Master 2 - Génie Informatique

Analyse Numérique et Calcul Scientifique

6 janvier 2026

Problématique

L'analyse numérique fournit des outils essentiels pour résoudre des problèmes mathématiques complexes qui n'admettent pas de solution analytique.

Équations Différentielles

- Méthode d'Euler
- Méthode de Heun
- Runge-Kutta d'ordre 4

Intégration Numérique

- Quadratures de Gauss
- Méthode de Simpson
- Splines Quadratiques

Objectif

Analyser, implémenter et comparer rigoureusement ces méthodes sur des problèmes tests.

1. **Analyse théorique** : Fondements mathématiques et propriétés
2. **Implémentation** : Code Python optimisé et structuré
3. **Validation** : Comparaison avec solutions exactes
4. **Analyse comparative** :
   - Convergence
   - Précision
   - Efficacité computationnelle
   - Stabilité numérique
5. **Synthèse** : Recommandations d'utilisation

Formulation générale

Soit le problème à valeur initiale :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [x_0, x_f] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant les conditions de Lipschitz.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si f est continue et lipschitzienne en y, alors le problème admet une unique solution $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_f])$.

Definition

Une méthode à un pas pour résoudre $y' = f(x, y)$ s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(x_n, y_n, h) \tag{2}$$

où Φ est la **fonction d'incrément**.

Propriétés essentielles

- **Consistance** : $\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$
- **Ordre** : Une méthode est d'ordre p si l'erreur locale de troncature est $\mathcal{O}(h^{p+1})$
- **Stabilité** : Contrôle de la propagation des erreurs
- **Convergence** : $\max_n |y(x_n) - y_n| \to 0$ quand $h \to 0$

Problème général

Approximer l'intégrale :

$$I(f) = \int_a^b w(x)f(x)\,dx \tag{3}$$

par une somme pondérée :

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{4}$$

où $w(x)$ est une fonction poids, $\{x_i\}$ sont les nœuds et $\{w_i\}$ les poids.

Definition (Degré d'exactitude)

Une méthode a un degré d'exactitude d si elle intègre exactement tous les polynômes de degré $\leq d$.

Theorem (Formules de Gauss)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique ensemble de nœuds $\{x_i\}_{i=1}^n$ et de poids $\{w_i\}_{i=1}^n$ tel que :

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f) \tag{5}$$

soit exacte pour tous les polynômes de degré $\leq 2n-1$.

Propriété clé

Les nœuds $\{x_i\}$ sont les racines des polynômes orthogonaux associés à la fonction poids $w(x)$.

Formulation

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n) \tag{6}$$

Principe

- Approximation de la dérivée par différence finie
- $y'(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$
- Tangente locale

Propriétés

- Simple et rapide
- Ordre 1 : $\mathcal{O}(h)$
- Stabilité limitée
- Erreur globale : $\mathcal{O}(h)$

Analyse de l'erreur

Développement de Taylor :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \tag{7}$$

Erreur locale de troncature : $\tau_n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) = \mathcal{O}(h^2)$

Formulation

$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{8}$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1\right) \tag{9}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\, k_2 \tag{10}$$

Principe

- Méthode prédicteur-correcteur
- Évaluation au point milieu
- Runge-Kutta d'ordre 2

Propriétés

- Ordre 2 : $\mathcal{O}(h^2)$
- Meilleure stabilité
- 2 évaluations de f
- Bon compromis

Erreur

Erreur locale : $\mathcal{O}(h^3)$ $\Rightarrow$ Erreur globale : $\mathcal{O}(h^2)$

Formulation classique (RK4)

$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{11}$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \tag{12}$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \tag{13}$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \tag{14}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{15}$$

Avantages

- Ordre 4 : $\mathcal{O}(h^4)$
- Très grande précision
- Excellente stabilité

Coût

- 4 évaluations de f
- Plus coûteux par pas
- Mais permet h plus grand

Formule

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{16}$$

où x_i sont les racines du polynôme de Legendre $P_n(x)$.

Propriétés

- Degré d'exactitude : $2n-1$
- Convergence spectrale
- Optimal pour fonctions régulières

Changement de variable

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+}{2}\right.$$

Erreur

Pour $f \in \mathcal{C}^{2n}([a,b])$:

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}}\left(\frac{n!}{(2n)!}\right)^2 \tag{17}$$

Formule

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{18}$$

où x_i sont les racines du polynôme de Laguerre $L_n(x)$.

