Обратная матрица - это такая матрица, что при умножении обычной на нее получится единичная матрица. Обратная матрица для матрицы A обозначается как A^{-1}.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Проведите параллели с обычными числами: для любого числа (кроме нуля) существует ему обратное, такое что при их умножении получается единица:

$$5^{-1}5 = \frac{5}{5} = 1$$

Обратные матрицы по определению коммутативны с оригинальной на умножении, поэтому существуют только квадратные матрицы (и $A^{-1}A$, и AA^{-1} должны давать матрицу одинакого размера, что возможно только когда перемножаемые матрицы одинакого размера).
Однако, существуют производные понятия "левой обратной матрицы" $(A^LA = E)$ и "правой обратной матрицы" $(AA^R = E)$, для которых условие на квадратность уже не обязательно, но такие мы рассматривать не будем. Если матрица одновременно левая и правая обратная, она считается обратной в целом.

Существование и единственность

- Если A^{-1} существует, то такая матрица единственна. Это свойство не применяется для "левой" и "правой" обратных матриц.
  Допустим, что это не так, и существует две матрицы X_1 и X_2, обратные для A, то есть $X_1A = AX_1 = E$ и $X_2A = AX_2 = E$.
  Тогда,

  $$X_1 = X_1E = X_1(AX_2) = (X_1A)X_2 = EX_2 = X_2$$

  А значит, эти две матрицы равны.
- $(A^{-1})^{-1} = A$. Естественно, для обратной матрицы, обратной будет оригинальная.

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = E = AA^{-1}$$

- Обратная матрица A^{-1} существует только когда $\det A \neq 0$.
  Геометрически можно понять следующим образом: если A описывает какую-то трансформацию пространства, то A^{-1} выполняет трансформацию, которая восстанавливает пространство в изначальное состояние. Если $\det A = 0$, то эта трансформация сожмет пространство в меньшее измерение - множество точек будут спроектированны в одну. Для этого обратной матрице потребовалось бы разбить точку сразу в целое множество изначальных точек, а этого умножение добиться не может (тогда получится не функция, ведь одна точка будет соответствовать целому множеству точек).
  Для доказательства требуется теория из следующего билета 44. Элементарные преобразования. Элементарные матрицы.
  Если матрица A вырождена, то любое произведение AB тоже будет вырождено, а единичная матрица не является вырожденой. Из этого следует, что для вырожденной матрицы не существует обратной.
  Если матрица A не вырождена, то с помощью элементарных матриц ее возможно привести к единичной матрице:

$$T_M \dots T_2 T_1 A = E$$

  Произведение всех элементарных матриц $T_M \dots T_2 T_1 = X$ и будет являться обратной матрицой к A. $XA = E$. Более того, раз X тоже невырожденная, и из прошлого свойства следует, что выполняется $AX = E$ в том числе.

Свойства обратной матрицы

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Это свойство похоже на свойство с транспонированием. Если правая часть равенства тоже является обратной для произведения AB, то должна точно так же получиться единичная матрица.

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E$$

- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Неважно, какую матрицу мы транспонируем. Из свойства произведения транспонирования, $(AB)^T = B^T A^T$, получаем

  $$(AA^{-1}) = E$$
  $$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = E^T = E$$

  Получается, как и $(A^T)^{-1} A^T = E$ (по определению обратной матрицы), так и $(A^{-1})^T A^T = E$. Из единственности следует наше свойство.
- $(kA)^{-1} = k^{-1} A^{-1}$, вытекает из свойства обратного элемента для чисел.

  $$(kA)^{-1}(kA) = E$$
  $$kAk^{-1}A^{-1} = kk^{-1}E = \frac{k}{k}E = E$$

Формулы для элементов обратной матрицы

Есть довольно естественный способ получить обратную матрицу: путем элементарных преобразований.
Изначально мы определили обратную матрицу, как $A^{-1}A = E$. Но раз обратная матрица не является вырожденной, ее можно представить в виде произведения элементарных матриц:

$$A^{-1} = T_M \dots T_1$$
$$T_M \dots T_1 A = E$$

Но ведь это тоже самое, что и $A^{-1} = T_M \dots T_1 E$.

Получается, что те же преобразования, которые нужны, чтобы превратить матрицу A в единичную, можно применить к единичной матрице, чтобы получить обратную!
Оформляется это с помощью записывания двух матриц рядом, получая матрицу размером $n \times 2n$. Первая матрица будет исходная, вторая рядом - единичная.

$$D = (A|E) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Путем элементарных преобразований, меняем левую часть этой двойной матрицы так, чтобы она стала равной единичной матрице:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} = (E|A^{-1})$$

Забираем матрицу с правой части - это и будет обратная матрица.

Однако формулы для элементов обратной матрицы скорее всего подразумевают четкие уравнения для достижения каждого элемента. Поговорим и о таких. Уравнения, на удивление, выводятся довольно адекватно!

Обратная матрица $X = A^{-1}$ служит решением матричного уравнения $AX = E$. Значит, что для j-того столбика для обратной матрицы будет выполняться:

$$Ax_j = e_j \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{jj} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Если мы запишем это уравнение в виде СЛАУ, получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \ldots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \ldots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \ldots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \ldots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \ldots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases}$$

Решаем с помощью метода Крамера. Каждый x_{ij} будет равен

$$x_{ij} = \frac{\det A_i}{\det A}$$

Матрица A_i, получается заменой i-того столбика матрицы A на вектор e_j. Примечательна такая замена тем, что по этому столбику теперь можно разложить определитель, и получить выражение лишь из одного минора!

$$\det A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & 0 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{j(i-1)} & 1 & a_{j(i+1)} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & 0 & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} \det \bar{A}_i^j$$

Это значение - минор со знаком с "шахматной доски" - называется *алгебраическим дополнением элемента a_{ji}!* Сейчас мы обозначим это значение за A_i^j.
Соответственно x_{ij} будет равен

$$x_{ij} = \frac{A_i^j}{\det A}$$

Теперь, зная формулу индидуального элемента обратной матрицы, мы можем составить всю матрицу с помощью алгебраических дополнений. $\det A$ мы выносим за скобки матрицы как постоянный множитель, не зависящий от позиции элемента, и транспонируем матрицу (ибо сейчас элементу ij соответствует алгебраическое дополнение ji):

$$A^{-1} = X = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix}^T$$

Таким образом и составляется обратная матрица.

Пример задачи

Условие: найдите матрицу, обратную данной.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение: первым делом, нам нужен определитель этой матрицы. Разложим по последнему столбику:

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(12+3) - (-12-1) + 5(-12+4) = 3$$

Теперь составляем матрицу миноров:

$$M = \begin{pmatrix} 15-3 & 20+1 & 12+3 \\ -5-6 & -20+2 & -12-1 \\ -1-6 & -4-8 & -12+4 \end{pmatrix}$$

Чтобы превратить матрицу миноров в матрицу алгебраических дополнений, умножаем на знаки в соответствии с шахматной доской (меняем знаки на "черных клетках"). В конце транспонируем и делим на определитель оригинальной матрицы, чтобы получить обратную матрицу.

$$A' = \begin{pmatrix} 12 & -21 & 15 \\ 11 & -18 & 13 \\ -7 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(A')^T}{\det A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & 11 & -7 \\ -21 & -18 & 12 \\ 15 & 13 & -8 \end{pmatrix}$$