Ранг

Существует много разных видов матрицы квадратичной формы - но что не меняется, так это ранг матрицы. В любом базисе, сохраняется ранг матрицы квадратичной формы - этот ранг и называется *рангом квадратичной формы*. Покажем это:
Пусть есть две матрицы B и B' квадратичной формы в разных базисах.
Они связаны матрицей перехода: $B' = S^T BS$, причем матрица перехода S невырожденная по определению.
Тогда, так как умножение матрицы на невырожденную не меняет ее ранга:

$$\operatorname{Rg} B' = \operatorname{Rg} S^T BS = \operatorname{Rg} BS = \operatorname{Rg} B$$

Из этого есть следствие: раз ранг везде одинаков, и всегда существует канонический вид квадратичной формы, то *ранг можно приравнять количеству ненулевых элементов в канонической форме квадратичной формы*.

Индекс

Дадим определение положительно/отрицательно определенных квадратичных форм.
Если квадратичная форма k на подпространстве L' пространства L является положительной для любого $x \in L' : k(x) > 0$, квадратичная форма называется *положительно определенной* на подпространстве L'.
Если же для любого $x \in L' : k(x) < 0$, то форма называется *отрицательно определенной*.

Дополнительные определения: Если $x \in L' : K(x) \geq 0$, то квадратичная форма называется *положительно **полу**определенной*. Если же наоборот $x \in L' : K(x) \leq 0$, то *отрицательно **полу**определенной*.

Скажем, квадратичная форма k положительно определена на подпространстве L' размерности $\dim L'$. Разумеется, тогда можно взять подпространство L'' этого подпространства L' с меньшей размерностью

$\dim L'' \leq \dim L'$, и на нем квадратичная форма точно так же положительно определена.

Из этого следует *определение индекса*:
Число $\dim L^-$ называется *отрицательным индексом* квадратичной формы, где L^- - подпространство максимальной размерности среди всех подпространств, где квадратичная форма отрицательно определена.
Аналогично, $\dim L^+$ называется *положительным индексом* квадратичной формы, где L^+ тоже самое, но для положительно определенной квадратичной формы.

Точно так же, как и с рангом, индекс является свойством квадратичной формы, и не меняется с изменением базиса - это называется закон инерции квадратичных форм.

Рассмотрим два базиса e и e', и запишем вектор x в них.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$$

Тогда квадратичная форма k в диагональном виде считается как

$$k(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \beta'_i x_i'^2$$

Для простоты скажем, что пусть первые p элементов β_i положительны, а остальные отрицательны/нулевые, и первые s элементов β'_i положительны, а остальные отрицательны/нулевые. Наша цель в доказательстве: показать, что $p = s$.
Перепишем квадратичную форму:

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i x_i^2 + \sum_{i=p+1}^{n} \beta_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{s} \beta'_i x_i'^2 + \sum_{i=s+1}^{n} \beta'_i x_i'^2$$

Перепишем так, чтобы в левой и правой частях равенства были только неотрицательные слагаемые:

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{n} \beta_i' x_i'^2 = \sum_{i=1}^{s} \beta_i' x_i'^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \beta_i x_i^2$$

Допустим, $p < s$. Возьмем такой ненулевой вектор x, у которого $x_i = 0$ для $i = 1, \ldots, p$, и $x_i' = 0$ для $i = s+1, \ldots, n$. Тогда левая часть равенства обратится в ноль.
Таким образом, мы задаем $p + n - s$ условий на вектор x вида "$x_i = 0$". Но $p + n - s < n$ (ведь $p - s < 0$ по предположению), а система уравнений в n-мерном пространстве с $p + n - s < n$ имеет ненулевое решение на x.

Получается существует такой ненулевой x, где левая часть равенства будет равна нулю, значит и правая должна тоже быть равна нулю - а она содержит только неотрицательные слагаемые, поэтому чтобы она была равна нулю, каждое слагаемое должно быть нулевым.
Мы перегруппировали элементы β так, чтобы β_i при $i > s$ были неположительны - то есть, возможно равны нулю. Нас интересуют другие коэффициенты: положительные β_i' при $i \leq s$. Но единственный способ занулить $\beta_i' {x'}_i^2$ - чтобы ${x'}_i^2 = 0 \Rightarrow x_i' = 0$.

Но если $x_i' = 0$ при $i \leq s$, и по выбору вектора x, $x_i' = 0$ при $i = s+1, \ldots, n$, то $x_i' = 0$ вообще для любого $i = 1, \ldots, n$! Получается, раз все координаты нулевые в каком-то базисе, то и сам вектор x - нулевой. Противоречие, а значит, $p = s$.

Это доказывает, что положительные индексы совпадают. Аналогично доказывается и для отрицательных индексов.