Applications

- Intégrales sur $[0, \infty)$ avec décroissance exponentielle
- Transformées de Laplace
- Physique quantique, statistiques

Convergence

Convergence spectrale pour fonctions analytiques décroissant exponentiellement.

Formule

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{19}$$

avec $x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$ et $w_i = \frac{\pi}{n}$.

Avantages

- Poids constants
- Calcul explicite des nœuds
- Très efficace

Applications

- Intégrales avec singularités
- Approximation de fonctions
- Méthodes spectrales

Attention

La fonction poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ doit être prise en compte.

Formule composite

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6,\ldots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right] \tag{20}$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ et n est pair.

Principe

- Interpolation parabolique
- Utilise 3 points
- Ordre 4

Erreur

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$$

$\Rightarrow$ Convergence en $\mathcal{O}(h^4)$

Avantages

Robuste, simple, bien adapté aux fonctions régulières sur intervalles bornés.

Principe

Approcher f par une fonction spline quadratique $S(x)$ définie par morceaux :

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{21}$$

puis intégrer exactement $S(x)$.

Construction

- Interpolation aux nœuds
- Continuité en $\mathcal{C}^1$
- Système linéaire

Propriétés

- Ordre 3 : $\mathcal{O}(h^3)$
- Flexibilité
- Robuste aux oscillations

Intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_i(x)\,dx = \frac{a_i h_i^3}{3} + \frac{b_i h_i^2}{2} + c_i h_i \tag{22}$$

EDO considérée

$$\begin{cases} y'(x) = \pi \cos(\pi x)\, y(x), \quad x \in [0,6] \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{23}$$

Solution exacte

$$y(x) = \exp(\sin(\pi x)) \tag{24}$$

Caractéristiques

- Fonction oscillante avec période 2
- Permet une validation rigoureuse
- Test classique pour méthodes numériques

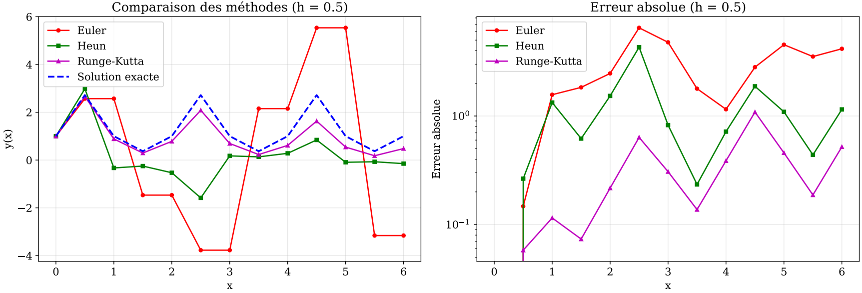

Figure – Comparaison des méthodes pour $h = 0.5$ (12 pas)

- Euler : Erreur visible, accumulation rapide
- Heun : Bonne approximation
- RK4 : Quasi-superposition avec solution exacte

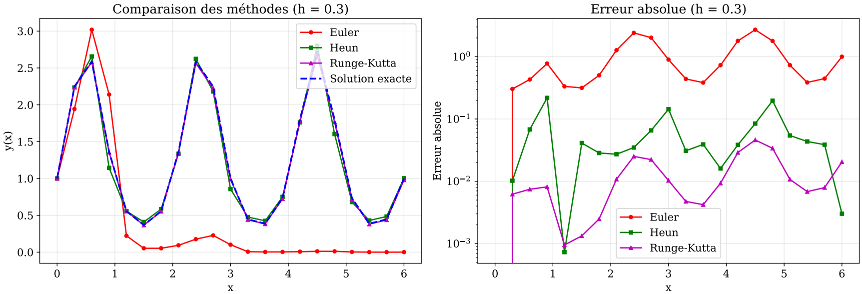

Figure – Comparaison des méthodes pour $h = 0.3$ (20 pas)

- Amélioration notable pour Euler
- Heun et RK4 : erreur négligeable

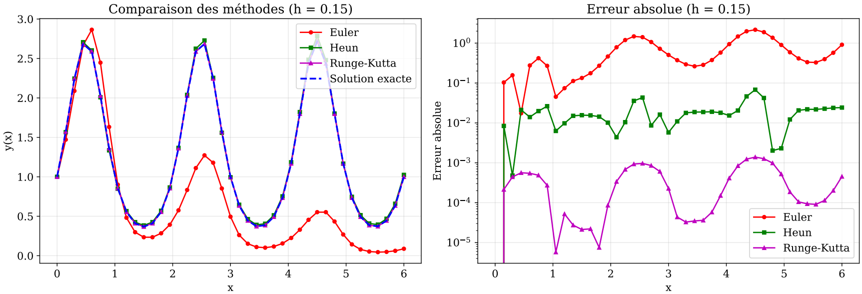

Figure – Comparaison des méthodes pour $h = 0.15$ (40 pas)

