

Méthodes Numériques pour Équations Différentielles et Intégration

Analyse Comparative et Validation Expérimentale

Fofana Brahima

Master 2 - Génie Informatique

Analyse Numérique et Calcul Scientifique

6 janvier 2026

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Fondements Théoriques
- 3 Méthodes pour Équations Différentielles
- 4 Méthodes d'Intégration Numérique
- 5 Résultats Expérimentaux
- 6 Analyse Comparative
- 7 Conclusion

Contexte et Objectifs

Problématique

L'analyse numérique fournit des outils essentiels pour résoudre des problèmes mathématiques complexes qui n'admettent pas de solution analytique.

Équations Différentielles

- Méthode d'Euler
- Méthode de Heun
- Runge-Kutta d'ordre 4

Intégration Numérique

- Quadratures de Gauss
- Méthode de Simpson
- Splines Quadratiques

Objectif

Analyser, implémenter et comparer rigoureusement ces méthodes sur des problèmes tests.

Méthodologie

- ① **Analyse théorique** : Fondements mathématiques et propriétés
- ② **Implémentation** : Code Python optimisé et structuré
- ③ **Validation** : Comparaison avec solutions exactes
- ④ **Analyse comparative** :
 - Convergence
 - Précision
 - Efficacité computationnelle
 - Stabilité numérique
- ⑤ **Synthèse** : Recommandations d'utilisation

Problème de Cauchy

Formulation générale

Soit le problème à valeur initiale :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [x_0, x_f] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant les conditions de Lipschitz.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si f est continue et lipschitzienne en y , alors le problème admet une unique solution $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_f])$.

Definition

Une méthode à un pas pour résoudre $y' = f(x, y)$ s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + h \Phi(x_n, y_n, h) \quad (2)$$

où Φ est la **fonction d'incrément**.

Propriétés essentielles

- **Consistance** : $\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$
- **Ordre** : Une méthode est d'ordre p si l'erreur locale de troncature est $\mathcal{O}(h^{p+1})$
- **Stabilité** : Contrôle de la propagation des erreurs
- **Convergence** : $\max_n |y(x_n) - y_n| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$

Quadrature Numérique

Problème général

Approximer l'intégrale :

$$I(f) = \int_a^b w(x)f(x) dx \quad (3)$$

par une somme pondérée :

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (4)$$

où $w(x)$ est une fonction poids, $\{x_i\}$ sont les nœuds et $\{w_i\}$ les poids.

Définition (Degré d'exactitude)

Une méthode a un degré d'exactitude d si elle intègre exactement tous les polynômes de degré $\leq d$.

Quadratures de Gauss

Theorem (Formules de Gauss)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique ensemble de nœuds $\{x_i\}_{i=1}^n$ et de poids $\{w_i\}_{i=1}^n$ tel que :

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E_n(f) \quad (5)$$

soit exacte pour tous les polynômes de degré $\leq 2n - 1$.

Propriété clé

Les nœuds $\{x_i\}$ sont les racines des polynômes orthogonaux associés à la fonction poids $w(x)$.

Méthode d'Euler Explicite

Formulation

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (6)$$

Principe

- Approximation de la dérivée par différence finie
- $y'(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$
- Tangente locale

Propriétés

- Simple et rapide
- Ordre 1 : $\mathcal{O}(h)$
- Stabilité limitée
- Erreur globale : $\mathcal{O}(h)$

Analyse de l'erreur

Développement de Taylor :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) \quad (7)$$

Erreur locale de troncature : $\tau_n = \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) = \mathcal{O}(h^2)$

Méthode de Heun (RK2)

Formulation

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (8)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1\right) \quad (9)$$

$$y_{n+1} = y_n + h k_2 \quad (10)$$

Principe

- Méthode prédicteur-correcteur
- Évaluation au point milieu
- Runge-Kutta d'ordre 2

Propriétés

- Ordre 2 : $\mathcal{O}(h^2)$
- Meilleure stabilité
- 2 évaluations de f
- Bon compromis

Erreur

Erreur locale : $\mathcal{O}(h^3)$ \Rightarrow Erreur globale : $\mathcal{O}(h^2)$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Formulation classique (RK4)

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (11)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (12)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (13)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \quad (14)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (15)$$

Avantages

- Ordre 4 : $\mathcal{O}(h^4)$
- Très grande précision
- Excellente stabilité

Coût

- 4 évaluations de f
- Plus coûteux par pas
- Mais permet h plus grand

Gauss-Legendre

Formule

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (16)$$

où x_i sont les racines du polynôme de Legendre $P_n(x)$.

