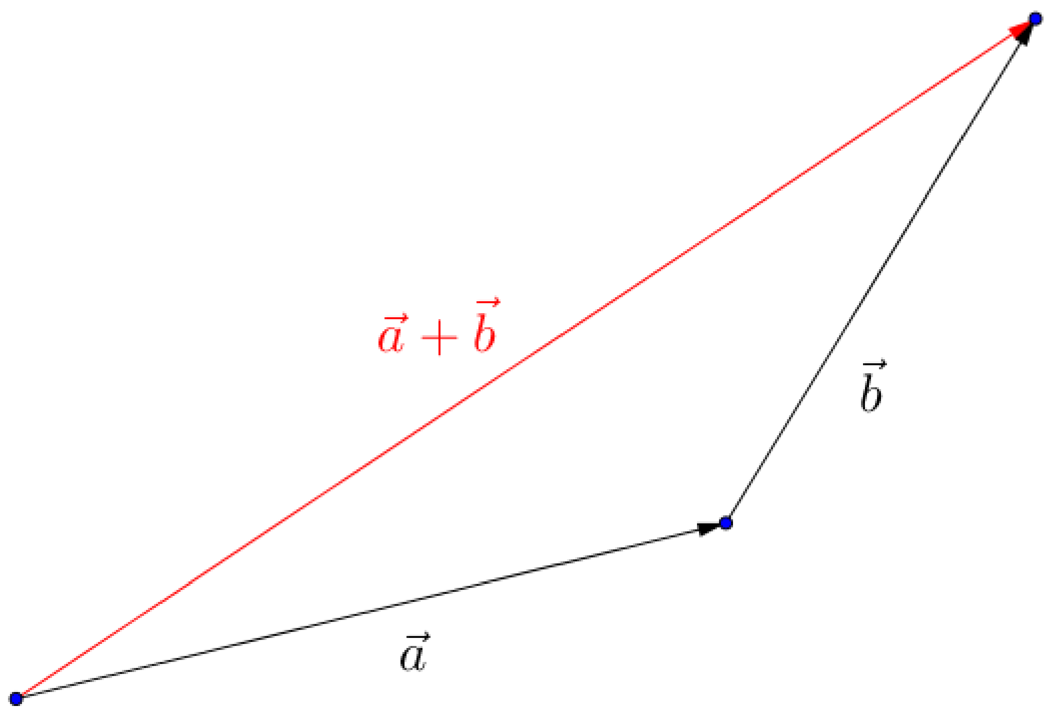
Что такое линейные операции? Это умножение элемента на скаляр и сложение двух элементов вместе. Подобные операции можно было уже много раз увидеть в курсе матанализа.

Сложение векторов

Сложение векторов - линейная операция над двумя и более векторами. Складывая два вектора мы получим новый вектор, началом которого является начало одного из векторов операции, а концом - конец вектора, равного другому, начало которого приведено в конец первого вектора.



Вектора складываются покоординатно. Пусть вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ записаны в некотором базисе, тогда:
$\overline{a}(a_1; a_2; \ldots), \overline{b}(b_1; b_2; \ldots)$
$\overline{a}+\overline{b}=(a_1+b_1; a_2+b_2; \ldots)$
"Доказательство" заключается при разложении векторов по базису:

$$\overline{a}+\overline{b}=\sum_{i=1}^{n} a_i e_i+\sum_{i=1}^{n} b_i e_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) e_i$$

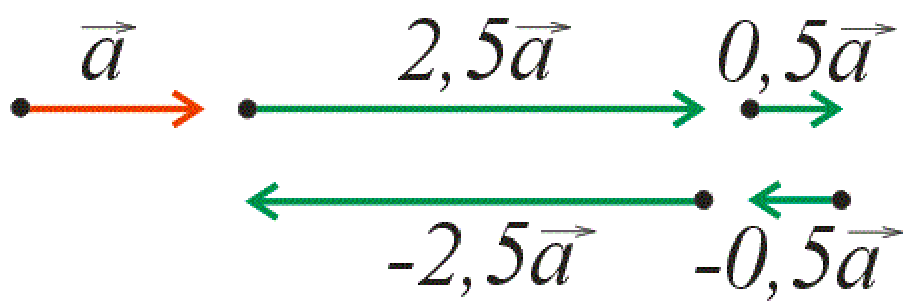
Сумма трёх векторов - результат сложения двух векторов и оставшегося. Аналогично, операция распространяется на любое количество векторов.

