

Méthodes Numériques pour la Résolution d'Équations Différentielles et l'Intégration Numérique

BRAHIMA FOFANA

Master 2 Génie Informatique

12 janvier 2026

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Résolution d'équations différentielles
- 3 Méthodes d'intégration numérique
- 4 Conclusion

Problématique

Les problèmes scientifiques et d'ingénierie nécessitent souvent :

- La résolution d'équations différentielles ordinaires (EDO)
- Le calcul d'intégrales définies complexes

Limites des solutions analytiques

- Nombreuses EDO sans solution fermée
- Intégrales impossibles à calculer explicitement
- Nécessité d'approches numériques

- ① **Équations différentielles** : Implémenter et comparer trois méthodes à pas séparés
 - Méthode d'Euler (ordre 1)
 - Méthode de Heun (ordre 2)
 - Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

- ② **Intégration numérique** : Évaluer cinq méthodes de quadrature
 - Quadratures de Gauss (Laguerre, Legendre, Chebyshev)
 - Règle de Simpson composite
 - Intégration par spline quadratique

Équation différentielle étudiée

$$\begin{cases} y'(x) = \pi \cos(\pi x) \cdot y(x), & x \in [0, 6] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution analytique connue

$$y(x) = e^{\sin(\pi x)}$$

Avantage : Permet de calculer l'erreur numérique précisément en comparant avec la solution exacte.

Principe

Approximation linéaire de la solution à partir de la dérivée :

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

où h est le pas de discrétisation.

Caractéristiques

- **Ordre de convergence** : $\mathcal{O}(h)$
- **Simplicité** : Méthode la plus simple
- **Précision** : Faible, nécessite un pas petit
- **Coût** : Une seule évaluation de f par itération

Résultats - Euler avec $h = 0.3$

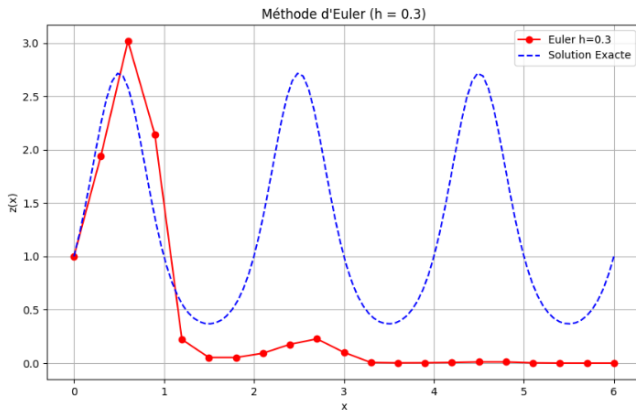


Figure – Méthode d'Euler avec $h = 0.3$

Observation : Écart visible entre solution numérique et exacte, particulièrement pour les grandes valeurs de x .

Résultats - Euler avec $h = 0.15$

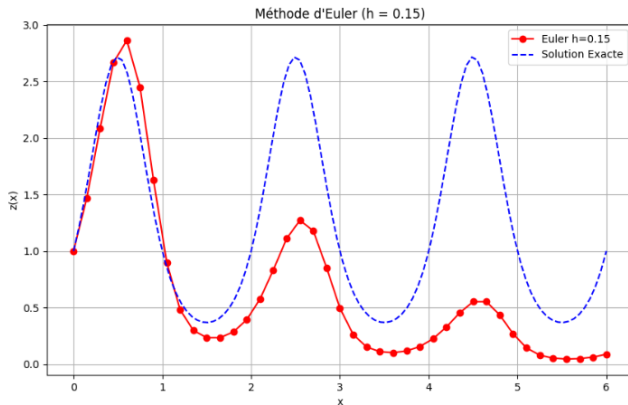


Figure – Méthode d'Euler avec $h = 0.15$

Observation : Réduction du pas améliore la précision, mais l'erreur reste notable.

