

# Méthodes Numériques pour Équations Différentielles et Intégration

Analyse Comparative et Validation Expérimentale

**Fofana Brahima**

Master 2 - Génie Informatique

Analyse Numérique et Calcul Scientifique

6 janvier 2026

# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Fondements Théoriques
- 3 Méthodes pour Équations Différentielles
- 4 Méthodes d'Intégration Numérique
- 5 Résultats Expérimentaux
- 6 Analyse Comparative
- 7 Conclusion

## Problématique

L'analyse numérique fournit des outils essentiels pour résoudre des problèmes mathématiques complexes qui n'admettent pas de solution analytique.

### Équations Différentielles

- Méthode d'Euler
- Méthode de Heun
- Runge-Kutta d'ordre 4

### Intégration Numérique

- Quadratures de Gauss
- Méthode de Simpson
- Splines Quadratiques

## Objectif

Analyser, implémenter et comparer rigoureusement ces méthodes sur des problèmes tests.

- ➊ **Analyse théorique** : Fondements mathématiques et propriétés
- ➋ **Implémentation** : Code Python optimisé et structuré
- ➌ **Validation** : Comparaison avec solutions exactes
- ➍ **Analyse comparative** :
  - Convergence
  - Précision
  - Efficacité computationnelle
  - Stabilité numérique
- ➎ **Synthèse** : Recommandations d'utilisation

# Problème de Cauchy

## Formulation générale

Soit le problème à valeur initiale :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [x_0, x_f] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

où  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue satisfaisant les conditions de Lipschitz.

## Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si  $f$  est continue et lipschitzienne en  $y$ , alors le problème admet une unique solution  $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_f])$ .

## Definition

Une méthode à un pas pour résoudre  $y' = f(x, y)$  s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + h \Phi(x_n, y_n, h) \quad (2)$$

où  $\Phi$  est la **fonction d'incrément**.

## Propriétés essentielles

- **Consistance** :  $\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$
- **Ordre** : Une méthode est d'ordre  $p$  si l'erreur locale de troncature est  $\mathcal{O}(h^{p+1})$
- **Stabilité** : Contrôle de la propagation des erreurs
- **Convergence** :  $\max_n |y(x_n) - y_n| \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$

## Problème général

Approximer l'intégrale :

$$I(f) = \int_a^b w(x)f(x) dx \quad (3)$$

par une somme pondérée :

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (4)$$

où  $w(x)$  est une fonction poids,  $\{x_i\}$  sont les nœuds et  $\{w_i\}$  les poids.

## Definition (Degré d'exactitude)

Une méthode a un degré d'exactitude  $d$  si elle intègre exactement tous les polynômes de degré  $\leq d$ .

## Theorem (Formules de Gauss)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique ensemble de nœuds  $\{x_i\}_{i=1}^n$  et de poids  $\{w_i\}_{i=1}^n$  tel que :

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E_n(f) \quad (5)$$

soit exacte pour tous les polynômes de degré  $\leq 2n - 1$ .

## Propriété clé

Les nœuds  $\{x_i\}$  sont les racines des polynômes orthogonaux associés à la fonction poids  $w(x)$ .



## Formulation

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (6)$$

## Principe

- Approximation de la dérivée par différence finie
- $y'(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$
- Tangente locale

## Propriétés

- Simple et rapide
- Ordre 1 :  $\mathcal{O}(h)$
- Stabilité limitée
- Erreur globale :  $\mathcal{O}(h)$

## Analyse de l'erreur

Développement de Taylor :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \quad (7)$$

Erreur locale de troncature :  $\tau_n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) = \mathcal{O}(h^2)$

# Méthode de Heun (RK2)

## Formulation

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (8)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (9)$$

$$y_{n+1} = y_n + h k_2 \quad (10)$$

## Principe

- Méthode prédicteur-correcteur
- Évaluation au point milieu
- Runge-Kutta d'ordre 2

## Propriétés

- **Ordre 2** :  $\mathcal{O}(h^2)$
- **Meilleure stabilité**
- 2 évaluations de  $f$
- Bon compromis

## Erreur

Erreur locale :  $\mathcal{O}(h^3)$   $\Rightarrow$  Erreur globale :  $\mathcal{O}(h^2)$

## Formulation classique (RK4)

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (11)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (12)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (13)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \quad (14)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (15)$$

### Avantages

- Ordre 4 :  $\mathcal{O}(h^4)$
- Très grande précision
- Excellente stabilité

### Coût

- 4 évaluations de  $f$
- Plus coûteux par pas
- Mais permet  $h$  plus grand

## Formule

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (16)$$

où  $x_i$  sont les racines du polynôme de Legendre  $P_n(x)$ .

