华中科技大学

选 修 课 论 文

一类图论问题的解法探究

黎洲波 U201710958

专业：机械科学与工程专业

指导教师：李承军

2018 年 12 月 25 日

摘　要

图论是应用十分广泛的运筹学分支，它已经广泛地应用在物理学、化学、控制论、信息论、科学管理、电子计算机等各个领域，后来也延伸出了更加简明有力的几何拓扑学，将代数中的群论“移花接木”，创造了同胚、同伦等拓扑学概念。Euler在1736年发表图论方面的第一篇论文，证明了著名的哥尼斯堡七桥问题无解，该类问题归结为“一笔画”问题，都能应用Euler定理判定解的存在性。随着科学技术的发展以及电子计算机的出现和广泛应用，20世纪50年代，图论得到进一步发展。本文从生活中的一个游戏出发，用先猜想后验证的方法解决一类平面图论问题，同时结合所学到的图论和拓扑学方法，探究问题中的不变性以及问题解的存在性和唯一性。由定义的概念和研究出的规律，再将问题推广到三维形式，用更高的观点来审视该问题的一类规范解。

关键词：运筹学；图论；几何拓扑学

Abstract

Graphology is a branch of operational research with wide application. It has been widely applied in physics, chemistry, cybernetics, information theory, scientific management, electronic computer and other fields. Later, a more concise and powerful geometric topology was extended to create the concepts of topology such as homeomorphism and homotopy transplanting from group theory in algebra. The first paper that Euler wrote in 1736, to prove the famous problem "The Seven Bridges of Konigsberg." were unsolvable, and this class of problems was referring to "Eulerian path" problem,which could apply the Euler theorem to confirm the existence of a solution. With the development of science and technology and the widespread use of electronic computers, the graphology was further developed in the 1950s. In this case, we start this paper with a game in our life, and we use the method of guessing first then solve a particle class of graphology problems, and together with the method which was usually used in graphology and topology , to explore the invariant parameters of the problem and the existence and uniqueness of the problem solutions. From the definition of the concept and the universal law learning this problem in this paper. Then the problem is expected to extend to the three-dimensional form, in which case can we from a higher point of view to learn a class of universal solutions.

Keywords: Graphology；Operations；Geometric topology

目录

1 问题背景及描述

1.1 问题背景

生活中的许多游戏都能与运筹学里的对策论、动态规划、图论等知识相关联，不论是下棋亦或是打牌，都能用运筹学相关理论给出解法，比如田忌赛马问题、囚犯难题、拍卖问题等等。而反过来，许多时候是先有问题，再有人来探究其解法的，正因为这些问题的存在，人们考虑到将问题分类，经过转化与化归后的问题变得越来越系统，延伸出了众多数学分支，也促进了拓扑学、微分几何学和博弈论等学科的进一步发展。笔者在看了抽象代数之后，接触到了拓扑学，然后才接触了运筹学，相较而言，运筹学对于具体问题的解法研究是更为深入的，而前者更加注重抽象理论的研究，而这类研究基于新的问题可能还会有更多的延伸和发展，但是新的问题多是来源于生活的。由此，笔者在玩某个微信小游戏时也想到了这样一些问题：

a.这类问题能否用某一种解法（在计算机科学里叫做算法）解决？

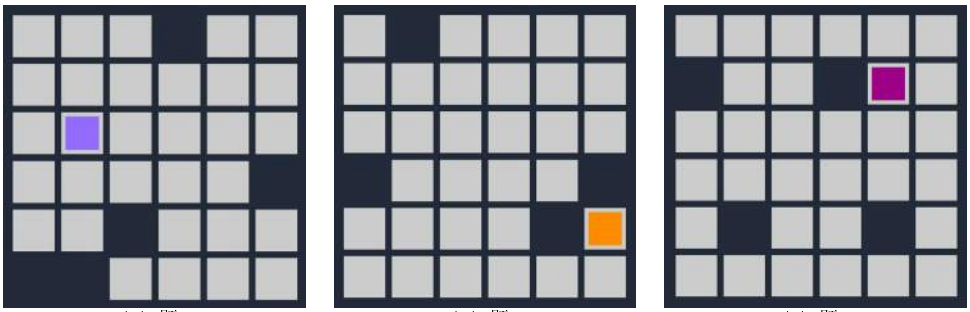
b.问题的解法是否存在（以及在什么条件下存在）?

