ved øyemål, og ved minste kvadraters metode, og fant at øyemål hadde vesentlige svakheter, og at det ble mer eksakte resultater ved å bruke minste kvadraters metode.

I. INTRODUKSJON

Som astronomer er vi alltid interessert i å lære mer om universet vårt, og da er det nyttig å kunne finne ut mest mulig om planeter og stjerner fra minst mulig informasjon. I dette eksperimentet har vi derfor gjort noen målinger. Fra fem forskjellige stjerner har vi funnet massen til stjerna og bølgelengden til lyset fra stjerna når den står i ro, og vi har gjort målinger av hvordan bølgelengden og lysfluksen (mengden lys vi mottar) fra stjerna varierer over tid. Fra disse begrensede dataene ønsker vi å analysere stjernene og finne ut mest mulig om dem. En illustrasjon av hvordan stjerner og planeter blir til målinger og grafer kan du se i figur 1.

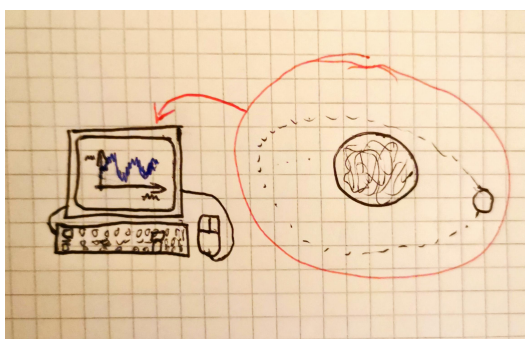


Figure 1: Illustrasjon av hvordan universets stjerner og planeter kan bli til plot og grafer som vi kan lese av på datamaskinen vår. Dette er kun en illustrasjon, og stjernen og planeten er ikke skalert, heller ikke datamaskinen. Grafen som er tegnet på maskinen er oppfunnet, og oppgir ikke nødvendigvis noe informasjon om den virkelige verden.

Vi kommer til å bruke dopplereffekten til å finne hastigheten til stjernene, og plote dette som funksjon av tid. Ved å lese av disse plottene skal vi finne ut om

Stjerne	m_* [solmasser]	λ_0 [nm]
1	1.50	656.28
2	1.46	656.28
3	1.27	656.28
4	0.85	656.28
5	3.99	656.28

Table I: Tabell over verdiene vi brukte til dette eksperimentet. m_* er massen til stjerna, og λ_0 er bølgelengden til lyset fra stjerna når den står i ro.

stjernene har en planet som går i bane rundt dem, og vi skal finne hastigheten til massesenteret mellom stjerna og planeten. Vi kommer til å analysere fluksen av lys fra stjerna, og lete etter avvik for å vurdere om eventuelle planeter noen ganger passerer stjerna på en slik måte at vi får formørkelser, og om vi eventuelt kan bruke denne formørkelsen til å si noe om radiusen og tettheten til planeten. Vi kommer også til å finne en nedre grense for massen til planetene ved å lese av fra hastighetskurvene til stjerna.

Målingene våre fra stjernene inneholder mye støy, så vi kommer også til å bruke minste kvadraters metode for å lage modeller for stjernehastighetene, og på denne måten bli kvitt støyen. Vi kommer til å bruke modellene vi lager til å finne massen til en av planetene som går i bane rundt stjernene på nytt, og sammenligne resultatet med massen vi fikk ved å selv lese av grafene, og bruke dette til å analysere hvor sikkert det egentlig er å lese av grafer med øyemål.

Datafiler med målinger av bølgelengde og fluks over tid finner du i (2). I tillegg til disse målingene brukte vi verdiene i tabell I.

II. METODE

For å få informasjon om stjernene vi har gjort målinger for er det lurt å visualisere målingene. Da blir de lettere å lese og forstå, og vi kan enklere bruke resultatene videre. Det første vi må gjøre er derfor å plote hastigheten til stjernene og lysfluksen fra stjernene som funksjoner over tid. Fluksen av lys fra stjernene, altså hvor mye lys vi mottar fra stjerna ved ethvert tidspunkt, har vi målt, og disse er dermed enkle å plote. Hastigheten må vi dermed finne fra målingene våre av bølgelengden til lyset vi har mottatt fra stjernene. Vi har fått oppgitt bølgelengden λ_0 fra hver stjerne når de står i ro, og bølgelengdene ved hvert tidspunkt i målingene vår $\lambda(t)$. Fra dette kan vi bruke dopplereffekten. Fra hvor mye bølgelengden har forskøvet seg fra λ_0 kan vi se hvor stor hastigheten til stjernen radielt ut fra vår planet er (se figur 2). Vi bruker dopplerformelen:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} \quad (1)$$

Hvor λ er bølgelengden målt ved et tidspunkt t , λ_0 er bølgelengden til lyset sendt fra stjernen når den er i ro, v_r er den radielle hastigheten vekk fra planeten vår, og c er lyshastigheten $\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s. Siden λ_0 og c er kjente konstanter, og vi kjenner λ for ethvert tidspunkt kan vi finne v_r for hvert tidspunkt fra denne likningen.

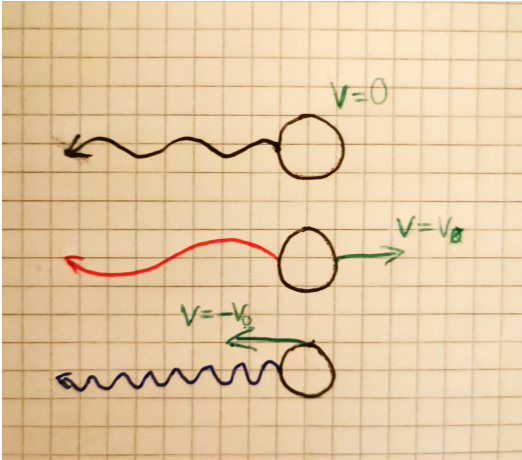


Figure 2: Illustrasjon av dopplereffekten på lys fra en stjerne. Den øverste stjernen står i ro, og sender ut vanlig lys med bølgelengde λ_0 . Den andre stjernen beveger seg vekk fra jorden, og bølgelengden blir derfor lengre. Den nederste stjernen beveger seg mot jorden, og bølgelengden til lyset blir da kortere.

