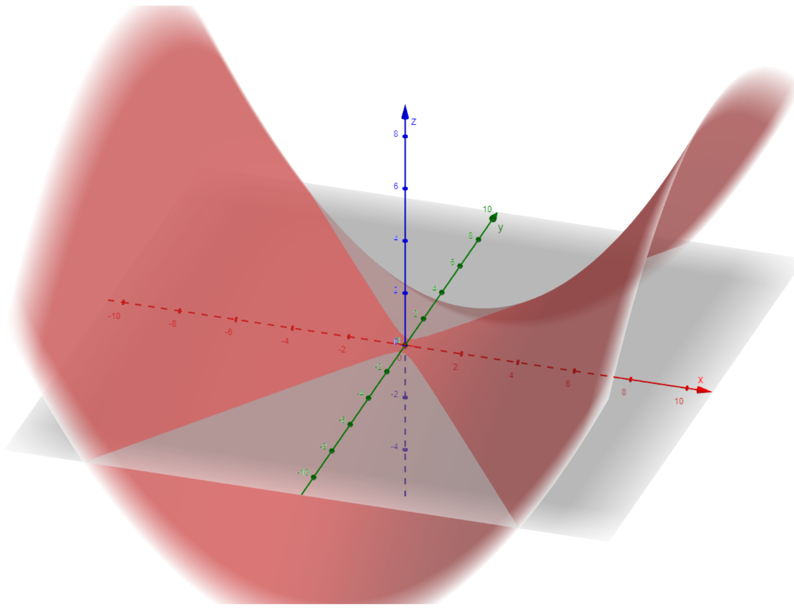
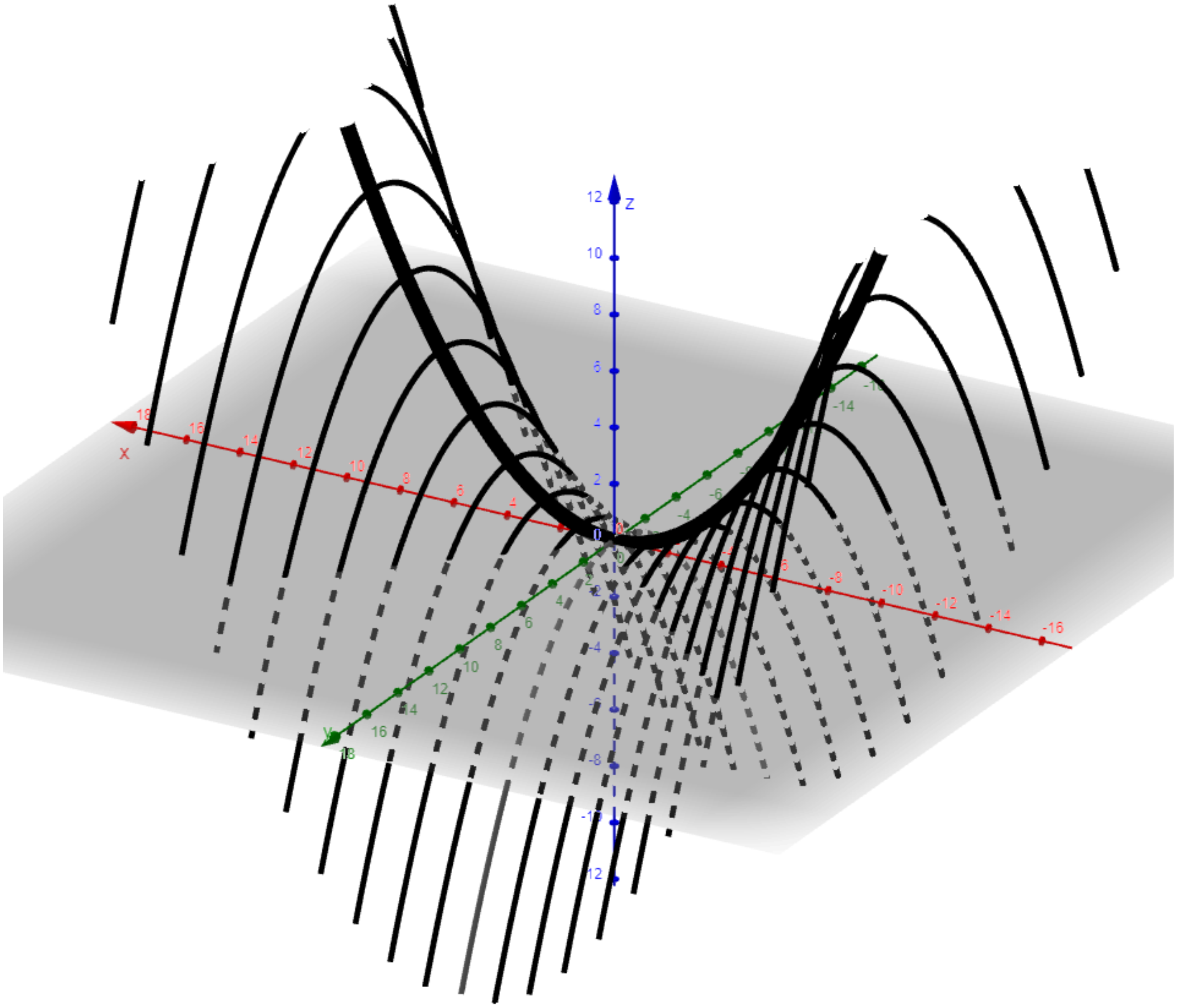
Вернемся к параболоиду. В прошлый раз мы изучили эллиптический параболойд, он выглядит как эллипс в разрезе, да и его уравнение очень похоже на уравнение эллипса.
Теперь же мы меняем знак, и делаем из эллипса гиперболу:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



