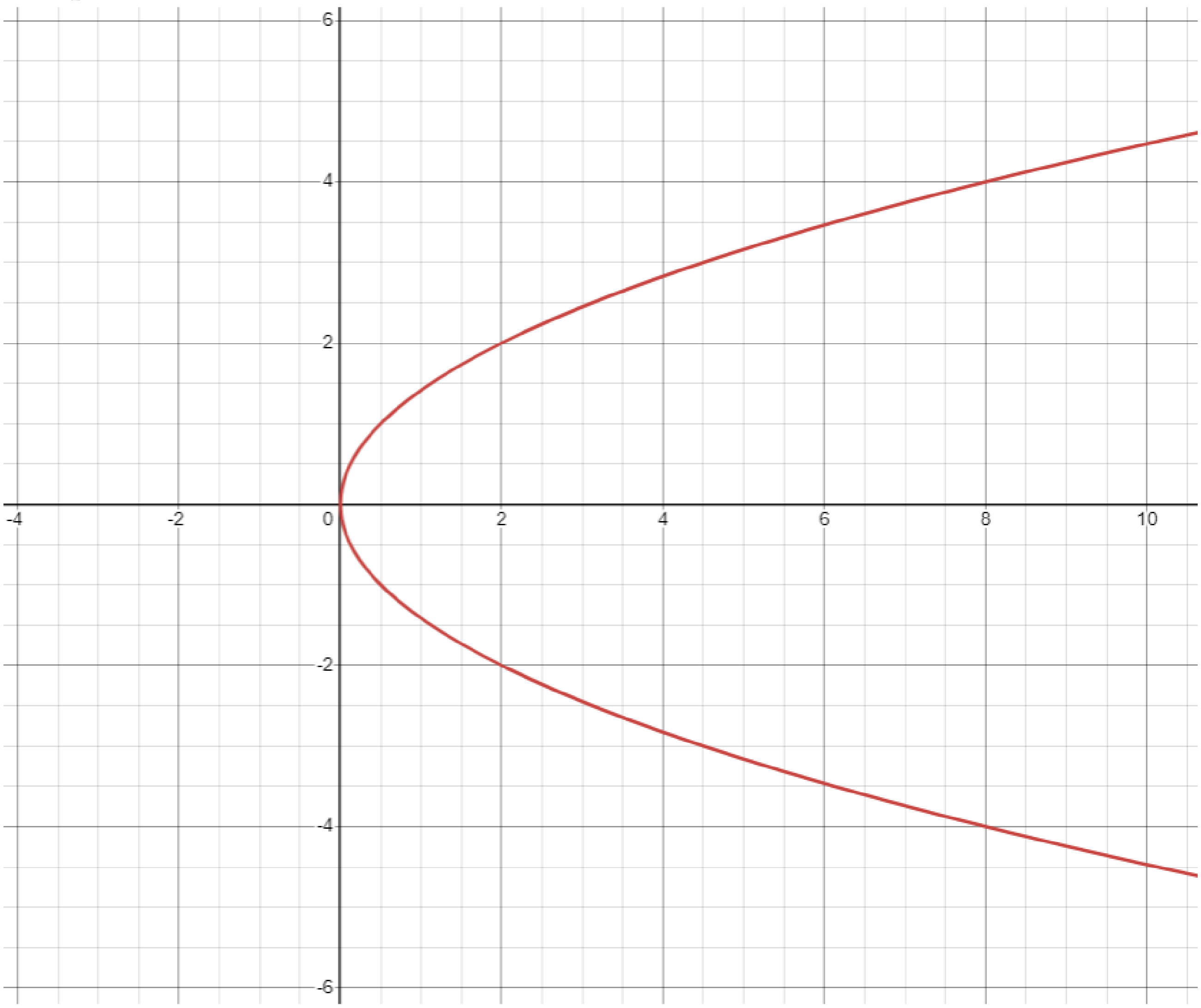
Со школьного курса все помнят параболу как линию, задаваемую уравнением $y = ax^2$. АлГем же приносит нам новое уравнение для нее, которое (по аналогии с предыдущими билетами) называется *каноническим уравнением параболы*:

$$y^2 = 2px$$

Парабола, как эллипс и гипербола, тоже является линией второго порядка, ведь y стоит во второй степени.

