Каждый вектор $x \in L$ при применении оператора перейдет в какой-то другой вектор. Тем не менее, существуют векторы, которые при применении оператора остаются на том же месте, или домножаются на какую-то константу. Грубый пример: нулевой вектор останется на своем месте. Существуют ли другие векторы с такой характеристикой? Из этого вопроса и выросли понятия собственных значений и векторов.

Наша задача: найти такие пары скаляров λ и векторов v для оператора A, что выполняется уравнение:

$$A(v) = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda v$$

Слева и справа этого уравнения, вообще говоря, разные операции - умножение вектора на матрицу и умножение вектора на скаляр. Перезапишем правую часть этого уравнения. Умножение вектора на скаляр будет соответствовать умножению вектора на диагональную матрицу, где все числа на этой диагонали равны этому скаляру:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} v = \lambda v$$

Эту матрицу можно представить как произведение скаляра на единичную матрицу:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E$$

Теперь запишем изначальное уравнение в новой форме:

$$Av = \lambda E v \Leftrightarrow Av - \lambda E v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda E)v = 0$$

Отсюда видно два решения: первое, когда $v = 0$. Но такие решения скучные. Второе же, когда матрица $A - \lambda E$ имеет ненулевое ядро - тогда существует (как минимум) прямая векторов, которые становятся нулем при применении оператора. Условие на существование ненулевого ядра - вырожденность матрицы - нулевой определитель. Поэтому решая уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

мы можем найти значения λ, для которых существуют вектора v, которые удовлетворяют уравнению $Av = \lambda v$.

Уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ называется *характеристическим уравнением матрицы* A, найденные значения λ называются *собственными значениями* матрицы, а векторы v, соответствующие значениям λ, называются *собственными векторами* матрицы.

Характеристичное уравнение матрицы можно записать таким образом, и как оно выглядит на практике чаще всего:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Дадим самостоятельное определение собственного вектора: вектор v называется собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ, если $v \neq 0$ и выполняется $Av = \lambda v$.

Геометрический смысл собственных векторов - "штырь" в пространстве, ось вращения. Представим векторное пространство L, и применим к нему оператор A. Каждый вектор в этом пространстве перейдет в новую позицию, а все векторы на этом "штыре" останутся висеть на нем (ну или переползут в другую точку этого штыря).
Если $L = \mathbb{R}^3$, и оператор задается матрицей вращения вокруг оси z

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

То ось вращения - вертикальный вектор $(0; 0; 1)$ - будет собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda = 1$.
Конечно, собственные значения могут быть и отрицательными - это все так же штырь, просто при применении оператора все векторы на нем перескакивают на другую сторону.

Бывает, что собственные значения матрицы повторяются. Тогда существует не просто прямая, а целая плоскость (или пространство и выше) векторов, которые остаются на своем месте (или сдвигаются по прямой). Примером такой матрицы - матрица растяжения по оси z. Тогда вся плоскость Oxy будет покрыта собственными векторами.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Случай существования собственного значения $\lambda = 0$ обозначает, что матрица оператора A сама по себе вырождена и имеет ненулевое ядро.

В следующем билете так же рассказано про связь диагональной матрицы и собственных векторов, возможно будет полезно!

Пример задачи

Условие: найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: ервым делом, находим собственные значения. Для этого нужно характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Разложим определитель по третьему столбику:

$$(1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = 0$$

Раскладывая правую скобку как разницу квадратов:

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Получаем собственные значения $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$.

Чтобы найти собственные векторы для определенного значения, нужно решить систему:

$$A\overline{v} = \lambda\overline{v}$$

То есть для нашей матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

Или же:

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda x \\ -x + 2y = \lambda y \\ x - y + z = \lambda z \end{cases}$$

Решаем системы для каждого значения:
Для $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 2x - y = x \\ -x + 2y = y \\ x - y + z = z \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Вектор, что удовлетворяет этому уравнению, имеет "две степени свободы": $x = y$, а z - любое.

$$\overline{v}_1' = (c_1; c_1; c_2)$$

Такой вектор (с несколькими независимыми переменными) мы должны разбить на линейно независимые векторы (похоже на то, как мы считали ФСР). Поочередно подставляем в одно значение число, отличное от нуля (единицу), а во все остальные - единицу. Сначала для c_1, потом для c_2:

$$\overline{v}_1 = (1; 1; 0)$$
$$\overline{v}_2 = (0; 0; 1)$$

Для $\lambda = 3$:

$$\begin{cases} 2x - y = 3x \\ -x + 2y = 3y \\ x - y + z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Получается, $x = -y = z$:

$$\overline{v}_3 = (1; -1; 1)$$

Ответ:
Собственные числа: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$
Собственные векторы, соответсвующие числам:

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$