## Propriétés

- Degré d'exactitude :  $2n - 1$
- Convergence spectrale
- Optimal pour fonctions régulières

## Changement de variable

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) dt$$

## Erreur

Pour  $f \in \mathcal{C}^{2n}([a, b])$  :

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}} \left( \frac{n!}{(2n)!} \right)^2 \quad (17)$$

## Formule

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (18)$$

où  $x_i$  sont les racines du polynôme de Laguerre  $L_n(x)$ .

## Applications

- Intégrales sur  $[0, \infty)$  avec décroissance exponentielle
- Transformées de Laplace
- Physique quantique, statistiques

## Convergence

Convergence spectrale pour fonctions analytiques décroissant exponentiellement.

## Formule

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (19)$$

avec  $x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$  et  $w_i = \frac{\pi}{n}$ .

## Avantages

- Poids constants
- Calcul explicite des nœuds
- Très efficace

## Applications

- Intégrales avec singularités
- Approximation de fonctions
- Méthodes spectrales

## Attention

La fonction poids  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  doit être prise en compte.

## Formule composite

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right] \quad (20)$$

où  $h = \frac{b-a}{n}$  et  $n$  est pair.

## Principe

- Interpolation parabolique
- Utilise 3 points
- Ordre 4

## Erreur

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$$

$\Rightarrow$  Convergence en  $\mathcal{O}(h^4)$

## Avantages

Robuste, simple, bien adapté aux fonctions régulières sur intervalles bornés.

## Principe

Approcher  $f$  par une fonction spline quadratique  $S(x)$  définie par morceaux :

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (21)$$

puis intégrer exactement  $S(x)$ .

## Construction

- Interpolation aux nœuds
- Continuité en  $\mathcal{C}^1$
- Système linéaire

## Propriétés

- Ordre 3 :  $\mathcal{O}(h^3)$
- Flexibilité
- Robuste aux oscillations

## Intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_i(x) dx = \frac{a_i h_i^3}{3} + \frac{b_i h_i^2}{2} + c_i h_i \quad (22)$$



## EDO considérée

$$\begin{cases} y'(x) = \pi \cos(\pi x) y(x), & x \in [0, 6] \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (23)$$

## Solution exacte

$$y(x) = \exp(\sin(\pi x)) \quad (24)$$

## Caractéristiques

- Fonction oscillante avec période 2
- Permet une validation rigoureuse
- Test classique pour méthodes numériques

# Comparaison : $h = 0.5$

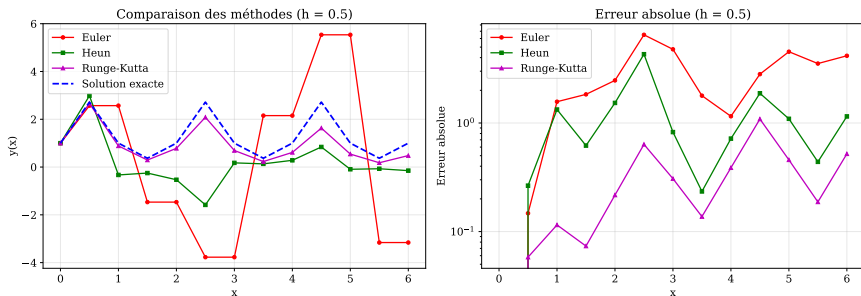


Figure – Comparaison des méthodes pour  $h = 0.5$  (12 pas)

- Euler : Erreur visible, accumulation rapide
- Heun : Bonne approximation
- RK4 : Quasi-superposition avec solution exacte

