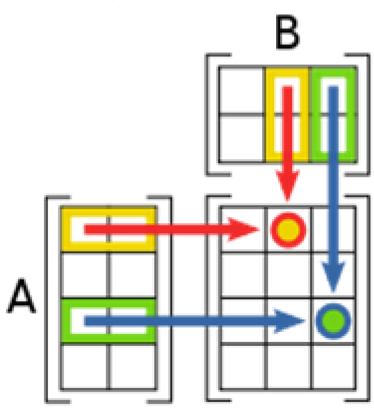
Умножение матриц, в отличие от линейных операций, не является такой простой "поэлементной" операцией. С другой стороны, было бы так, от матриц не было бы никакой пользы; это был бы просто упорядоченный 2д список чисел, и никаких красивых следствий от матриц не появилось бы.

Ладно, перейдем к самому умножению - на матрицы накладывается интересное условие.
Пусть даны матрицы A и B размером $m \times n$ и $n \times p$ соответственно. Произведением матриц A и B будет называться матрица C размера $m \times p$. Записывается как $C = AB$. Матрица C такова, что элемент C_{ij} равен произведению $i-$ой строки матрицы A на $j-$ый столбец матрицы B:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

Эта операция возможна только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.
Можно представить подсчет произведения AB визуально следующим образом: ставим матрицу A слева, матрицу B наверх. Для каждого пересечения в центре мы считаем произведения левой строки и верхнего столбца.



$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \end{array}$$

Другое визуальное представление произведения матриц - повернуть вторую матрицу на 90° против часовой стрелке, и "просеивать" одну матрицу через другую. Впрочем, для визуального представления нужен сам визуал - https://matrixmultiplication.xyz (кто не доверяет предупреждению, вот гитхаб с сайтом: https://github.com/staltz/matrixmultiplication.xyz).

Пробуем понять смысл умножения

Теперь немного про *смысл* за таким умножением. Матрицы из себя представляют *линейную трансформацию пространства*. Мы уже встречались с такими матрицами - например, матрица поворота или матрица растяжения пространства. Умножая вектор на такую матрицу, мы можем узнать, как будет выглядеть этот вектор *после применения трансформации*.

Например в двухмерном пространстве, базисные вектора изначально имеют координаты $(1;0)$ и $(0;1)$. Для того чтобы создать матрицу, мы эти вектора записываем в столбики матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{e_1} = 1 \cdot \overline{i} + 0 \cdot \overline{j} \\ \overline{e_2} = 0 \cdot \overline{i} + 1 \cdot \overline{j} \end{cases}$$

К слову, такая матрица называется *единичной* - когда все числа на главной диагонали равны единице, а все остальные - нулю.

Скажем, мы хотим повернуть пространство на 90° против часовой стрелки. Чтобы узнать матрицу преобразования, все что надо сделать - повернуть базисные вектора: первый станет на место второго, а второй провернется еще на 90° против часовой.

$$\begin{cases} \overline{e_1'} = 0 \cdot \overline{i} + 1 \cdot \overline{j} \\ \overline{e_2'} = -1 \cdot \overline{i} + 0 \cdot \overline{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножая матрицу на какой-то вектор, мы сможем узнать, куда он попадет после применения трансформации. описанной этой матрицей. Скажем, вектор $(4;2)$ после поворота на 90° мы получим, умножив матрицу поворота на 90° против часовой стрелки на этот вектор:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Затем, например, мы хотим растянуть ось y в 2 раза - для этого умножаем вектор на соответствующую матрицу растяжения пространства:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

А что если бы мы хотели узнать сразу, куда попадет изначальный вектор после применения двух трансформаций? Мы бы сначала применяли первую матрицу, потом вторую - заметьте, что для трансформаций, матрицы всегда ставятся *слева* - представьте, будто матрицы трансформации это функции. На вход подается вектор, и потом функция его преобразует. Тогда в $f(x)$, f - матрица, а x - вектор. Применение последовательных преобразований уже будет выглядеть как $g(f(x))$ - сначала применяем первое преобразование f, и уже потом g:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Но согласитесь, что преобразовывать вектор сначала поворотом, потом растяжением, постоянно производя длинный процесс перемножения - неудобно. Вот бы была матрица, которая описывала сразу два этих преобразования вместе - всю композицию изменений пространства? Вот для этого и нужно *умножение матриц*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В первую очередь, умножение матриц - это группирование умножений векторов - если мы посмотрим, куда попадут базисные вектора одной трансформации после применения другой, они опишут *композицию* этих преобразований.:

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right]$$

Геометрический смысл перемножения матриц - последовательное применение линейных трансформаций пространства. Скажем, мы хотим сначала применить поворот, затем растяжение оси y в 2 раза. Для этого мы перемножаем матрицу, причем первая трансформация будет стоять справа (помним аналогию с функциями!):

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}$$

На выходе получается матрица, описывающая сразу два этих преобразования. Теперь подсчет сложного преобразования вектора не составит труда:

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$$

Пример задачи

Условие: найдите произведение матриц AB, где

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\3 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}4 & 2\\3 & 1\\1 & 5\end{pmatrix}$$

Решение: в A 2 строки, в B 2 столбика. Значит, произведением будет матрица 2×2.

$$AB = \begin{pmatrix}1\cdot4+2\cdot3+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot1+2\cdot5\\3\cdot4+1\cdot3+1\cdot1 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & 14\\16 & 12\end{pmatrix}$$

Условие: найдите произведение матриц AB, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: в A 3 строки, в B 3 столбика. Значит, произведением будет матрица 3×3.

$$AB = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + 2\cdot 3 & 4\cdot 2 + 2\cdot 1 & 4\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 & 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 3\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 5\cdot 3 & 1\cdot 2 + 5\cdot 1 & 1\cdot 2 + 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 6 & 7 & 7 \\ 16 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$