Как векторное, так и смешанное произведение работают только с трехмерными векторами!

Свойства векторного произведения

- Вектор $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$ будет направлен таким образом, что тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ будет *правой*. Подробнее об ориентации в вопросе 9. Ориентация прямой, плоскости, пространства.
- Модуль (длина вектора) векторного произведения $[\overline{a}, \overline{b}]$ равен площади параллелограмма, образованного векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
- Векторное произведение $[\overline{a}, \overline{b}]$ равно нулю тогда и только тогда $(\Leftrightarrow)$, когда вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.
- Антикоммутативно - меняет свой знак при перестановке аргументов:

  $$[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$$

- Ассоциативность при умножении на скаляр:

  $$[\alpha \cdot \overline{a}, \overline{b}] = [\overline{a}, \alpha \cdot \overline{b}] = \alpha \cdot [\overline{a}, \overline{b}]$$

- Дистрибутивность по сложению:

  $$[\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{c}] + [\overline{b}, \overline{c}]$$

  Доказывается через скалярное домножение на вектор:

  $$([\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}], \overline{d}) = (\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}) = (\overline{a}, \overline{c}, \overline{d}) + (\overline{b}, \overline{c}, \overline{d}) = \\ = ([\overline{a}, \overline{c}], \overline{d}) + ([\overline{b}, \overline{c}], \overline{d}) = ([\overline{a}, \overline{c}] + [\overline{b}, \overline{c}], \overline{d})$$

  Скалярные произведения равны, правая их часть равна, значит и левая тоже.
- С векторами векторное произведение не ассоциативно, однако выполняется уравнения Якоби:

$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] + [\overline{c}, [\overline{a}, \overline{b}]] + [\overline{b}, [\overline{c}, \overline{a}]] = \overline{0}$$

- Операция с одним вектором дает ноль:

$$[\overline{a}, \overline{a}] = \overline{0}$$

Свойства смешанного произведения

- Модуль смешанного произведения $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ равно объему параллелипипеда, образованного векторами $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$.
- Смешанное произведение это просто операции векторного и скалярного произведения вместе:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c})$$

- При "прокрутке" векторов внутри смешанного произведения его знак не меняется:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}) = (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b})$$

- Однако при обмене двух векторов местами знак смешанного произведения меняется:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})$$

- Если три вектора компланарны (как следствие - линейно зависимые), то смешанное произведение будет равно нулю (ведь тогда у параллелипипеда не будет объема).
- Как следствие, если любые два вектора коллинеарны (тоже линейно зависимые), то смешанное произведение будет равно нулю.
- *Как следствие этого следствия*, если любые два вектора равны, то смешанное произведение будет равно нулю.