Dersom stjernen har en planet som går i bane rundt den vil stjernes hastighet påvirkes av dette, og vi kan se at v_r vil variere i kurver, lignende en sinuskurve (se figur 3), ut fra påvirkningen fra planeten som går i bane rundt den. Fra denne figuren ser vi at den radielle hastigheten til stjernen, relativt til massesenteret, er lik 0 i punkt A og C. Dette er siden stjernas hastighet her kun har en

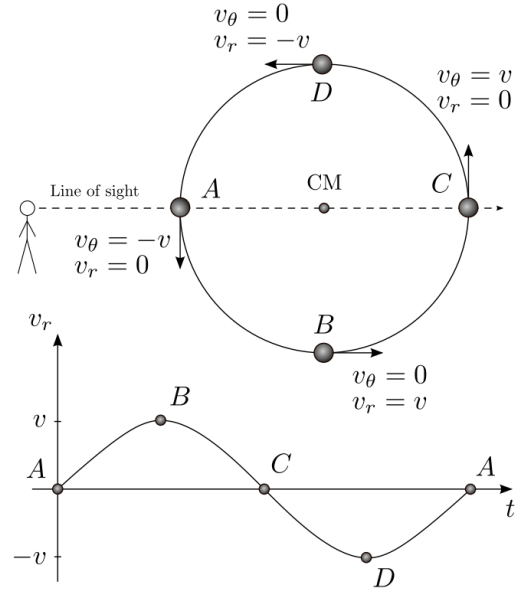


Figure 3: Her ser vi en visualisering av hvordan målingene for en stjernes hastighet ser ut. Øverst ser vi hvordan stjernen går i bane rundt massesenteret. Nederst har vi en eksempelkurve som viser hvordan hastigheten varierer ut fra bevegelsen til stjernen. Figuren er hentet fra (1).

komponent som er vinkelrett på synshorizonten. Legg merke til at virkelige data inneholder mye støy, og derfor ikke nødvendigvis gir en slik fin sinuskurve. En illustrasjon av hvordan grafen kan se ut kan du se i figur 4. I vår måling av den radielle hastigheten til stjerna må vi også ta hensyn til at selve massesenteret beveger seg. Denne hastigheten kalles egenhastigheten v_{pec} (eng: *peculiar velocity*). Vi vet at den totale hastigheten til stjerna er gitt ved

$$\vec{v} = \vec{v}_{pec} + \vec{v}_*$$

hvor \vec{v} er den totale hastigheten til stjerna, \vec{v}_{pec} er hastigheten til massesenteret (egenhastigheten) og \vec{v}_* er hastigheten til stjerna relativt til massesenteret. Dette må også gjelde for hver komponent av hastighetene, og vi kan derfor formulere likningen likt for de radielle hastighetskomponentene:

$$v_r = v_{pec,r} + v_{*,r} \quad (2)$$

hvor v_r , $v_{pec,r}$ og $v_{*,r}$ er de radielle hastighetskomponentene til henholdsvis \vec{v} , \vec{v}_{pec} og \vec{v}_* . Siden vi vet at $v_{*,r} = 0$ i punkt A og C i figur 3, må hele den målte hastigheten vår i disse punktene være hastigheten til massesenteret. Hastigheten til massesenteret er konstant, og siden $v_{*,r}$ like ofte er positivt som negativt har vi at den radielle hastigheten til massesenteret $v_{pec,r}$ utgjør gjennomsnittet fra hastighetsmålingene våre. Vi kan altså finne $v_{pec,r}$

ved å ta gjennomsnittet over alle målingene våre for v_r :

$$v_{pec,r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{r,i} \quad (3)$$

hvor N er antall målinger vi har for v_r , og $v_{r,i}$ er målingen ved tidspunkt t_i . For å finne hastigheten $v_{*,r}$ bruker vi likning (2), og får

$$v_{*,r} = v_r - v_{pec,r}$$

Vi gjør dette for hvert tidssteg, og plotter resultatet over tid. Vi kan dermed bruke plottet av hastigheten til å finne informasjon om stjerna.

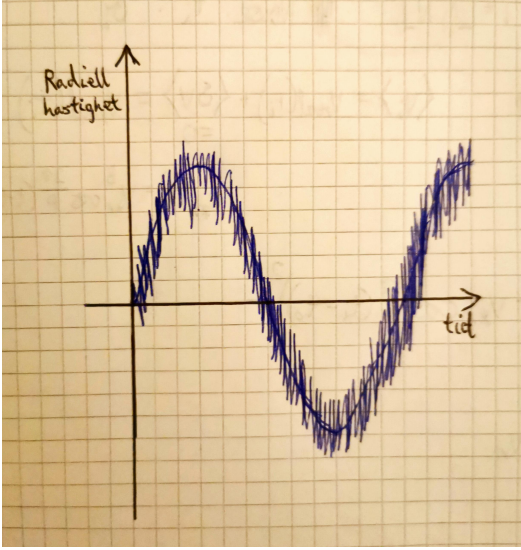


Figure 4: Illustrasjon av hvordan et plot av den radielle hastigheten til stjerna kan se ut. Legge merke til at vi her har mye støy, som kan gjøre plottet vanskeligere å lese. Denne figuren er kun et skissert eksempel, og ikke en virkelig måling.

