Линейное пространство и векторное пространство - одно и то же понятие, просто названия отображают разные свойства: линейное пространство говорит, что объекты внутри подчиняются линейности, а векторное пространство - что эти объекты зовутся векторами.

Множество L называется линейным (векторным) пространством, а его элементы - векторами, если заданы три закона:

- Операция сложения: любым двум элементам x и y из L сопоставляется элемент из L, называемый их *суммой*, обозначается как $x + y$.
- Операция умножения *на число*: любому элементу x из L и числу α сопоставляется элемент из L, называемый произведением x и α, и обозначается как αx (или $\alpha \cdot x$).
- Для этих операций выполняются линейные аксиомы:
  - Коммутативность сложения: $x + y = y + x$
  - Ассоциативность сложения: $(x + y) + z = x + (y + z)$
  - Нулевой элемент $0 \in L$ сложения: $x + 0 = x$
  - Обратный элемент сложения: $x + (-x) = 0$
  - Дистрибутивность умножения относительно векторов: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
  - Дистрибутивность умножения относительно чисел: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
  - Ассоциативность умножения: $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
  - Унитарность умножения: $1 \cdot x = x$

Если мы разрешаем умножать только на вещественные (действительные) числа, то множество будет называться *вещественным линейным пространством*. Если можно умножать и на комплексные, то множество будет *комплексным линейным пространством*.

Примеры

Самый простой пример линейного пространства - то, с чего мы начали изучение АлГема - направленные векторы - стрелочки на плоскости и в пространстве! Эти *геометрические векторы* образуют вещественное линейное пространство.
Вещественные матрицы фиксированного размера ($m \times n$) тоже образуют вещественное линейное пространство, ведь у них есть сложение и умножение, и все 8 линейных аксиом выполняются.
Если мы разрешим умножение матриц на комплексные числа, то это уже будет *комплексное* линейное пространство.
Частными случаями таких пространств есть столбцы и строки размеров n ($1 \times n, n \times 1$).

Вектора - не всегда число-образные структуры. Функции тоже могут являться векторами: например, $C[a, b]$ - множество всех функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$ - является линейным пространством, ведь от умножения функции на число или сложения двух функций их характер непрерывности и определенности не изменится.

Интересный пример линейного пространства: множество $\{0\}$. Можно проверить, что все аксиомы выполняются..) $0 + 0 = 0$, $\alpha 0 = 0$.

Множество всех многочленов с вещественными показателями степени не выше n тоже является линейным пространством:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Однако, множество всех многочленов с вещественными показателями степени равной n ***не является*** линейным пространством! При сложении двух многочленов, степень может понизиться:

$$(5x^2 + 3x^3) - (2x + 3x^3) = -x + 5x^2$$

Множество многочленов с положительными показателями тоже не является линейным пространством, ведь тогда их нельзя умножать на отрицательные числа, что не по аксиомам.

Примеров на самом деле куча, но это одни из тех, с которыми мы уже встречались.

Свойства линейных пространств

- Существует лишь один нулевой вектор, и каждый вектор имеет единственный противоположный. Первая часть доказывается с помощью аксиом 1 и 3, вторая же - с помощью 1, 2 и 3

$$\begin{cases} 0_1 + 0_2 = 0_1 \\ 0_2 + 0_1 = 0_2 \end{cases} \Rightarrow 0_1 = 0_2$$

$$x + (-x_1) = 0, x + (-x_2) = 0 \Rightarrow$$
$$-x_1 = (-x_1) + 0 = (-x_1) + x + (-x_2) = 0 + (-x_2) = -x_2$$

- Если для x существует вектор a, что $x + a = a$, то $x = 0$.

$$0 = a + (-a) = a + x + (-a) = x + a + (-a) = x + 0 = x$$

- Для любого вектора x, $0x = 0$.

$$0x = 0x + x - x = (0+1)x - x = x - x = 0$$

- Для любого вектора x, $(-1)x = -x$.

$$(-1)x + x = (-1+1)x = 0x = 0$$

- Если $\alpha x = 0$, то либо $\alpha = 0$, либо $x = 0$. Если $\alpha = 0$, то по свойству 3 $\alpha x = 0$. Если же $\alpha \neq 0$, то умножением на $1/\alpha$ мы придем к равенству $1x = 0$, и по аксиоме 8, $x = 0$.