Для $p = 1$, парабола выглядит так:

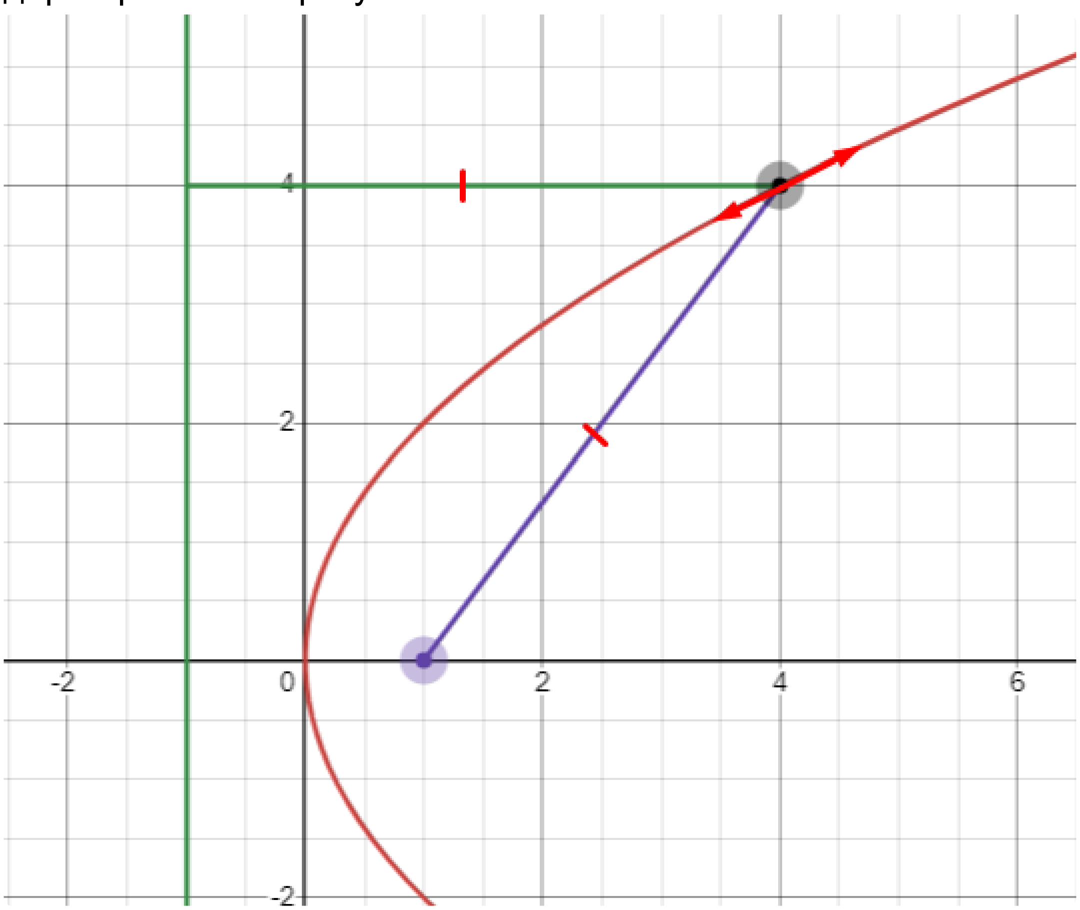


В отличие от всеми нами любимой параболы, эта упала вправо. Это в целом связано с тем, что x и y поменялись местами.

У параболы есть один! фокус, который находится внутри параболы, лежит на оси Ox (если парабола в каноническом виде), и имеет координаты $(\frac{p}{2};0)$.