Propriétés

- Degré d'exactitude : $2n - 1$
- Convergence spectrale
- Optimal pour fonctions régulières

Changement de variable

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) dt$$

Erreur

Pour $f \in \mathcal{C}^{2n}([a, b])$:

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}} \left(\frac{n!}{(2n)!} \right)^2 \quad (17)$$

Gauss-Laguerre

Formule

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (18)$$

où x_i sont les racines du polynôme de Laguerre $L_n(x)$.

Applications

- Intégrales sur $[0, \infty)$ avec décroissance exponentielle
- Transformées de Laplace
- Physique quantique, statistiques

Convergence

Convergence spectrale pour fonctions analytiques décroissant exponentiellement.

Formule

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (19)$$

avec $x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$ et $w_i = \frac{\pi}{n}$.

Avantages

- Poids constants
- Calcul explicite des nœuds
- Très efficace

Applications

- Intégrales avec singularités
- Approximation de fonctions
- Méthodes spectrales

Attention

La fonction poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ doit être prise en compte.

Méthode de Simpson

Formule composite

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right] \quad (20)$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ et n est pair.

Principe

- Interpolation parabolique
- Utilise 3 points
- Ordre 4

Erreur

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$$

⇒ Convergence en $\mathcal{O}(h^4)$

Avantages

Robuste, simple, bien adapté aux fonctions régulières sur intervalles bornés.

Splines Quadratiques

Principe

Approcher f par une fonction spline quadratique $S(x)$ définie par morceaux :

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (21)$$

puis intégrer exactement $S(x)$.

Construction

- Interpolation aux nœuds
- Continuité en \mathcal{C}^1
- Système linéaire

Propriétés

- Ordre 3 : $\mathcal{O}(h^3)$
- Flexibilité
- Robuste aux oscillations

Intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_i(x) dx = \frac{a_i h_i^3}{3} + \frac{b_i h_i^2}{2} + c_i h_i \quad (22)$$

Problème Test

EDO considérée

$$\begin{cases} y'(x) = \pi \cos(\pi x) y(x), & x \in [0, 6] \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (23)$$

Solution exacte

$$y(x) = \exp(\sin(\pi x)) \quad (24)$$

Caractéristiques

- Fonction oscillante avec période 2
- Permet une validation rigoureuse
- Test classique pour méthodes numériques

Comparaison : $h = 0.5$

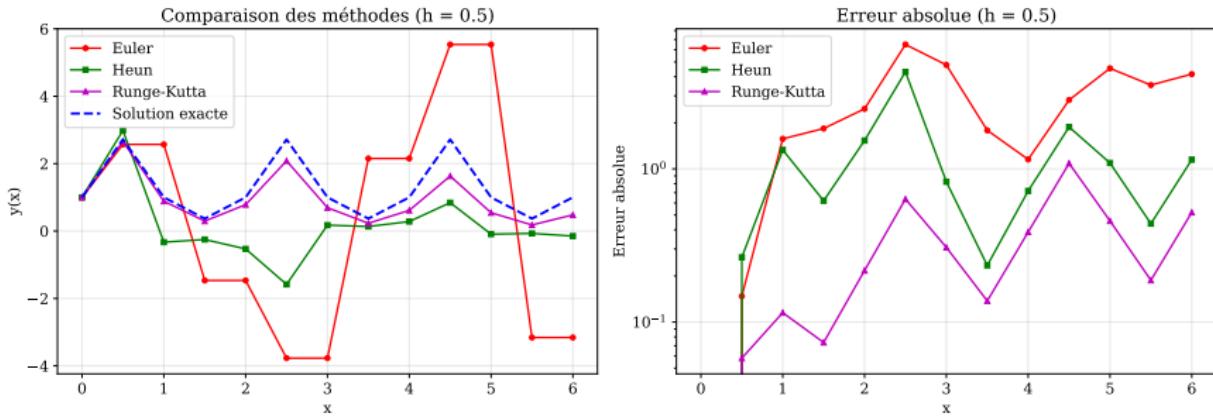


Figure – Comparaison des méthodes pour $h = 0.5$ (12 pas)

