Замена базиса

Основа задачи такова: у нас есть какой-то базис/система координат $(\overline{e_1};\overline{e_2};\ldots)$, и вектора $\overline{a},\overline{b},\ldots$, заданные в этом базисе. Затем нам дают новый базис: $(\overline{e'_1};\overline{e'_2};\ldots)$, и говорят представить известный нам вектор $\overline{a}$ в *новом* базисе.
(Чтобы не выливать в файлик тучу математических символов, будем считать, что базис состоит из двух векторов $(\overline{e_1};\overline{e_2})$, но на деле такая процедура работает для сколь угодного количества векторов)

И как же это сделать? Разберем идею - у нас есть новый базис, но он не может находится просто в вакууме (иначе нам не от чего отталкиваться в решении задачи) - этот *новый базис мы выразим через вектора старого базиса*. Мы знаем как был записан вектор в старом базисе, и мы знаем как записан новый базис через старый - значит вектор можно выразить через новый базис как линейную комбинацию новых векторов.

$$\overline{a}=a'_1\overline{e'_1}+a'_2\overline{e'_2}=(a'_1\alpha_1+a'_2\alpha_2)\overline{e_1}+(a'_1\beta_1+a'_2\beta_2)\overline{e_2}$$

Разберем в первую очередь решение через системы уравнений.

Для начала запишем вектора нового базиса через старый - раз это базис, значит любой вектор в нем можно представить как линейную комбинацию базисных векторов:

$$\overline{e'_1}=\alpha_1\overline{e_1}+\beta_1\overline{e_2}$$
$$\overline{e'_2}=\alpha_2\overline{e_1}+\beta_2\overline{e_2}$$

Для каждого вектора нового базиса находим значения α,β. Получили теперь записи новых векторов в старом базисе.
Точно так же и для вектора - представим его как линейную комбинацию базисных векторов:

$$\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2}$$
$$\overline{a} = a_1'\overline{e_1'} + a_2'\overline{e_2'}$$

Здесь (a_1, a_2) и (a_1', a_2') - координаты вектора $\overline{a}$ в старом и новом базисе соответственно.
Подставляя линейные комбинации новых базисных векторов в уравнение выше (в новом базисе) и перегруппировывая, получим запись вектора в новом базисе, но через старые базисные векторы.

$$\overline{a} = a_1'(\alpha_1\overline{e_1} + \beta_1\overline{e_2}) + a_2'(\alpha_2\overline{e_1} + \beta_2\overline{e_2})$$

$$\overline{a} = (a_1'\alpha_1 + a_2'\alpha_2)\overline{e_1} + (a_1'\beta_1 + a_2'\beta_2)\overline{e_2}$$

Таким образом у нас получилась зависимость между координатами вектора в старом базисе и в новом. Чтобы найти новые координаты, необходимо решить систему уравнений.

$$\begin{cases} a_1 = a_1'\alpha_1 + a_2'\alpha_2 \\ a_2 = a_1'\beta_1 + a_2'\beta_2 \end{cases}$$

Координаты (a_1', a_2') и будут записью вектора $\overline{a}$ в новом базисе.
Можно найти эти координаты (a_1', a_2') методом Крамера - проблема такого решения, что если бы векторов было несколько, для каждого пришлось решать Крамером по-своему. А с помощью обратной матрицы - то, что изучим дальше - решение быстро применяется сразу для всех векторов (решение направлено на базис, а не на вектор).

Эту систему можно записать в виде матричного уравнения:

$$\begin{cases} a_1 = a_1'\alpha_1 + a_2'\alpha_2 \\ a_2 = a_1'\beta_1 + a_2'\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

Матрица в середине $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода* от старого базиса к новому. Но сейчас наше уравнение показывает как получить старые координаты из новых, а нам нужно наоборот! Поэтому "поделим на эту матрицу" - умножим каждую сторону на обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

В итоге вся наша задача сводится к нахождению обратной матрицы и перемножению матриц, и с помощью старых координат можно будет получить новые.