# Comparaison : $h = 0.3$

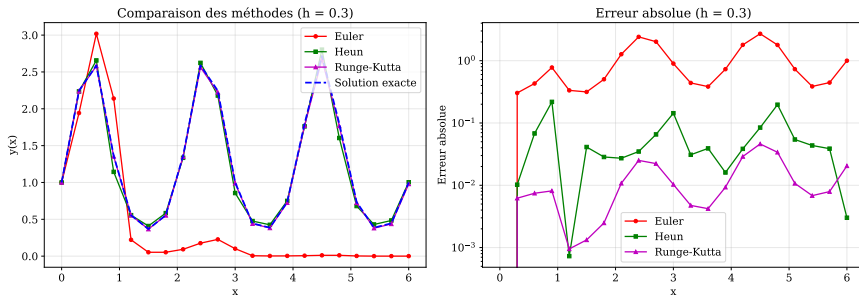


Figure – Comparaison des méthodes pour  $h = 0.3$  (20 pas)

- Amélioration notable pour Euler
- Heun et RK4 : erreur négligeable

# Comparaison : $h = 0.15$

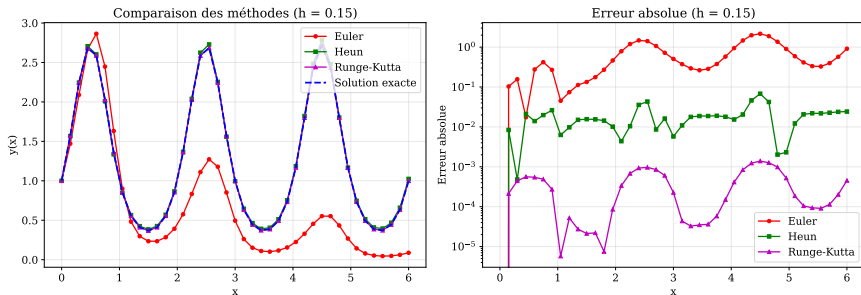


Figure – Comparaison des méthodes pour  $h = 0.15$  (40 pas)

- Euler devient acceptable
- RK4 : précision machine

# Comparaison : $h = 0.06$

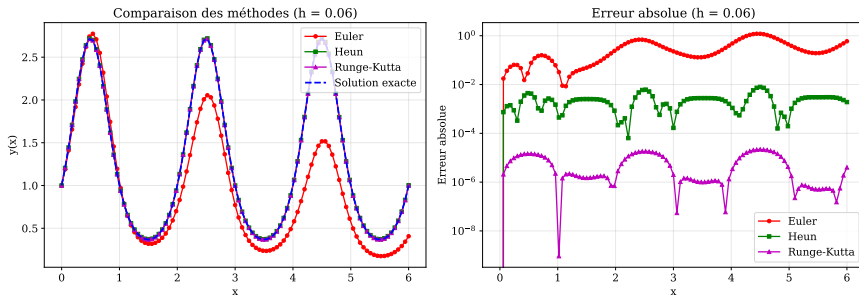


Figure – Comparaison des méthodes pour  $h = 0.06$  (100 pas)

- Toutes les méthodes convergent
- Différence principale : coût computationnel

# Étude de Convergence

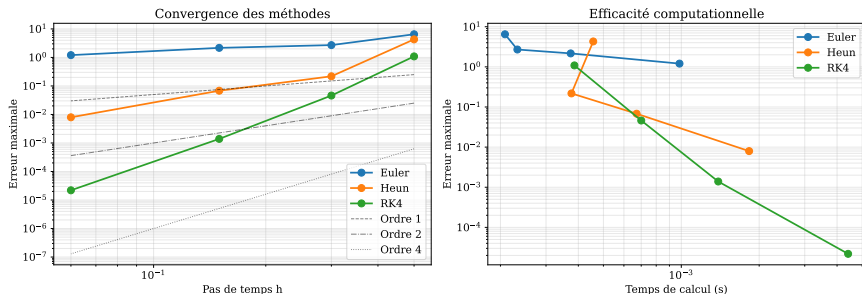


Figure – Analyse de convergence et efficacité computationnelle

## Observations

- Pentas confirment les ordres théoriques : 1, 2 et 4
- RK4 : meilleure précision pour un temps donné
- Heun : excellent compromis précision/coût

# Tableau Comparatif - EDO

Table – Ordres de convergence observés

Méthode	Ordre théorique	Ordre observé	Coût/pas
Euler	1	$\approx 1.0$	1 éval.
Heun	2	$\approx 2.0$	2 éval.
RK4	4	$\approx 4.0$	4 éval.

