Teoría de Juegos
Taller 1

Luis Jorge Ferro Casas
Asistente: Daniel Felipe Cuéllar Melo

18 de septiembre de 2023

El siguiente taller se debe realizar en grupos de 3 personas. Deben presentar sus soluciones completas con los nombres y códigos de todos los integrantes del grupo **legibles**, durante la clase. La fecha de entrega es el jueves 28 de septiembre.

1. Mad Max desea viajar desde New York hasta Dallas utilizando la ruta más corta posible. Él puede utilizar las rutas descritas en la siguiente tabla. Desafortunadamente la Bruja Malvada de la historia de Blancanieves se coló en la historia de Mad Max y está decidida a obstaculizar su viaje. Ella puede bloquear dos carreteras: una carretera saliendo de Atlanta y otra carretera saliendo de Nashville. Mad Max no sabe cuáles carreteras han sido bloqueadas por la bruja sino hasta el momento en que llega a Atlanta o a Nashville.

Ruta	**Longitud** (Millas)
New York - Atlanta	860
New York - Nashville	880
Nashville - St. Louis	300
Nashville - New Orleans	530
Atlanta - St. Louis	550
Atlanta - New Orleans	470
St. Louis - Dallas	630
New Orleans - Dallas	500

a) Modele este juego en forma extensiva, en donde el primer movimiento corresponde a la Bruja Malvada escogiendo la carretera que sale de Atlanta. El segundo movimiento también coresponde a la bruja, pero esta vez escogiendo la carretera que va a bloquear que sale de Nashville. Determine los pagos de este juego de forma que sea un juego de suma cero. ¿Es este juego de información perfecta?

b) Describa el juego anterior en forma normal. ¿Cuántas y cuáles son las estrategias de Mad Max y de la Bruja Malvada?

c) ¿Debe Mad Max partir hacia Atlanta o hacia Nashville? ¿ Cuáles son las rutas que debería bloquear la Bruja Malvada?

d) Ahora suponga que la bruja le dice a Mad Max las rutas que ha bloqueado. Dibuje el árbol para este nuevo juego. ¿Es este juego de información perfecta? Encuentre las estrategias óptimas para cada jugador utilizando inducción para atrás.

e) Suponga ahora que la Bruja Malvada no le cuenta nada a Mad Max, pero este puede enviar a un espía a alguna de las dos ciudades, Nashville o Atlanta, para averiguar antes de iniciar su viaje qué ruta ha sido bloqueada. La bruja no sabe sobre la existencia del espía, de manera que ella cree que está jugando el juego descrito inicialmente. Mad Max está jugando un juego diferente. En efecto, el primer movimiento es escoger la ruta una vez conoce la información del espía. Dibuje el juego de Mad Max, descríbalas y encuentre su estrategia óptima. ¿Cuántos kilómetros se ahorra Mad Max por tener la información del espía?

2. En el juego de tres en línea, dos jugadores **I** y **II** juegan sobre un tablero de 3×3, compuesto de 9 cuadrados. Cada cuadrado se identifica con un par de coordenadas $(i, j), 1 \leq i, j \leq 3$, donde i es la coordenada horizontal y j es la coordenada vertical. En el primer movimiento del juego, el jugador **I** escoge un cuadrado y luego cada jugador, alternadamente, escoge un cuadrado que no haya sido elegido en algún movimiento anterior. El jugador **I** coloca una X sobre el cuadro que escoge mientras que el jugador **II** coloca un O. El juego termina cuando todos los cuadrados han sido seleccionados. El primer jugador que logre colocar su marca en 3 cuadrados adyacentes (en una fila, columna o diagonal) gana el juego.

a) Describa el juego en forma extensiva.

b) Calcule el número de jugadas en el juego.

c) Pruebe, sin tener en cuenta las simetrías del tablero, que el número de estrategias del jugador **I**, $|S_{\mathbf{I}}|$ se encuentra entre $9{*}7^8{*}5^{48}$ y $9{*}7^8{*}5^{48}{*}3^{192}$.