c.问题的解法若存在是否是唯一的？

d.能否将问题的某些特性抽象出更一般的理论或是应用到更多问题的解决中？

1.2 问题描述

问题图例以及问题描述如下：



(a) 题1 (b) 题2 (c) 题3

图 1: 游戏界面

问题描述：*以有色方块为起点，不遗漏且不重复地走出一条路径填满白色方块，其中黑色方块表示不可行路径，随着难度的增大，白色方块数会逐渐增多，题目的规模也会逐渐增大。*

2 问题分析

从该问题向外发散，我们很容易联想到迷宫问题和“一笔画”问题，迷宫问题等价于树的决策问题，而“一笔画”问题等价于Euler图问题，两类问题的关键都在于研究节点和边的关系。该题

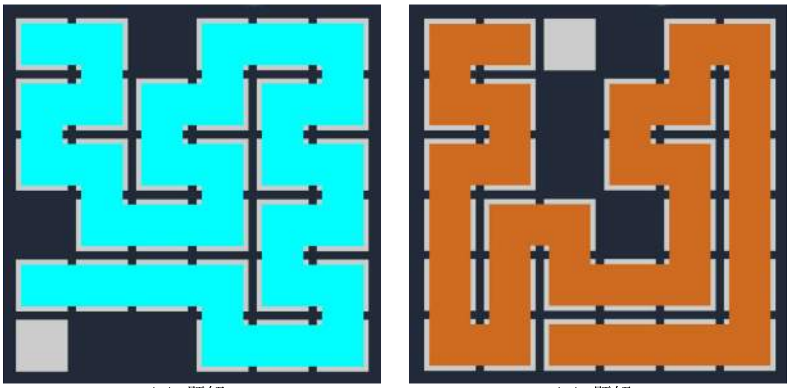
我们选用有向图来研究，显然某题若有解，则有：

（1）从起始点到终点的路径为简单图且不闭合（除非起点和终点重合）。

（2）解路径经过所有节点有且仅有1次，且**经过**某点时必定影响周围两节点的性质。

（3）起始点和终点与周围节点连线和方向唯一确定。（其中终点处连线确定，题中未给终点位置，则以此判断终点位置）。

（4）由于起始点和终点的对称性，如果选择从起始点顺路径解题，不及从终点逆向解题来得迅速。



(a) 题解1　　(b) 题解2

图 2: 游戏解法举例

其中空出来的白色方格表示终点。

在图上的我们得出的几个规律是很显然的，可以说是很基本的，但并不说明是简明扼要的，如果要将这些规律用数学的方法描述，将具有更佳的严谨性和易推广性，那么我们便需要一些定义。

3 问题转化

3.1 一些定义和结论

定义 1 每个白色方格在图上称为**节点**，简称为**点**，路径起始点称为**始点**，终点称为**末点**。

定义 2 与某点相邻的点为该点的**邻点**，某点的悬态（见定义*4*）邻点数叫做该点的**阶数**，在此我们把某点初态的原始阶数称为**原阶**，原阶为一的点称为**悬挂点**，原阶为零的点称为**孤立点**。

定义 3 点与点相连的路径称为**链**，无方向关系的链称为**无向链**；反之，称为**有向链**，有向链的两端链接的点称为**链头和链尾**。某点作为链的端点时，链称为点的**关联链**，称关联链连接的两点**关联**。

定义 4 在解题过程中，某点被称为处在**定态**，（*1*）该点是始点或末点；（*2*）该点不是始点和末点，但有两条关联链。否则若该点不是始点和末点，且只有一条关联链，称为该点处在**半定态**，无关联链时处在**未定态**，两者统称为**悬态**。

定义 5 点的阶数与该点关联链数的和，被称为该点的**剩余阶数**。

其中的某些定义沿用了图论里的定义，还有些为了避免混淆做了部分改动，例如点与点之间连接在图论里被称为**边**，有向图里被称为**弧**，这些可能会对我们后续扩展问题产生概念上的分歧，但是在研究本问题上并不会造成影响。再者，我们仅有这些定义是远远不足以解决问题的，以下我们不加证明地阐述几个结论：