Résultats - Euler avec $h = 0.06$

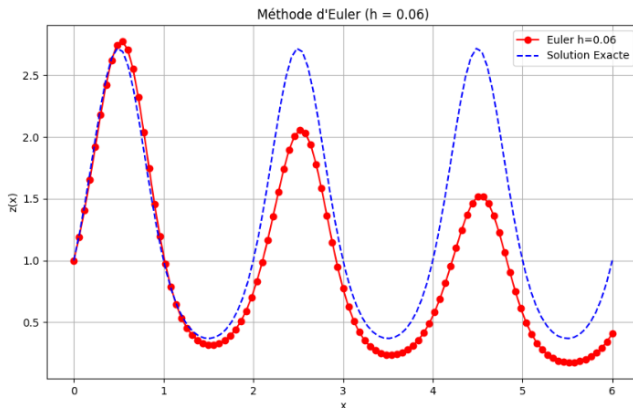


Figure – Méthode d'Euler avec $h = 0.06$

Observation : Avec un pas très fin, la solution numérique se rapproche de la solution exacte, au prix d'un coût calculatoire accru.

Principe

Méthode prédicteur-correcteur utilisant une évaluation intermédiaire :

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot k_2$$

Caractéristiques

- **Ordre de convergence** : $\mathcal{O}(h^2)$
- **Complexité** : Deux évaluations de f par itération
- **Précision** : Meilleure qu'Euler pour un pas équivalent

Résultats - Heun avec $h = 0.3$

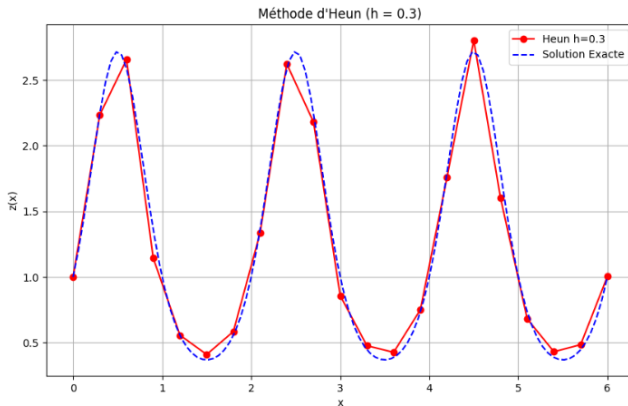


Figure – Méthode de Heun avec $h = 0.3$

Observation : Meilleure approximation qu'Euler avec le même pas, grâce à l'ordre 2.

Résultats - Heun avec $h = 0.15$

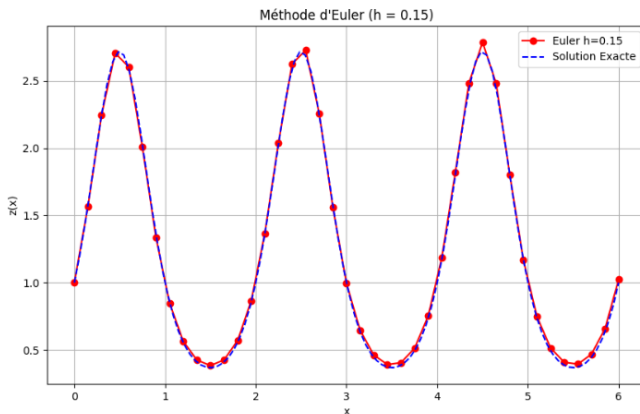


Figure – Méthode de Heun avec $h = 0.15$

Observation : Solution numérique presque indiscernable de la solution exacte.

Résultats - Heun avec $h = 0.06$

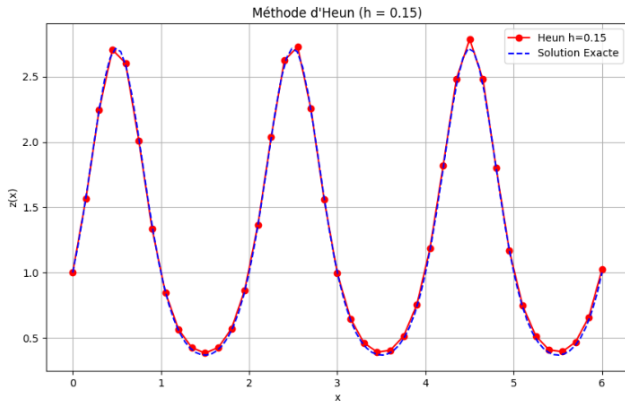


Figure – Méthode de Heun avec $h = 0.06$

Observation : Excellente précision même avec un pas relativement grand.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

Formules

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

Caractéristiques

- **Ordre de convergence** : $\mathcal{O}(h^4)$
- **Complexité** : Quatre évaluations de f par itération
- **Précision** : Excellente, standard en calcul scientifique

