Базис - это *упорядоченный* набор *линейно-независимых* векторов в *векторном пространстве*. В этом случае, любой вектор этого пространства может быть представлен единственным способом, в виде *линейной комбинации* векторов из этого набора.

Базисы записываются как $(\overline{e}_1; \overline{e}_2; \ldots)$. Главное условие для этих векторов $\overline{e}_i$ - они все *линейно независимые* относительно друг друга.

Давайте посмотрим на тонкости этого определения.

1. Упорядоченный набор: это значит, что порядок векторов в базисе имеет значение. Базис $(\overline{i}; \overline{j})$ не равен базису $(\overline{j}; \overline{i})$!
2. Линейная независимость: это значит, что ни какой вектор базиса не должен выражаться через другой вектор этого же базиса. Представим, например, "базис" $(\overline{a}; \overline{b})$, где $\overline{a}(2; 4)$ и $\overline{b}(4; 8)$. Нетрудно заметить, что $\overline{b} = 2\overline{a}$. Так как вектор $\overline{b}$ выразился через $\overline{a}$, они будут коллинеарны, отчего наше 2д пространство будет сжато всего-лишь в одну прямую. Через этот "базис" мы не сможем выразить, допустим, точку $(4, 2)$.

$$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 4 \\ 4\alpha + 8\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

   Кстати говоря, проверить, является ли набор вектором базисом, можно подсчитав *детерминант*, состоящий из координат данных векторов. Набор будет базисом, если детерминант не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 4 = 0$$

3. Вектора в векторном пространстве: это значит, что какие вектора мы хотим выразить в пространстве, из него и должны быть выбранные базисные вектора. Мы не можем, например, выбрать 3д вектор для описания 2д базиса. *Строго говоря, это просто должны быть элементы, для которых определены операции сложения и умножения.*

4. Линейная комбинация: это просто словосочетание для описания разложения любого вектора как сумму других: скажем, базис $(\overline{i}, \overline{j})$. Мы можем теперь выразить случайный вектор $\overline{a}$ как линейную комбинацию этих векторов: $\overline{a} = 5\overline{i} + 3\overline{j}$.

Обращаю внимание, что базисные векторы не обязательно должны быть ортогональны - они вполне могут быть и под углом друг другу, главное, чтобы не были неколлинеарны!

Из-за этого факта базис может называться *ортогональным*, если все его векторы ортогональны друг другу. Затем, *ортогональный* базис может левелапнуться до *ортонормированного*, если длины всех его векторов равны единице.

Нулевой вектор делает любую систему линейно зависимой.
Если векторы a и b коллинеарны, то они линейно зависимы.
Если векторы a, b, c компланарны, то они линейно зависимы.

Комбинируя базис с точкой начала координат, мы получим *систему координат.*

Базис имеет понятие ориентации, но подробнее об этом в вопросе 9. Ориентация прямой, плоскости, пространства.