Det første vi legger merke til med hver stjerne er om de følger den sinus-lignende kurven som i figur 3. Hvis hastigheten følger et slikt mønster, og går i bølger, tyder dette på at stjerna har en planet som går i bane rundt den. Dette vet vi siden massesenteret mellom en stjerne og en planet går med omtrent konstant hastighet, og vil derfor ikke oscillere frem og tilbake. Hvis det ikke går noen planet i bane rundt stjerna vil massesenteret til systemet være massesenteret til stjerna, og stjerna burde dermed bevege seg med konstant hastighet. Siden vi har en oscillerende kurve for stjernas hastighet tyder dette på at den svinger om et massesenter, i tillegg til at hele systemet beveger seg med konstant hastighet fra oss. Tilsvarende vil altså et plot som ikke oscillerer, men som holder seg omtrent på samme hastighet ikke ha noen planet i bane. (Husk at vi må regne med noe støy som vil variere, men om hastigheten i snitt oscillerer eller går konstant skal være enkelt å se til tross for støyen.)

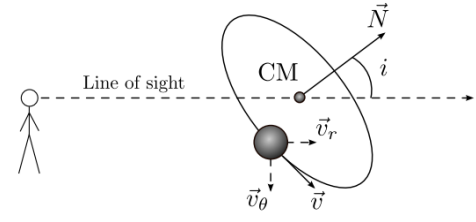


Figure 5: Illustrasjon av inklinajonen til en planetbane rundt en stjerna. Inklinajonen i er vinkelen opp fra synslinja til normalen til planetbanens plan. Figuren er hentet fra (1)

Dersom stjerna har en planet som går i bane rundt den er det interessant å finne massen til stjerna. Fra Keplers tredje lov kan vi utlede følgende formel for å finne massen til planeten:

$$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*,r,max} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}} \quad (4)$$

hvor m_p er massen til planeten, m_* er massen til stjerna, $v_{*,r,max}$ er den maksimale radielle hastigheten til stjerna relativt til massesenteret (den radielle hastigheten i punkt B i figur 3), P er perioden til stjernas hastighet (tiden fra en bølgetopp til den neste), G er gravitasjonskonstanten, og i er inklinajonen (vinkelen) fra synslinja til normalen til planetbanens plan (se figur 5). For full utledning av likning 4 kan du se (1). Siden vi ikke kjenner til inklinajonen i kan vi ikke finne en eksakt masse for planeten vår, men vi kan finne en nedre verdi. Vi omskriver likning 4:

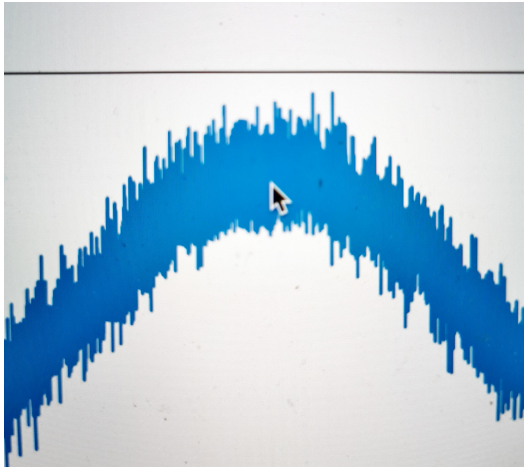
$$m_p = \frac{m_*^{2/3} v_{*,r,max} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3} \sin i}$$

Vi vet at $\sin i$ er størst når $i = 90^\circ$, da er $\sin i = 1$. Dersom vinkelen er mindre enn dette blir m_p større med en faktor $\frac{1}{\sin i}$. Vi får derfor at en nedre verdi for m_p er

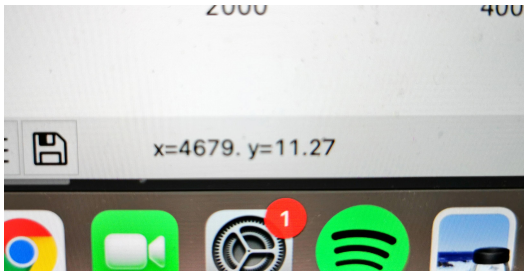
$$m_{p,min} = \frac{m_*^{2/3} v_{*,r,max} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}} \quad (5)$$

For å finne denne nedre verdien $m_{p,min}$ trenger vi å vite massen til stjerna m_* , den maksimale radielle hastigheten til stjerna $v_{*,r,max}$ og perioden P . Vi har fått oppgitt m_* for hver stjerne, og hastigheten over tid har vi plottet, og vi kan dermed lese av dette plottet. Vi skal først bruke øyemål til å forsøke å lese av plottet og finne $v_{*,r,max}$ og P , og dermed skal vi bruke en statistisk metode for å få mer nøyaktige svar. Dette er for at vi skal kunne sammenligne svarene med de to metodene. Vi begynner med å bruke øyemål.

Fra plottene vi får av den radielle hastigheten $v_{*,r}$ til stjerna kan vi finne den maksimale radielle hastigheten. Vi antar at det er like mye støy i positiv retning som i



(a) For å lese av informasjon fra et plot flytter jeg musepekern dit jeg vil lese av.



(b) Nederst i vinduet oppdateres kontinuerlig hvilken x - og y -verdi enden av musepekern min ligger på.

Figure 6: Her kan du se hvordan jeg leste av informasjon fra plottene mine. Jeg har brukt pakken Matplotlib.pyplot i Python for å plote dataen og lese av plottene.

negativ retning, og at den virkelige radielle hastigheten dermed ligger midt i støyen. Fra dette kan vi lese av omtrent hvor stor den radielle hastigheten er i toppunktet (punkt B i figur 3). Metoden jeg har brukt for å lese av kan du se i figur 6. Jeg har brukt et program slik at jeg kan holde musepekeren over et sted på plottet, også forteller programmet meg hvor musepekeren befinner seg til ethvert tidspunkt. Da kan vi holde musepekeren over omtrent der vi tror toppunktet er (figur 6a), og lese av y -verdien til plottet i dette punktet (figur 6b). På samme måte finner jeg tidspunktet for to slike toppunkter, og finner differansen mellom disse to tidspunktene. Denne differansen vil da være perioden P . Etter å ha lest av $v_{*,r,max}$ og P for stjernene kan jeg bruke likning 5 til å finne en nedre verdi for planetmassen.