3. En la película "El último año en Marienbad" dirigida por Alain Resnais (1961) un personaje llamado A persuade a otro llamado B jugar el siguiente juego: coloca 16 cartas sobre una mesa formando una superficie triangular así:

Fila 1 : □
Fila 2 : □□□
Fila 3 : □□□□□
Fila 4 : □□□□□□□

En la primera fila una carta, en la segunda fila tres cartas, en la tercera cinco cartas y en la cuarta fila siete cartas. Al jugador que le corresponda el primer movimiento puede extraer tantas cartas como quiera (pero al menos una) de una sola de las cuatro filas.

Suponga que B hace el primer movimiento. Enseguida el jugador A saca cartas (por lo menos una) de alguna de las filas que quedan con cartas después de la primera extracción de B. Otra vez es el turno de B y el juego continua como antes.

Considere el caso del juego de Marienbad con dos filas., una carta en la primera y tres en la segunda fila. Suponga que B hace el primer movimiento y el jugador que saca la última carta pierde.

a. ¿Qué tipo de juego es? Represente el juego en forma extensiva. En particular, describa los elementos que forman parte de la tupla que define el juego en forma extensiva.

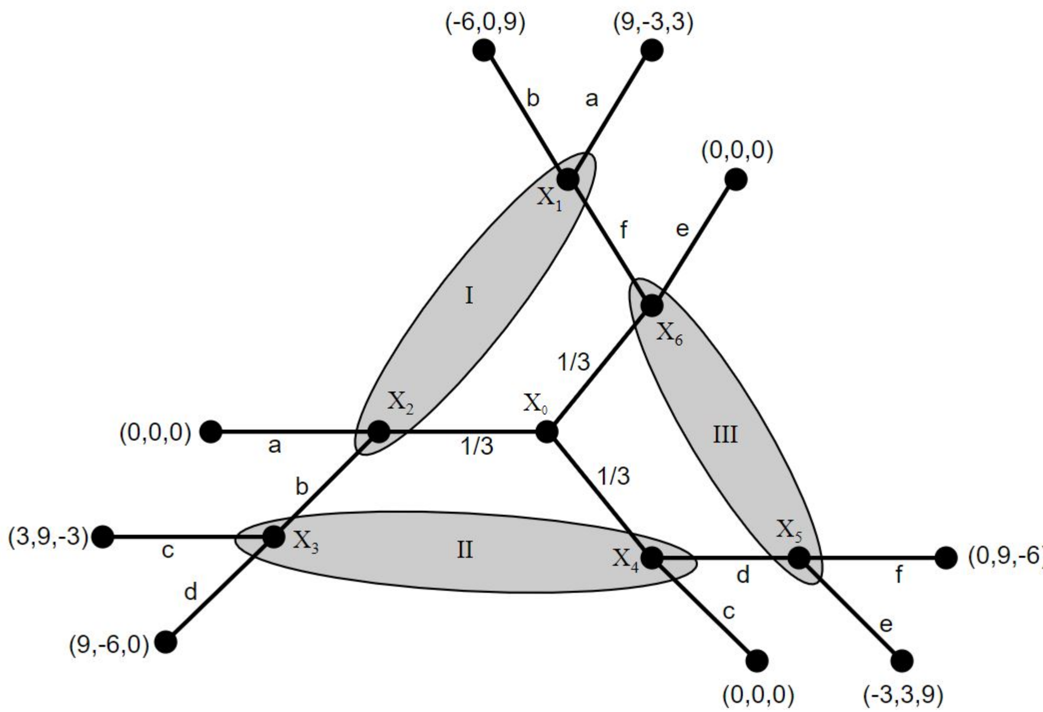
b. Calcule el número de estrategias de B y de A. Describa una estrategia ganadora de B. Calcule el número de jugadas del juego.

4. Pruebe el teorema de Von Neumann (1928): En todo juego de dos jugadores, finito, con información perfecta, en el que los posibles resultados son: **I** gana, **II** gana o hay empate, una de las siguientes alternativas se cumple:

1. El jugador **I** tiene una estrategia ganadora.
2. El jugador **II** tiene una estrategia ganadora.
3. Cada jugador tiene una estrategia que les garantiza por lo menos el empate.