В общем случае, если базис задан векторами:

$$\begin{gathered} \overline{e_1'} = a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \ldots + a_{n1}\overline{e_n} \\ \overline{e_2'} = a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \ldots + a_{n2}\overline{e_n} \\ \vdots \\ \overline{e_n'} = a_{1n}\overline{e_1} + a_{2n}\overline{e_2} + \ldots + a_{nn}\overline{e_n} \end{gathered}$$

То матрица перехода будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Мы заполняем коэффициенты для каждого вектора базиса в столбики. Коэффициенты вектора $\overline{e_1'}$ идут в первый столбик, и т.д.

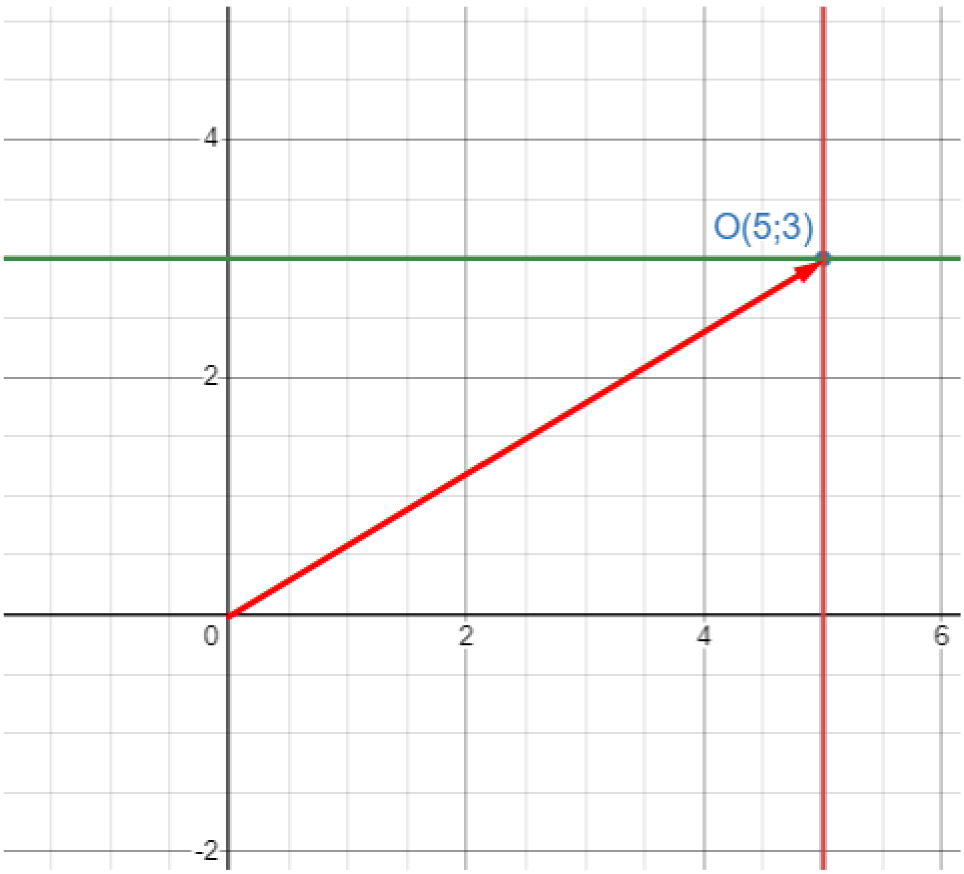
Переход к новой системе координат

Система координат от базиса отличается лишь наличием точки отсчета. Скажем что у новой системы координат коодинаты точки отсчета - O. Тогда координаты для вектора в новом векторе должны учитывать и расстояние между двумя точками отсчета.

$$\begin{cases} a_1 = a_1'\alpha_1 + a_2'\alpha_2 + O_1 \\ a_2 = a_1'\beta_1 + a_2'\beta_2 + O_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_1 \\ O_2 \end{pmatrix}$$

Помимо обычного вектора, который получается после замены базиса, его еще нужно сместить на расстояние новой системы координат относительно старой. Координаты $(O_1; O_2)$ - координаты точки отсчета новой системы координат *в старой системе координат*!