- **Euler** : Erreur visible, accumulation rapide
- **Heun** : Bonne approximation
- **RK4** : Quasi-superposition avec solution exacte

Comparaison : $h = 0.3$

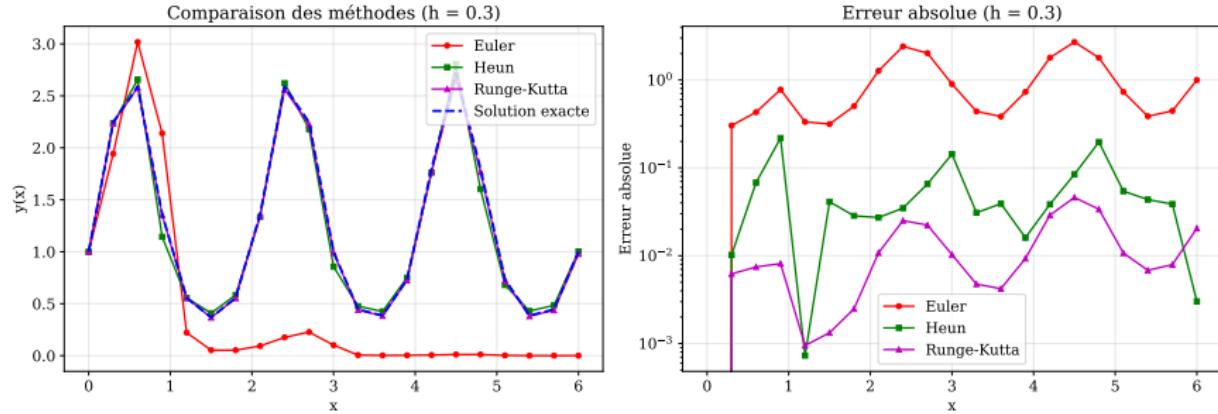


Figure – Comparaison des méthodes pour $h = 0.3$ (20 pas)

- Amélioration notable pour Euler
- Heun et RK4 : erreur négligeable

Comparaison : $h = 0.15$

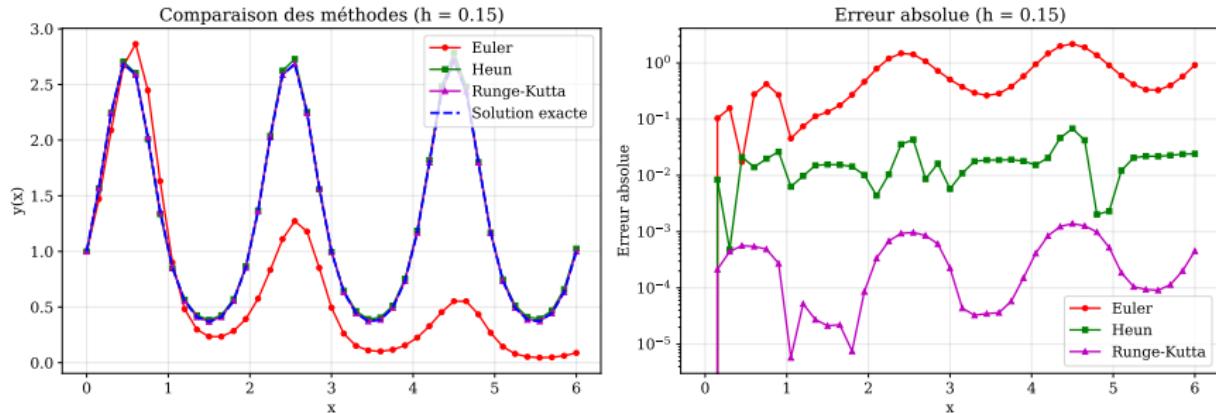


Figure – Comparaison des méthodes pour $h = 0.15$ (40 pas)