И получаем "принглс"инку.
Если посмотреть, можно представить, как на одной параболе, у которой ветви вверх, запустили другую параболу с ветвями вниз, и прочертили

таким образом плоскость.

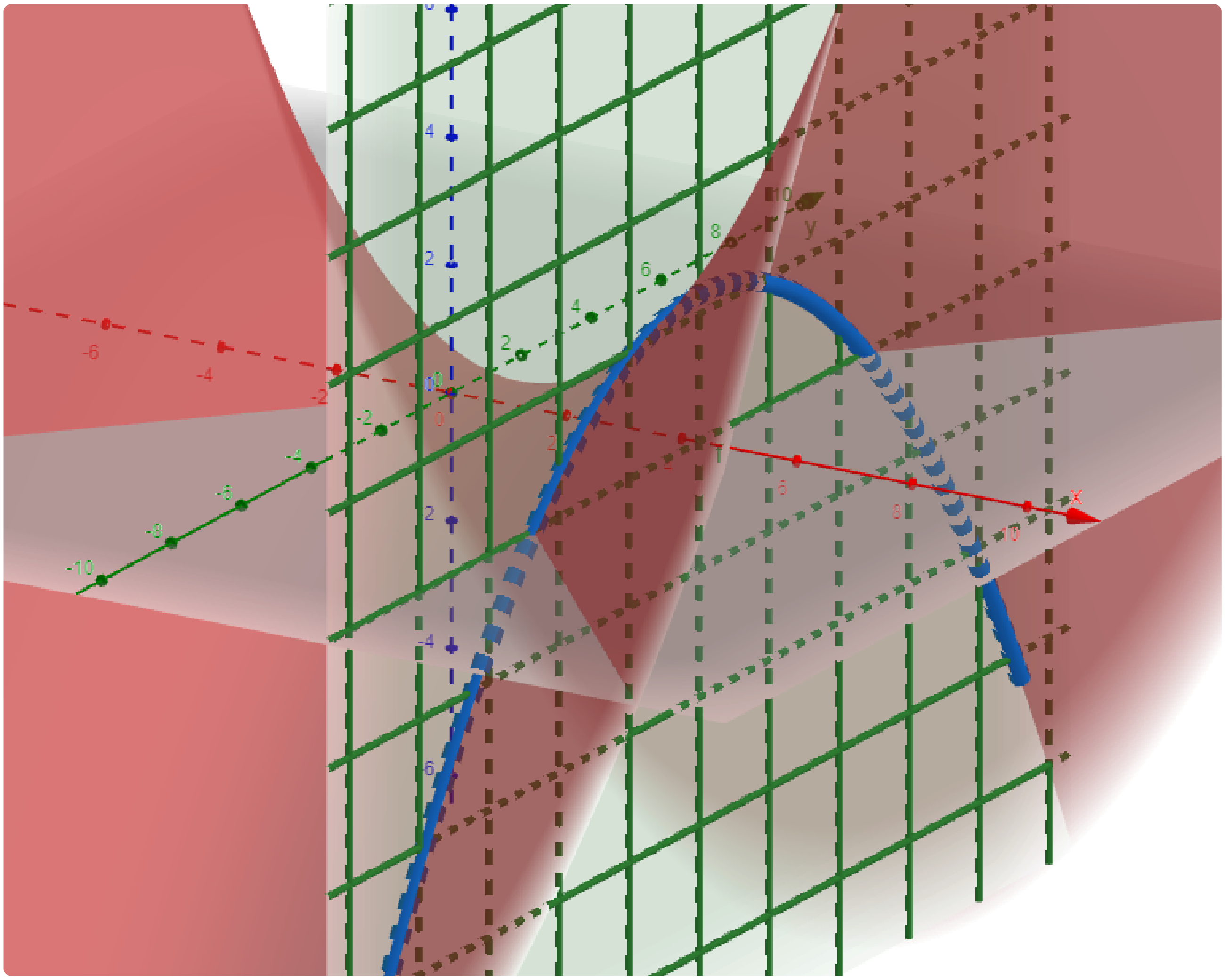


Чтобы подтвердить эту теорию, давайте проанализируем данную плоскость, разревав ее парочкой плоскостей.
Сначала проанализируем параболу, что "направлена ветвями вверх" - делаем сечение вдоль оси x, то есть плоскостью $x = \alpha$.
Тогда уравнение сводится к:

$$-\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{\alpha^2}{a^2}$$

И действительно получается парабола. Это более заметно, если сместить систему координат Oyz на вектор $(0; \frac{\alpha^2}{2a^2})$:

$$-\frac{y^2}{b^2} = 2\left(z - \frac{\alpha^2}{2a^2}\right) \Rightarrow -\frac{y'^2}{b^2} = 2z'$$