- Euler devient acceptable
- RK4 : précision machine

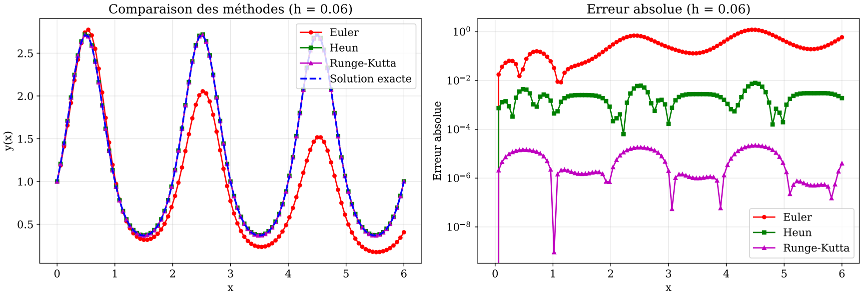

Figure – Comparaison des méthodes pour $h = 0.06$ (100 pas)

- Toutes les méthodes convergent
- Différence principale : coût computationnel

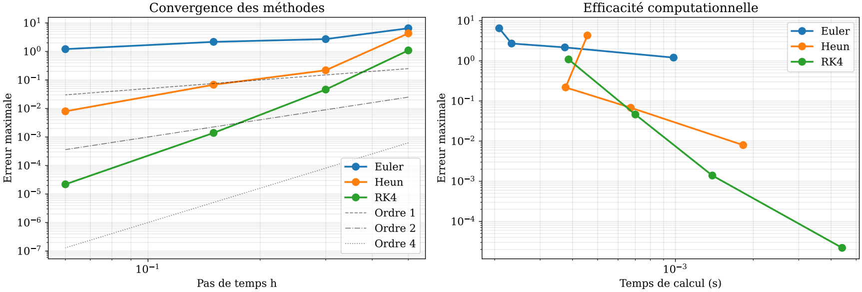

Figure – Analyse de convergence et efficacité computationnelle

Observations

- Pentes confirment les ordres théoriques : 1, 2 et 4
- RK4 : meilleure précision pour un temps donné
- Heun : excellent compromis précision/coût

Table – Ordres de convergence observés

Méthode	Ordre théorique	Ordre observé	Coût/pas
Euler	1	≈ 1.0	1 éval.
Heun	2	≈ 2.0	2 éval.
RK4	4	≈ 4.0	4 éval.

Recommandations

- **Euler** : Problèmes simples, prototypage rapide
- **Heun** : Usage général, bon compromis
- **RK4** : Haute précision requise, standard industriel

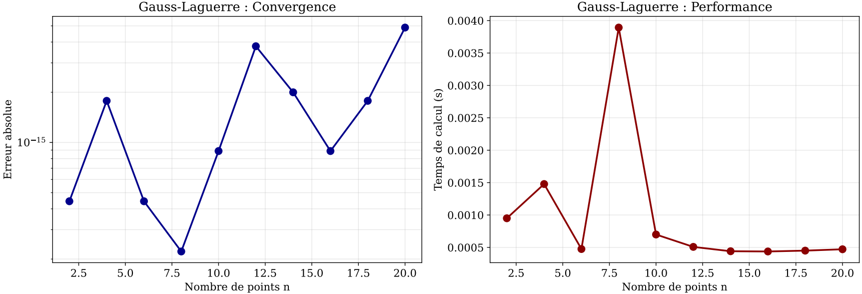

Figure – Convergence de Gauss-Laguerre sur intégrale infinie

Analyse

- Convergence spectrale (exponentielle)
- $n = 10$: erreur $< 10^{-14}$ (précision machine)
- Idéal pour intégrales à décroissance exponentielle

