Е.О. Бурлаков, И.Н. Мальков

РАДИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ И РАЗРЫВНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙРОННЫХ ПОЛЕЙ (RADIALLY SYMMETRIC SOLUTIONS TO CONTINUOUS AND DISCONTINUOUS NEURAL FIELD EQUATIONS)

Предложен метод, позволяющий исследовать существование и близость между стационарными решениями непрерывных и разрывных уравнений нейронных полей. Получены результаты о близости стационарных решений типов «бамп» и «кольцо» конкретных уравнений нейронных полей с непрерывной и разрывной функциями активации.

Условные обозначения:

u(t; x)	уровень электрической активности нейрона u в позиции x в момент времени t
ω	определяет силу связи между нейронами
f	отражает процесс активации f(u) нейрона u
$B_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{S}, \varepsilon)$	$\bigcup_{\mathfrak{s}} \{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M} \mid \rho_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{m}, \mathfrak{s}) < \varepsilon\}$
deg(Φ;D; b_0)	Топологическая степень оператора Φ: $\overline{D} \to \mathfrak{B}$

Рассмотрим следующее уравнение (всюду ниже мы будем пользоваться обозначениями статьи [1]):

$$\partial_t u(t,x) = -u(t,x) + \int_{\Xi} \int_{y} \omega(x-y) f_{\lambda}(u(t,y))dy, \qquad (1)$$

$$t > 0, x, y \in \Xi \subseteq R^2, \lambda \geq 0.$$

Здесь семейство функций $f_\lambda : R \to [0,\ 1]$ $(\lambda \geq 0)$ удовлетворяет условиям (**A3**), (**A4**) работы [1], функция связи $\omega \in C^2([0,\infty), R) \cap L([0,\infty), \mu, R)$
является радиально симметричной. Таким образом, условия (**A1**) и (**A2**) работы [1] также выполнимы.

О п р е д е л е н и е 1. Зафиксируем $\theta > 0$, натуральное число N, константы $0 < r_1 < \cdots < r_N$. *PC-решением общего вида* (далее, PC-решением) уравнения (1) назовем стационарное решение $U \in C^1(\Xi, R)$ уравнения (1), обладающее следующими свойствами:

- $U(x) = U(|x|)$, где $x \in R^2, x = |x| \exp(i\alpha), \alpha \in [0, 2\pi)$;
- $U(x) = \theta$ справедливо только при $x \in \{x \in R^2,\ |x| = r_i, i = 1, \ldots, N\}$, причем $U'(x) \neq 0$ для $x = |r_i| \exp(i\alpha), \alpha \in [0, 2\pi),\ i = 1, \ldots, N$;
- $U(x) < 0$ при всех $x \in \Xi \backslash \overline{B_{R^2}(0, r)}$ при некотором $r > r_N$.

Далее рассмотрим случай, когда функция активации представлена функцией Хевисайда с выбранным пороговым значением θ, то есть $f_0(u) = H(u-h)$.

Будем рассматривать PC-решение следующего вида, записанное в полярных координатах

$$U(x) = B\int_0^{2\pi}\int_0^{b} \omega(|x-y|)\,rdrd\alpha - A\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \omega(|x-y|)\,rdrd\alpha, \qquad (3)$$

$$y = (r\cos(\alpha), r\sin(\alpha)),$$

Положив B=1 и A=0, получим исследуемое решение работы [1].

Вычисляя двойной интеграл в (3) при помощи двумерного преобразования Фурье радиально симметрической функции $\omega(|x|)$, получаем

$$U(x) = 2\pi bB\int_0^{\infty} \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho)J_0(|x|\rho)J_1(b\rho)d\rho - 2\pi aA\int_0^{\infty} \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho)J_0(|x|\rho)J_1(a\rho)d\rho, (4)$$

где J_ν – функция Бесселя первого рода порядка ν, $\widehat{\langle\omega\rangle}$ – преобразование Ханкеля функции ω.