- Euler devient acceptable
- RK4 : précision machine

Comparaison : $h = 0.06$

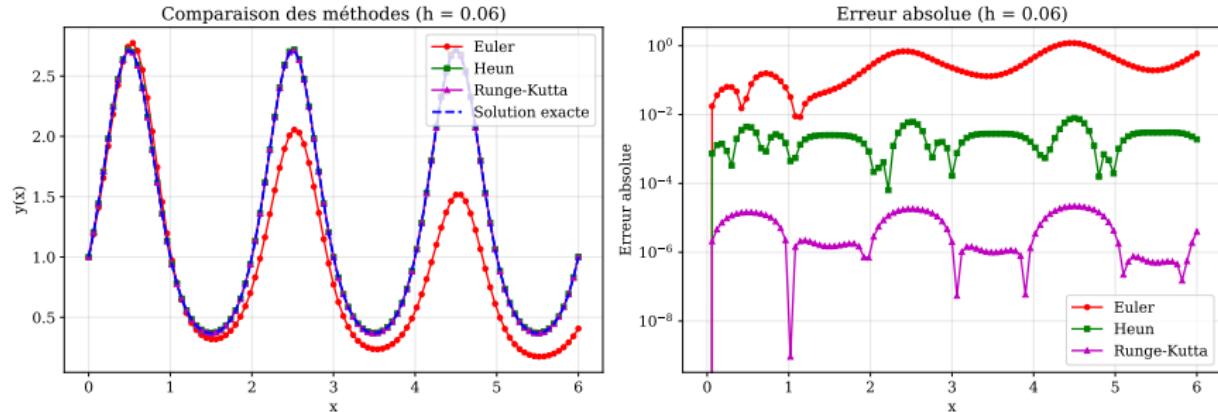


Figure – Comparaison des méthodes pour $h = 0.06$ (100 pas)

- Toutes les méthodes convergent
- Différence principale : coût computationnel

Étude de Convergence

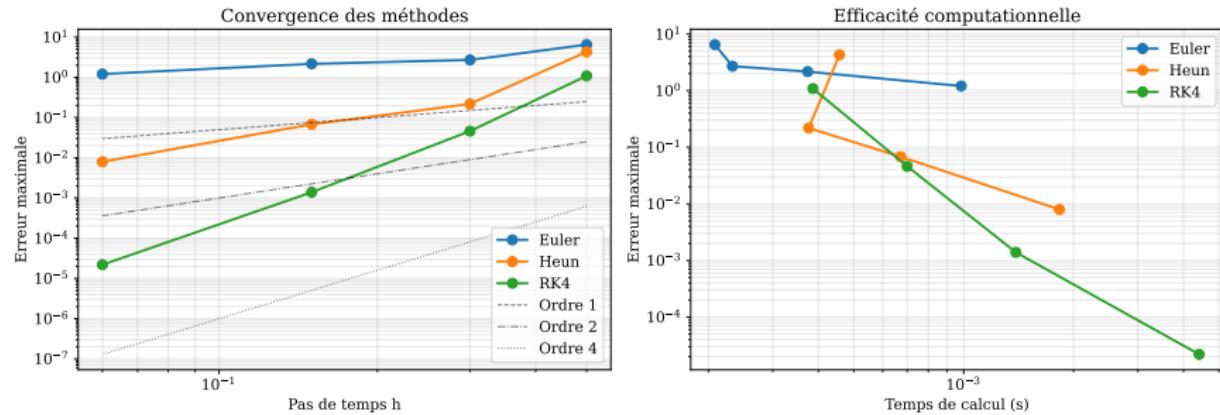


Figure – Analyse de convergence et efficacité computationnelle

Observations

- Pentes confirment les ordres théoriques : 1, 2 et 4
- RK4 : meilleure précision pour un temps donné
- Heun : excellent compromis précision/coût

Tableau Comparatif - EDO

Table – Ordres de convergence observés

| Méthode | Ordre théorique | Ordre observé | Coût/pas |
|---------|-----------------|---------------|----------|
| Euler | 1 | ≈ 1.0 | 1 éval. |
| Heun | 2 | ≈ 2.0 | 2 éval. |
| RK4 | 4 | ≈ 4.0 | 4 éval. |