Параллельный перенос и поворот

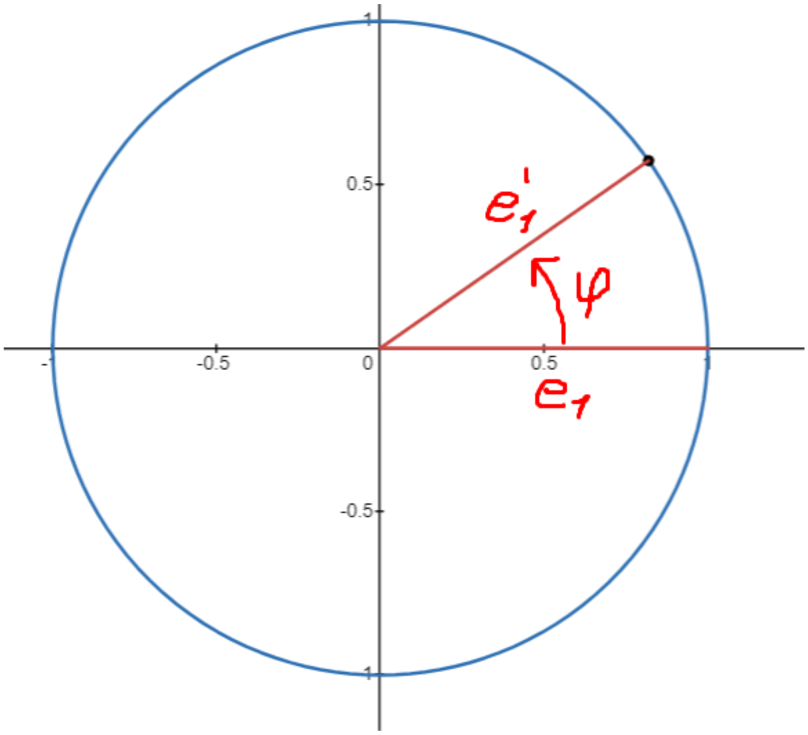
В случае с параллельным переносом все просто - это будто наша система координат просто переместилась, но базис остался неизменным. Если мы сместили вектор $\overline{a}(a_1; a_2; \ldots)$ параллельным переносом на вектор $\overline{v}(v_1; v_2; \ldots)$, то координаты будут связаны следующим равенством:

$$\overline{a} = \overline{a'} + \overline{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_1' + v_1 \\ a_2 = a_2' + v_2 \\ \ldots \end{cases}$$

Поворот будет чуть сложнее. Здесь мы считаем, что наша система координат является ***правой*** декартовой прямоугольной (ортонормированный базис). Скажем, мы поворачиваем оригинальную систему координат против часовой стрелки на угол φ - как тогда изменятся координаты вектора $\overline{a}$ в новой системе координат?

Рассмотрим, чему будет равен базис $(\overline{e_1'}; \overline{e_2'})$ после поворота базиса $(\overline{e_1}; \overline{e_2})$ на угол φ.