Résultats - Runge-Kutta avec $h = 0.5$

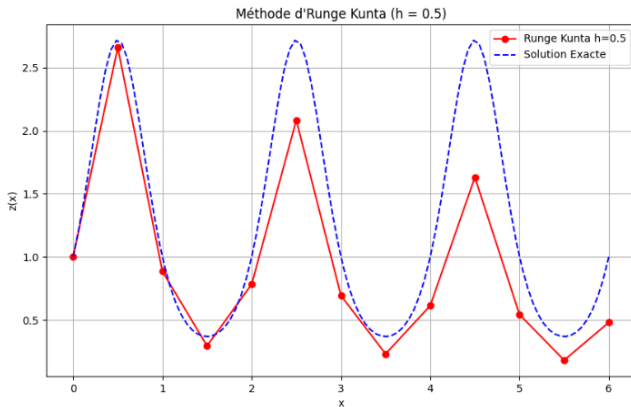


Figure – Méthode de Runge-Kutta avec $h = 0.5$

Observation : Même avec un pas relativement grand, RK4 produit une excellente approximation.

Résultats - Runge-Kutta avec $h = 0.3$

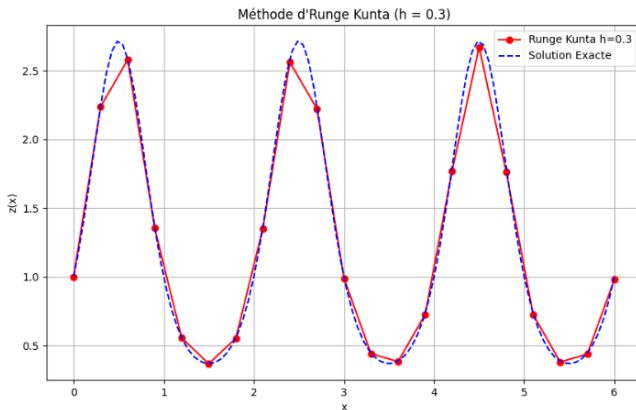


Figure – Méthode de Runge-Kutta avec $h = 0.3$

Observation : Précision remarquable, courbes numériques et exactes presque superposées.

Résultats - Comparaison supplémentaire

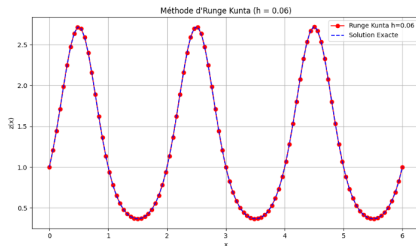
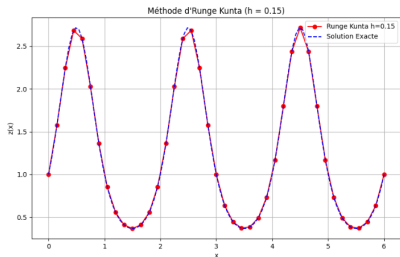


Figure – Analyses complémentaires de la méthode RK4

Comparaison des méthodes EDO

Méthode	Ordre	Éval. par pas	Précision
Euler	$\mathcal{O}(h)$	1	Faible
Heun	$\mathcal{O}(h^2)$	2	Moyenne
Runge-Kutta 4	$\mathcal{O}(h^4)$	4	Excellente

Table – Comparaison théorique des méthodes

Conclusions pratiques

- **Euler** : Simple mais nécessite un pas très petit
- **Heun** : Bon compromis précision/coût
- **RK4** : Méthode de référence pour la précision

Quadrature de Gauss-Laguerre

Domaine d'application

Intégrales semi-infinies avec poids exponentiel :

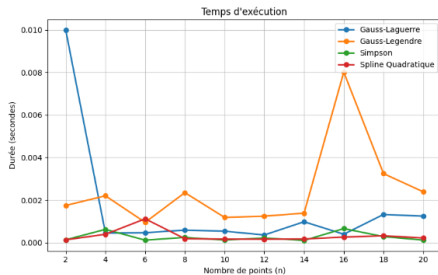
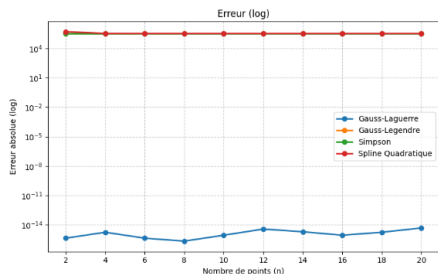
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Propriétés