Обозначим: $W_b(x) = 2\pi\int_0^{\infty}\widehat{\langle\omega\rangle}(\rho)J_0(|x|\rho)J_1(b\rho)d\rho$,

$$W_a(x) = 2\pi\int_0^{\infty} \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho)J_0(|x|\rho)J_1(a\rho)d\rho$$

Допустим, выполнено следующее условие:

$$\int_0^{\infty} \left|\widehat{\langle\omega\rangle}(r)\right| r^2 dr < \infty \quad (5)$$

Для любого $\gamma > 0$, используя свойства J_n (см., например, [2]), получим

$$W_b(x) \le 2\pi bB\int_0^{\gamma}\left|\widehat{\langle\omega\rangle}(r)\right| dr + 2\pi bB\left|\int_\gamma^{\infty} \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho)J_0(|x|r)J_1(br)\,dr\right|$$

Аналогичная оценка для $W_a(x)$

В силу соответствующих свойств функции связи ω, определенной (2), для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$2\pi bB \int_0^{\gamma(\varepsilon)} \left|\widehat{\langle\omega\rangle}(r)\right| dr < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$2\pi aA \int_0^{\gamma(\varepsilon)} \left|\widehat{\langle\omega\rangle}(r)\right| dr < \frac{\varepsilon}{2}$$

при некотором $\gamma(\varepsilon) > 0$. Учитывая свойства функции Бесселя J_0 при бом $\gamma(\varepsilon) > 0$ имеем $J_0(sr) \to 0$ равномерно по $r \in [\gamma, \infty)$ при $s \to \infty$. Используя данные свойства и оценку (5), получаем

$$U(x) \le 2\pi bB \int_0^{\gamma} \left|\widehat{\langle\omega\rangle}(r)\right| dr + 2\pi bB \left| \int_{\gamma}^{\infty} \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho) J_0(|x|r) J_1(br)\, dr \right|$$

$$- 2\pi aA \int_0^{\gamma} \left|\widehat{\langle\omega\rangle}(r)\right| dr - 2\pi aA \left| \int_{\gamma}^{\infty} \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho) J_0(|x|r) J_1(ar)\, dr \right| < \varepsilon$$

при некотором $\gamma(\varepsilon) > 0$ и достаточно большом $|x| \in R$. Таким образом,

$$\lim_{|x|\to\infty} U(x) = 0\,, \qquad (6)$$

что означает то, что PC-решение U удовлетворяет условию (см. [1]).

Определим следующее пространство

$$C^1_{rs}(\Xi, R) = \{u \in C^1(\Xi, R), u(x) = u(|x|)\ \forall\ x \in \Xi\ \}.$$

Лемма 3.0.1. *Пусть выполнено следующее условие:*

$$\int_0^{\infty} \widehat{\langle\omega\rangle}(r) \left(J_0(br)J_1(br) + \frac{br}{2}\left(J_0^2(br) - 2J_1^2(br) - J_0(br)J_2(br)\right) \right) dr \ne 0, \qquad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \widehat{\langle\omega\rangle}(r) \left(J_0(ar)J_1(ar) + \frac{ar}{2}\left(J_0^2(ar) - 2J_1^2(ar) - J_0(ar)J_2(ar)\right) \right) dr \ne 0. \qquad (8)$$

Тогда для некоторого достаточно большого $r > 0$, $\Omega_r \subset R^2$, найдется такое $\varepsilon > 0$, что PC-решение U, заданный (3.0.4) будет единственным решением (3.0.1) в $B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)$ при $\lambda = 0$.

Доказательство. Из определения PC-решения следует, что

$$2\pi bBW_b - 2\pi aAW_a = \theta$$

Таким образом, выполнение соотношений (7) и (8) гарантирует единственность решения U в шаре $B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)$ для некоторых $\varepsilon > 0$ и $r > 0$.

Выразим (4) в терминах операторного уравнения (как это было сделано в параграфе 2 работы [1])

$$U = F_0 U.$$

Для того, чтобы применить теорему 2.2 статьи [1] вычислим топологическую степень $\deg(I - F_0, B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon), 0)$. По определению вращения векторного поля (см., например, [4]), получаем

$$\deg\big(I - F_0, B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon), 0\big) = ind(F_0, B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)).$$