Alternativt kan jeg finne $v_{*,r,max}$ og P mer eksakt ved å bruke statistisk analyse. Vi skal først lage oss en modell for den radielle hastighetskomponenten til stjerna $v_{*,r}$. Vi har sett fra figur 3 at denne skal ligne en sinus-/cosinuskurve. Vi skal derfor bruke en cosinusmodell for

våre beregninger. Vi får

$$v_{*,r}^{\text{model}}(t) = v_{*,r,max} \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - t_0)\right) \quad (6)$$

hvor $v_{*,r}^{\text{model}}(t)$ er modellen vår av funksjonen $v_{*,r}$ over tid, og t_0 er tidspunktet hvor den radielle hastigheten er maksimal ($v_{*,r}^{\text{model}}(t_0) = v_{*,r,max}$). At det siste uttrykket stemmer ser vi siden dersom $t = t_0$ blir $\cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - t_0)\right) = \cos 0 = 1$. Vi ser også at dersom vi ser på tidspunktet for en annen bølgetopp, altså hvor $t = t_0 + P$ (første bølgetopp pluss perioden) får vi også at $v_{*,r}^{\text{model}}(t_0 + P) = v_{*,r,max}$, siden $\cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - t_0)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{P}P\right) = \cos(2\pi) = 1$. Modellen ser altså ut til å stemme. For å finne ut hvilke verdier for t_0 , $v_{*,r,max}$ og P vi skal bruke i 6 må vi teste med forskjellige verdier, og bruke minste kvadraters metode for å avgjøre hvilken metode som er den beste.

Minste kvadraters metode går ut på å regne ut funksjonen

$$\Delta(t_0, v_{*,r,max}, P) = \sum_t (v_{*,r}^{\text{data}}(t) - v_{*,r}^{\text{model}}(t, t_0, v_{*,r,max}, P))^2 \quad (7)$$

for mange forskjellige modeller $v_{*,r}^{\text{model}}$, og finne ut hvilken modell som gir minst avvik fra $v_{*,r}^{\text{data}}$. Her er Δ et uttrykk for avviket, og $v_{*,r}^{\text{data}}$ er den radielle hastigheten til stjerna fra målingene våre. At Δ er et uttrykk for avviket mellom modellen og målingene er enkelt å se, siden vi tar differansen mellom dem ved hver tidspunkt (som sier noe om hvor langt modellen er fra målingene), opphører dette i andre (slik at vi alltid får positive tall, og differansene mellom de store og de små avvikene ikke kansellerer hverandre), og summerer over alle tidspunktene (slik at vi får et uttrykk for hvor mye hele funksjonen avviker fra alle målingene). Det er den intuitive forståelsen for minste kvadraters metode. For en lengre matematisk utledning kan du se på (1).

Vi må nå finne ut hvilke verdier vi ønsker å bruke for t_0 , $v_{*,r,max}$ og P for de forskjellige modellene vi skal sette inn i 7. For å finne gode kandidater til disse verdiene skal vi se på plottet vårt for den radielle hastigheten til hver stjerne som har en planet i bane. Vi skal velge oss ut en t -verdi som vi ser må være mindre enn t_0 , og en t -verdi som må være større enn t_0 . Vi kaller disse henholdsvis t_{min} og t_{max} . Dermed lager vi oss en mengde med 20 jevnt fordelte verdier for t_0 i intervallet $[t_{min}, t_{max}]$. Siden vi vet at t_0 må ligge mellom t_{min} og t_{max} kan vi anta at en av de 20 verdiene vil være svært nærme den virkelige t_0 . Vi gjør tilsvarende for $v_{*,r,max}$, ved å velge oss en verdi som må være mindre, og en som må være større enn $v_{*,r,max}$. Og det samme for P , ved å finne en minste mulige og en størst mulige periode. For hver av disse tre verdiene lager vi en mengde med 20 jevnt fordelte verdier i intervallet fra den minste mulige, til den største mulige. Dermed lager vi en modell $v_{*,r}^{\text{model}}$ for alle mulige kombinasjoner av disse verdiene for t_0 , $v_{*,r,max}$ og P ved å bruke likning 6. Det blir altså $20^3 = 8000$ forskjellige

modeller. Dermed regner vi ut $\Delta(t_0, v_{*,r,max}, P)$ for alle disse modellene ved å bruke minste kvadraters metode (likning 7).

For å finne en mer eksakt masse enn den vi hadde funnet kun ved øyemål, bruker vi resultatet fra minste kvadraters metode. Vi finner ut hvilken modell som gir lavest Δ , og bruker $v_{*,r,max}$ og P fra denne modellen til å finne planetmassen. Dette gjør vi ved å sette disse verdiene inn i 5. På denne måten finner vi en bedre verdi for den nedre verdien til planetmassen.

Dersom en stjerne har en planet som går i bane rundt den kan det være interessant å se på om denne planeten på noe tidspunkt befinner seg mellom oss og stjerna, slik at vi får en formørkelse. Siden vi har målt lysfluksen fra stjerna, vet vi hvor mye lys vi mottar til ethvert tidspunkt. Dersom vi plottet fluksen over tid, vil vi se at fluksen holder seg ganske stabilt over tid, med noen svingninger opp og ned som følge av støy. Hvis planeten som går i bane rundt stjerna befinner seg mellom oss og stjerna vil den stoppe noe av lyset fra stjerna i å nå oss. Dette er det vi kaller en formørkelse, ettersom vi får mindre lys fra stjerna. En slik formørkelse kan vi se i plottet vårt av lysfluks ved at vi får små ”daler” i plottet, hvor lysfluksen plutselig blir mye svakere. Dette kan du se skissert i figur 7. Der kan vi se at fluksen faller med jevne mellomrom. Disse tidspunktene hvor fluksen faller er de tidspunktene hvor vi har en formørkelse.

