

Méthodes Numériques pour Équations Différentielles et Intégration

Analyse Comparative et Validation Expérimentale

Master 2 - Génie Informatique

Analyse Numérique et Calcul Scientifique

6 janvier 2026

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Fondements Théoriques
- 3 Méthodes pour Équations Différentielles
- 4 Méthodes d'Intégration Numérique
- 5 Résultats Expérimentaux
- 6 Analyse Comparative
- 7 Conclusion

Contexte et Objectifs

Problématique

L'analyse numérique fournit des outils essentiels pour résoudre des problèmes mathématiques complexes qui n'admettent pas de solution analytique.

Équations Différentielles

- Méthode d'Euler
- Méthode de Heun
- Runge-Kutta d'ordre 4

Intégration Numérique

- Quadratures de Gauss
- Méthode de Simpson
- Splines Quadratiques

Objectif

Analyser, implémenter et comparer rigoureusement ces méthodes sur des problèmes tests.

Méthodologie

- ① **Analyse théorique** : Fondements mathématiques et propriétés
- ② **Implémentation** : Code Python optimisé et structuré
- ③ **Validation** : Comparaison avec solutions exactes
- ④ **Analyse comparative** :
 - Convergence
 - Précision
 - Efficacité computationnelle
 - Stabilité numérique
- ⑤ **Synthèse** : Recommandations d'utilisation

Problème de Cauchy

Formulation générale

Soit le problème à valeur initiale :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [x_0, x_f] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant les conditions de Lipschitz.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si f est continue et lipschitzienne en y , alors le problème admet une unique solution $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_f])$.

Definition

Une méthode à un pas pour résoudre $y' = f(x, y)$ s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + h \Phi(x_n, y_n, h) \quad (2)$$

où Φ est la **fonction d'incrément**.

Propriétés essentielles

- **Consistance** : $\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$
- **Ordre** : Une méthode est d'ordre p si l'erreur locale de troncature est $\mathcal{O}(h^{p+1})$
- **Stabilité** : Contrôle de la propagation des erreurs
- **Convergence** : $\max_n |y(x_n) - y_n| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$

Quadrature Numérique

Problème général

Approximer l'intégrale :

$$I(f) = \int_a^b w(x)f(x) dx \quad (3)$$

par une somme pondérée :

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (4)$$

où $w(x)$ est une fonction poids, $\{x_i\}$ sont les nœuds et $\{w_i\}$ les poids.

Définition (Degré d'exactitude)

Une méthode a un degré d'exactitude d si elle intègre exactement tous les polynômes de degré $\leq d$.

Theorem (Formules de Gauss)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique ensemble de nœuds $\{x_i\}_{i=1}^n$ et de poids $\{w_i\}_{i=1}^n$ tel que :

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E_n(f) \quad (5)$$

soit exacte pour tous les polynômes de degré $\leq 2n - 1$.

Propriété clé

Les nœuds $\{x_i\}$ sont les racines des polynômes orthogonaux associés à la fonction poids $w(x)$.

Méthode d'Euler Explicite

Formulation

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (6)$$

Principe

- Approximation de la dérivée par différence finie
- $y'(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$
- Tangente locale

Propriétés

- Simple et rapide
- Ordre 1 : $\mathcal{O}(h)$
- Stabilité limitée
- Erreur globale : $\mathcal{O}(h)$

Analyse de l'erreur

Développement de Taylor :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) \quad (7)$$

Erreur locale de troncature : $\tau_n = \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) = \mathcal{O}(h^2)$

Méthode de Heun (RK2)

Formulation

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (8)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1\right) \quad (9)$$

$$y_{n+1} = y_n + h k_2 \quad (10)$$

Principe

- Méthode prédicteur-correcteur
- Évaluation au point milieu
- Runge-Kutta d'ordre 2

Propriétés

- Ordre 2 : $\mathcal{O}(h^2)$
- Meilleure stabilité
- 2 évaluations de f
- Bon compromis

Erreur

Erreur locale : $\mathcal{O}(h^3)$ \Rightarrow Erreur globale : $\mathcal{O}(h^2)$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Formulation classique (RK4)

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (11)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (12)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (13)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \quad (14)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (15)$$

Avantages

- Ordre 4 : $\mathcal{O}(h^4)$
- Très grande précision
- Excellente stabilité

Coût

- 4 évaluations de f
- Plus coûteux par pas
- Mais permet h plus grand

Gauss-Legendre

Formule

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (16)$$

où x_i sont les racines du polynôme de Legendre $P_n(x)$.