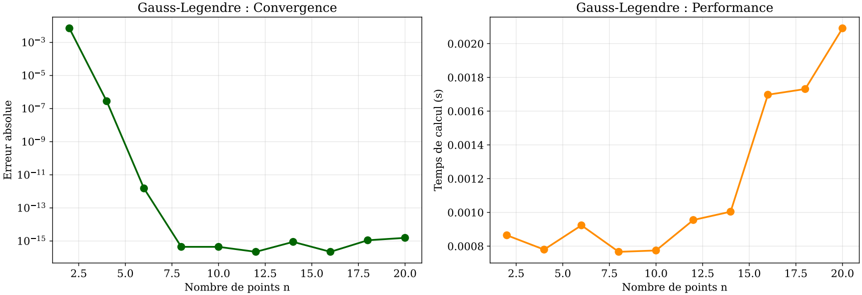

Figure – Convergence de Gauss-Legendre sur intégrale bornée

Analyse

- Convergence spectrale très rapide
- Universalité pour fonctions régulières
- Référence en quadrature numérique

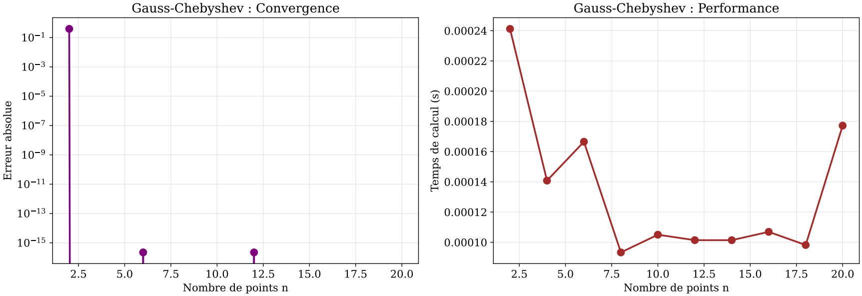

Figure – Convergence de Gauss-Chebyshev avec fonction poids

Analyse

- Poids constants : simplicité d'implémentation
- Optimal pour singularités aux bornes
- Convergence spectrale garantie

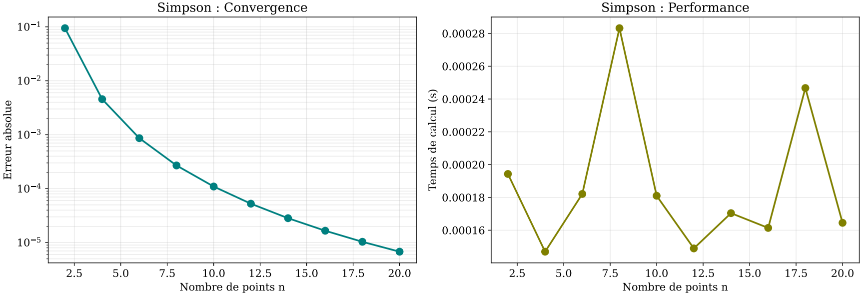

Figure – Convergence de la méthode de Simpson

Analyse

- Convergence algébrique : $\mathcal{O}(n^{-4})$
- Plus lente que Gauss mais très robuste
- Excellent choix pour applications générales

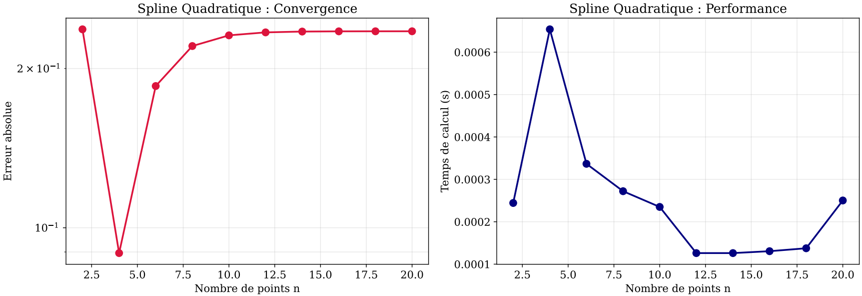

Figure – Spline quadratique sur $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+25x^2}\, dx = \frac{\pi}{10}$

Analyse

- Convergence $\mathcal{O}(n^{-3})$
- Robustesse face aux oscillations (phénomène de Runge)
- Alternative intéressante aux polynômes d'interpolation

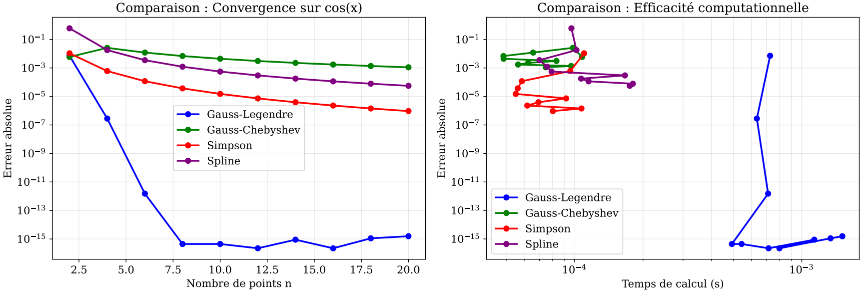

Figure – Comparaison sur $\int_{-1}^{1} \cos(x)\, dx$

- **Gauss-Legendre/Chebyshev** : convergence la plus rapide
- **Simpson** : robuste, convergence algébrique régulière
- **Spline** : bon compromis, stabilité numérique