Первый базисный вектор будет повернут относительно вектора $\overline{e_1}$ с помощью множителей косинуса и синуса



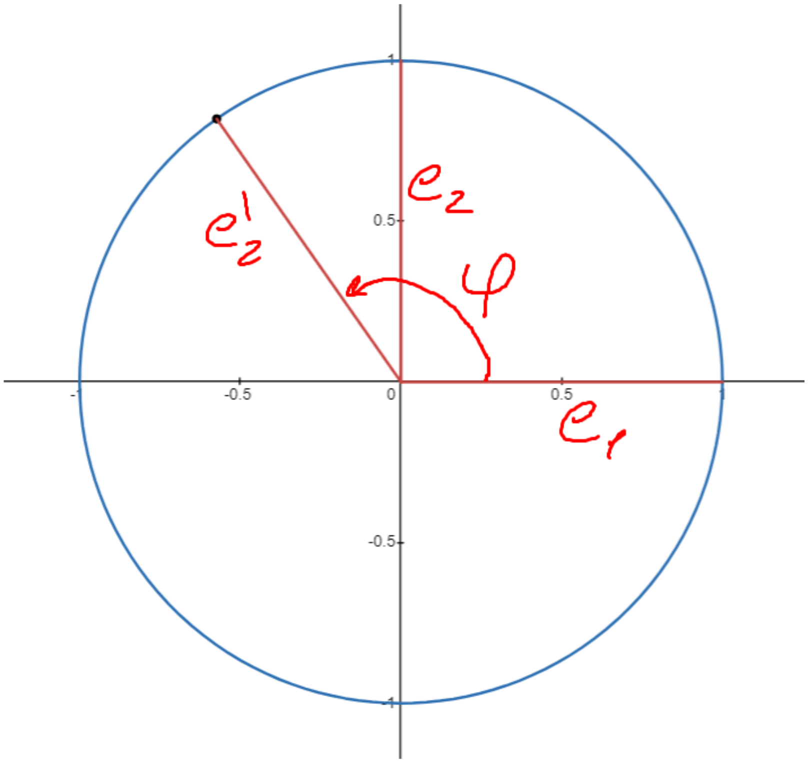
$$\overline{e_1'} = \cos\varphi \cdot \overline{e_1} + \sin\varphi \cdot \overline{e_2}$$

Второй базисный вектор можно представить либо прибавлением 90° к углу, либо переворотом системы координат *по часовой стрелке* на 90° и умножением на косинус/синус.

Случай 1:

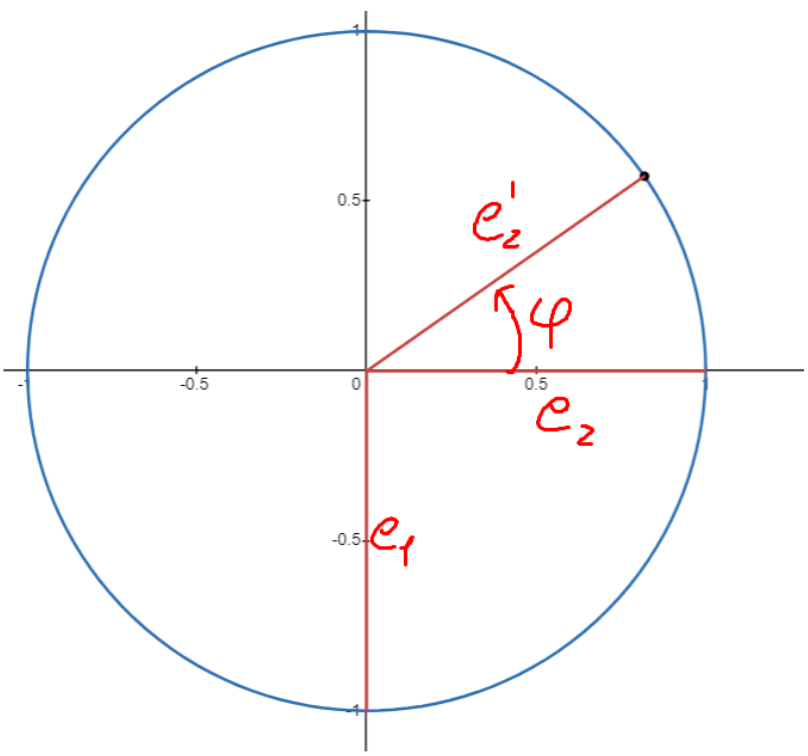
$$\overline{e_2'} = \cos(\varphi + 90^\circ) \cdot \overline{e_1} + \sin(\varphi + 90^\circ) \cdot \overline{e_2}$$

$$\overline{e_2'} = -\sin\varphi \cdot \overline{e_1} + \cos\varphi \cdot \overline{e_2}$$