Recommandations

- **Euler** : Problèmes simples, prototypage rapide
- **Heun** : Usage général, bon compromis
- **RK4** : Haute précision requise, standard industriel

$$\text{Gauss-Laguerre : } \int_0^{\infty} e^{-x} x^2 dx = 2$$

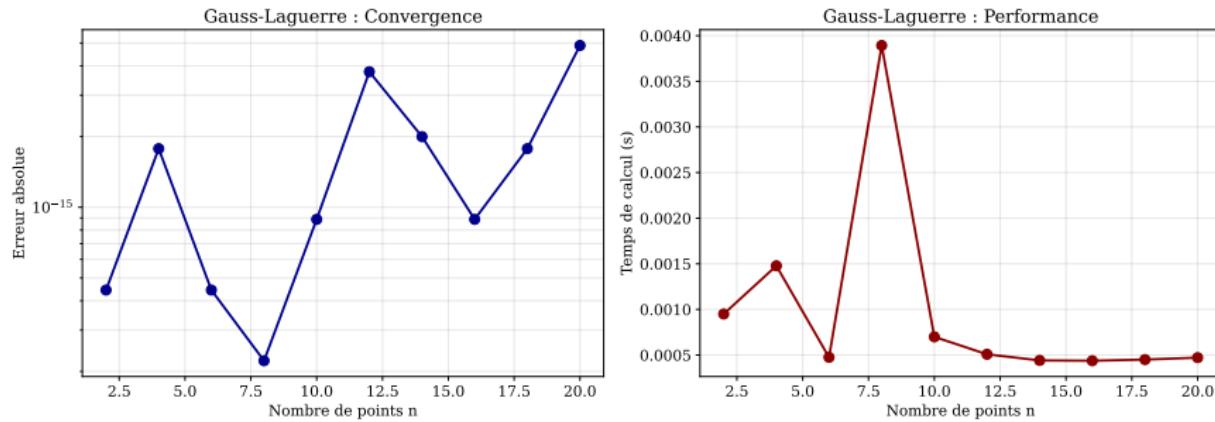


Figure – Convergence de Gauss-Laguerre sur intégrale infinie

Analyse

- Convergence spectrale (exponentielle)
- $n = 10$: erreur $< 10^{-14}$ (précision machine)
- Idéal pour intégrales à décroissance exponentielle

$$\text{Gauss-Legendre : } \int_{-1}^1 \cos(x) dx = 2 \sin(1)$$

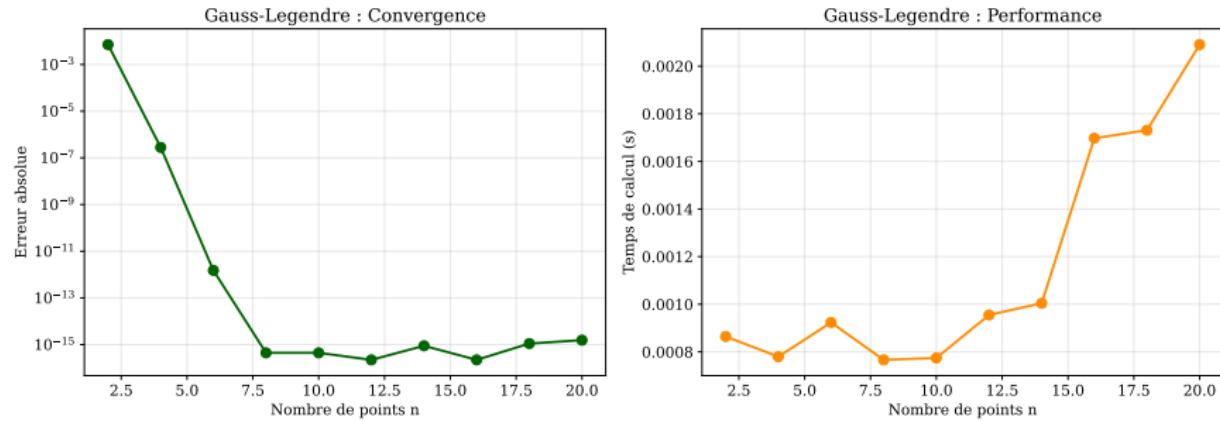


Figure – Convergence de Gauss-Legendre sur intégrale bornée

Analyse

- Convergence spectrale très rapide
- Universalité pour fonctions régulières
- Référence en quadrature numérique

$$\text{Gauss-Chebyshev : } \int_{-1}^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3\pi}{8}$$