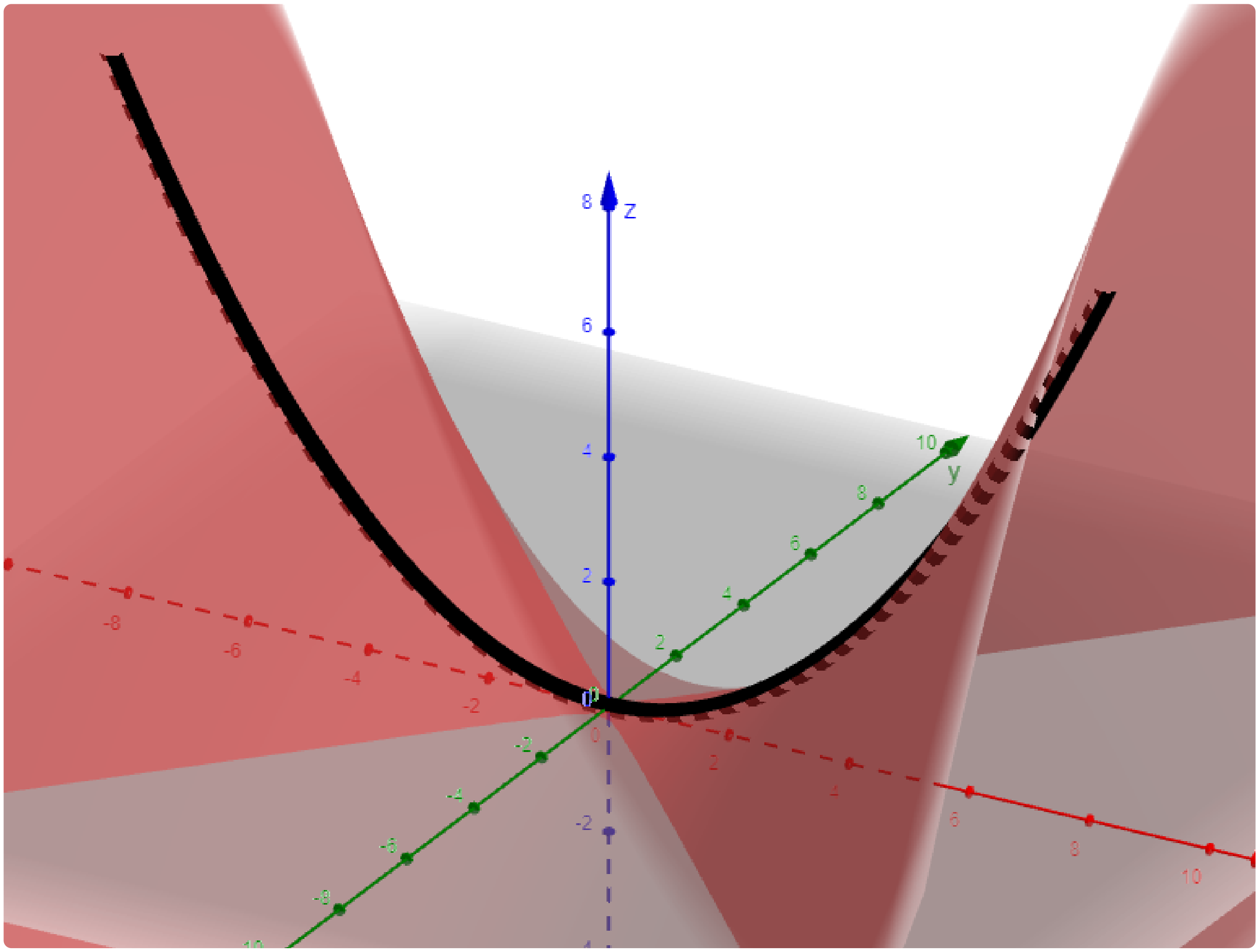


В оригинальной системе координат вершина этой параболы будет в точке

$$\left(\alpha; 0; \frac{\alpha^2}{2a^2}\right)$$

Что будет, если мы возьмем новое значение α - если его изменять, как двигается вершина? Другими словами, по какой линии движется вершина? Координата x будет линейно меняться вместе с α чисто потому что $x = \alpha$. Координату z мы точно так же выражаем, $z = \frac{\alpha^2}{2a^2}$. Но $x = \alpha$, поэтому зависимость выглядит следующим образом:

$$z = \frac{x^2}{2a^2} \quad (y = 0)$$



И, кстати говоря, это тоже будет парабола! ($x^2 = 2a^2z$).
Из этого следует, что гиперболический параболоид можно задать всего лишь с помощью двух гипербол. Одна ветвями вверх, другая - вниз)
Ставим вершину одной на другую, и проводим ей по всей параболе.
Получаем гиперболический парабалоид!