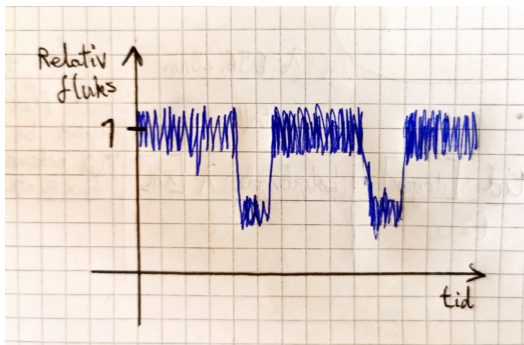


Figure 7: Eksempel på hvordan et plot av den relative fluksen fra en stjerne over tid kan se ut. (En relativ fluks lik 1 er den fluksen vi mottar fra stjernen om den stod i ro, og det ikke var noe støy.) Merk hvordan fluksen minker drastisk ved jevne mellomrom, for så å stige til sin opprinnelige verdi like etter. Dette tilsvarer formørkelser hvor planeten som går i bane rundt stjerna befinner seg mellom oss og stjerna. (Merk at denne figuren kun er et skissert eksempel, og ikke en virkelig måling.)

Det kan noen ganger være vanskelig å skille mellom hva i plottet vårt som er formørkelse, og hva som kun er støy. Her er det derfor fordel å se på plottet av lysfluksen i sammenheng med hastigheten. I figur 3 ser vi at massesenteret til systemet med stjerna og planeten vil være mellom oss og stjerna i punkt C, altså når den radiale hastigheten $v_{*,r} = 0$, og er avtakende. Massesenteret

til stjerna og planeten må befinne seg et sted på linja mellom planeten og stjerna, så dersom massesenteret og stjerna befinner seg i synsvinkelen vår, må også planeten befinne seg i synsvinkelen vår. Siden massesenteret i punkt C befinner seg på vår side av stjerna, må også planeten befinne seg på vår side av stjerna, og vi kan derfor forvente at solformørkelsen vil skje i punkt C (dersom vi har en solformørkelse). Dette kan vi bruke for å verifisere om et fall i lysfluks virkelig er en solformørkelse, siden den isåfall burde skje på et tidspunkt hvor den radiale hastigheten er omtrent lik 0, og avtakende.

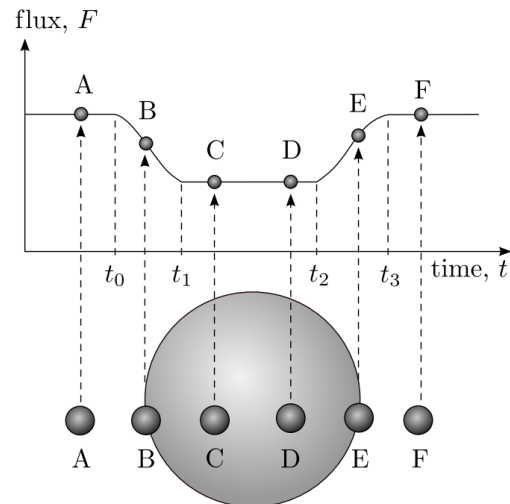


Figure 8: Eksempel på formørkelse, og hvordan vi kan kjenne igjen dette på fallet i lysfluksen. Legg merke til at vi kan se hvor lang tid det tar for planeten å bevege seg inn foran stjerna, hvor lenge den befinner seg foran stjerna, og hvor lang tid den bruker på å bevege seg ut. Dette er informasjon som kan brukes til å blant annet avgjøre radiusen og tettheten til planeten. Figuren er hentet fra (1)

Dersom vi har en formørkelse kan vi muligens bruke dette til å finne radiusen og tettheten til planeten. Vi kan se i figur 8 hvordan fallet i lysfluks viser hvilket tidspunkt planeten begynner å bevege seg foran stjerna, og hvilket tidspunkt hele planeten er innenfor stjerna. Vi kaller tidspunktet hvor planeten begynner å bevege seg inn foran stjerna for t_0 (hvor lysfluksen begynner å falle), og tidspunktet hvor hele planeten er innenfor stjerna kaller vi t_1 (hvor lysfluksen har nådd bunnen i fallet). Dette vil skje over et svært kort tidsintervall, og vi antar derfor at hastigheten til planeten og stjerna er konstant i dette intervallet. Da kan vi bruke at

$$\text{hastighet} = \frac{\text{distanse}}{\text{tid}}$$

Hastigheten til planeten relativt til stjerna er lik summen av hastigheten til planeten og hastigheten til stjerna relativt til massesenteret. Distansen planeten beveger seg er to ganger radiusen til planeten, og tiden den bruker er

$t_1 - t_0$. Vi får da følgende likning for å finne radiusen til planeten:

$$2R_p = (v_* + v_p)(t_1 - t_0)$$

hvor R_p er radiusen til planeten, v_* er hastigheten til stjerna og v_p er hastigheten til planeten (begge hastighetene er relativt til massesenteret). Vi kjenner t_0 og t_1 fra målingene. Vi antar at stjerna og planeten beveger seg i sirkelbane rundt massesenteret, og bane-farten må dermed være konstant. Da må v_* være lik banefarten til stjerna, som er lik den radielle hastigheten til stjerna i punkt B i figur 3 (toppunktet til kurven vår). Vi kjenner altså også v_* . Hastigheten til planeten kan vi finne med følgende likning:

$$v_p = v_* \frac{m_*}{m_p}$$

(Utledning av denne formelen kan du se i (1)).