Propriétés

- Degré d'exactitude : $2n - 1$
- Convergence spectrale
- Optimal pour fonctions régulières

Changement de variable

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) dt$$

Erreur

Pour $f \in \mathcal{C}^{2n}([a, b])$:

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}} \left(\frac{n!}{(2n)!} \right)^2 \quad (17)$$

Gauss-Laguerre

Formule

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (18)$$

où x_i sont les racines du polynôme de Laguerre $L_n(x)$.

Applications

- Intégrales sur $[0, \infty)$ avec décroissance exponentielle
- Transformées de Laplace
- Physique quantique, statistiques

Convergence

Convergence spectrale pour fonctions analytiques décroissant exponentiellement.

Formule

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (19)$$

avec $x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$ et $w_i = \frac{\pi}{n}$.

Avantages

- Poids constants
- Calcul explicite des nœuds
- Très efficace

Applications

- Intégrales avec singularités
- Approximation de fonctions
- Méthodes spectrales

Attention

La fonction poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ doit être prise en compte.

Méthode de Simpson

Formule composite

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right] \quad (20)$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ et n est pair.

Principe

- Interpolation parabolique
- Utilise 3 points
- Ordre 4

Erreur

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$$

⇒ Convergence en $\mathcal{O}(h^4)$

Avantages

Robuste, simple, bien adapté aux fonctions régulières sur intervalles bornés.

Splines Quadratiques

Principe

Approcher f par une fonction spline quadratique $S(x)$ définie par morceaux :

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (21)$$

puis intégrer exactement $S(x)$.

Construction

- Interpolation aux nœuds
- Continuité en \mathcal{C}^1
- Système linéaire

Propriétés

- Ordre 3 : $\mathcal{O}(h^3)$
- Flexibilité
- Robuste aux oscillations

Intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_i(x) dx = \frac{a_i h_i^3}{3} + \frac{b_i h_i^2}{2} + c_i h_i \quad (22)$$

Problème Test

EDO considérée

$$\begin{cases} y'(x) = \pi \cos(\pi x) y(x), & x \in [0, 6] \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (23)$$

Solution exacte

$$y(x) = \exp(\sin(\pi x)) \quad (24)$$

Caractéristiques

- Fonction oscillante avec période 2
- Permet une validation rigoureuse
- Test classique pour méthodes numériques

Comparaison : $h = 0.5$

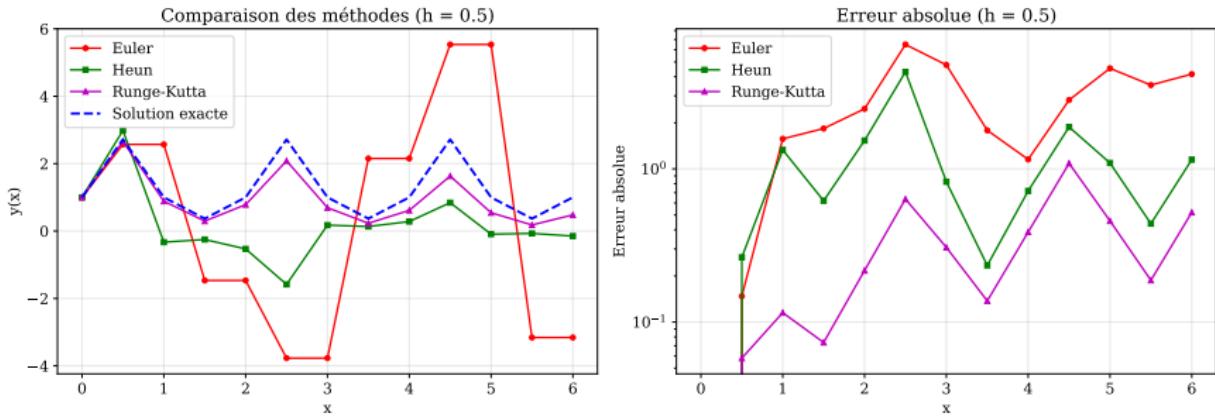


Figure – Comparaison des méthodes pour $h = 0.5$ (12 pas)