- x_i : racines du polynôme de Laguerre $L_n(x)$
- w_i : poids associés
- **Avantage** : Convergence exponentielle pour fonctions régulières
- **Limitation** : Applicable uniquement pour intégrales sur $[0, +\infty)$

Exemple test : $\int_0^{\infty} e^{-x} x^2 dx = 2$

Résultats - Gauss-Laguerre $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^2 dx = 2$



Interprétation :

- Le poids e^{-x} est intégré dans la quadrature \Rightarrow convergence exponentielle
- Fonction polynomiale x^2 : exactitude atteinte pour $n \geq 2$
- Temps de calcul négligeable et quasi-constant avec n

Quadrature de Gauss-Legendre

Formule

Intégrale sur intervalle fini $[a, b]$:

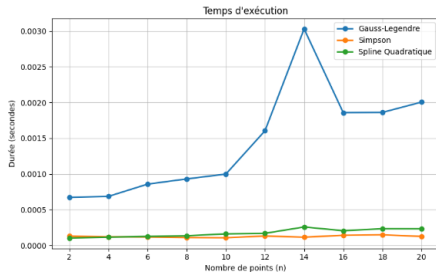
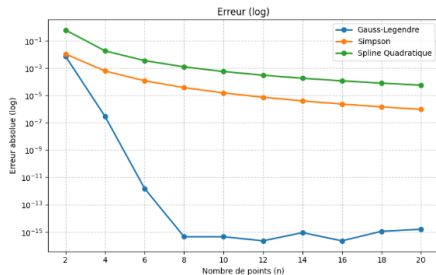
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

Caractéristiques

- x_i : racines du polynôme de Legendre $P_n(x)$
- **Propriété** : Exacte pour polynômes de degré $\leq 2n - 1$
- **Avantage** : Polyvalente, applicable à tout intervalle fini
- **Usage** : Méthode standard pour intégrales régulières

Exemple test : $\int_{-1}^1 \cos(x) dx = 2 \sin(1)$

Résultats - Gauss-Legendre $\int_{-1}^1 \cos(x) dx = 2 \sin(1)$



Interprétation :

- Fonction analytique sur intervalle fini : convergence exponentielle observée
- Précision machine atteinte pour $n \approx 10$ (erreur $< 10^{-15}$)
- Temps de calcul très compétitif malgré le calcul des racines de $P_n(x)$

Formule

Intégrale avec poids singulier :

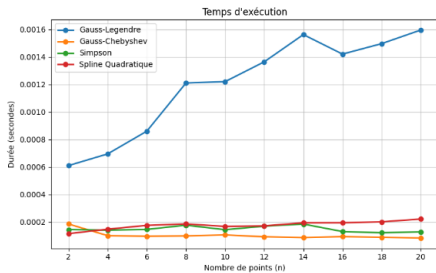
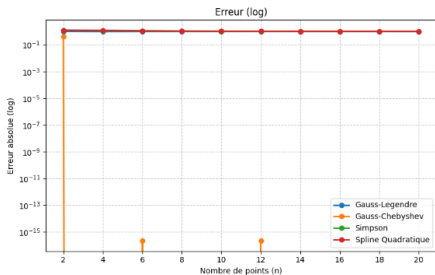
$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)\right)$$

Caractéristiques

- Tous les poids sont égaux : $w_i = \pi/n$
- **Avantage** : Gère naturellement les singularités en $x = \pm 1$
- **Usage** : Problèmes avec comportement oscillant ou singulier
- Points de quadrature : zéros du polynôme de Chebyshev

Exemple test : $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3\pi}{8}$

Résultats - Gauss-Chebyshev $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3\pi}{8}$



Interprétation :

- Poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ géré naturellement : pas de singularité numérique
- Fonction polynomiale \Rightarrow exactitude pour $n \geq 3$ (degré $2n - 1 = 5$)
- Calcul très rapide : points explicites $x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$

Règle de Simpson composite

Formule

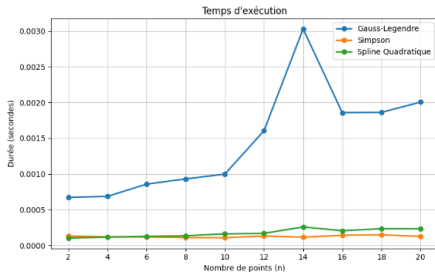
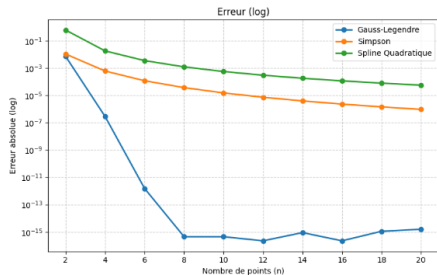
Pour n sous-intervalles (n pair), avec $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{i \text{ impair}} f(x_i) + 2 \sum_{i \text{ pair}} f(x_i) + f(b) \right]$$