## Recommandations

- **Euler** : Problèmes simples, prototypage rapide
- **Heun** : Usage général, bon compromis
- **RK4** : Haute précision requise, standard industriel

# Gauss-Laguerre : $\int_0^\infty e^{-x} x^2 dx = 2$

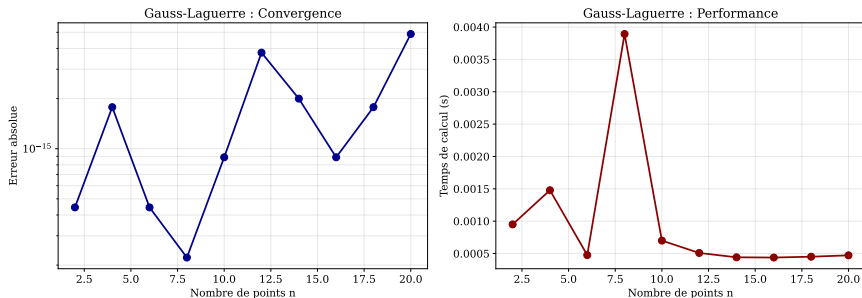


Figure – Convergence de Gauss-Laguerre sur intégrale infinie

## Analyse

- Convergence spectrale (exponentielle)
- $n = 10$  : erreur  $< 10^{-14}$  (précision machine)
- Idéal pour intégrales à décroissance exponentielle



# Gauss-Legendre : $\int_{-1}^1 \cos(x) dx = 2 \sin(1)$

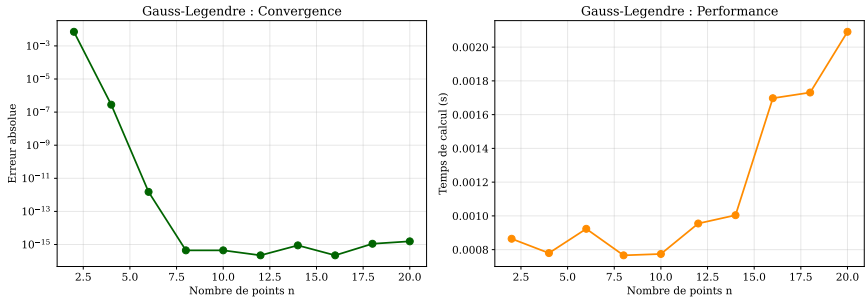


Figure – Convergence de Gauss-Legendre sur intégrale bornée

## Analyse

- Convergence spectrale très rapide
- Universalité pour fonctions régulières
- Référence en quadrature numérique

# Gauss-Chebyshev : $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3\pi}{8}$

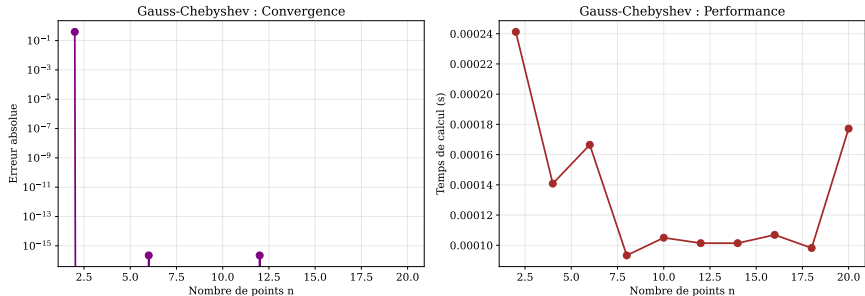


Figure – Convergence de Gauss-Chebyshev avec fonction poids

## Analyse

- Poids constants : simplicité d'implémentation
- Optimal pour singularités aux bornes
- Convergence spectrale garantie