- **Euler** : Erreur visible, accumulation rapide
- **Heun** : Bonne approximation
- **RK4** : Quasi-superposition avec solution exacte

Comparaison : $h = 0.3$

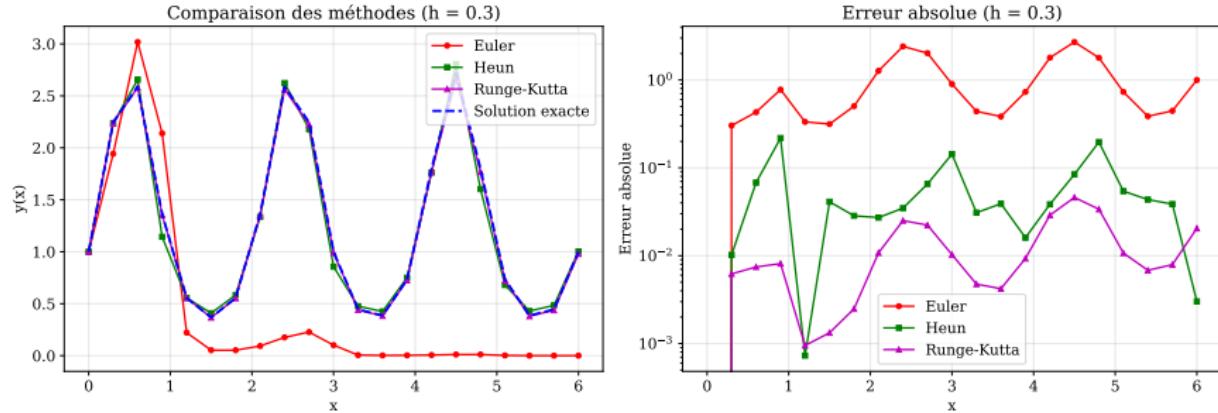


Figure – Comparaison des méthodes pour $h = 0.3$ (20 pas)

- Amélioration notable pour Euler
- Heun et RK4 : erreur négligeable

Comparaison : $h = 0.15$

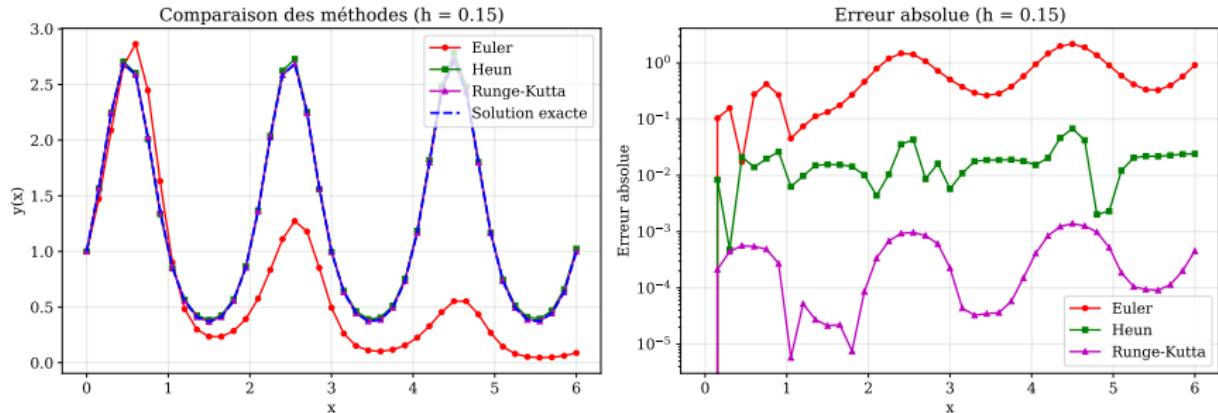


Figure – Comparaison des méthodes pour $h = 0.15$ (40 pas)