Случай 2:

$$\overline{e'_2} = \sin\varphi \cdot (-\overline{e_1}) + \cos\varphi \cdot \overline{e_2}$$



В любом случае, у нас получаются два базисных вектора:

$$\overline{e_1'} = \cos\varphi \cdot \overline{e_1} + \sin\varphi \cdot \overline{e_2}$$
$$\overline{e_2'} = -\sin\varphi \cdot \overline{e_1} + \cos\varphi \cdot \overline{e_2}$$

Проводя операции что были описаны выше в этом билете, получаем уравнения для координат вектора $\overline{a}$:

$$\begin{cases} a_1 = a_1' \cos\varphi - a_2' \sin\phi \\ a_2 = a_1' \sin\varphi + a_2' \cos\varphi \end{cases}$$

Вот и все вращение!

Пример задачи

Условие: найти координаты вектора $\overline{a}(5;3)$, записанного в стандартном базисе $(\overline{i};\overline{j})$, в новом базисе $(\overline{e_1};\overline{e_2})$. $(\overline{e_1} = 2\overline{i} + 2\overline{j}, \overline{e_2} = -\overline{i} + \overline{j})$
Решение: выразим новые координаты вектора через старый базис (необязательный шаг - можно сразу записывать матрицу перехода - но для практики пойдет):
$\overline{a} = 5\overline{i} + 3\overline{j} = a_1'\overline{e_1} + a_2'\overline{e_2} = a_1'(2\overline{i} + 2\overline{j}) + a_2'(-\overline{i} + \overline{j})$
$\overline{a} = (2a_1' - a_2')\overline{i} + (2a_1' + a_2')\overline{j}$

Составим матрицу перехода:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение получается:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

Умножаем на обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

Посчитаем обратную матрицу. Для этого найдем определитель матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$$

Теперь составим матрицу миноров и составляем матрицу алгебраических дополнений...

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A_* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Транспонируем эту матрицу и делим на определитель...

$$A_*^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Поподробнее о нахождении обратной матрицы будет написано в другом билете.
Можем перепроверить, правильно ли нашли обратную матрицу, перемножив их:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2 & -1+1 \\ -4+4 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При умножении получилась единичная матрица, значит все верно.

Ну, теперь просто умножаем:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5+3 \\ -10+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Получили, что в новом базисе вектор $\overline{a} = 5\overline{i} + 3\overline{j}$ будет равен $\overline{a} = 2\overline{e_1} - \overline{e_2}$.

В качестве второго способа, можем решить систему способом Крамера.
$\overline{a} = (2a_1' - a_2')\overline{i} + (2a_1' + a_2')\overline{j}$

$$\begin{cases} 5 = 2a_1' - a_2' \\ 3 = 2a_1' + a_2' \end{cases}$$

Найдем нужные определители:

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 3 = 8$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$

Найдем a_1 и a_2:

$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2$

$a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{4} = -1$

Получаем точно такой же результат: $\overline{a} = 2\overline{e_1} - \overline{e_2}$.

Условие: найдите координаты вектора $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j}$ в новой системе координат, что была повернута на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ против часовой стрелки.

Решение: как и раньше, составляем матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\cos\varphi + \sin\varphi \\ -2\sin\varphi + \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1' = 2\cos\varphi + \sin\varphi \\ a_2' = -2\sin\varphi + \cos\varphi \end{cases}$$

Подставляем угол φ и считаем:

$$\begin{cases} a_1' = 2\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ a_2' = -2\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\overline{a'}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$