Прямая в пространстве по своей сути не сильно отличается от прямой на плоскости.

Общее уравнение

Общими уравнениями мы называли уравнения вида $Ax + By + C = 0$ или $Ax + By + Cz + D = 0$. Но вот не задача - первое задает прямую на плоскости, а второе - плоскость в пространстве. Чтобы добиться прямой в пространстве, нужно пересечь две плоскости:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Такая система называется общими уравнениями для прямой в пространстве.
Причем чтобы пересекаться, плоскости не должны быть параллельны. Для этого их нормали не должны быть коллиеарны. А для этого проверим векторное произведение их нормалей: (вспоминаем билет 11. Свойства векторного и смешанного произведений.)

$$[(A_1; B_1; C_1), (A_2; B_2; C_2)] \neq 0$$

Каноническое уравнение

Существует способ записать уравнение прямой основываясь лишь на направляющем векторе $\overline{p}(A; B; C)$ и точке $N(x_0; y_0; z_0)$, через которую проходит эта прямая. Тогда, прямую можно записать в виде:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

Такая цепочка уравнений называется каноническими уравнениями прямой. В случаях, когда в знаменателе стоит ноль, считается, что в числителе так же ноль: ноль в знаменателе означает ноль соответствующей координаты направляющего вектора. Если там ноль, то на всей прямой эта координата прямой не меняется.

Откуда получаются такие равенства? Представляем вектор $\overline{NX}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$. Его начало - точка, что принадлежит прямой (по условию). Если этот вектор будет коллинеарен вектору $\overline{n}$, то весь вектор будет лежать на этой прямой. Для этого координаты вектора должны быть пропорциональны, отсюда и получается деление.

Как перейти к общему уравнению? Разбиваем нашу цепочку уравнений на два равенства, составляем плоскости в общем виде и записываем в систему.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} \\ \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Bx - Ay + (Ay_0 - Bx_0) = 0 \\ Cy - Bz + (Bz_0 - Cy_0) = 0 \end{cases}$$

Первая плоскость будет параллельна оси Oz (ибо в уравнении не учавствует z), а вторая - параллельна оси Ox (по той же причине). Пересекая две плоскости мы получаем прямую в пространстве - общее уравнение прямой.

Для того, чтобы перевести общее уравнение прямой в плоскости в каноническое уравнение, нужно выбрать точку, принадлежащую прямой и направляющий вектор.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Если у нас образовывается прямая, то на ней существует точка, у которой координата $x = 0$ (при желании, можно обнулить и другую координату). Обнуляем мы ее чисто чтобы облегчить наши вычисления.
Обнулим ее в нашей системе, и получим систему из двух пересекающихся прямых.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Решаем систему уравнений из двух неизвестных и находим координаты y и z.
Получили точку, принадлежащую прямой: $N = (0; y_0; z_0)$.

Теперь нужно взять направляющую прямую. Направляющую прямую мы можем получить из векторного произведения двух нормальных к плоскостям векторов. Почему так? Наш итоговый вектор будет перпендикулярен нормали первой плоскости, значит будет параллелен самой плоскости (или же лежать на ней). Точно так же и со второй плоскостью. А если этот вектор лежит сразу в двух плоскостях, то он будет лежать на их пересечении!
Возьмем векторное произведение нормалей:

$$[(A_1; B_1; C_1), (A_2; B_2; C_2)] = \overline{p}$$

И это все, что нам нужно, чтобы составить каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - N_x}{p_x} = \frac{y - N_y}{p_y} = \frac{z - N_z}{p_z}$$

Параметрическое уравнение

Такое уравнение почти идентично каноническому уравнению.
Обозначим за $N(x_0; y_0; z_0)$ точку, через которую будет проходить прямая, и $\overline{p}(A; B; C)$ - направляющий вектор. Тогда прямую можно записать в векторном виде как:

$$(x; y; z) = N + \overline{p} \cdot t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$$

Где t - действительное число, произвольный параметр. По сути, мы указываем точку начала прямой и затем ее сдвигаем на t по направлению $\overline{p}$. Таким образом мы и получаем прямую, если параметр t пробежит все возможные значения.

Почему оно идентично каноническому уравнению? Давайте из каждого уравнения системы выразим t:

$$\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - x_0}{A} = t \\ \frac{y - y_0}{B} = t \\ \frac{z - z_0}{C} = t \end{cases}$$

А раз все эти выражения равны t, мы можем их приравнять:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

И о боже что это - это же и есть каноническое уравнение прямой!
Точно так же и в обратную сторону: приравниваем все уравнения к t и записываем в систему:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}=t$$

$$\begin{cases}\frac{x-x_0}{A}=t\\ \frac{y-y_0}{B}=t\\ \frac{z-z_0}{C}=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x_0+At\\ y=y_0+Bt\\ z=z_0+Ct\end{cases}$$

Так как параметрическое уравнение прямой почти равно каноническому, перевод в общий вид я писать не буду (см. перевод канонического в общий)

Пример задачи

Условие: найдите уравнение прямой, проходящей через точки $A(5;3;1)$ и $B(7;1;3)$.
Решение: проще все это сделать с помощью канонического вида. Найдем направляющий вектор - это просто будет вектор $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}=B-A=(7-5;1-3;3-1)=(2;-2;2)$$

Теперь выбираем любую точку (A и B обе сработают) и записываем равенства:

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{2}$$

Условие: запишите следующую прямую, заданную в каноническом виде, в общем виде.

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+3}{3}$$

Решение: разбиваем на две системы:

$$\begin{cases}\frac{x-2}{5}=\frac{y-7}{1}\\ \frac{y-7}{1}=\frac{z+3}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2-5(y-7)=0\\ 3(y-7)-(z+3)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-5y+33=0\\ 3y-z-24=0\end{cases}$$

Условие: запишите следующую прямую, заданную в общем виде, в каноническом виде.

$$\begin{cases}3x-y+z-12=0\\ x+2y-2z-16=0\end{cases}$$

Решение: зануляем x и решаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}-y+z=12\\ 2y-2z=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z-y=12\\ y-z=16\end{cases}\Rightarrow\varnothing$$

Получается, не существует такой точки на этой прямой, где $x=0$.
Попробуем занулить другую точку, $y=0$:

$$\begin{cases}3x+z=12\\ x-2z=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7z=-36\\ x-2z=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=40/7\\ z=-36/7\end{cases}$$

Значит точка $(40/7;0;-36/7)$ принадлежит прямой.
Теперь найдем векторное произведение нормалей:

$$[(3;-1;1),(1;2;-2)]=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\ 3&-1&1\\ 1&2&-2\end{vmatrix}=$$

$$\overline{i}(2-2)-\overline{j}(-6-1)+\overline{k}(6+1)=(0;7;7)$$

Составляем каноническое уравнение:

$$\frac{x-40/7}{0}=\frac{y-0}{7}=\frac{z+36/7}{7}$$

Получился ноль - заодно и покажу, как это выглядит в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=40/7 \\ y=7t \\ z=-36/7+7t \end{cases}$$

Как видите, прямая зафиксирована по координате x, посему мы и не смогли решить первую систему.