- Euler devient acceptable
- RK4 : précision machine

Comparaison : $h = 0.06$

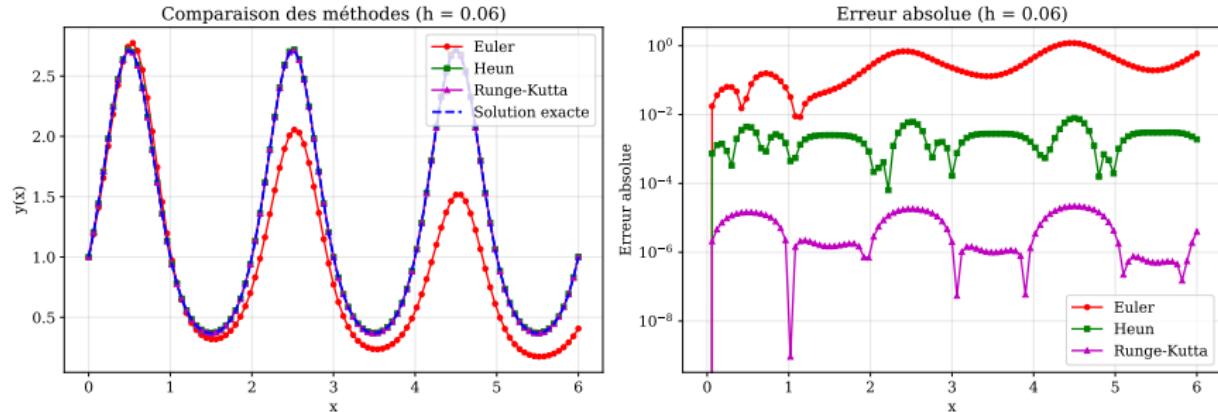


Figure – Comparaison des méthodes pour $h = 0.06$ (100 pas)

- Toutes les méthodes convergent
- Différence principale : coût computationnel

Étude de Convergence

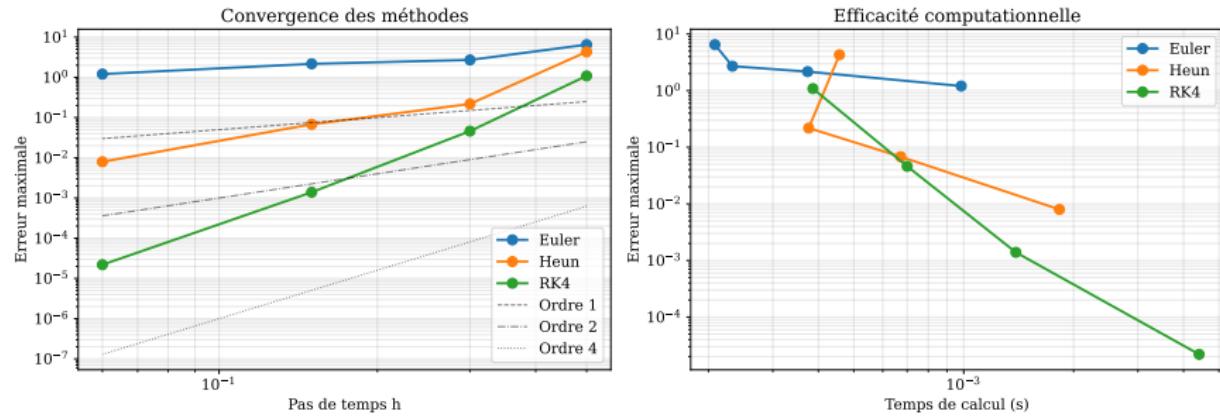


Figure – Analyse de convergence et efficacité computationnelle

Observations

- Pentes confirment les ordres théoriques : 1, 2 et 4
- RK4 : meilleure précision pour un temps donné
- Heun : excellent compromis précision/coût

Tableau Comparatif - EDO

Table – Ordres de convergence observés

Méthode	Ordre théorique	Ordre observé	Coût/pas
Euler	1	≈ 1.0	1 éval.
Heun	2	≈ 2.0	2 éval.
RK4	4	≈ 4.0	4 éval.