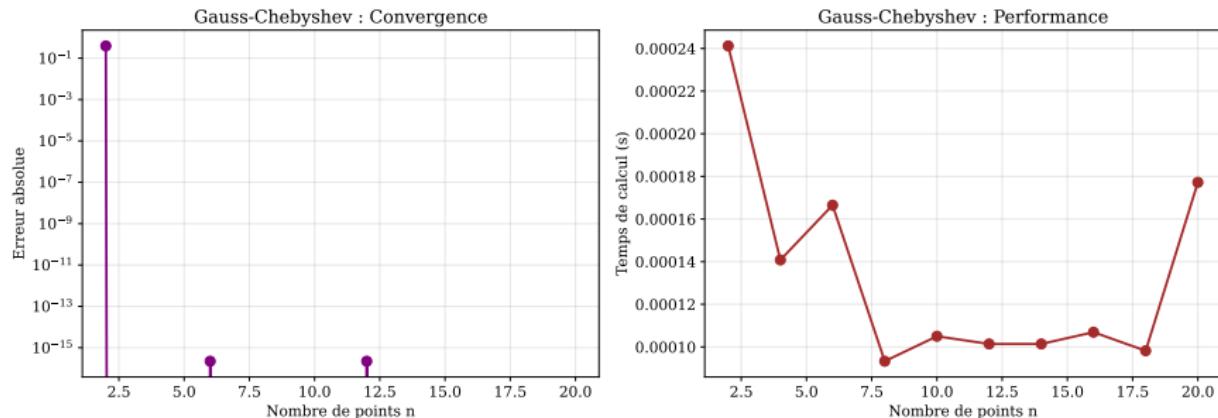


Figure – Convergence de Gauss-Chebyshev avec fonction poids

Analyse

- Poids constants : simplicité d'implémentation
- Optimal pour singularités aux bornes
- Convergence spectrale garantie

$$\text{Simpson : } \int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2$$

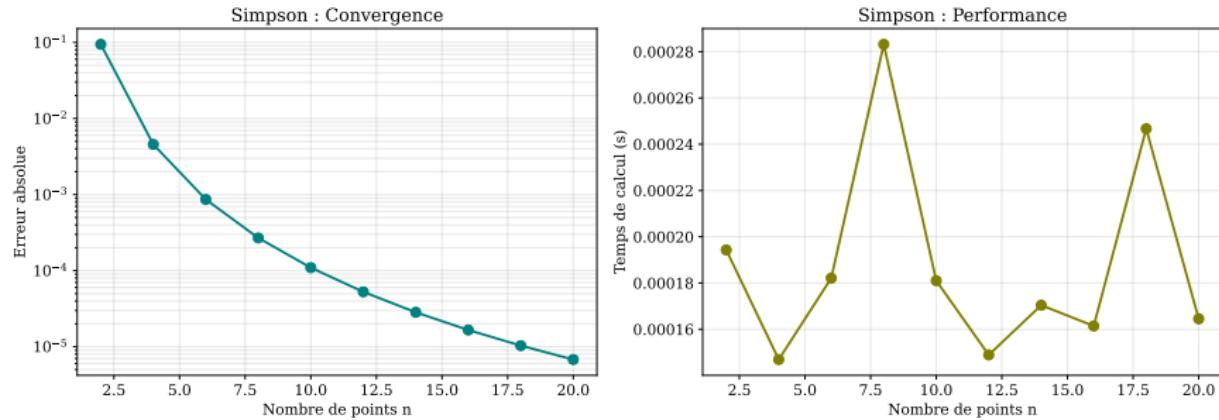


Figure – Convergence de la méthode de Simpson

Analyse

- Convergence algébrique : $\mathcal{O}(n^{-4})$
- Plus lente que Gauss mais très robuste
- Excellent choix pour applications générales