Без ограничения общности рассуждений предполагаем, что неподвижная точка U оператора F_0 единственна в замкнутом шаре $\overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}$. Таким образом, F_0 отображает$\overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}$ в некоторое многообразие $\mathcal{M} \subset C^1\,(\Omega_r, R)$,

$$\mathcal{M} = \{v = DW_d(x) - CW_c(x) \colon (c; d) \in M \subset R^2\},$$

где множество M выбрано так, что оно содержит c_u для всех $u \in B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)$ (в качестве такого множества M можно выбрать, например, квадрат). Определим отображение $\varphi\colon M \to \mathcal{M}$:

$$\varphi(a,b) = v(x), \qquad (9)$$

$$v(x) = bBW_b - aAW_a,$$

$$x \in \Omega.$$

Лемма 3.0.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)\left(J_0(br)J_1(br) + \frac{br}{2}\big(J_0^2(br) - 2J_1^2(br) - J_0(br)J_2(br)\big)\right)dr \neq 0\,, (10)$$

$$\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)\left(J_0(ar)J_1(ar) + \frac{ar}{2}\big(J_0^2(ar) - 2J_1^2(ar) - J_0(ar)J_2(ar)\big)\right)dr \neq 0, (11)$$

Тогда отображение $\varphi\colon M \to \mathcal{M}$, заданное в (9) является гомеоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале отметим, что $\varphi\colon M \to \mathcal{M}$ является сюръекцией по определению. Инъективность отображения $\varphi\colon M \to \mathcal{M}$ следует из выражения для его производной Фреше, вычисленной в точке $(a,b) \in$ М:

$$\varphi_b' = 2\pi \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)\left(J_0(\cdot r)J_1(br) + \frac{br}{2}\left(J_0^2(br) - 2J_1^2(br) - J_0(br)J_2(br)\right)\right)dr$$

$$\varphi_a' = 2\pi \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)(J_0(\cdot r)J_1(ar) + \frac{ar}{2}(J_0^2(ar) - 2J_1^2(ar) - J_0(ar)J_2(ar)))dr$$

и условия (10), (11).

Для произвольного оператора $\Phi: \overline{D} \to \mathfrak{B}$ обозначим через $ind(\Phi, D)$ вращение его векторного поля. Далее нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.0.3. (см. [4]) *Пусть D – открытое подмножество компактного выпуклого множества $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}, \mathfrak{D}'$ - выпуклое подмножество некторого банахова пространства $\mathfrak{B}'$. Пусть также отображение $\psi: D \to \mathfrak{D}$ вполне непрерывно и множество его неподвижных точек компактно в $\mathfrak{B}$. Если отображение $\varphi: \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ является гомеоморфизмом, то композиция $\varphi^\circ\psi^\circ\varphi^{-1}$: $\varphi(D) \to \mathfrak{D}'$вполне непрерывна, множество ее неподвижных точек компактно и справедливо равенство*

$$ind(\psi, D) = ind(\varphi^\circ\psi^\circ\varphi^{-1}, \varphi(D)).$$

Определим теперь сужение $\mathcal{F}$ отображения F_0 на множество $\mathcal{M} \cap \overline{B_{C_{rs}^1(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)} \to \mathcal{M}$ удовлетворяет условиям леммы 3.3. Используя свойства вращения векторного поля, получаем

$$ind\left(F_0, \overline{B_{C_{rs}^1(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}\right) = ind\left(\mathcal{F}, \mathcal{M} \cap \overline{B_{C_{rs}^1(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}\right).$$

По лемме 3.0.3, имеем

$$ind\left(F_0, \overline{B_{C_{rs}^1(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}\right) = ind\left(\varphi^\circ\mathcal{F}^\circ\varphi^{-1}, \varphi^{-1}(\mathcal{F}\left(\mathcal{M} \cap B_{C_{rs}^1(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)\right))\right).$$

Лемма 3.0.4. *Пусть выполнение* (5). Тогда существует такое $\delta > 0$, *что оператор* $\Psi = \varphi^\circ\mathcal{F}^\circ\varphi^{-1}$ *отображает* $\overline{B_R(a,\delta)} \times \overline{B_R(b,\delta)}$ *в* M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$u(x) = DW_d - CW_c, (c,d) \in M.$$

$$\|u - U\|_{C^1(\Omega_r,R)} \le \|DW_d - BW_b\|_{C^1(\Omega_r,R)} + \|CW_c - AW_a\|_{C^1(\Omega_r,R)}\,.$$

