Теорема о базисном миноре: каждая строка матрицы A раскладывается по строкам, в которых расположена базисная подматрица (и для столбцов аналогично)

Эта теорема вытекает естественно из прошлой леммы. Строки, в которых расположена базисная подматрица, линейно независимы, причем любое количество $p > \operatorname{Rg} A$ строк будут линейно зависимы между собой, по теореме о ранге матрицы. Получается, все строки, содержащие базисную подматрицу, являются базисными, и как мы доказали в прошлой лемме, могут разложить любую строку матрицы в линейную комбинацию базисных строк. Аналогичные рассуждения и для столбцов.

Ранг матрицы будет равен максимальному порядку ненулевого минора. Скажем, если матрица 3×3 вырождена (ее определитель равен нулю), но есть ее миноры, не равные нулю, то ранг матрицы равен 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 5 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Можно считать ранг матрицы следующим образом: начинать с малых миноров, и искать такой, что не равен нулю. Как только мы найдем такой, достаточно лишь проверять миноры высшего порядка, *которые содержат в себе* этот минор. Если все такие миноры равны нулю, то ранг матрицы будет равен порядку изначального минора, что мы нашли.

Проводим параллели с теоремой о базисном миноре: найдя минор, неравный нулю, мы нашли кусочек базисной подматрицы. Затем, ища новые миноры, содержащие нынешний, мы пытаемся добавить новую строчку, чтобы ее нельзя было разложить (нетривиально) как линейную комбинацию уже имеющихся строк.
Этой проверкой и выступает определитель - определитель равен нулю тогда и только тогда $(\Leftrightarrow)$, когда строки матрицы линейно зависимы (раскладываются как линейная комбинация).
Если же единственное разложение этой строки требует содержание себя в

этой линейной комбинации, то мы ее добавляем в базисную подматрицу, увеличивая ранг по пути.

Пример задачи

Условие: найдите ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение: попробуем начать с малых миноров и подниматься выше.
Зацепимся за первый попавшийся минор - сверху слева:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1$$

Определитель не равен нулю, а значит ранг матрицы как минимум равен двум.
Проверяем миноры высшего порядка, что содержат его в себе. Например, верхняя левая матрица 3×3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 3$$

$$= 6 + 10 + 24 - 9 - 20 - 24 = -13$$

Определитель все еще не равен нулю, поэтому мы можем утверждать, что ранг матрицы хотя бы равен трем. Проверим, не равен ли он четырем, взяв ох боже определитель всей матрицы.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+9\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix} = -1\cdot 6 + 7\cdot(-3) - 2\cdot 0 + 9\cdot 3 = 0$$

А вот определитель всей матрицы равен нулю. Раз это единственный "минор", что содержит в себе найденный минор 3×3, не равный нулю, мы можем утвержать, что ранг матрицы может быть равен четырем.

Ответ: $\operatorname{Rg} A = 3$.