Recommandations

- **Euler** : Problèmes simples, prototypage rapide
- **Heun** : Usage général, bon compromis
- **RK4** : Haute précision requise, standard industriel

$$\text{Gauss-Laguerre : } \int_0^{\infty} e^{-x} x^2 dx = 2$$

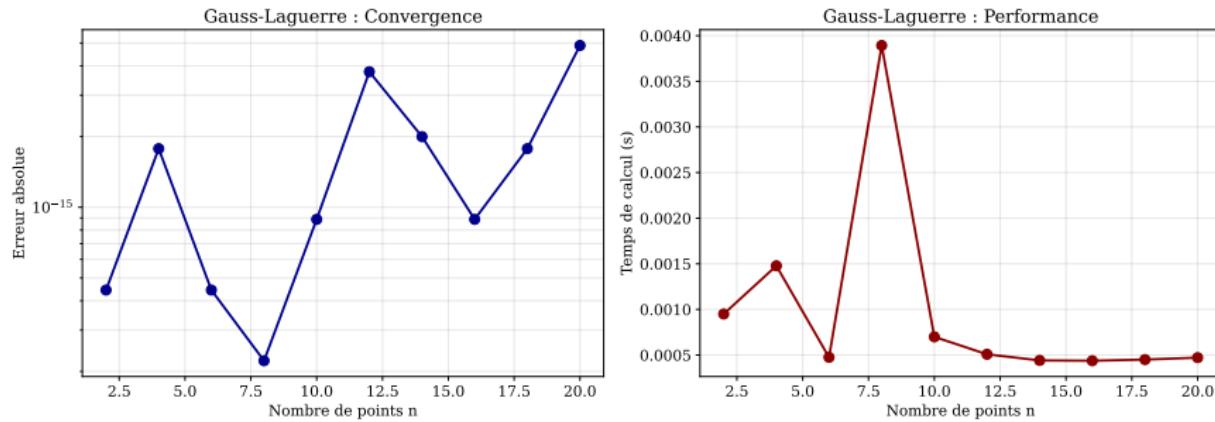


Figure – Convergence de Gauss-Laguerre sur intégrale infinie

Analyse

- Convergence spectrale (exponentielle)
- $n = 10$: erreur $< 10^{-14}$ (précision machine)
- Idéal pour intégrales à décroissance exponentielle

$$\text{Gauss-Legendre : } \int_{-1}^1 \cos(x) dx = 2 \sin(1)$$

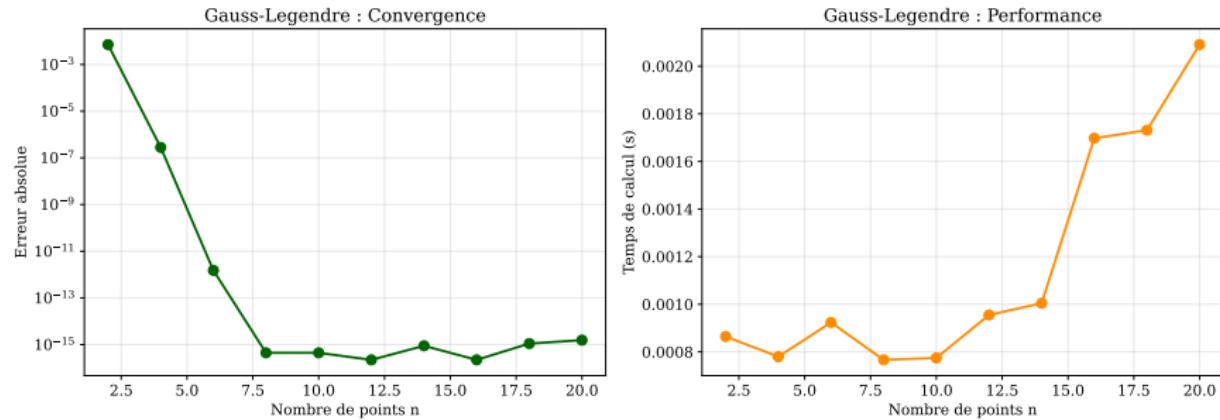


Figure – Convergence de Gauss-Legendre sur intégrale bornée

Analyse

- Convergence spectrale très rapide
- Universalité pour fonctions régulières
- Référence en quadrature numérique

$$\text{Gauss-Chebyshev : } \int_{-1}^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3\pi}{8}$$