Spline Quadratique : Fonction de Runge

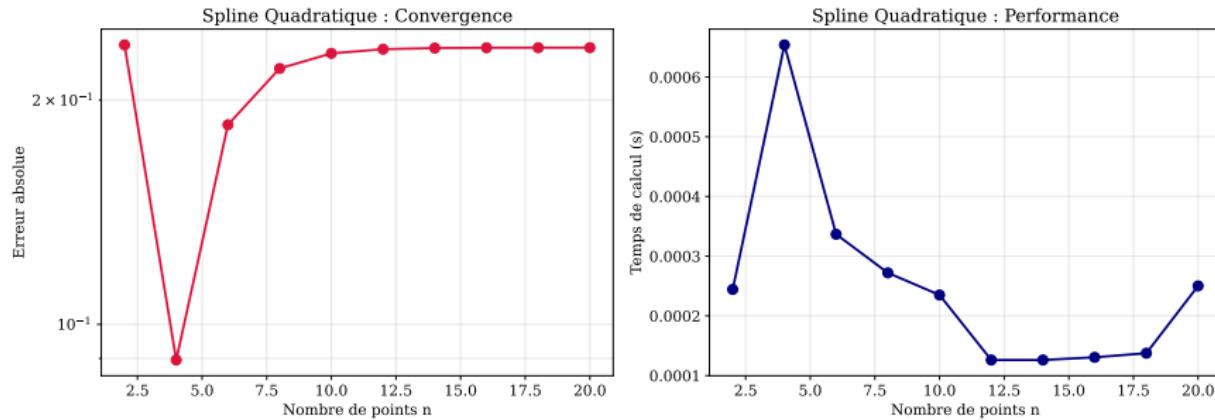


Figure – Spline quadratique sur $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+25x^2} dx = \frac{\pi}{10}$

Analyse

- Convergence $\mathcal{O}(n^{-3})$
- Robustesse face aux oscillations (phénomène de Runge)
- Alternative intéressante aux polynômes d'interpolation

Comparaison Globale

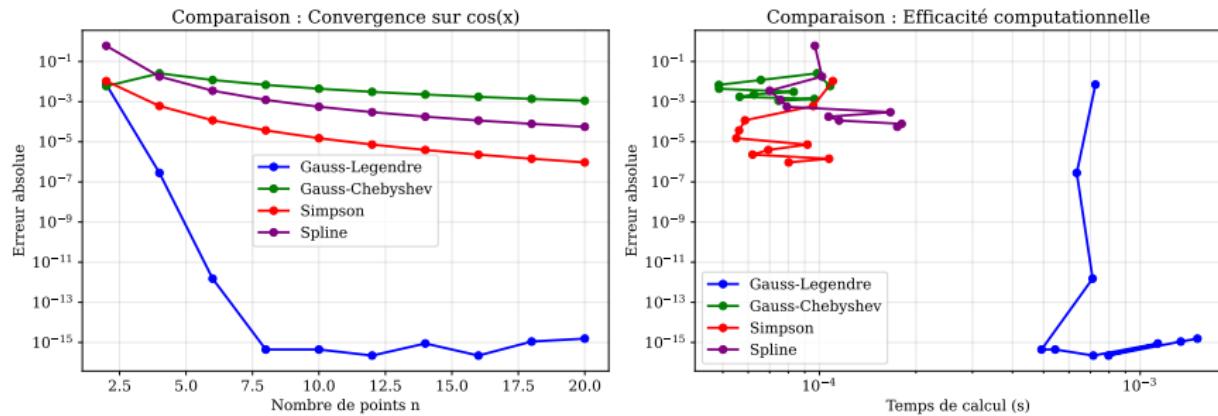


Figure – Comparaison sur $\int_{-1}^1 \cos(x) dx$

- **Gauss-Legendre/Chebyshev** : convergence la plus rapide
- **Simpson** : robuste, convergence algébrique régulière
- **Spline** : bon compromis, stabilité numérique

Tableau Comparatif - Intégration

Table – Propriétés des méthodes d'intégration

| Méthode | Convergence | Degré exact. | Domaine | Robustesse |
|-----------------|-----------------------|--------------|---------------|------------|
| Gauss-Laguerre | Spectrale | $2n - 1$ | $[0, \infty)$ | Excellent |
| Gauss-Legendre | Spectrale | $2n - 1$ | $[a, b]$ | Excellent |
| Gauss-Chebyshev | Spectrale | $2n - 1$ | $[-1, 1]$ | Excellent |
| Simpson | $\mathcal{O}(n^{-4})$ | 3 | $[a, b]$ | Très bonne |
| Spline Quad. | $\mathcal{O}(n^{-3})$ | 2 | $[a, b]$ | Bonne |