Вместе с фокусом у параболы определяют директрису. Это вертикальная прямая, задаваемая уравнением $x=-\frac{p}{2}$.
Про директрисы было написано в билете 22. Директрисы эллипса. Критерий принадлежности точки к эллипсу., но я напишу еще раз тут:
Директриса - это такая прямая, что отношение расстояния любой точки на параболе до фокуса к расстоянию этой же точки до этой прямой равно эксцентриситету.
Вершиной параболы считают точку, ближайшую к директрисе, то есть в каноническом виде это будет точка $(0,0)$.

Директриса и фокус однозначно задают параболу. Параболу можно определить как ГМТ (Геометрическое Место Точек), равноудаленных от директрисы и от фокуса.



Из этого следует, что эксцентриситет параболы всегда равен единице.

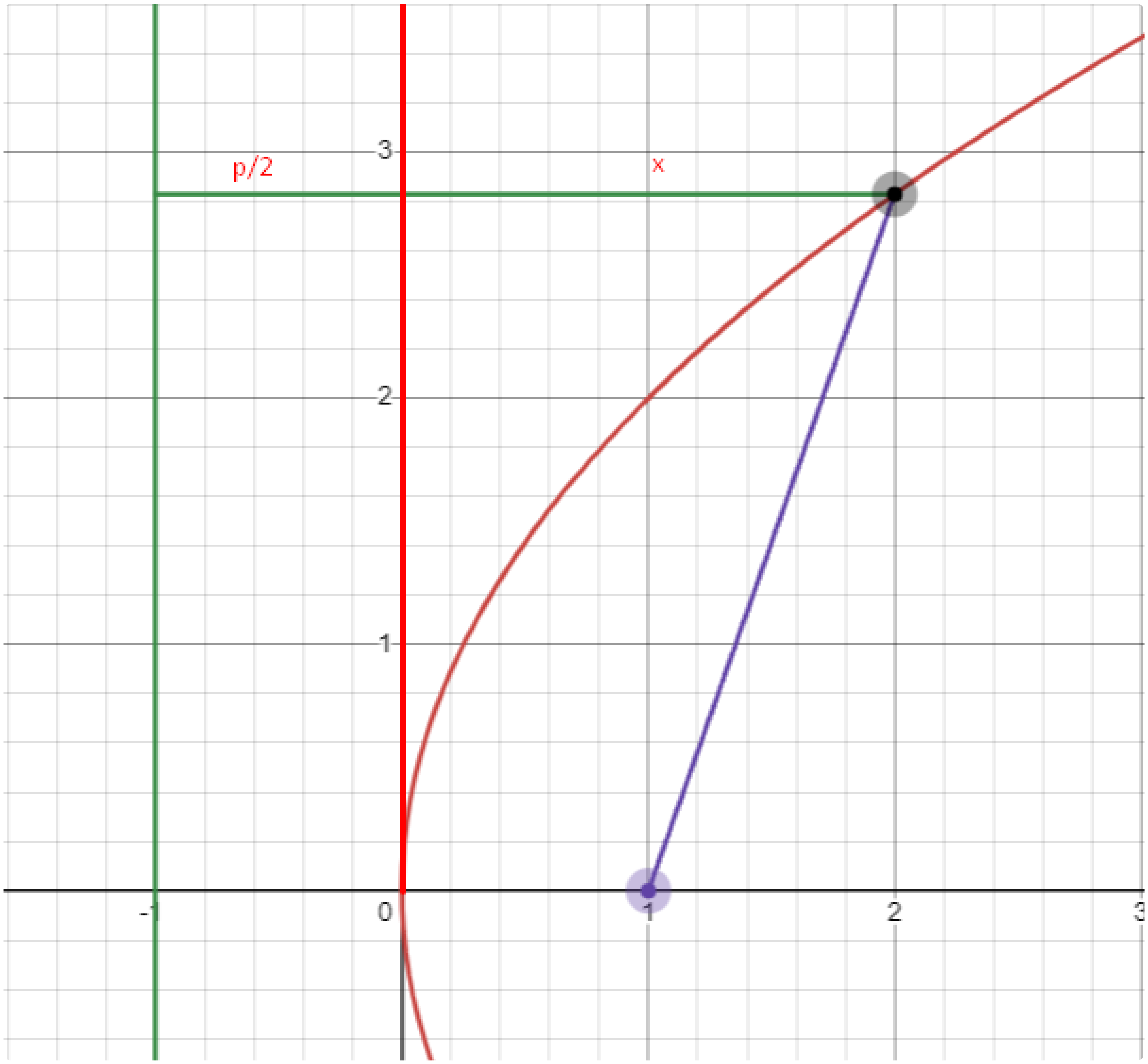
$$\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$$