Når vi vet massen og radiusen til planeten er det enkelt å finne massetettheten. Massetetthet er definert som

$$\rho_p = \frac{m_p}{V_p} \quad (8)$$

hvor ρ_p er massetettheten, m_p er massen og V_p er volumet til planeten. Vi antar at planeten er kuleformet, og den har dermed volum $V_p = \frac{4}{3}\pi R_p^3$. Vi setter dette inn i 8 og får:

$$\rho_p = \frac{3m_p}{4\pi R_p^3} \quad (9)$$

Merk at vi ikke alltid kan finne planetradiusen, selv om vi har en formørkelse. For at vi skal finne planetradiusen må fallet til lysfluksen gå over flere tidspunkter, slik at vi tydelig kan se når planeten begynner å bevege seg foran stjerna og når hele planeten er foran stjerna. Hvis dette ikke er tilfellet, for eksempel hvis fallet i lysfluks kun går over ett eller to tidssteg, har vi ikke tilstrekkelig informasjon, og vi kan dermed ikke finne planetradiusen. Hvis vi ikke kan finne planetradiusen kan vi heller ikke finne tettheten til planeten, siden vi trenger radiusen for å finne denne (se likning 9).

III. RESULTATER

I figur 10 kan dere se plottene av den radielle hastigheten til stjernene relativt til massesentrene, og den

IV. DISKUSJON

La oss begynne med å se på plottene vi fikk i figur 10. Vi ser at stjerne 1, 2, 3 og 4 (figur 10a, 10b, 10c og 10d) har oscillerende hastighetskurve, som øker og minker regelmessig. Som diskutert i metode-seksjonen

relative lysfluksen fra hver stjerne.

I figur 9 kan du se plottet av den modellen med lavest Δ fra minste kvadraters metode for stjerne 2.

I tabell II kan du se andre resultater fra utregningene. I andre kolonne har vi egenhastigheten til hver stjerne, altså hastigheten til massesenteret mellom stjerne og planet. Dette er kun hastigheten i radiell retning, hvor positiv hastighet betyr at massesenteret beveger seg vekk fra jorden. I tredje kolonne ser du den nedre verdien for planetmassen som vi fant ved å gjøre øyemål, som beskrevet i metode-seksjonen. For stjerne 5 har vi konkludert med at det ikke var noen planet i bane, og vi har derfor heller ikke inkludert noen planetmasse der. I fjerde kolonne har vi den nedre verdien for planetmassen til stjerne 2, funnet ved hjelp av minste kvadraters metode, som beskrevet i metode-seksjonen.

I femte kolonne kan du se den relative differansen mellom planetmassene vi fant ved øyemål, og ved minste kvadraters metode. Siden vi kun fant planetmassen med minste kvadraters metode for stjerne 2 har vi også kun den relative differansen for stjerne 2. I siste kolonne har vi planetradiusen til planetene som går i bane rundt stjernene. Vi hadde ikke tilstrekkelig informasjon til å finne planetradiusen til noen av planetene, og det står derfor "ingen resultat" i hver rad.

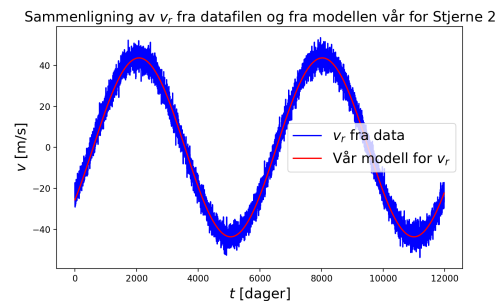


Figure 9: Plot av modellen vår for $v_{*,r}$ sammen med målingene våre.

tyder dette sterkt på at hver av disse stjernene har en planet som går i bane rundt dem. For stjerne 5 (figur 10e) ser vi at hastighetskurven ikke er oscillerende, og det er da fornuftig å anta at stjernen ikke har noen planet som går i bane.

I figur 10a og 10b ser vi at stjerne 1 og 2 har ty-

Stjerne #	Egenhastighet	$m_{p,min}$ ved øyemål	$m_{p,min}$ fra modell	Relativ differanse for $m_{p,min}$	Planetradius
1	$-7.27 \cdot 10^4$ m/s	$2.51 \cdot 10^{27}$ kg	$9.51 \cdot 10^{27}$ kg	3.58 %	Ingen resultat
2	$1.36 \cdot 10^5$ m/s	$9.17 \cdot 10^{27}$ kg			Ingen resultat
3	$8.50 \cdot 10^4$ m/s	$1.09 \cdot 10^{27}$ kg			Ingen resultat
4	$3.30 \cdot 10^4$ m/s	$2.80 \cdot 10^{27}$ kg			Ingen resultat
5	$-2.50 \cdot 10^5$ m/s	(Ingen planet)			Ingen resultat

Table II: Tabell over resultatene vi fikk fra utregningene.

delige formørkelser. Dette ser vi siden lysfluksen for disse stjernene faller svært dramatisk, ved to tidspunkter. For stjerne 1 ser den ut til å falle etter omtrent 1000 dager, og 6000 dager, og for stjerne 2 faller den etter omtrent 3500 dager og 9500 dager. Slike regelmessige dramatiske fall i lysfluks tyder på at vi har formørkelse fra planeten som går i bane. For begge disse stjernene ser vi også at fallet ser ut til å være like stort hver gang (omtrent 0.01 for stjerne 1, og 0.02 for stjerne 2). Dette stemmer overens med at den samme planeten passerer begge gangene, og da vil blokkere like mye lys, og gi samme formørkelse. Dessuten kan vi sammenligne med hastighetskurvene for stjernene, og ser at fallet i lysfluks ser ut til å skje på samme tidspunkt i stjernens bevegelse om massesenteret begge gangene, og det skjer når den radielle hastigheten er 0, og avtakende (punkt C i figur 3). Som vi diskuterte i metode-seksjonen er det akkurat dette tidspunktet vi vil forvente å se en formørkelse, og det bygger derfor ekstra opp under at fallene i lysfluks virkelig svarer til formørkelser.