（1）若题中有孤立点存在，或除始点以外悬挂点数量多于一个，则题必定无解，反过来不一定成立。

（2）若解法存在，除始点和末点外，每个点的关联链有两条且该点同时是链头和链尾，而始点必定为链头，末点为链尾。

（3）某点的关联链数增加一，则该点的阶数减一，此时点的剩余阶数不变，而反之不一定成立。

说明：首先，当某点处于定态，我们才会给出它的关联链。所以当某点处在半定态时，其关联的点必定处在定态，则由**定义*2***知该点的阶数减一。反之，若某个定态邻点与该点不关联，那么该点的关联链数不增加，即不成立。

（4）剩余阶数为零的点为孤立点，剩余阶数为一的点必定处在定态。

说明：剩余阶数为一，而点的阶数和关联链数非负，再由**定义*5***，有两种情况：*a*、阶数为一的未定态，即原阶为一。存在唯一一条确定的关联链；*b*、阶数为零的点有一条关联链。显然该点是一个定态始点或末点。而剩余阶数为零，点的阶数为零且该点关联链数为零，即该点的原阶为零，所以该点为孤立点。

（5）剩余阶数为二的点的两条关联链唯一确定，即这些点处在定态，但是不能确定该点是哪条关联链的链头，也就是路径经过该点时方向未知。当几个剩余阶数为*2*的点两两关联时，这几个点都处在定态，但是方向未知。

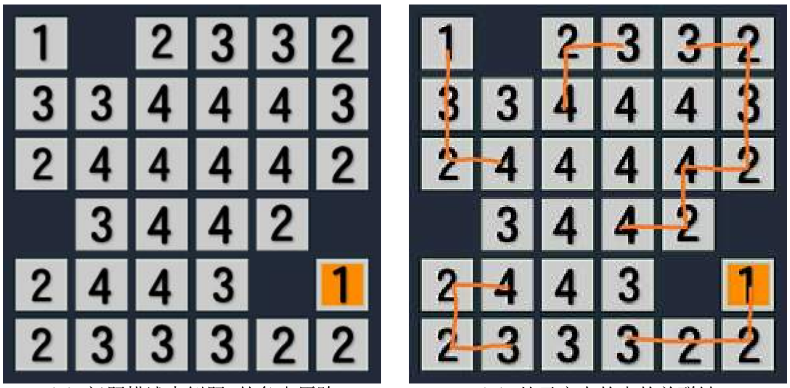
（6）根据剩余阶数和关联链数的约束，我们可以拓展**定义*4***，满足以下三个条件之一称某点处在**定态**：*a*、该点是始点或末点；*b*、该点不是始点和末点，且有两条关联链；*c*、该点的剩余阶数为二。

说明：这样的拓展是有必要的，因为许多点在其邻点处于定态的同时，会与邻点关联，这可能会使某些剩余阶数大于二的点有两条关联链，那么此时其实该点已经处于定态，但是它不满足条件*c*。

由上述几个结论我们得到了定义的一些概念之间的约束关系，这些关系成为了我们解题的突破口，同时也引导了我们去发现更为普遍的规律。

3.2 转化与化归

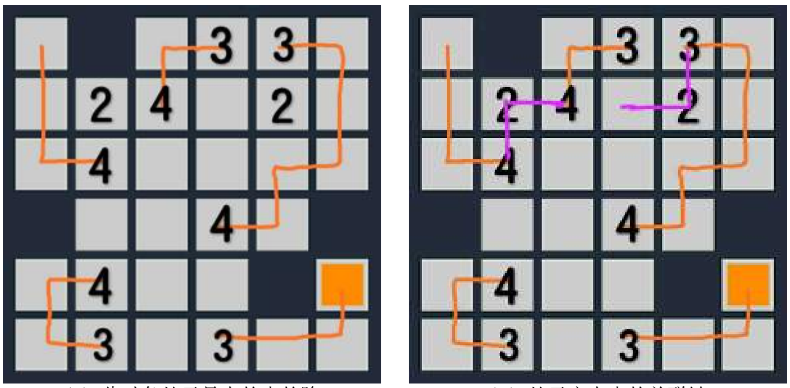
从定义我们发现，点的阶数是点的重要性质，也是区别点与点的关键信息，我们如果只考虑点之间如何相连，便可以先抛开链的方向性，探究出哪些点会有相连关系。再者，由结论（5），我们能够很容易想到，如果我能把点的剩余阶数都降到三以下，问题就解决了，那么我们的目标便转化成为了一个如何将所有的点都转化为定态的问题的求解（显然，最终我们的每个点的阶数都为零），等价于一个逐步降阶问题，显然我们的突破口便在于那些剩余阶数为二的点。那么我们首先能做的便是清楚每一点的阶数，图例如下（a）：