Теперь вы знаете, что такое теорема о параболе) Но к ней вернемся чуть позже, и докажем это более строго. Сейчас я ее упоминаю, чтобы у вас появилось геометрическое понимание этой теоремы.

Но перед тем, как это сделаем, разберем расстояние от точки на параболе до директрисы. Это расстояние равно:

$$d = x + \frac{p}{2}$$

Почему так? Да все просто - расстояние до прямой есть длина перпендикуляра от точки до этой прямой. Мысленно проведем вертикальную прямую в начале координат $x = 0$. Расстояние от этой прямой до директрисы будет равно $p/2$, просто потому что уравнение прямой директрисы: $x = -\frac{p}{2}$. Расстояние от точки до этой вертикальной прямой будет равно ее x координате, в силу того что это - декартова прямоугольная система, а прямая находится в нуле и вертикальна.



Отсюда легко заметить, что если сложить эти два отрезка, мы и получим расстояние от точки до директрисы.

Теперь рассмотрим расстояние от точки до фокуса: рассматриваем квадрат расстояния от точки на параболе до фокуса параболы.

$$r^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

Раз точка лежит на параболе, выполняется каноническое уравнение - подставляем y^2 оттуда, сюда.

$$r^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px$$

Раскрываем...

$$r^2 = x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2px = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow r = x + \frac{p}{2}$$

Последний переход конечно же в силу $x \geq 0, p > 0$.

Теорема о параболе

Вернемся к ней. Как я и говорил, теорема о параболе гласит, что парабола - это ГМТ равноудаленных от фокуса и директрисы. Другими словами, чтобы точка M лежала на параболе, необходимо и достаточно (⇔), чтобы она была одниаково удалена от фокуса и директрисы этой параболы.
Докажем:
(лежит на параболе $\Rightarrow$ равноудалена): это, в принципе, уже было доказано. Расстояние от точки до директрисы равно $x + \frac{p}{2}$. Точно такое же расстояние будет между точкой и директрисой.

(равноудалена $\Rightarrow$ лежит на параболе): если точка M равноудалена от директрисы и фокуса, то выполняется:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

(Слева до фокуса, справа до директрисы). Теперь возводим в квадрат, двигаем слагаемые, и получаем каноническое уравнение:

$$\cancel{x^2} - px + \cancel{\left(\frac{p}{2}\right)^2} + y^2 = \cancel{x^2} + px + \cancel{\left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$y^2 = 2px$$

На этом доказательство и заканчивается.

Пример задачи

Условие: найдите каноническое уравнение параболы, которой принадлежит точка $M(3;9)$.
Решение: подставим координаты точки в уравнение параболы и найдем p:

$$y^2 = 2px \Rightarrow 81 = 2p \cdot 3 \Rightarrow p = \frac{27}{2}$$

Ответ: $y^2 = 27x$

Условие: зная директрису $x = -2$, восстановите каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат.
Решение: У параболы эксцентриситет равен единице, а значит что расстояние от фокуса до точки будет равно расстоянию от директрисы до точки. Самая простая точка, что мы можем взять - вершина параболы: $(0;0)$. Если расстояние от нее до директрисы $= 2$, то и до фокуса будет такое же расстояние. Следовательно, фокус находится в точке $F(2;0)$. Но мы так же знаем, что фокус имеет координаты $(\frac{p}{2};0)$. Следовательно,

$$\frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4$$

Составляем уравнение:

$$y^2 = 2px \to y^2 = 8x$$

Можно было решить и без нахождения фокуса, просто задача очень короткая, и я решил показать еще хоть чутка больше.