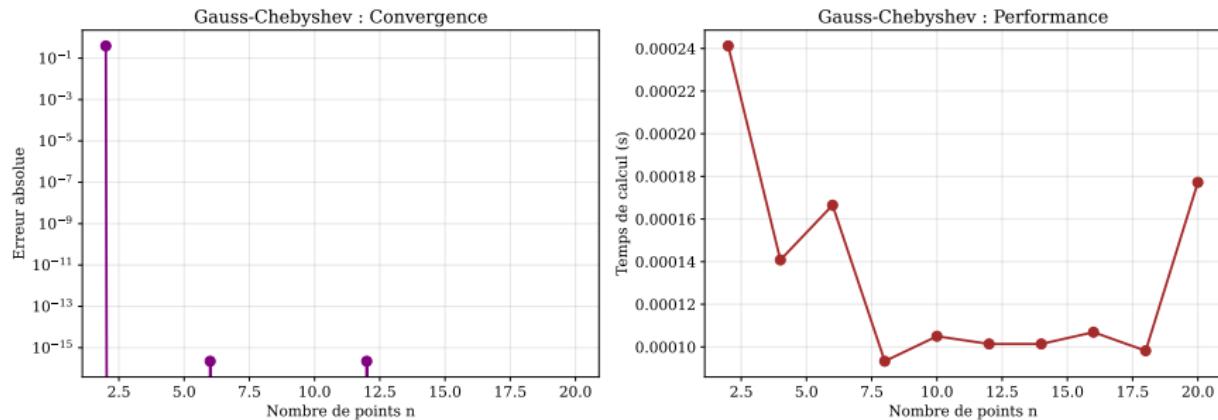


Figure – Convergence de Gauss-Chebyshev avec fonction poids

Analyse

- Poids constants : simplicité d'implémentation
- Optimal pour singularités aux bornes
- Convergence spectrale garantie

$$\text{Simpson : } \int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2$$

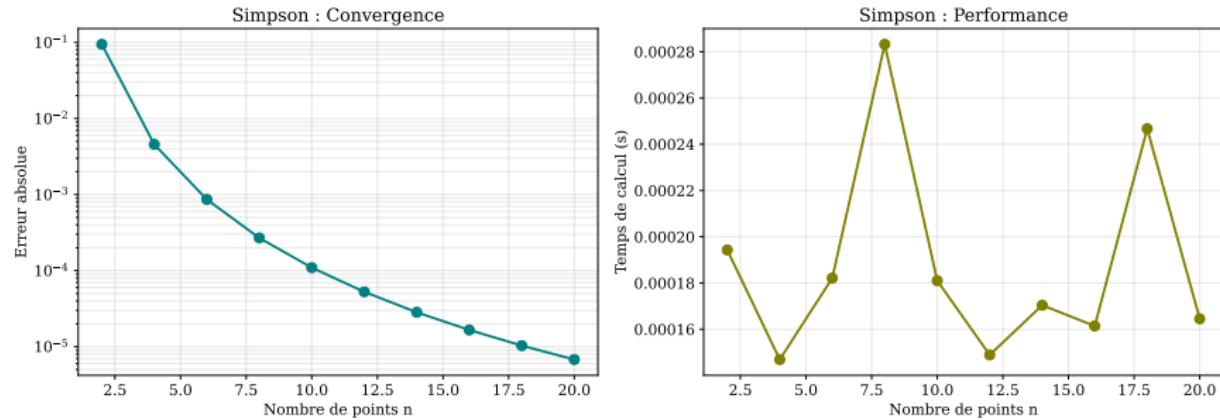


Figure – Convergence de la méthode de Simpson

Analyse

- Convergence algébrique : $\mathcal{O}(n^{-4})$
- Plus lente que Gauss mais très robuste
- Excellent choix pour applications générales