Caractéristiques

- **Ordre** : $\mathcal{O}(h^4)$ pour $f \in C^4$
- **Principe** : Interpolation parabolique par morceaux
- **Avantage** : Facile à implémenter, précision acceptable
- **Limitation** : Convergence algébrique (plus lente que Gauss)

Résultats - Simpson $\int_0^\pi \sin(x)dx = 2$



Interprétation :

- Convergence algébrique $\mathcal{O}(h^4)$ confirmée graphiquement (pente -4 en log-log)
- Plus lent que Gauss-Legendre pour même précision
- Avantage : simplicité d'implémentation, points uniformément espacés

Intégration par spline quadratique

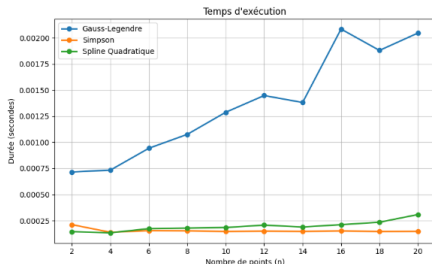
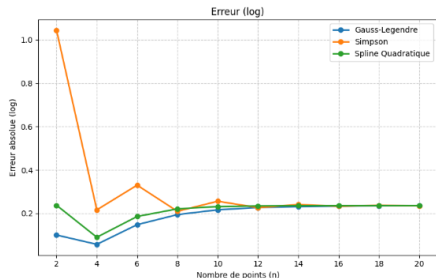
Principe

- 1 Interpolation de f par splines quadratiques sur les points x_i
- 2 Intégration analytique de chaque segment parabolique
- 3 Sommation des contributions de tous les segments

Caractéristiques

- **Flexibilité** : S'adapte à la géométrie de la fonction
- **Régularité** : Continuité C^1 de la spline
- **Avantage** : Bonne performance sur fonctions irrégulières
- **Coût** : Légèrement supérieur (construction de la spline)

Résultats - Spline quadratique $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+25x^2} dx = \frac{2}{5} \arctan(5)$



Interprétation :

- Fonction de Runge : oscillations rapides difficiles pour méthodes polynomiales
- Spline s'adapte localement à la géométrie \Rightarrow robustesse accrue
- Convergence $\mathcal{O}(h^3)$ avec coût calculatoire modéré

Comparaison des méthodes d'intégration

Méthode	Domaine	Convergence	Usage optimal
Gauss-Laguerre	$[0, +\infty)$	Exponentielle	Intégrales semi-infinies
Gauss-Legendre	$[a, b]$	Exponentielle	Fonctions régulières
Gauss-Chebyshev	$[-1, 1]$	Exponentielle	Singularités aux bords
Simpson	$[a, b]$	$\mathcal{O}(h^4)$	Implémentation simple
Spline quad.	$[a, b]$	$\mathcal{O}(h^3)$	Fonctions irrégulières

Table – Synthèse comparative des méthodes

Recommandation

Choisir la méthode selon :

- Le domaine d'intégration (fini, semi-infini)
- La régularité de la fonction
- La précision requise vs. coût calculatoire

Conclusion générale

Synthèse du projet

Ce projet a permis une étude approfondie de **huit méthodes numériques fondamentales**, couvrant deux domaines centraux du calcul scientifique : la résolution numérique des équations différentielles ordinaires et le calcul approché d'intégrales définies.

Apports majeurs du travail

- **Apport théorique** : Consolidation des notions clés d'ordre de convergence, de stabilité numérique et d'analyse des erreurs.
- **Apport expérimental** : Mise en évidence des comportements numériques par confrontation systématique aux solutions analytiques et aux résultats de référence.
- **Apport méthodologique** : Élaboration d'une démarche rigoureuse permettant de choisir une méthode adaptée en fonction des caractéristiques du problème, du niveau de précision recherché et du coût de calcul.

Merci pour votre attention

Questions ?