(a) 问题描述中例题2的各点原阶 (b) 处于定态的点的关联链

如图（b），我们将已经处于定态的点的关联链都在图上标明，这样有助于我们得到这时各点阶数的变化。同时我们可以观察到上述结论（6）的重要性，此时与末点关联的点处于定态，而其剩余阶数为三，是不满足条件c的。

这样我们便可以进行下一步的定态判断（c）和标明（d）。



(c) 此时各处于悬态的点的阶 (d) 处于定态点的关联链

可以看到我们通过上述的重复过程，能够做到逐步降阶，以求达到解决问题的目的，由于我们的解法一直没有考虑到链的方向，而我们所说的定态，也只是在连接方式上的唯一确定，不涉及到方向信息，这样的解法对于一些题目很奏效，我们并不需要考虑方向，最后能从始点到末点连成一条通路，那么也就完成任务了。那么接下来我们来具体到某个题的解法，注意解题过程中存在的问题。

4 解法举例

我们采用上述方法，即：

（1）由各点的剩余阶数，找出处于定态的点；

（2）给出定态点的关联链；

（3）重复（1），直到使所有点都处于定态为止。

由此可见，这种方法有良好的可循环性，我们甚至可以考虑用C/C^{++}等计算机编程语言将该算法编写为可复用的解题小程序。

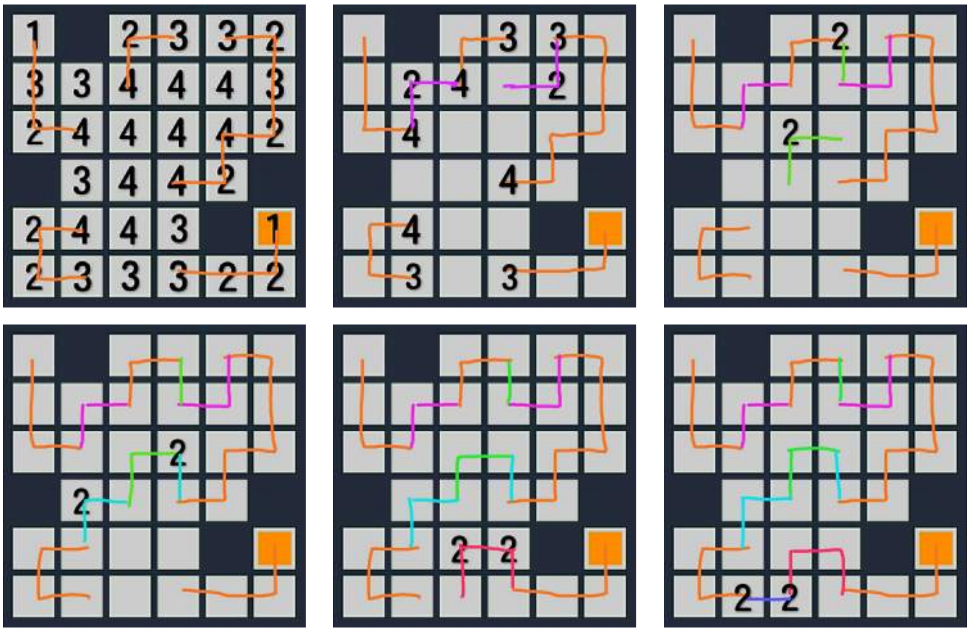


图 3: 例题二解法图示

运用这种方法，面对大多数问题我们都能给出完美精准的解答，但是我们的目标还很遥远，至此，也才刚刚走到了给出解法这第一步，而后面的探究才渐渐深入了问题本质。

5 深入探究

5.1 多解？否!