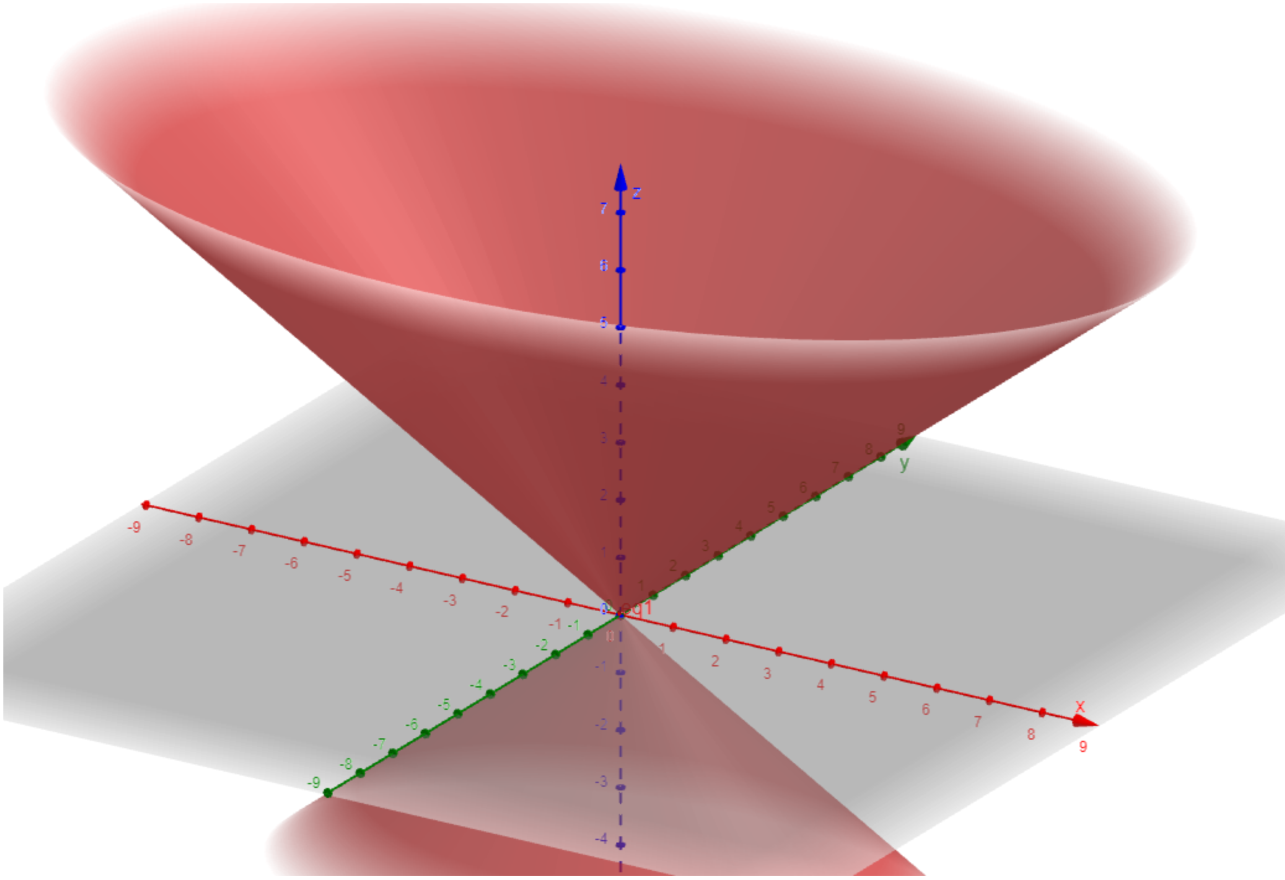
Конус второго порядка

Я думаю вы представляете как выглядит обычный конус. Конус второго порядка получается с помощью вращения пересекающихся линий.

$$a^2x^2 - c^2z^2 = 0 \to a^2(x^2 + y^2) - c^2z^2 = 0$$

Такой частный случай называется прямым круговым конусом.
Отделяем все коэффициенты и получаем уже самый обычный конус второго порядка:

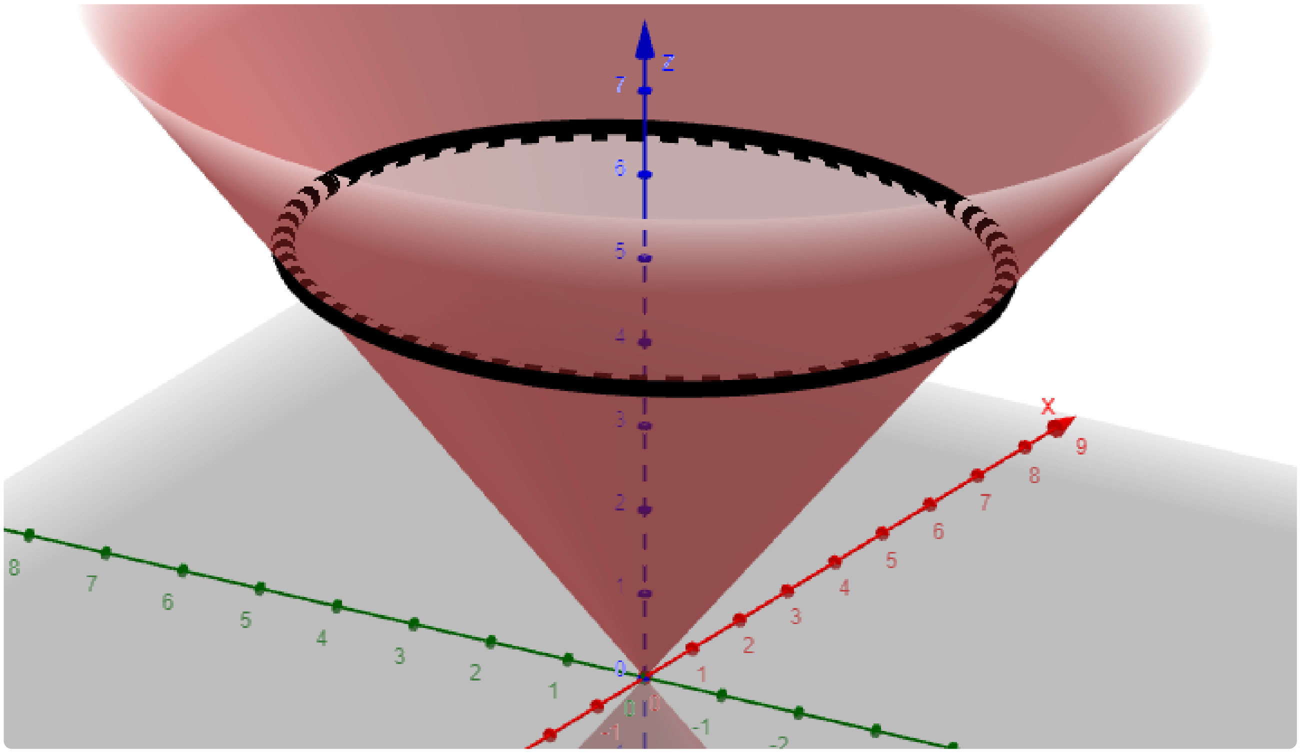
$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0$$



Как видите, тут получается конус с двух сторон. С одной стороны получится если быть может повращать функцию модуля.

У конуса есть множество *образующих* - прямых, все точки которых принадлежат этой поверхности (конусу). Причем все эти образующие проходят через одну точку.
Можно определить конус в обратную сторону - это такая поверхность, образованная прямыми линиями, все проходящие через одну точку, и пересекающих ***направляющую*** - некоторая плоская кривая, определяющая конус (в нашем случае, направляющая - эллипс).

Направляющая:



Эта точка, через которую проходят все образующие, называется *вершиной конуса*.

Конус с вершиной в начале координат может быть определен через уравнение с *однородной функцией*:

$$F(x, y, z) = 0$$

Разумный вопрос, а что такое однородная функция? По определению, однородная функция степени s является функция, удовлетворяющая следующему равенству:

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^s F(x, y, z)$$

(s - натуральное число)

Объяснение, почему конус может быть описан, такой функцией, не сложное. Скажем, точка $M(x, y, z)$ принадлежит конусу. В таком случае любая точка $M'(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ тоже будет принадлежать конусу, по определению функции что мы дали выше. Раз векторы $\overline{OM}$ и $\overline{OM'}$ коллинеарны и имеют общее начало, следовательно обе лежат на прямой OM, а это прямая является образующей $\Rightarrow$ обе точки принадлежат конусу.