Метод Лагранжа - метод выделения квадратов

Если вы еще помните, то метод Лагранжа упоминался в томе с геометрией - в билете #28 с заменой системы координат.
Пусть записана квадратичная форма k в базисе e, ее можно представить как (если x из трех координат):

$$k(x) = \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{33} x_3^2 + 2\beta_{12} x_1 x_2 + 2\beta_{13} x_1 x_3 + 2\beta_{23} x_2 x_3$$

Пока есть квадраты координат (например, x_1^2), группируем все эти координаты вместе и добавляем общий квадрат:

$$k(x) = \beta_{11}(x_1^2 + 2\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}x_1x_2 + 2\frac{\beta_{13}}{\beta_{11}}x_1x_3) + \beta_{22}x_2^2 + \beta_{33}x_3^2 + 2\beta_{23}x_2x_3$$

Рассмотрим эту скобку - приводим ее в форму, где можно будет дополнить до квадрата, выносим x_1, а 2 оставляем за скобками.

$$\left(x_1^2 + 2\left(\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}x_2 + \frac{\beta_{13}}{\beta_{11}}x_3\right)x_1\right)$$

До вида $(x^2 + 2xy + y^2) = (x + y)^2$ нам не хватает лишь y^2 - добавляем его (и нужно не забыть вычесть его потом, но в формуле просто места не хватает):

$$\left(x_1^2 + 2\left(\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}x_2 + \frac{\beta_{13}}{\beta_{11}}x_3\right)x_1 + \left(\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}x_2 + \frac{\beta_{13}}{\beta_{11}}x_3\right)^2\right) =$$

$$= \left(x_1 + \left(\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}x_2 + \frac{\beta_{13}}{\beta_{11}}x_3\right)\right)^2$$

Теперь делая линейную замену: $x_1' = x_1 + \left(\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}x_2 + \frac{\beta_{13}}{\beta_{11}}x_3\right)$, и теперь квадратичная форма выглядит следующим образом:

$$k(x) = \beta_{11}{x'}_1^2 + k'(x)$$

Где $k'(x)$ - линейная форма, не зависящая от координаты x_1.
Применяя теперь метод Лагранжа к форме $k'(x)$ несколько раз, можно добавиться диагонального вида квадратичной формы.

Однако есть отдельный случай: что, если на одном из шагов, все коэффициенты при квадратах координат равны нулю? Типо квадратичная форма выглядит так:

$$k(x) = 2\beta_{12}x_1x_2 + 2\beta_{13}x_1x_3 + 2\beta_{23}x_2x_3$$

Тогда нужно произвести замену $x_1' = x_1 + x_2$, $x_2' = x_1 - x_2$. Так как $(x_1 + x_2)(x_1 - x^2) = x_1^2 - x_2^2$, это даст нам квадратные координаты, и можно будет продолжать метод Лагранжа как обычно.

Пример задачи

Условие: дана квадратичная форма, привести ее к диагональному виду:

$$k(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$$

Решение: для справки, вот так выглядит матрица квадратичной формы:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Теперь само приведение: начинаем группировать, и начнем с x_1:

$$k(x) = 2(x_1^2 + 2x_1x_2) + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2 =$$

Достраиваем скобку до полного квадрата, и вычитаем соотвественно:

$$= 2(x_1^2 + 2x_1x_2 + \underline{x_2^2}) - \underline{2x_2^2} + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2 =$$
$$= 2(x_1 + x_2)^2 - 2x_2^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$$

Делаем первую замену базиса: $x_1' = x_1 + x_2$:

$$= 2x_1'^2 - 2x_2^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$$

Работа с x_1 закончена. Выделим члены, независящие от x_1, за $k'(x)$:

$$k'(x) = x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2 =$$

Начинаем работу с x_2: заносим в скобки и выделяем полный квадрат:

$$= (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 3x_3^2 = (x_2 + 2x_3)^2 + 3x_3^2$$

Делаем замену $x_2' = x_2 + 2x_3$. Ну и чтобы сделать везде замены оставляем $x_3' = x_3$.

$$k'(x) = {x'}_2^2 + 3{x'}_3^2$$

Соединяем все вместе:

$$k(x) = 2{x'}_1^2 + {x'}_2^2 + 3{x'}_3^2$$

Замена базиса:

$$\begin{gathered} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = x_2 + 2x_3 \\ x'_3 = x_3 \end{gathered}$$

Можем составить матрицу замены базиса из x в x':

$$x' = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Но нам нужна обратная матрица: из x' в x. Нахождение этой матрицы я описывать не буду.

$$x = Px' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Теперь по формуле

$$B' = P^T B P$$

можно найти новую матрицу B':

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

И действительно, эта матрица совпадает с матрицей новой квадратичной формы.