Spline Quadratique : Fonction de Runge

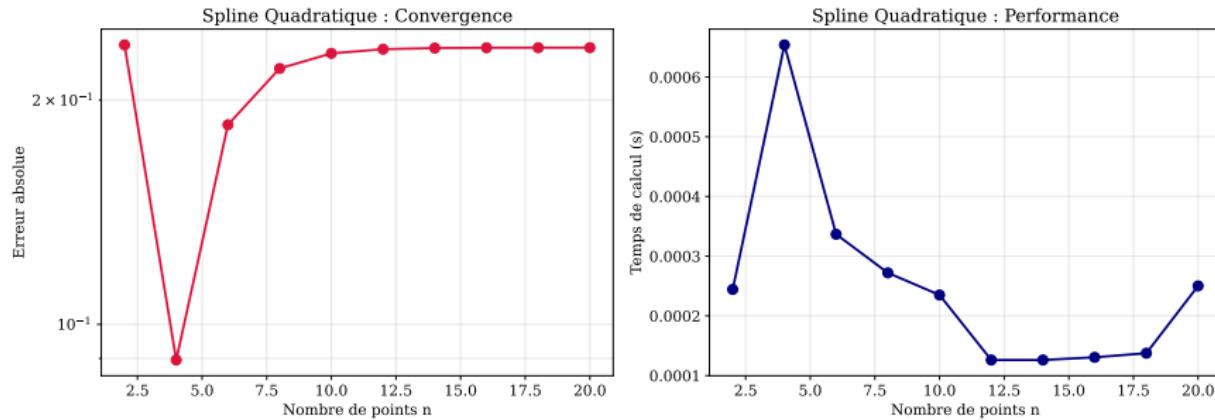


Figure – Spline quadratique sur $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+25x^2} dx = \frac{\pi}{10}$

Analyse

- Convergence $\mathcal{O}(n^{-3})$
- Robustesse face aux oscillations (phénomène de Runge)
- Alternative intéressante aux polynômes d'interpolation

Comparaison Globale

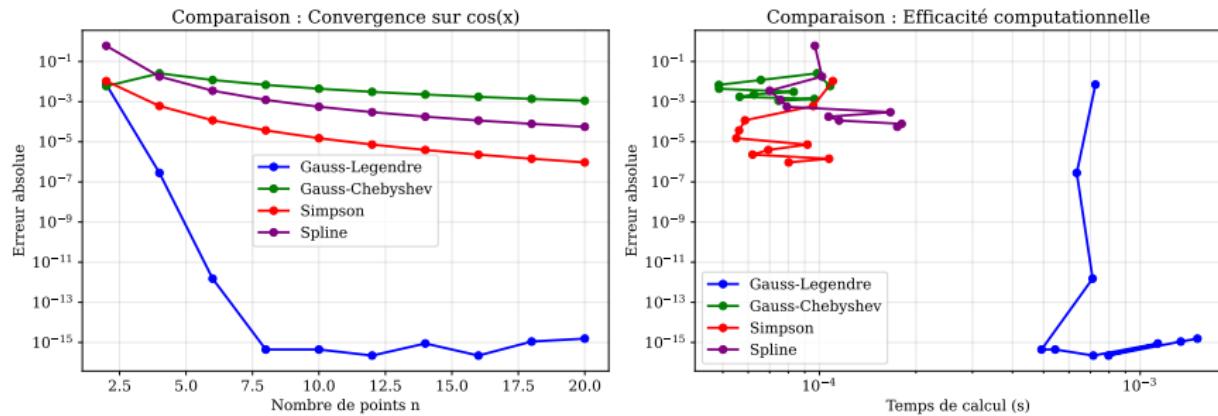


Figure – Comparaison sur $\int_{-1}^1 \cos(x) dx$

- **Gauss-Legendre/Chebyshev** : convergence la plus rapide
- **Simpson** : robuste, convergence algébrique régulière
- **Spline** : bon compromis, stabilité numérique

Tableau Comparatif - Intégration

Table – Propriétés des méthodes d'intégration

Méthode	Convergence	Degré exact.	Domaine	Robustesse
Gauss-Laguerre	Spectrale	$2n - 1$	$[0, \infty)$	Excellent
Gauss-Legendre	Spectrale	$2n - 1$	$[a, b]$	Excellent
Gauss-Chebyshev	Spectrale	$2n - 1$	$[-1, 1]$	Excellent
Simpson	$\mathcal{O}(n^{-4})$	3	$[a, b]$	Très bonne
Spline Quad.	$\mathcal{O}(n^{-3})$	2	$[a, b]$	Bonne

