

Уравнения прямой и плоскости в отрезках

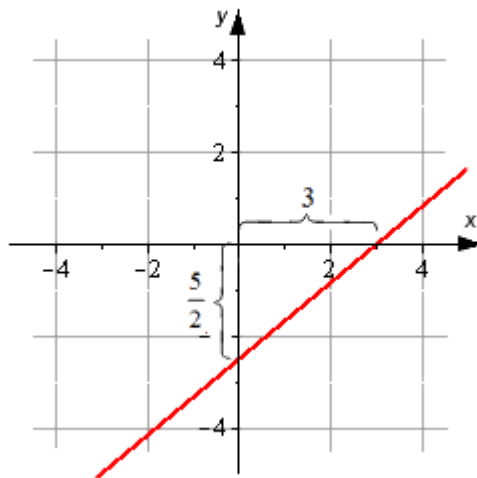
Уравнения в отрезках выглядят следующим образом:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

(Если это прямая, то слагаемого $\frac{z}{c}$ не будет, ведь на плоскости нет третьей оси)

В чем смысл такой записи? Она сразу говорит, через какие точки будет проходить прямая/плоскость. Для уравнения выше, если $x = a$ и все остальные равны нулю, то уравнение будет верным, так что точка $(a; 0; 0)$ принадлежит плоскости. Точно так же и для остальных: $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$.

Отсюда и приходит название "в отрезках" - от начала координат отложены отрезки a, b, c , лежащие на координатных осях. Через концы отрезков можно однозначно построить плоскость.



Точно так же и с прямой.

Чтобы перевести уравнение в отрезках в общую форму много ума не надо - просто умножаем на abc :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow bc \cdot x + ac \cdot y + ab \cdot z - abc = 0$$

Точно так же и в обратную сторону - сначала делим на D , потом для каждого слагаемого делим на его коэффициент:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

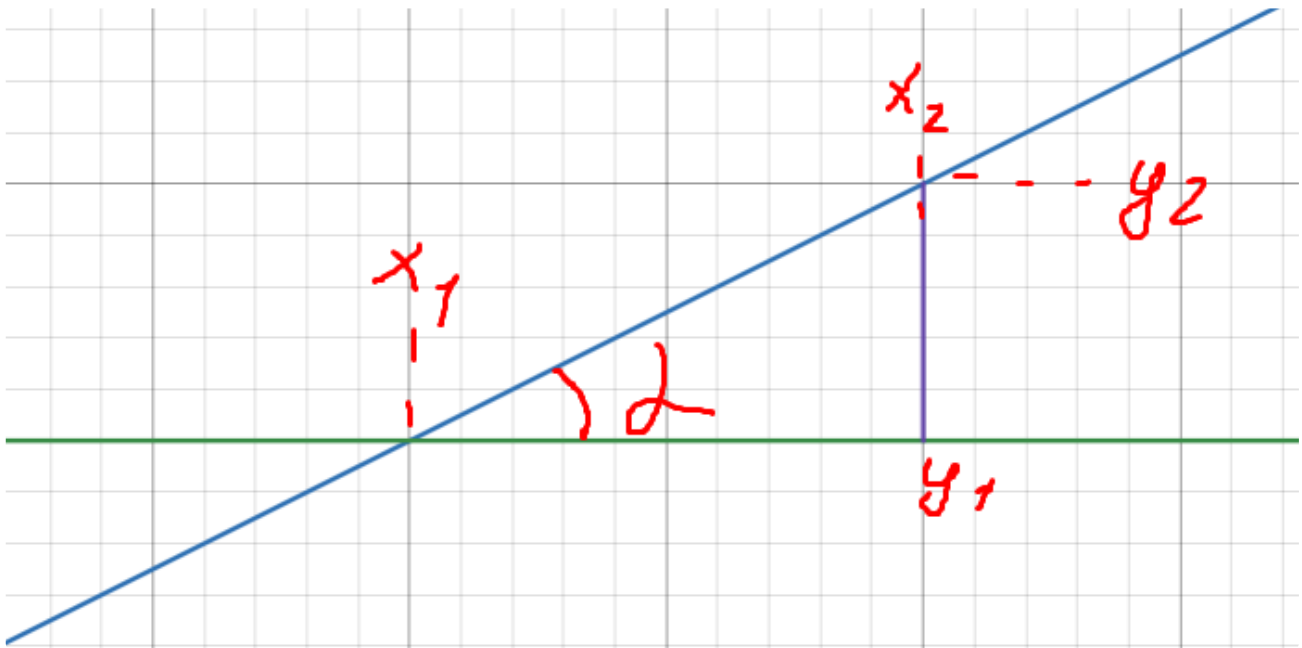
$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Эту базу все хорошо помнят еще со школьной программы:

$$y = kx + b$$

k называется угловым коэффициентом прямой, и является тангенсом угла наклона прямой к оси Ox . b же просто смещение прямой вертикально. Почему k - тангенс угла наклона? Возьмем две случайные точки на прямой, и построим прямоугольный треугольник следующим образом:



Тангенс угла есть отношение противолежащего катета к прилежащему. Длина противолежащего катета будет равна $y_2 - y_1$, прилежащего - $x_2 - x_1$.

Посчитаем их отношение:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{kx_2 + b - (kx_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = k$$

Вот и все, выходит, что $\operatorname{tg} \alpha = k$.

Заметьте, что нельзя с помощью такого вида записи прямой выразить прямую, параллельную оси Oy - для этого k должен быть бесконечно большим.

Чтобы перевести такую прямую в общий вид достаточно просто перенести все в одну сторону:

$$y = kx + b \Leftrightarrow kx - (1)y + b = 0$$

В обратную сторону перевод происходит с помощью деления на B - еще одна причина, почему нельзя выразить вертикальную прямую через такую форму. В общем виде вертикальная прямая будет иметь коэффициент $B = 0$, а на ноль делить нельзя.

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Пример задачи

Условие: переведите прямую $4x + 3y + z - 12 = 0$ в уравнение в отрезках.

Решение: переносим 12 вправо и делим на него:

$$4x + 3y + z = 12 \Rightarrow \frac{4x}{12} + \frac{3y}{12} + \frac{z}{12} = 1$$

Затем каждый коэффициент слагаемого в числителе спускаем в знаменатель:

$$\frac{x}{12/4} + \frac{y}{12/3} + \frac{z}{12} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{12} = 1$$

Условие: переведите прямую $7x + 4y - 2 = 0$ в вид с угловым коэффициентом.

Решение:

$$7x + 4y - 2 = 0 \Rightarrow 4y = 2 - 7x \Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{7}{4}x$$

Условие: переведите прямую $y = 3 + 4x$ в общий вид.

Решение: ...

$$y = 3 + 4x \Rightarrow 4x - y + 3 = 0$$