Dar un ejemplo de un juego donde no se cumpla la conclusión del teorema de Von Neumann.

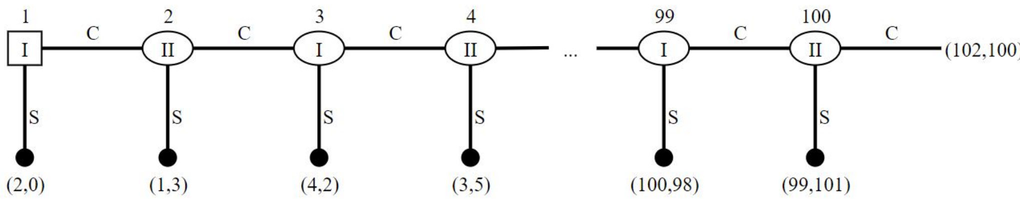
5. Considere el siguiente juego en forma extensiva:



Donde en el nodo X_0 juega el azar y el conjunto de estrategias $\{a, b\}$ corresponden al jugador 1, $\{c, d\}$ corresponden al jugador 2, $\{e, f\}$ corresponden al jugador 3.

- **a.** Determine las estrategias y los conjuntos de información de cada jugador. ¿Cuántas jugadas hay en este juego?
- **b.** Describa el juego en forma normal y verifique si hay equilibrios de Nash en estrategias puras.

6. Juego del Cienpiés: El siguiente juego descrito en forma extensiva se llama el juego del cienpiés:



Observe que el árbol en la figura se ha reducido en notación. Sin embargo, el árbol cuenta con 100 vértices y 101 hojas. Los pagos son las parejas (x, y), donde x representa los pagos del jugador **I** y y representa los pagos del jugador **II**. El jugador **I** abre el juego y el juego se desarrolla en turnos alternados.

Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas estrategias tiene cada jugador?

b) ¿Cuántos conjuntos de información tiene el juego? Justifique su respuesta.

c) Si usted fuera el jugador **I**, ¿cómo jugaría este juego?

7. Tres socios Andrés, Luis y María desean capitalizar su firma y para ello deciden jugar el siguiente juego:

Cada socio escoge su socio preferido distinto a él mismo. Si dos socios se escogen mutuamente, el tercero debe pagar la cuota de capitalización suya y de los otros dos (cada socio capitaliza 1 unidad de dinero). Si no se forman parejas (por ejemplo, Andrés escoge a Luis, Luis escoge a María y María escoge a Andrés), entonces cada uno aporta una unidad de dinero a la capitalización.

Suponga que la escogencia es pública y se hace en orden alfabético.

a) Describa el juego en forma extensiva.

b) Calcule el número de estrategias de cada socio.

c) Identifique los subjuegos del juego.

d) Calcule el número de jugadas del juego.

Ahora, suponga el mismo orden de escogencia, pero esta vez Andrés escribe su escogencia en un papel y lo muestra solo al final del juego, mientras los otros dos jugadores juegan públicamente.

a) Describa el juego en forma extensiva.

b) Calcule el número de estrategias de cada socio.

c) Identifique los subjuegos del juego.

Por último, suponga el mismo orden de escogencia, pero esta vez los tres socios escogen de manera secreta, de manera que cada uno escribe su escogencia en un papel y lo muestra al final del juego.

a) Describa el juego en forma extensiva.

b) Calcule el número de estrategias de cada socio.

c) Identifique los subjuegos del juego.

d) Encuentre el equilibrio puro de Nash del juego (facultativo).

8. Considere el juego $G = (A_1, A_2, u_1)$ de suma cero y dos jugadores, donde $A_1 = A_2 = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ y $u_1(a_1, a_2) = \frac{1}{a_1+a_2}$ para todo $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$.

a) Represente el juego en forma normal.

b) Diga si el jugador 1 tiene estrategias estrictamente dominadas. Justifique su respuesta.

c) Demuestre que este juego tiene un valor y hállelo. Caracterice los conjuntos de estrategias óptimas en caso de que sea posible.