Recommandations

- **Fonctions régulières** : Gauss-Legendre (optimal)
- **Intégrales infinies** : Gauss-Laguerre
- **Singularités** : Gauss-Chebyshev
- **Usage général** : Simpson (fiabilité)
- **Fonctions oscillantes** : Splines (stabilité)

Synthèse : Équations Différentielles

Table – Comparaison qualitative des méthodes EDO

Critère	Euler	Heun	RK4
Précision	Faible	Bonne	Excellente
Vitesse	Très rapide	Rapide	Modérée
Stabilité	Limitée	Bonne	Excellente
Simplicité	Très simple	Simple	Moyenne
Usage général	Déconseillé	Recommandé	Recommandé

Points clés

- **Choix du pas h** : critique pour Euler, moins pour RK4
- **Stabilité** : RK4 permet pas plus grands
- **Efficacité** : Heun souvent optimal (ordre 2, coût modéré)

Synthèse : Intégration Numérique

Table – Comparaison qualitative des méthodes d'intégration

Critère	G-Lag.	G-Leg.	G-Cheb.	Simpson	Spline
Précision	Excellent	Excellent	Excellent	Bonne	Moyenne
Vitesse	Moyenne	Moyenne	Rapide	Bonne	Moyenne
Robustesse	Bonne	Excellent	Bonne	Excellent	Bonne
Simplicité	Moyenne	Moyenne	Simple	Très simple	Moyenne
Polyvalence	Limitée	Excellent	Moyenne	Bonne	Bonne

Choix stratégiques

- **Précision maximale** : Quadratures de Gauss
- **Fiabilité** : Simpson (convergence garantie)
- **Problèmes spécifiques** : Adapter la fonction poids

Équations Différentielles

- Contrôle adaptatif du pas
- Détection de rigidité
- Méthodes implicites (stabilité)
- Systèmes d'EDO
- Conservation d'énergie

Intégration Numérique

- Détection de singularités
- Intégrales multiples
- Méthodes adaptatives
- Régularisation
- Parallélisation

Limites numériques

- Précision machine ($\epsilon \approx 10^{-16}$ en double précision)
- Conditionnement des problèmes
- Coût computationnel vs précision

Conclusions Principales

Équations Différentielles

- **Runge-Kutta 4** : Standard industriel, excellent rapport précision/stabilité
- **Heun** : Choix optimal pour usage général (ordre 2 suffisant souvent)
- **Euler** : Pédagogique, prototypage rapide uniquement

Intégration Numérique

- **Quadratures de Gauss** : Précision maximale pour fonctions régulières
- **Simpson** : Robustesse et simplicité, excellent choix par défaut
- **Splines** : Alternative pour fonctions irrégulières

Principe général

Le choix de la méthode dépend du **compromis** entre précision, coût computationnel, robustesse et propriétés du problème.

Perspectives et Extensions

Développements possibles

- Méthodes d'ordre supérieur
- Contrôle adaptatif
- Méthodes implicites
- Parallélisation
- GPU computing

Applications avancées

- EDO raides
- Systèmes chaotiques
- EDP (différences finies)
- Optimisation numérique
- Machine Learning

Outils modernes

Bibliothèques : `scipy.integrate`, `scipy.optimize`, JAX, PyTorch
(différentiation automatique)

Validation et Reproductibilité

Implémentation

- Code Python structuré en packages modulaires
- Tests unitaires sur problèmes avec solutions exactes
- Documentation complète
- Figures générées automatiquement

Validation

- Comparaison systématique avec solutions analytiques
- Vérification des ordres de convergence théoriques
- Analyse de stabilité numérique
- Études de performance computationnelle

Reproductibilité

Tous les résultats sont reproductibles via le script `analyse_complete.py`.

Références Bibliographiques

-  A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer, 2007.
-  R.L. Burden, J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, 2010.
-  E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*. Springer, 1993.
-  P.J. Davis, P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, 1984.
-  L.N. Trefethen. *Approximation Theory and Approximation Practice*. SIAM, 2013.

Merci de votre attention

Questions ?