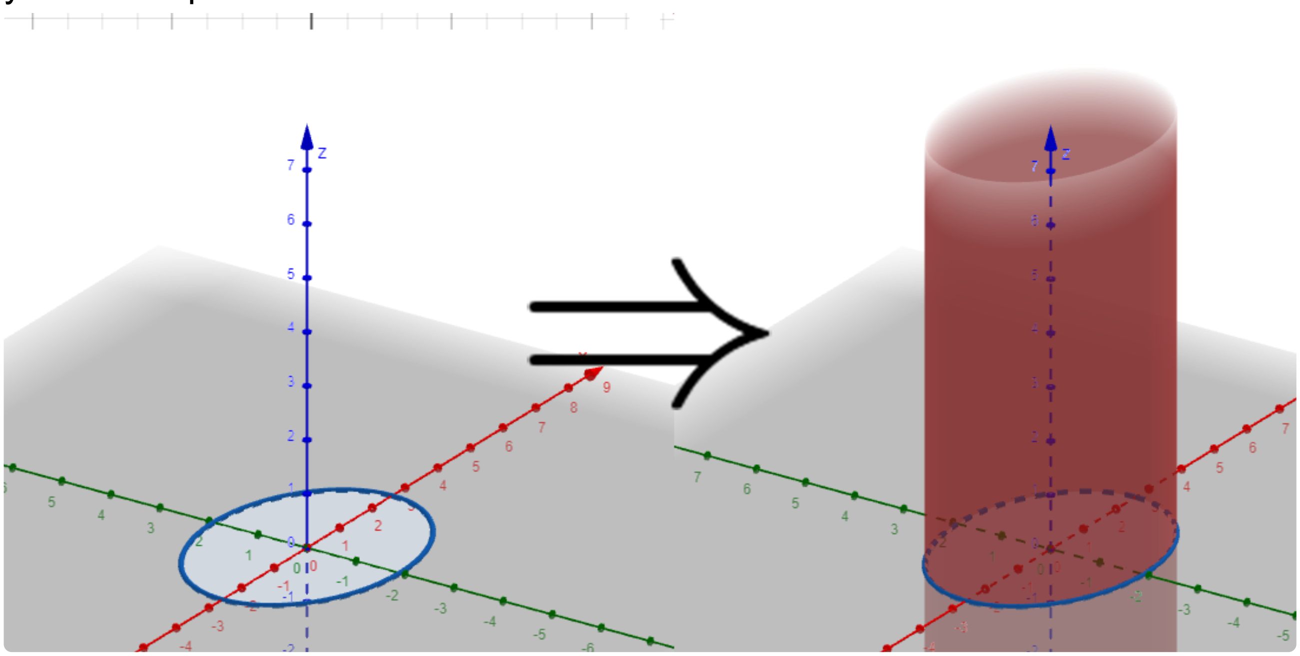
Конус второго порядка образован однородной функции второй степени.

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0$$

Такой конус и является конусом в общем смысле.

Цилиндры второго порядка

Для цилиндров у всех тоже есть внутреннее понимание, что это за фигура. Они построены с помощью вертикальных параллельных линий, которые являются их *образующими*. Линия, которая "задает" цилиндр, называется *направляющей* - прям как с конусами.
Как получить параллельные линии? "Выдавить" фигуру из 2д в 3д! Такое можно легко получить, если написать 2д уравнения для 3д пространства, не учитывая третью ось:



На деле, все обычные уравнения для линий на плоскости могут быть использованы для построения цилиндров: эллиптического, гиперболического и параболического соответственно:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y^2 = 2px$$

Быстрое математическое объяснение: поверхности у нас всегда задаются функцией

$$F(x, y, z) = 0$$

Но когда одна из координат (z) не используется, уравнение сводится к виду $F(x, y) = 0$. Если точка $M(x_0; y_0; z_0)$ лежит на цилиндре, то соответственно будет лежать и точка $M'(x_0; y_0; z)$ для любого z (в силу уравнения). Таким образом каждой точке на направляющей соответствует вертикальная прямая, образуемая этим "любым z".

Поздравляю! Душнота с линиями и плоскостями закончена!

Пример задачи

Постройте гиперболический параболоид, заданный параболами $x^2 = 8z$ и $y^2 = -2z$.
Решение: переведем обе параболы в вид "$= 2z$":

$$\frac{x^2}{2^2} = 2z \qquad -\frac{y^2}{1^2} = 2z$$

На самом деле, все что осталось - это сложить их, и получится искомый параболоид.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 2z$$

При $y = 0$ получается задающая парабола "вверх", а при каком-то констатном значении $x = \alpha$ получается побочная парабола "вниз", смещенная на какое-то значение:

$$-\frac{y^2}{1} = 2\left(z - \frac{\alpha^2}{8}\right)$$