我们按照逐步降阶定态的思路，将问题逐渐化简，这一步是没有隐患的，但是看到例题3的解法之后，笔者陷入沉思：

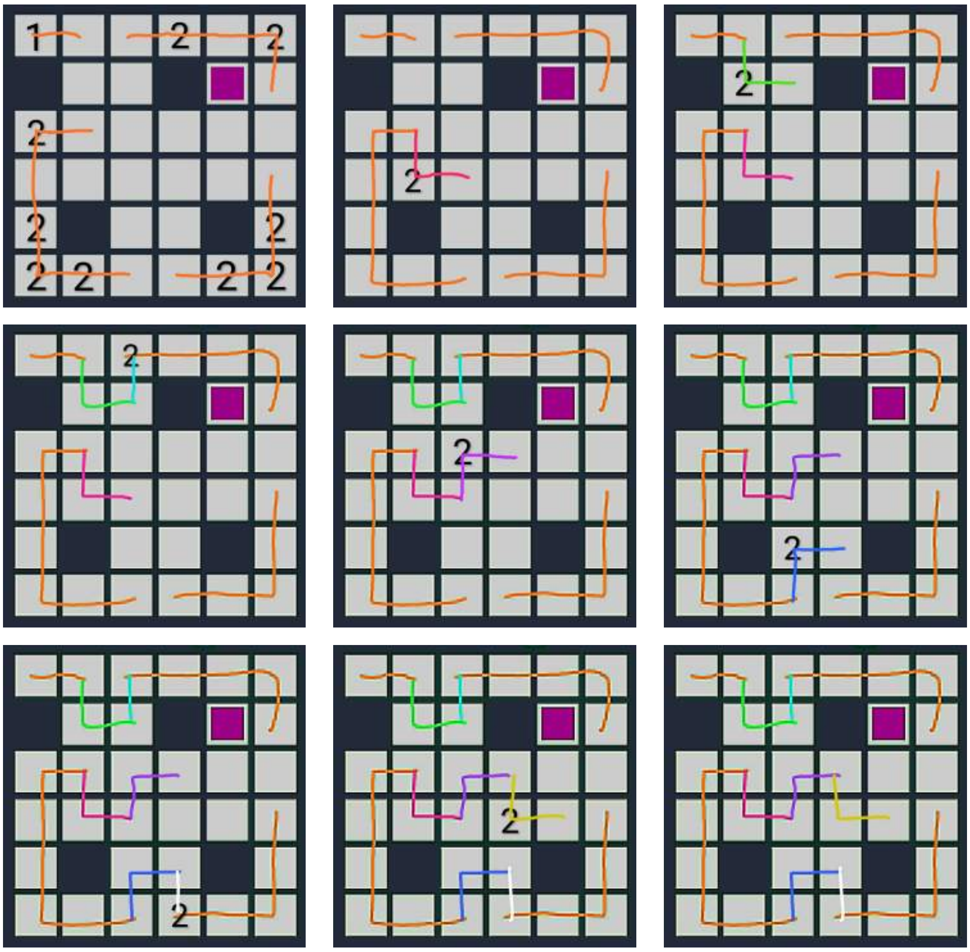
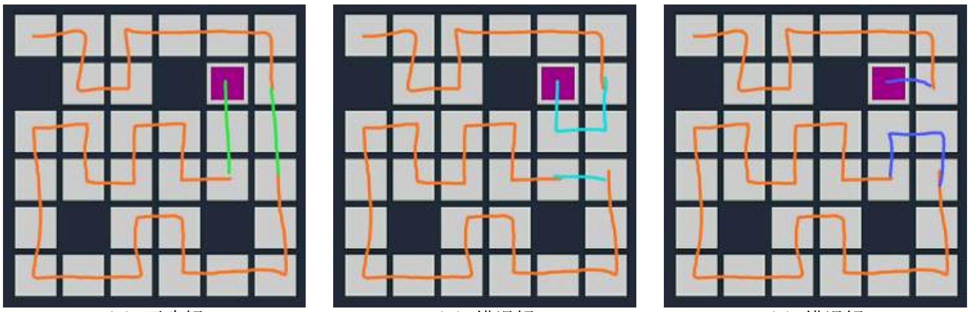


图 4: 例题三解法图示

从最后一张图中我们能够发现，已经没有点多余的点处在定态了，也就是说，我们的解法出现了问题。那么是什么原因导致了这样的问题呢？首先，我们的降阶定态解法保证了我们所做的每一步都是唯一确定的，不存在多值性，所以也就不涉及到解的取舍。其次，我们发现以下三种解法都符合我们的要求，即：*所有的点都处在定态*。