Vi ser også for stjerne 4 (figur 10d) at vi har to fall i lysfluks, men disse fallene er ikke like store som for stjerne 1 og 2. Fallene er på omtrent 0.004, mens fallene til stjerne 1 og 2 var på omtrent 0.01 og 0.02. Det kan virke som at dette gjør det mer usikkert om disse fallene virkelig er formørkelser, men jeg vil sterkt argumentere for at de er formørkelser likevel. For det første er de regelmessige, som vi vil forvente for formørkelser. I tillegg er de to fallene like store, som igjen passer med at den samme planeten passerer begge gangene. Og dessuten skjer begge fallene når den radielle hastigheten til stjerna er 0 og avtakende (etter omtrent 3500 dager og 7000 dager), som er det vi vil forvente av en formørkelse. Det siste argumentet er spesielt viktig, og konklusjonen blir derfor at vi har en formørkelse også fra stjerne 4, men at denne planeten sannsynligvis er mindre, og derfor slipper forbi mer lys enn stjerne 1 og 2.

Stjerne 3 (figur 10c) har ingen regelmessige fall i lysfluks. Her er det mye støy, og det går jevnlig opp og ned, men det er ikke noe her som skiller seg ut fra resten. Vi konkluderer derfor med at denne stjernen ikke har noen formørkelse. Stjerne 5 har ingen planet, og kan derfor ikke ha noen formørkelse, men vi ser likevel et lite fall i lysfluks etter et sted mellom 4500 og 5000 dager. Dette skjer likevel kun en gang, og ikke regelmessig, så vi kan trygt holde på konklusjonen om at stjerna ikke har noen planet i bane. I stedet kan dette fallet komme fra

andre himmellegemer som har passert stjerna i et kort tidsrom, eller fra annet støy. Det som likevel er verdt å merke seg er at dette fallet er på omtrent 0.004, som er det samme som for stjerne 4 (som vi jo konkluderte med at var en formørkelse). Likevel ser vi på regelmessigheten og samsvaret med hastighetskurven at det er fornuftig å anta at stjerne 4 hadde formørkelse, men ikke stjerne 5.

Til modellen vår for $v_{*,r}$ i figur 9 skal jeg ikke kommentere noe særlig annet enn at modellen ser ut til å passe godt inn. Over hele plottet er den røde kurven (modellen vår for $v_{*,r}$) innenfor den blå kurven (målingene av den virkelige v_*). Vi kan derfor konkludere med at modellen er god.

La oss se litt på resultatene vi fikk i tabell II. Egenhastigheten til stjernene (i absoluttverdi) varierer mellom $3.30 \cdot 10^4$ m/s (stjerne 4) og $2.50 \cdot 10^5$ m/s (stjerne 5). Ifølge Wikipedia (3) blir stjerner som beveger seg mellom $6.5 \cdot 10^4$ m/s og $1.0 \cdot 10^5$ m/s klassifisert som ”høyhastighets-stjerner” (eng: *high-velocity stars*). Her har vi altså stjerner med egenhastighet som varierer fra lavere enn høyhastighets-stjerner, helt opp til de som er høyere enn høyhastighetsstjerner (såkalte ”runaway stars” (3)). Vi har med andre ord et ganske stort sprik i egenhastigheter, men alle tallene er likevel troverdige, siden de er innenfor de hastighetene vi finner hos andre stjerner.

I tredje kolonne i tabell II hadde vi nedre grense for planetmassen ved øyemål. Disse massene varierer fra $1.09 \cdot 10^{27}$ kg (stjerne 3) til $9.17 \cdot 10^{27}$ kg (stjerne 2). Til sammenligning har Jupiter (vårt solsystems største planet) en masse på omtrent $1.90 \cdot 10^{27}$ kg (4). Massen til planetene vi har sett på er altså en del større enn planetene i vårt solsystem. Dette er ikke helt utenkelig, og siden vi ser at alle planetene ligger i samme tierpotens som jupiter kan vi konkludere med at planetmassene er troverdige.

Det som gjør resultatene for planetmassene ved øyemål mindre troverdige er likevel det at de er gjort med øyemål. I fjerde kolonne i tabell II har vi derfor inkludert et eksempel hvor vi har regnet ut planetmassen til stjerne 2 ved å bruke minste kvadraters metode, for å få mer nøyaktige svar. Dette resultatet er derfor mer troverdig enn resultatet fra øyemål, og vi går ut fra at denne er nærmere sannheten. Fra denne metoden fikk vi at den nedre grensen for massen til planeten i bane rundt stjerne 2 ble $9.51 \cdot 10^{27}$ kg, som er noe større enn ved øyemål, hvor vi fikk $9.17 \cdot 10^{27}$ kg. Den relative differansen ble på

