Как и с векторным произведением, вычисление через координаты возможно только когда векторы записаны в *ортонормированном базисе*.

Определим три вектора в общей форме, с которыми будем работать:

$$\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$$
$$\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$$
$$\overline{c} = (c_1; c_2; c_3)$$

Как мы знаем, смешанное произведение - это просто комбинация скалярного и векторного произведения вместе:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$$

Тогда, смешанное произведение можно представить как определитель матрицы третьего порядка, где эти векторы записаны как столбцы (или строчки, ведь определитель не меняется, если транспонировать матрицу):

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 =$$

$$= a_1(b_2 c_3 - c_2 b_3) - b_1(a_2 c_3 - c_2 a_3) + c_1(a_2 b_3 - b_2 a_3)$$

Есть два способа доказать, почему это работает, но для них нужно сперва почитать 12. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей. Вычисление площади параллелограмма.

### Первый способ

Сначала получим векторное произведение $[\overline{b}, \overline{c}]$:

$$[\overline{b}, \overline{c}] = (b_2 c_3 - b_3 c_2; b_3 c_1 - b_1 c_3; b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

Как мы знаем из вопроса 8. Скалярное произведение и его свойства. Вычисление скалярного произведения. Нахождение длины вектора и косинуса угла между векторами., скалярное произведение умножается покоординатно:

$$(\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Если перефасовать слагаемые и множители местами, можно увидеть, что получившееся - ровно то же самое, что и с определителем.

### Второй способ

Посчитаем векторное произведение через мнемонический определитель: где во вторую и третью строчку мы записываем векторы $\overline{b}$ и $\overline{c}$, а в первую - орты $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$:

$$[\overline{b}, \overline{c}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}(b_2 c_3 - b_3 c_2) - \overline{j}(b_1 c_3 - b_3 c_1) + \overline{k}(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

А теперь заметим следующее интересное свойство для скалярного произведения: при умножении по-координатно, орты "убираются":

$$((a_1 \overline{i}; a_2 \overline{k}; a_3 \overline{j}), (b_1 \overline{i}; b_2 \overline{k}; b_3 \overline{j})) = a_1 b_1 \cancel{\overline{i}} + a_2 b_2 \cancel{\overline{j}} + a_3 b_3 \cancel{\overline{k}}$$

Поэтому, если посмотреть на результат определителя выше, можно нагло заменить первую строчку на вектор $\overline{a}$, чтобы получить результат смешанного произведения!

$$(\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

**Пример задачи**

Условие: найдите смешанное произведение векторов
$\overline{a}(7;3;1), \overline{b}(-3;8;1), \overline{c}(4;-2;6)$.
Решение:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$7(48+2) - 3(-18-4) + 1(6-32) = 390$$