Свойства сложения:

- Сложение коммутативно: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$
- Сложение ассоциативно: $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$
- Существование нейтрального элемента: для сложения, это нулевой вектор: $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$
- Существование обратного элемента: для вектора $\overline{a}$ существует вектор $-\overline{a}$, что в сумме дает нулевой вектор: $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$

Умножение вектора на скаляр

Произведение вектора на число - линейная операция над вектором, результатом которой является вектор, коллинеарный исходному.
Длина полученного вектора будет равна произведению длины на ***модуль*** числового множителя (длина всегда неотрицательна).
Сонаправленность с исходным вектором зависит от знака числового множителя (если число положительно - получаем сонаправленный исходному вектор, если отрицательно - противонаправленный, если 0 - нулевой вектор).



В координатом разложении произведение выглядит следующим образом:
$\overline{a}(a_1;a_2;\ldots), C\in\mathbb{R}$
$C\cdot\overline{a}=(Ca_1;Ca_2;\ldots)$
"Доказательство" следует из дистрибутивности суммы:

$$C \cdot \overline{a} = C \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (Ca_i) e_i$$

Свойства умножения:

- Умножение (на скаляр) ассоциативно: $n \cdot (k \cdot \overline{a}) = (n \cdot k) \cdot \overline{a} = k \cdot (n \cdot \overline{a})$
- Умножение дистрибутивно относительно чисел: $\overline{n}(a + b) = \overline{n}a + \overline{n}b$
- Умножение дистрибутивно относительно векторов: $n(\overline{a} + \overline{b}) = n\overline{a} + n\overline{b}$
- Существование нейтрального элемента - единицы: $\overline{a} \cdot 1 = \overline{a}$
- Существование нулевого элемента - ноль. Тогда при умножении получается нулевой вектор: $\overline{a} \cdot 0 = \overline{0}$

Условие коллинеарности векторов через умножение

Если вектор $\overline{a}$ коллинеарен вектору $\overline{b}$, то найдется такое число n, что $n \cdot \overline{a} = \overline{b}$.

Доказательство:

- при $\overline{b} = \overline{0}$, n будет равно нулю, как следует из свойства существоваиня нулевого элемента.
- при $\overline{a} = \overline{0}$ подойдет любое число n, ведь нулевой вектор коллинеарен любому вектору.
- Если $\overline{b}$ сонаправлен $\overline{a}$, рассмотрим $n = |\overline{b}|/|\overline{a}|$:
  его произведение на $\overline{a}$ даёт вектор, сонаправленный $\overline{a}$, т.к. $n > 0$ (а значит и $\overline{b}$) и равный по длине $\overline{b}$ ($|n| \cdot |\overline{a}| = |\overline{b}|/|\overline{a}| \cdot |\overline{a}| = |\overline{b}|$), что по определению есть вектор, равный $\overline{b}$.
  Если $\overline{b}$ противонаправлен $\overline{a}$, рассмотрим $n = -|\overline{b}|/|\overline{a}|$:
  его произведение на $\overline{a}$ даёт вектор, противонаправленный $\overline{a}$, т.к. $n < 0$ (а значит сонаправленный вектору $\overline{b}$) и равный по длине $\overline{b}$ (

$|n| \cdot |\overline{a}| = |\overline{b}|/|\overline{a}| \cdot |\overline{a}| = |\overline{b}|$), что по определению есть вектор, равный $\overline{b}$.

Пример задачи

Условие: при заданных векторах $\overline{a}(5;3), \overline{b}(8;-2), \overline{c}(-2;4)$, решите уравнение относительно вектора $\overline{x}$:

$$4\overline{a} - 7\overline{b} + 2\overline{x} = -\overline{c}$$

Решение:

$$2\overline{x} = 7\overline{b} - 4\overline{a} - \overline{c}$$
$$2\overline{x} = 7(8;-2) - 4(5;3) - (-2;4)$$
$$2\overline{x} = (56;-14) - (20;12) - (-2;4)$$
$$2\overline{x} = (56 - 20 + 2; -14 - 12 - 4)$$
$$\overline{x} = \frac{(38;-30)}{2}$$
$$\overline{x} = (19;-15)$$