Билет 34. Умножение матриц. очевидно важен для этого, но я так же рекомендую так же прочитать и раздел со *смыслом* умножения, ведь множество свойств натурально вытекают из того, что матрицы описывают трансформации пространства.

- Умножение матриц НЕ КОММУТАТИВНО!!!

  $$A \cdot B \neq\neq\neq B \cdot A$$

  Во-первых, можете представить себе случайные две матрицы, и перемножить их - шансы велики, что результаты будут разные. Если говорить о матрицах как о трансформациях, то видно, что "сначала поворот, потом растяжение" и "сначала растяжение, потом поворот" - разные трансформации.
  Однако то, что умножение не коммутативно, не значит, что не существует таких матриц, что $AB = BA$. Матрицы, которые удовлетворяют равенству $AB = BA$ называют *коммутирующими между собой*.
  Если A - единичная матрица, то равенство выполняется для любой матрицы B. Матрица A в данном случае представляет собой "пустую трансформацию" - она никак не сдвигает базисные вектора с позиции, в которой они стоят, поэтому применим мы пустоту "до" или "после" не изменит исход матрицы B. Из этого следует, что *единичная матрица коммутирует с любой матрицей*.
- Умножение матриц ассоциативно:

  $$(AB)C = A(BC)$$

  На языке трансформаций ясно, что "применить трансформацию C, потом применить трансформацию B и A" и "применить трансформацию C и B, потом применить трансформацию A" - одинаковые операции (единственное что изменилось, быть может - интонация).
  Алгебраическое доказательство просто показывает равенство сумм:

Элементы матрицы AB считаются по следующей формуле

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

Соответственно произведение $(AB)C$ будет выглядеть так:

$$((AB)C)_{xy} = \sum_l \left(\sum_k A_{xk} B_{kl} \right) C_{ly}$$

С другой стороны, элементы матрицы BC:

$$(BC)_{ij} = \sum_k B_{ik} C_{kj}$$

И произведение $A(BC)$ будет выглядеть как

$$(A(BC))_{xy} = \sum_l A_{xl} \left(\sum_k B_{lk} C_{ky} \right)$$

Эти два выражения равны - суммируются одни и те же числа, просто в разном порядке. Доказательство окончено.

- Умножение матриц дистрибутивно к сложению:

$$(A+B)C = AC + BC \qquad A(B+C) = AB + AC$$

Это свойство вытекает из дистрибутивности умножения и сложения обычных чисел. Разберем левое выражение: элемент произведения слева равен

$$((A+B)C)_{ij} = \sum_k (A_{ik} + B_{ik}) C_{kj}$$

А справа:

$$(AC+BC)_{ij} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = \sum_k A_{ik} C_{kj} + \sum_k B_{ik} C_{kj}$$

Но сумма дистрибутивна, отчего видно, что верхнее и нижнее выражения равны.

- Ассоциативность по отношению к умножению на скаляр:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

Как и предыдущее свойство, следует напрямую из свойств обычного умножения чисел.

- Интересное свойство возникает с транспонированием. Транспонирование произведения матриц - то же самое, что и произведение транспонированных матриц в обратном порядке.

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Доказательство алгебраическое, но несложное. Представим произведение AB:

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

Соответственно для транспонированной матрицы:

$$(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki}$$

А для произведения $B^T A^T$:

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_k B^T_{ik} A^T_{kj} = \sum_k B_{ki} A_{jk}$$

Как видно, получились одинаковые элементы, что и завершает это доказательство.
Это свойство, кстати, можно расширить до сколь угодно количества матриц:

$$(ABC)^T = (BC)^T A^T = C^T B^T A^T$$
$$(ABCD)^T = D^T (ABC)^T = D^T C^T (AB)^T = D^T C^T B^T A^T$$