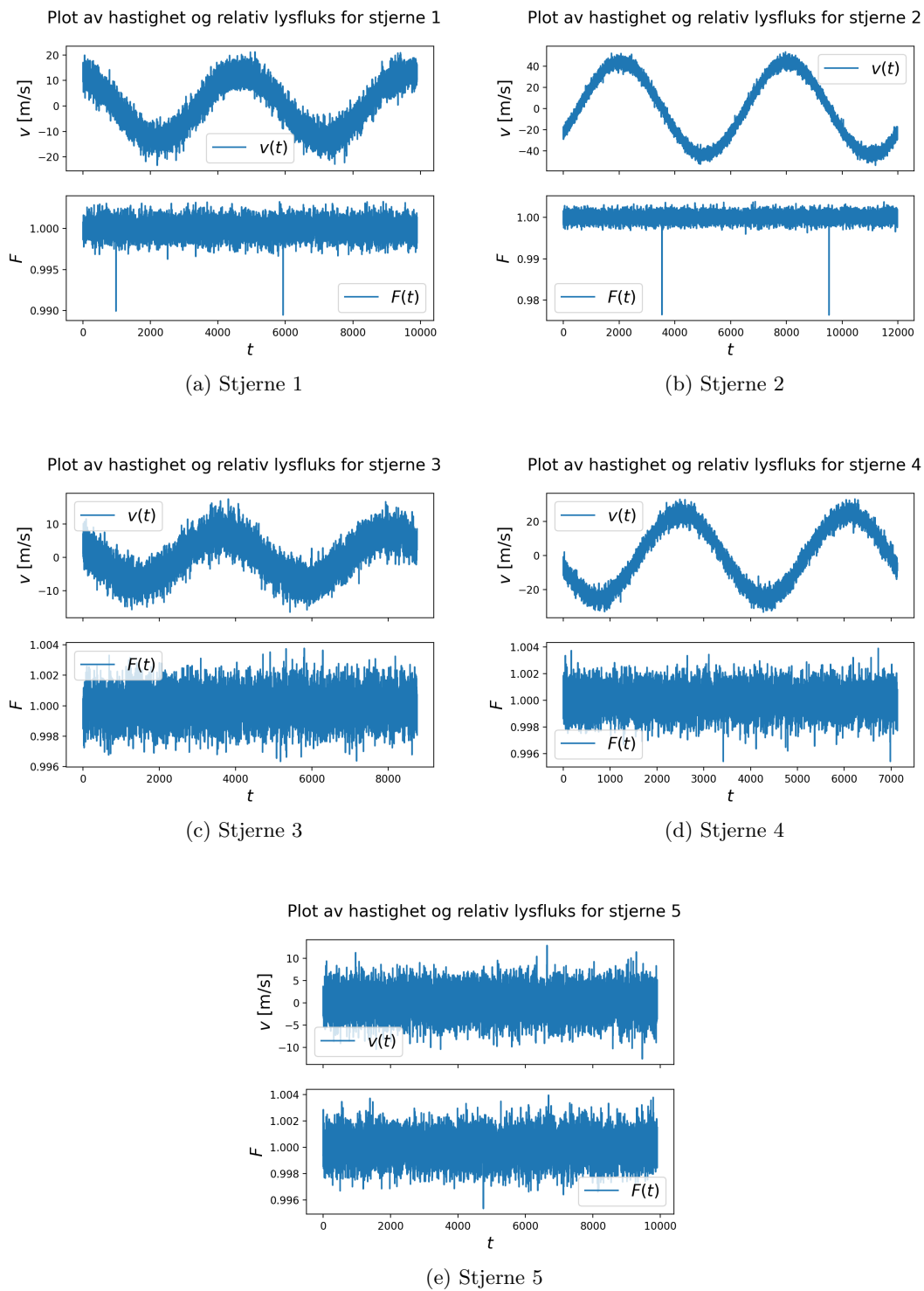


Figure 10: Plot av hastighet og relativ fluks av lys, for hver av de 5 stjernene. Hastigheten er oppgitt i m/s, og lysfluksen er oppgitt slik at en fluks på 1.000 er den gjennomsnittlige lysfluksen fra stjernen. I hver figur ser vi to plot, hvor den øverste er hastigheten $v(t)$, og den nederste er lysfluksen $F(t)$.

3.58 %, som er en vesentlig nok differanse til at vi kan konkludere med at det er mye lurere å bruke statistiske metoder for å finne resultatene, fremfor å stole på øyemål når vi leser av plottene selv.

I metode seksjonen snakket vi om hvordan vi ikke alltid kan finne planetradiusen, selv om vi har formørkelser. I dette tilfellet kunne vi ikke finne planetradiusen for noen av planetene, som du kan se i siste kolonne i tabell II.

Dette kan vi se fra plottene av lysfluks i figur 10. De stedene hvor vi hadde fall i lysfluksen skjedde disse fallene kun over ett tidssteg før fluksen rettet seg opp tilbake til normalen. Vi kan altså ikke si noe om når planeten begynte å bevege seg foran stjernen, og heller ikke når hele var innenfor. Vi kan heller ikke si noe om utgangen til planeten fra stjernen. Det eneste vi ser er at planeten passerte stjernen, og hvor mye lys den blokkerte for. Vi hadde altså ikke tilstrekkelig med informasjon, og fant derfor ikke noen planetradius, og følgelig heller ikke tettheten til noen av planetene.

V. KONKLUSJON

Vi har analysert data fra fem forskjellige stjerner. Vi har funnet egenhastigheten til hver av stjernene, samt hastigheten deres relativt til massesenteret mellom dem og eventuelle planeter. Vi fant at fire av de fem stjernene hadde en planet som gikk i bane, og for tre av disse planetene fikk vi regelmessige formørkelser. Vi plottet hastigheten til hver av stjernene, og fant en nedre grense for massen til de fire planetene ved å lese av informasjon

fra disse plottene. For en av planetene fant vi også massen ved å bruke minste kvadraters metode, og lage en modell for hastigheten til stjerna. Vi fant at differansen mellom disse to metodene ble relativt høy, og at det lønner seg å bruke statistiske metoder fremfor øyemål, ettersom dette gir mer nøyaktige svar. Vi håpte også på å finne radiusen og tettheten til planetene som gikk i bane rundt stjernene, men vi hadde ikke nok informasjon til å finne dette.

REFERANSER

- (1) Hansen, F. K., 2017, Forelesningsnotat 1C i kurset AST2000
- (2) https://github.com/frodekh/AST2000_exercises/tree/master/part1C/seed33
- (3) https://en.wikipedia.org/wiki/Stellar_kinematics#High-velocity_stars
- (4) <https://no.wikipedia.org/wiki/Jupiter>