$$\text{Simpson} : \int_0^\pi \sin(x) dx = 2$$

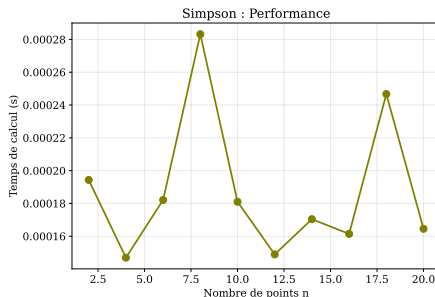
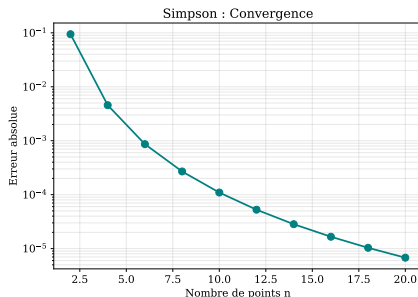


Figure – Convergence de la méthode de Simpson

## Analyse

- Convergence algébrique :  $\mathcal{O}(n^{-4})$
- Plus lente que Gauss mais très robuste
- Excellent choix pour applications générales

# Spline Quadratique : Fonction de Runge

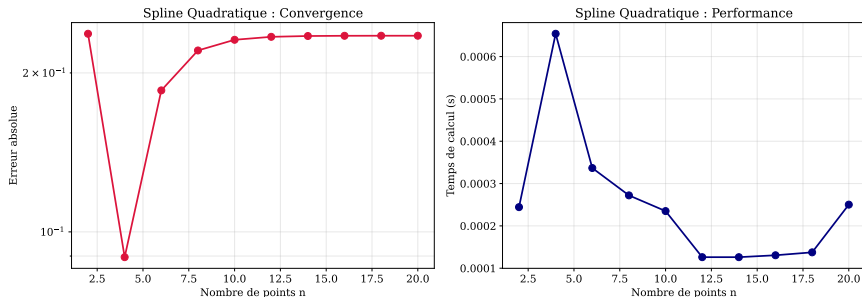


Figure – Spline quadratique sur  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+25x^2} dx = \frac{\pi}{10}$

## Analyse

- Convergence  $\mathcal{O}(n^{-3})$
- Robustesse face aux oscillations (phénomène de Runge)
- Alternative intéressante aux polynômes d'interpolation

# Comparaison Globale

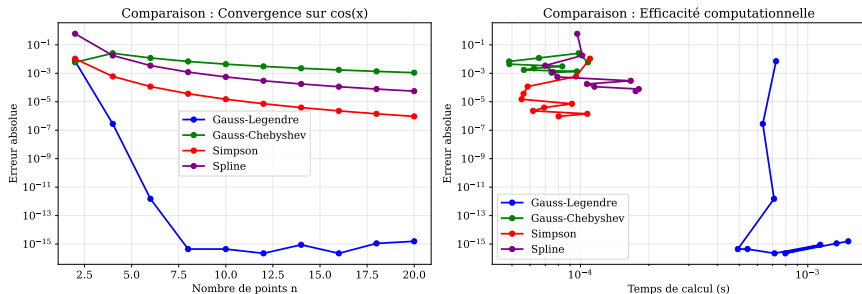


Figure – Comparaison sur  $\int_{-1}^1 \cos(x) dx$

- **Gauss-Legendre/Chebyshev** : convergence la plus rapide
- **Simpson** : robuste, convergence algébrique régulière
- **Spline** : bon compromis, stabilité numérique

# Tableau Comparatif - Intégration

Table – Propriétés des méthodes d'intégration

Méthode	Convergence	Degré exact.	Domaine	Robustesse
Gauss-Laguerre	Spectrale	$2n - 1$	$[0, \infty)$	Excellente
Gauss-Legendre	Spectrale	$2n - 1$	$[a, b]$	Excellente
Gauss-Chebyshev	Spectrale	$2n - 1$	$[-1, 1]$	Excellente
Simpson	$\mathcal{O}(n^{-4})$	3	$[a, b]$	Très bonne
Spline Quad.	$\mathcal{O}(n^{-3})$	2	$[a, b]$	Bonne

