Условие: найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: собственные векторы оператора - такие векторы, которые не меняются при применении оператора к ним.
Первым делом, находим собственные значения. Для этого нужно решить "характеристическое уравнение":

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

E - единичная матрица соответствующего порядка. Мы ищем λ, удовлетворяющие уравнению.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Разложим определитель по третьему столбику:

$$(1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = 0$$

Раскладывая правую скобку как разницу квадратов:

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Получаем собственные значения $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$.

Чтобы найти собственные векторы для определенного значения, нужно решить систему:

$$A\overline{v} = \lambda\overline{v}$$

То есть для нашей матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

Или же:

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda x \\ -x + 2y = \lambda y \\ x - y + z = \lambda z \end{cases}$$

Решаем системы для каждого значения:
Для $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 2x - y = x \\ -x + 2y = y \\ x - y + z = z \end{cases} \Rightarrow x - y = 0$$

Вектор, что удовлетворяет этому уравнению, имеет "две степени свободы": $x = y$, а z - любое.

$$\overline{v}_1' = (x; x; z)$$

Такой вектор (с несколькими независимыми переменными) мы должны разбить на линейно независимые векторы (похоже на то, как мы считали ФСР). Подставляем в одну переменную единичку, во все остальные нули, и так для каждой переменной:

$$\overline{v}_1 = (1; 1; 0)$$
$$\overline{v}_2 = (0; 0; 1)$$

Для $\lambda = 3$:

$$\begin{cases} 2x - y = 3x \\ -x + 2y = 3y \\ x - y + z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Получается, $x = -y = z$:

$$\overline{v}_3 = (1; -1; 1)$$

Ответ:
Собственные числа: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$
Собственные векторы:

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Условие: найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение: считаем определитель для собственных значений, раскладываем по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1^2) =$$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = (3-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} 3x = \lambda x \\ x + 2y - z = \lambda y \\ x - y + 2z = \lambda z \end{cases}$$

Для $\lambda = 3$:

$$\begin{cases} 3x = 3x \\ x + 2y - z = 3y \Rightarrow \{x = z + y \\ x - y + 2z = 3z \end{cases}$$

Получаем вектор: $(y + z, y, z)$. Разбиваем его на два получаем вектора:

$v_1 = (1, 1, 0)$
$v_2 = (1, 0, 1)$

Для $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 3x = x \\ x + 2y - z = y \\ x - y + 2z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Получаем вектор:
$v_3 = (0, 1, 1)$

Ответ: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1.$
$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1)$

Условие: найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение: считаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5 - \lambda)((4 - \lambda)^2 - 1) = (5 - \lambda)^2(3 - \lambda) = 0$$

Получили корни $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 5.$
Считаем:

$$\begin{cases} 5x = \lambda x \\ x + 4y - z = \lambda y \\ x - y + 4z = \lambda z \end{cases}$$

Для $\lambda = 3$:

$$\begin{cases} 5x = 3x \\ x + 4y - z = 3y \\ x - y + 4z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Получается решением будет вектор $(0; y; y)$.
$v_1 = (0; 1; 1)$.

Для $\lambda = 5$:

$$\begin{cases} 5x = 5x \\ x + 4y - z = 5y \Rightarrow x = y + z \\ x - y + 4z = 5z \end{cases}$$

Решением будет вектор $(y + z; y; z)$.
Разбиваем на два:
$v_2 = (1; 1; 0)$
$v_3 = (1; 0; 1)$

Ответ: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 5$
$v_1 = (0; 1; 1), v_2 = (1; 1; 0), v_3 = (1; 0; 1)$

Условие: найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение: считаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & -4 & -2 \\ -2 & 5 - \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Считаем по третьей строке:

$$(9-\lambda)((7-\lambda)(5-\lambda)-8)=0$$

Упростим:

$$(7-\lambda)(5-\lambda)-8=35-12\lambda+\lambda^2-8=$$
$$=\lambda^2-12\lambda+27=(9-\lambda)(3-\lambda)$$

Возвращаемся:

$$(9-\lambda)^2(3-\lambda)=0$$

Собственные значения: $\lambda=9$ и $\lambda=3$.
Считаем

$$\begin{cases}7x-4y-2z=\lambda x\\-2x+5y-2z=\lambda y\\9z=\lambda z\end{cases}$$

Для $\lambda=9$:

$$\begin{cases}7x-4y-2z=9x\\-2x+5y-2z=9y\Rightarrow x=-2y-z\\9z=9z\end{cases}$$

Решением будет вектор $(-2y-z;y;z)$
Разбиваем:
$v_1=(-2;1;0)$
$v_2=(-1;0;1)$

Для $\lambda=3$:

$$\begin{cases}7x-4y-2z=3x\\-2x+5y-2z=3y\Rightarrow\\9z=3z\end{cases}\begin{cases}z=0\\x-y=0\Rightarrow x=y\\y-x=0\end{cases}$$

Решение: $(x;x;0)$
$v_3=(1;1;0)$

Ответ: $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 3$
$v_1 = (-2; 1; 0), v_2 = (-1; 0; 1), v_3 = (1; 1; 0)$