9. Considere una relación de preferencias $\succsim$ sobre un conjunto de alternativas X. Se dice que $(X, \succsim)$ es un problema de decisión si las preferencias son:

- **Completas:** Para todo $x, y \in X$, se tiene $x \succsim y$, o $y \succsim x$.
- **Transitivas:** Si $x, y, z \in X$ son tales que $x \succsim y$ y $y \succsim z$, entonces $x \succsim z$.

Además se dice que las preferencias son representables por medio de una función de utilidad si existe una función $u : X \to \mathbb{R}$ tal que para $x, y \in X$, se tiene $x \succsim y$ si y solo si $u(x) \geq u(y)$.

a) Demuestre que si X es un conjunto contable, entonces las preferencias $\succsim$ sobre X son representables por medio de una función de utilidad, si y solo si, $(X, \succsim)$ es un problema de decisión. ¿Para cuál dirección de la prueba no se requiere que X sea contable?

b) Demuestre que si existe una función de utilidad que representa las preferencias $\succsim$, entonces existen infinitas funciones de utilidad que las representan.

10. Considere el siguiente juego bimatricial:

$$\begin{pmatrix} & W & X & Y & Z \\ T & 7,7 & 5,5 & 2,3 & 9,6 \\ B & 5,6 & 7,7 & 3,9 & 5,5 \end{pmatrix}$$

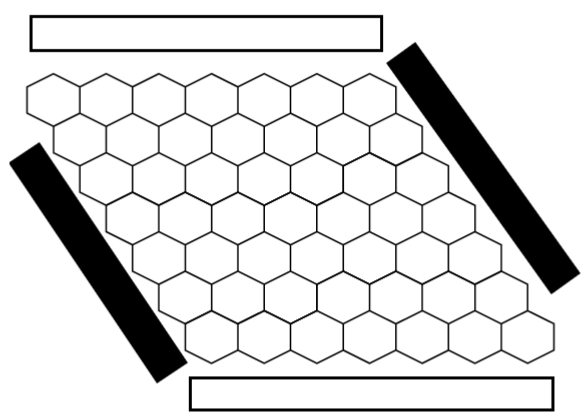
Donde el jugador 1 puede jugar T o B y el jugador 2 puede jugar W, X, Y o Z.

a) Determine la(s) estrategias pura(s) del jugador 1 y del jugador 2 que está(n) estrictamente dominada(s) por otra estrategia pura.

b) Describa todas las combinaciones de estrategias W y Y del jugador 2 que dominan estrictamente a X.

c) Encuentre todos los equilibrios del juego.

Bono: El juego de Hex: Uno de los juegos más ingeniosos que se jugaba en Princeton (alrededor de 1948) era el *Hex*, un juego topológico que lo llamaban el juego de Nash, en honor a su inventor. Más tarde se descubrió que el mismo juego lo había inventado unos pocos años antes Piet Hein en Dinamarca. Hein lo bautizó *Hex* y se conoce bajo este nombre.



Un tablero de $n \times n$ del Hex enmarcado por un rombo compuesto de n^2 hexágonos como se muestra en la figura 1. El tamaño que se recomienda es 14 $\times$14 (el tablero de la figura es 7×7. Dos lados opuestos están pintados de negro y los dos restantes de blanco. Los jugadores N y B colocan alternadamente las fichas sobre los hexágonos y una vez colocada la ficha no se mueve. El jugador N (negro) trata de construir una cadena conectada de fichas negras que una las dos fronteras negras, mientras que el jugador B (blancas) trata de formar una cadena conectada de fichas blancas que una las dos fronteras blancas. El juego termina cuando uno de los dos jugadores tiene éxito.

a) Pruebe que en un tablero de Hex $n \times n$, el jugador que inicia el juego puede ganar siempre (tiene una estrategia ganadora).

Ayuda: Utilice un argumento topológico para probar que uno de los dos jugadores debe ganar.

b) Pruebe que un tablero de Hex $n \times (n+1)$ el jugador con la distancia más corta para conectar las dos fronteras tiene una estrategia ganadora, aún en el caso que el otro jugador tenga el movimiento de apertura.