## Recommandations

- **Fonctions régulières** : Gauss-Legendre (optimal)
- **Intégrales infinies** : Gauss-Laguerre
- **Singularités** : Gauss-Chebyshev
- **Usage général** : Simpson (fiabilité)
- **Fonctions oscillantes** : Splines (stabilité)

Table – Comparaison qualitative des méthodes EDO

Critère	Euler	Heun	RK4
Précision	Faible	Bonne	Excellente
Vitesse	Très rapide	Rapide	Modérée
Stabilité	Limitée	Bonne	Excellente
Simplicité	Très simple	Simple	Moyenne
Usage général	Déconseillé	Recommandé	Recommandé

## Points clés

- **Choix du pas  $h$**  : critique pour Euler, moins pour RK4
- **Stabilité** : RK4 permet pas plus grands
- **Efficacité** : Heun souvent optimal (ordre 2, coût modéré)

Table – Comparaison qualitative des méthodes d'intégration

Critère	G-Lag.	G-Leg.	G-Cheb.	Simpson	Spline
Précision	Excellente	Excellente	Excellente	Bonne	Moyenne
Vitesse	Moyenne	Moyenne	Rapide	Bonne	Moyenne
Robustesse	Bonne	Excellente	Bonne	Excellente	Bonne
Simplicité	Moyenne	Moyenne	Simple	Très simple	Moyenne
Polyvalence	Limitée	Excellente	Moyenne	Bonne	Bonne

## Choix stratégiques

- **Précision maximale** : Quadratures de Gauss
- **Fiabilité** : Simpson (convergence garantie)
- **Problèmes spécifiques** : Adapter la fonction poids



## Équations Différentielles

- Contrôle adaptatif du pas
- Détection de rigidité
- Méthodes implicites (stabilité)
- Systèmes d'EDO
- Conservation d'énergie

## Intégration Numérique

- Détection de singularités
- Intégrales multiples
- Méthodes adaptatives
- Régularisation
- Parallélisation

## Limites numériques

- Précision machine ( $\epsilon \approx 10^{-16}$  en double précision)
- Conditionnement des problèmes
- Coût computationnel vs précision

# Conclusions Principales

## Équations Différentielles

- **Runge-Kutta 4** : Standard industriel, excellent rapport précision/stabilité
- **Heun** : Choix optimal pour usage général (ordre 2 suffisant souvent)
- **Euler** : Pédagogique, prototypage rapide uniquement

## Intégration Numérique

- **Quadratures de Gauss** : Précision maximale pour fonctions régulières
- **Simpson** : Robustesse et simplicité, excellent choix par défaut
- **Splines** : Alternative pour fonctions irrégulières

## Principe général

Le choix de la méthode dépend du **compromis** entre précision, coût computationnel, robustesse et propriétés du problème.

## Développements possibles

- Méthodes d'ordre supérieur
- Contrôle adaptatif
- Méthodes implicites
- Parallélisation
- GPU computing

## Applications avancées

- EDO raides
- Systèmes chaotiques
- EDP (différences finies)
- Optimisation numérique
- Machine Learning

## Outils modernes

Bibliothèques : `scipy.integrate`, `scipy.optimize`, JAX, PyTorch  
(différentiation automatique)

# Validation et Reproductibilité

## Implémentation

- Code Python structuré en packages modulaires
- Tests unitaires sur problèmes avec solutions exactes
- Documentation complète
- Figures générées automatiquement






## Validation

- Comparaison systématique avec solutions analytiques
- Vérification des ordres de convergence théoriques
- Analyse de stabilité numérique
- Études de performance computationnelle

## Reproductibilité

Tous les résultats sont reproductibles via le script `analyse_complete.py`.

# Références Bibliographiques

-  A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer, 2007.
-  R.L. Burden, J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, 2010.
-  E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*. Springer, 1993.
-  P.J. Davis, P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, 1984.
-  L.N. Trefethen. *Approximation Theory and Approximation Practice*. SIAM, 2013.

# Merci de votre attention

Questions ?