Используя теорему о среднем и свойства функции Бесселя J_1, оценим последнее слагаемое в приведенном выше неравенстве:

$$\|CW_c - AW_a\|_{C^1(\Omega_r,R)} \leq$$

$$2\pi \left\| c\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(|x|r)J_1(cr)\,dr - a\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(|x|r)J_1(ar)\,dr \right\|_{C^1(\Omega_r,R)}$$

$$\leq 2\pi \left\| -c\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(|x|r)J_1(cr)\,dr \right.$$

$$\left. + a\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(|x|r)J_1(ar)\,dr \right\|_{C^1(\Omega_r,R)}$$

$$\leq 2\pi \left\| \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(|\cdot|r)\left(\frac{\mathrm{c}r}{2}\big(J_0(\xi r) - J_2(\xi r) + aJ_1(ar)\big)dr\right)(a \right.$$

$$\left. - c)\right\|_{C^1(\Omega_r,R)}$$

$$+ 2\pi \left\| \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(|\cdot|r)\left(\frac{\mathrm{c}r}{2}\big(J_0(\xi r) - J_2(\xi r) + aJ_1(ar)\big)dr\right)(a \right.$$

$$\left. - c)\right\|_{C^1(\Omega_r,R)}$$

,

где $\xi \in B_R(a, |a-c|)$. Аналогичным образом оценивая норму $\|DW_d - BW_b\|_{C^1(\Omega_r,R)}$ и пользуясь условием (5), получаем

$$\|u - U\|_{C^1(\Omega_r,R)} \leq \mathfrak{N}|c-a||d-b| < \varepsilon$$

для некоторого $\mathfrak{N} \in R$ и всех $(c;d) \in \overline{B_R(c,\delta)} \times \overline{B_R(d,\delta)}$, где $\delta < \frac{\varepsilon}{\mathfrak{N}}$. Из последней оценки получаем

$$\overline{B_R(c,\delta)} \times \overline{B_R(d,\delta)} \subset \varphi^{-1}(\mathcal{M} \cap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon))$$

$$\mathcal{M}_\delta = \{v = DW_d(x) - CW_c(x), c \in \overline{B_R(a,\delta)}\}.$$

Итак,

$$\varphi^{-1}(\mathcal{M}_\delta) = \overline{B_R(c,\delta)} \times \overline{B_R(d,\delta)} \subset \varphi^{-1}(\mathcal{F}\left(\mathcal{M} \cap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)\right).$$

З а м е ч а н и е 3.0.2. Условие (5) избыточно для доказательства леммы 3.4. Однако то условие, до которого оно может быть ослаблено, является более громоздким и сложным для проверки.

Легко видеть, что точка $(a;b)$ является неподвижной точкой оператора $\Psi = \overline{B_R(a,\delta)} \times \overline{B_R(b,\delta)} \to M$. Более того, $(a;b)$ – изолированная неподвижная точка отображения Ψ ввиду того, что U – изолированная неподвижная точка отображения $\mathcal{F}$ и ввиду топологической инвариантности вращения векторного поля. Вращение векторного поля отображения в конечномерном пространстве может быть вычислено по формуле

$$ind\left(\Psi, \varphi^{-1}(\mathcal{F}\left(\mathcal{M} \cap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)\right)\right) = sgn(\det(I - \mathrm{Ja(a,b)})),$$

где I – единичная матрица, Ja(a,b) – матрица Якоби оператора $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ в точке (a,b).

Из задания оператора $\Psi = \varphi^{-1}\circ\mathcal{F}\circ\varphi$ следует, что

$$\psi_1 = DW_d = \theta$$

$$\psi_2 = CW_C = \theta$$

для всех $(c,d) \in \overline{B_R(c,\delta)} \times \overline{B_R(d,\delta)}$.