(a) 正确解 (b) 错误解 (c) 错误解

图 5: 三种定态解

那么我们面临了一个新的问题：似乎所有的点都处于定态不是得到正确解法的充分必要条件，所有的解都满足定态条件，但是满足定态条件却没有将解限定唯一。但从整个推理得解的过程中很容易找到原因————我们没有考虑链的方向，这直接导致了我们面临取舍解的窘境，所以我们有必要加入新的约束条件来得到唯一解。

5.2 引入“流”

根据链的方向性，我们直截了当地给出以下定义：

定义 6 一组的定态关联点组成的路径称为**流**，形成开路的流称为**开流**，闭合的流称为**回流**，开流具有一定的方向性，回流不定义方向。

推论： 开流具有方向性，那么我们最终的解也要具备这样的性质，即：解路径是一条起于始点，终于末点的开流。

定义 7 某条流的方向决定了每个点在流上的的位置，该位置称为点的**势**。若某条开流先后经过A点和B点，则称A点的势高于B点的势。

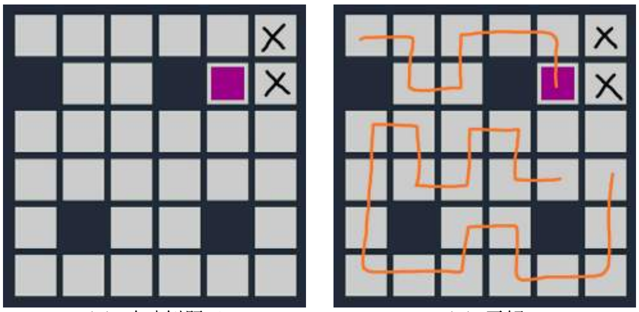
推论： 始点的势最高，末点的势最低，且开流经过这两点时，我们才能确定其方向，在错误解（b）和（c）中，下方形成了回流，不满足解的性质。

至此，我们已经能够准确定义正确解，即：

解路径是一条始于起点，终于末点的流，且流上的点都处于定态。

5.3 无解？How？

如同我们很难证明素数有无数个，但给定某个数我们判断其是否为素数相较而言会更简单，判断一个问题是不是有解比我得到一个解难得多。我们看到的问题大多是从解来逆推以保证解的存在性的，同样，我们也一直在回避解的存在性问题，因为我们发现一不小心，解就不存在了。如例题三，我们若去掉其中两个点，显然由我们的降阶定态法，解是不存在的。



(a) 改动例题三　(b) 无解

图 6: 无解状态

而且引人注目的是，改动后的例题三只有一个悬挂点，但是仍然不存在解，这不得不让我想到了Euler图，如果我们用无解的“一笔画”路径创造该类问题，解是不会存在的，但是这类讨论相对复杂，我们还需要更加先进的武器来对付有无解的问题。同样，解唯一性问题也依然存在，在5§1中，我们只是补充了方向性的问题，但是当我们考虑一个3×2的点列，我们以左上角的点为始点，我们很容易发现，该题有3种解，在解存在的情况下，若我们判断出某个悬挂点为末点，那么我们显然能够断言解唯一，但在更一般的讨论中，我们很可能是找不到这样的悬挂点的。

6　拓展与总结

6.1　三维延伸

为了了解二维适用的降阶定态法的普遍性，我们很容易联想到三维的情形，若在三维点列中沿用上述定义，那么我们知道每个点的阶数上限变成了6，但是给出的定态判定条件依然成立，也就是说我们的解法依然是一样的，这也从另外的角度肯定了降阶定态法的使用价值。

6.2　论文总结

该论文主要探究了某一类问题的解法———降阶定态法，也能够在大多数条件下保证适用，但是依然还存在一些更加本质的问题，有待于建立更加完善的体系。从运筹学这门选修课中，我学习到了研究问题的基本思路和方法，我想，这才是难能可贵的。本来我还在考量，这样一篇论文的价值在什么地方，不就是解决了一个小游戏吗？但是我还是坚信，数学这门学科能够研究的问题千奇百怪、包罗万象，不管问题是什么，从哪里来的，我只要具备了研究问题严谨认真的品质，用孜孜以求的态度探究问题，那么过程便已经无可挑剔了。

在此，非常感谢李承军老师的辛勤付出！