Table – Propriétés des méthodes d'intégration

Méthode	Convergence	Degré exact.	Domaine	Robustesse
Gauss-Laguerre	Spectrale	$2n-1$	$[0,\infty)$	Excellente
Gauss-Legendre	Spectrale	$2n-1$	$[a,b]$	Excellente
Gauss-Chebyshev	Spectrale	$2n-1$	$[-1,1]$	Excellente
Simpson	$\mathcal{O}(n^{-4})$	3	$[a,b]$	Très bonne
Spline Quad.	$\mathcal{O}(n^{-3})$	2	$[a,b]$	Bonne

Recommandations

- **Fonctions régulières** : Gauss-Legendre (optimal)
- **Intégrales infinies** : Gauss-Laguerre
- **Singularités** : Gauss-Chebyshev
- **Usage général** : Simpson (fiabilité)
- **Fonctions oscillantes** : Splines (stabilité)

Table – Comparaison qualitative des méthodes EDO

Critère	**Euler**	**Heun**	**RK4**
Précision			
Vitesse			
Stabilité			
Simplicité			
Usage général			

Points clés

- **Choix du pas** h : critique pour Euler, moins pour RK4
- **Stabilité** : RK4 permet pas plus grands
- **Efficacité** : Heun souvent optimal (ordre 2, coût modéré)

Table – Comparaison qualitative des méthodes d'intégration

Critère	G-Lag.	G-Leg.	G-Cheb.	Simpson	Spline
Précision					
Vitesse					
Robustesse					
Simplicité					
Polyvalence					

Choix stratégiques

- **Précision maximale** : Quadratures de Gauss
- **Fiabilité** : Simpson (convergence garantie)
- **Problèmes spécifiques** : Adapter la fonction poids

Équations Différentielles

- Contrôle adaptatif du pas
- Détection de rigidité
- Méthodes implicites (stabilité)
- Systèmes d'EDO
- Conservation d'énergie

Intégration Numérique

- Détection de singularités
- Intégrales multiples
- Méthodes adaptatives
- Régularisation
- Parallélisation

Limites numériques

- Précision machine ($\epsilon \approx 10^{-16}$ en double précision)
- Conditionnement des problèmes
- Coût computationnel vs précision

Équations Différentielles

- **Runge-Kutta 4** : Standard industriel, excellent rapport précision/stabilité
- **Heun** : Choix optimal pour usage général (ordre 2 suffisant souvent)
- **Euler** : Pédagogique, prototypage rapide uniquement

Intégration Numérique

- **Quadratures de Gauss** : Précision maximale pour fonctions régulières
- **Simpson** : Robustesse et simplicité, excellent choix par défaut
- **Splines** : Alternative pour fonctions irrégulières

Principe général

Le choix de la méthode dépend du **compromis** entre précision, coût computationnel, robustesse et propriétés du problème.

Développements possibles

- Méthodes d'ordre supérieur
- Contrôle adaptatif
- Méthodes implicites
- Parallélisation
- GPU computing

Applications avancées

- EDO raides
- Systèmes chaotiques
- EDP (différences finies)
- Optimisation numérique
- Machine Learning

Outils modernes

Bibliothèques : `scipy.integrate`, `scipy.optimize`, `JAX`, `PyTorch` (différentiation automatique)

Implémentation

- Code Python structuré en packages modulaires
- Tests unitaires sur problèmes avec solutions exactes
- Documentation complète
- Figures générées automatiquement

Validation

- Comparaison systématique avec solutions analytiques
- Vérification des ordres de convergence théoriques
- Analyse de stabilité numérique
- Études de performance computationnelle

Reproductibilité

Tous les résultats sont reproductibles via le script `analyse_complete.py`.

A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer, 2007.

R.L. Burden, J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, 2010.

E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*. Springer, 1993.

P.J. Davis, P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, 1984.

L.N. Trefethen. *Approximation Theory and Approximation Practice*. SIAM, 2013.

Merci de votre attention

Questions ?