Recommandations

- **Fonctions régulières** : Gauss-Legendre (optimal)
- **Intégrales infinies** : Gauss-Laguerre
- **Singularités** : Gauss-Chebyshev
- **Usage général** : Simpson (fiabilité)
- **Fonctions oscillantes** : Splines (stabilité)

Synthèse : Équations Différentielles

Table – Comparaison qualitative des méthodes EDO

| Critère | Euler | Heun | RK4 |
|---------------|-------------|------------|------------|
| Précision | Faible | Bonne | Excellente |
| Vitesse | Très rapide | Rapide | Modérée |
| Stabilité | Limitée | Bonne | Excellente |
| Simplicité | Très simple | Simple | Moyenne |
| Usage général | Déconseillé | Recommandé | Recommandé |

Points clés

- **Choix du pas h** : critique pour Euler, moins pour RK4
- **Stabilité** : RK4 permet pas plus grands
- **Efficacité** : Heun souvent optimal (ordre 2, coût modéré)

Synthèse : Intégration Numérique

Table – Comparaison qualitative des méthodes d'intégration

| Critère | G-Lag. | G-Leg. | G-Cheb. | Simpson | Spline |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-------------|---------|
| Précision | Excellent | Excellent | Excellent | Bonne | Moyenne |
| Vitesse | Moyenne | Moyenne | Rapide | Bonne | Moyenne |
| Robustesse | Bonne | Excellent | Bonne | Excellent | Bonne |
| Simplicité | Moyenne | Moyenne | Simple | Très simple | Moyenne |
| Polyvalence | Limitée | Excellent | Moyenne | Bonne | Bonne |

Choix stratégiques

- **Précision maximale** : Quadratures de Gauss
- **Fiabilité** : Simpson (convergence garantie)
- **Problèmes spécifiques** : Adapter la fonction poids

Équations Différentielles

- Contrôle adaptatif du pas
- Détection de rigidité
- Méthodes implicites (stabilité)
- Systèmes d'EDO
- Conservation d'énergie

Intégration Numérique

- Détection de singularités
- Intégrales multiples
- Méthodes adaptatives
- Régularisation
- Parallélisation

Limites numériques

- Précision machine ($\epsilon \approx 10^{-16}$ en double précision)
- Conditionnement des problèmes
- Coût computationnel vs précision

Conclusions Principales

Équations Différentielles

- **Runge-Kutta 4** : Standard industriel, excellent rapport précision/stabilité
- **Heun** : Choix optimal pour usage général (ordre 2 suffisant souvent)
- **Euler** : Pédagogique, prototypage rapide uniquement

Intégration Numérique

- **Quadratures de Gauss** : Précision maximale pour fonctions régulières
- **Simpson** : Robustesse et simplicité, excellent choix par défaut
- **Splines** : Alternative pour fonctions irrégulières

Principe général

Le choix de la méthode dépend du **compromis** entre précision, coût computationnel, robustesse et propriétés du problème.

Perspectives et Extensions

Développements possibles

- Méthodes d'ordre supérieur
- Contrôle adaptatif
- Méthodes implicites
- Parallélisation
- GPU computing

Applications avancées

- EDO raides
- Systèmes chaotiques
- EDP (différences finies)
- Optimisation numérique
- Machine Learning

Outils modernes

Bibliothèques : `scipy.integrate`, `scipy.optimize`, JAX, PyTorch
(différentiation automatique)

Validation et Reproductibilité

Implémentation

- Code Python structuré en packages modulaires
- Tests unitaires sur problèmes avec solutions exactes
- Documentation complète
- Figures générées automatiquement

Validation

- Comparaison systématique avec solutions analytiques
- Vérification des ordres de convergence théoriques
- Analyse de stabilité numérique
- Études de performance computationnelle

Reproductibilité

Tous les résultats sont reproductibles via le script `analyse_complete.py`.

Références Bibliographiques

-  A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer, 2007.
-  R.L. Burden, J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, 2010.
-  E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*. Springer, 1993.
-  P.J. Davis, P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, 1984.
-  L.N. Trefethen. *Approximation Theory and Approximation Practice*. SIAM, 2013.

Merci de votre attention

Questions ?