Используя теорему о неявной функции и цепное правило дифференцирования, получаем

$$\psi'_{1a} = \int_0^\infty \langle\widehat{\omega}\rangle(r) J_0(ar) J_1(ar)$$

$$+ ar\left(-aJ_1^2(ar)\Psi'_{1a}(a) + \frac{1}{2}a\mathrm{J}_0(ar)(J_0(ar) - J_2(ar)\right)dr = 0$$

$$\psi'_{1b} = \int_0^\infty \langle\widehat{\omega}\rangle(r) J_0(br) J_1(br)$$

$$+ br\left(-bJ_1^2(br)\Psi'_{1b}(b) + \frac{1}{2}b\mathrm{J}_0(br)(J_0(br) - J_2(br)\right)dr = 0$$

$$\psi'_{2_a} = \int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(ar) J_1(ar)$$

$$+ ar\left(-aJ_1^2(ar)\Psi'_{2a}(a) + \frac{1}{2}a\mathrm{J}_0(ar)(J_0(ar) - J_2(ar)\right) dr = 0$$

$$\psi'_{2_b} = \int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(br) J_1(ar)$$

$$+ br\left(-bJ_1^2(br)\Psi'_{2b}(b) + \frac{1}{2}b\mathrm{J}_0(br)(J_0(br) - J_2(br)\right) dr = 0$$

Пусть $\psi'_{1_a} = a_1, \psi'_{1_b} = a_2, \psi'_{2_a} = a_3, \psi'_{2_b} = a_4$. Тогда из уравнения $\det\big(I - \mathrm{Ja}(\mathrm{a}, \mathrm{b})\big) = 0$ находим

$$\psi'_{1_a} = \frac{a_2 a_3}{a_4 - 1} + 1 = a_5$$

Добавляя это выражение к системе $\{\psi'_{1_a}, \psi'_{1_b}, \psi'_{2_a}, \psi'_{2_b}\}$, получаем, что система $\{\psi'_{1_a}, \psi'_{1_b}, \psi'_{2_a}, \psi'_{2_b}, a_5\}$(12) несовместна.

Из этого делаем вывод, что $\det\big(I - \mathrm{Ja}(\mathrm{a}, \mathrm{b})\big) \neq 0$. Таким образом, $\deg\big(I - F_0, B_{C^1_{rs}(\Omega_r, R)}(U, \varepsilon), 0\big) \neq 0$.

Учитывая теоремы 2.1 и 2.2 работы [1], мы получаем следующий результат.

Теорема 2.0.1. *Пусть семейство функций* f_λ: $R \to [0, 1]$ $(\lambda \geq 0)$ *удовлетворяет условиям* (**A3**) *и* (**A4**) (*см. [1]*). *Также функция* $\omega \in C^2([0, \infty), R) \cap L([0, \infty), \mu, R)$ *радиально симметрична. Наконец, пусть выполнены условия (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12)*

Тогда найдется такое $r > 0$,*что при каждом* $\lambda > 0$ *существует решение* $u_\lambda \in C^1_{rs}(\Omega_r, R)$ *уравнение (1), где* $\Xi = \Omega_r$. *Более того* $\|u_\lambda - U\|_{C^1(\Omega_r, R)} \to 0$, *при* $\lambda \to 0$, *где* $U \in C^1_{rs}(R^2, R)$ *– PC-решение уравнения (1) при* $\Xi = R^2, \lambda = 0$, *заданное (4).*

Список литературы

[1] Е.О. Бурлаков, М.А. Насонкина “О связи непрерывных и разрывных меделей нейронных полей с микроструктурой I. Общая теория”, Вестник Тамбоскго университета. Серия Естественные и технические науки, 23:121 (2018), 17–30.

[2] S. Bochner, K. Chandrasekharan, *Fourier Transforms*, Princeton University Press, New Jersey, 1949.

[3] E. Burlakov, E. Zhukovskiy, A. Ponosov, J. Wyller \Ow well-posedness of generalized neural field equations with delay", Journal of Abstract Differential Equations and Applications, 6:1 (2015), 51-80.

[4] A. Granas, \The Leray-Schuder index and the fixed point theory for arbitrary ANRs", Bulletin de la Societe Mathematique de France, 100 (1972), 209-228.

[5] N. Svanstedt, J. L. Woukeng, \Homogenization of a Wilson-Cowan model for neuralfields", Nonlinear Analysis. Real World Applications, 14:3 (2013), 1705-1715.

[6] N. Svanstedt, J. Wyller, E. Malyutina, \A one-population Amari model with periodic micro-structure", Nonlinearity, 27 (2014), 1394-1417.