Что такое эллипс? Это такая кривая линия, которая в декартовой прямоугольной системе определяется уравнением, которое называется *каноническим уравнением эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Где принято, что $a \geq b > 0$.

С эллипса, (и последующие параболы и гипеболы), начинается тема *линий второго порядка*. Порядок линии определяется как максимальная сумма среди всех степеней слагаемых уравнения линии. Проще на примере.
Прямые и плоскости: $Ax + By + C = 0$ и $Ax + By + Cz + D = 0$ - это линии первого порядка, ибо у x, y, z стоит максимум первая степень.
Линии второго порядка же задаются таким огромным уравнением:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Некоторые коэффициенты можно занулять, но в если есть ненулевой коэффициент перед A, B, C - уже будет линия второго порядка. Потому что x^2 или y^2 находятся во второй степени, а xy - сумма их степеней это $1 + 1 = 2$. Перед коэффициентами B, D, E стоит 2 потому что это упрощает запись некоторых формул.
Ну да билет не об этом. Эллипс является линией второго порядка, потому что x^2 и y^2 - во второй степени.

Значения a и b называются большой и малой полуосями эллипса.
Из уравнения можно увидеть, что максимальные значения, что может принять $|x|$ и $|y|$ - a и b соответственно. Из-за этого точки $(a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b)$ называются вершинами эллипса. Эти точки так же лежат на осях системы координат.

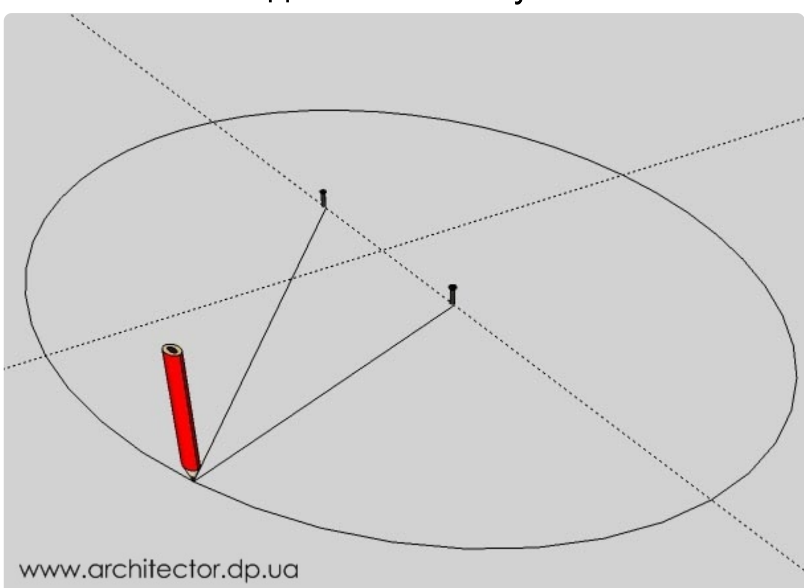
Другое интересное свойство, что можно отметить в силу квадратов при x и y в уравнении: если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то и симметричные точки $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ будут так же ему принадлежать. Из этого следует, что оси координатной системе являются осями симметрии эллипса, а начало координат - центром симметрии.

Частный случай эллипса - окружность - когда $a = b$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

Фокусы

Фокусы это две точки, которые (почти) определяют эллипс. Фокусы обычно обозначаются как F_1 и F_2. В чем же их интерес?
Эллипс можно определить как ГМТ (Геометрическое Место Точек), где сумма расстояний от точки до каждого из фокусов постоянно (и на самом деле равно $2a$).
Из-за этого факта есть интересный способ построить эллипс на бумаге: воткните две булавки в бумагу и натяните отрезок нитки на эти булавки. Поставьте карандаш "внутрь" нитки, и начните вести карандаш по кругу, чтобы нить всегда была натянута:

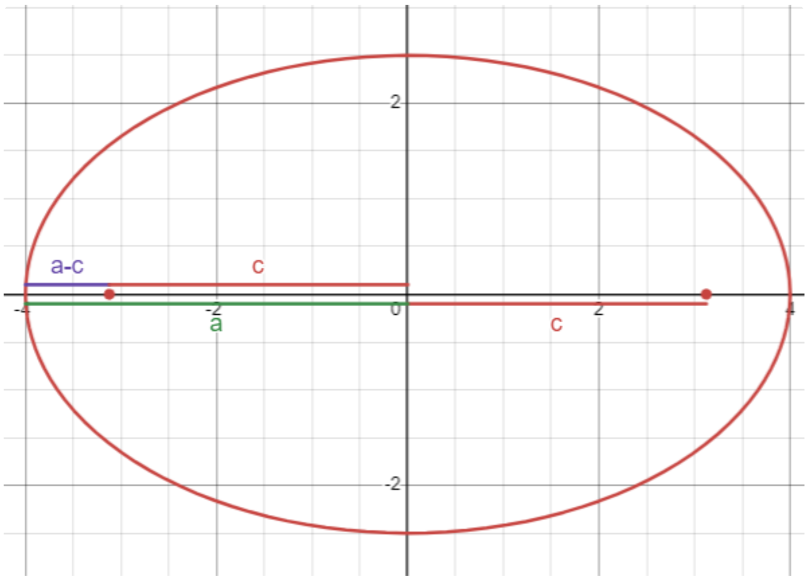


Расстояние от центра координат до фокусов обозначается за c, и считается очень элегантно:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

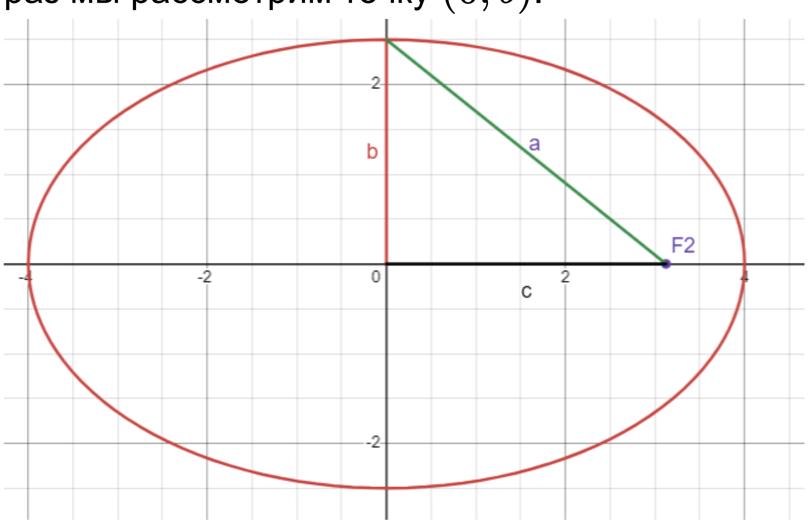
Соответственно, точки F_1 и F_2 будут иметь координаты $(c, 0)$ и $(-c, 0)$.

Полное доказательство того, что сумма расстояний до фокусов равно $2a$ долгое и алгебраически сложное, поэтому предлагаю пойти по-читерски.
Как мы определили с помощью ГМТ, для всех точек на эллипсе это расстояние неизменно. Рассмотрим расстояние до двух фокусов в вершине $(-a, 0)$.



До левого фокуса расстояние будет равно $a - c$, а до правого - $a + c$. Складывая расстояние вместе мы и получим $2a$. А раз для любой точки расстояние одинаковое, то везде оно $2a$ и будет.
Это, кстати, и была ***теорема об эллипсе*** - чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно ($\Leftrightarrow$), чтобы сумма ее расстояний до фокусов равнялась большой оси эллипса ($2a$). Мы вернемся к ней и дадим скучное алгебраическое доказательство потом.

После этого факта докажем формулу для расстояния до фокусов. В этот раз мы рассмотрим точку $(0, b)$.



Вертикальное расстояние будет по определению b, расстояние до фокуса по определению c. Так как сумма расстояний до фокусов равна $2a$, а мы взяли точку так, что эти расстояния будут симметричны, $\Rightarrow$ равны, то расстояние от вершины до фокуса равно $2a/2 = a$. В начале координат прорисовывается прямой угол, поэтому мы можем посчитать гипотенузу с помощью катетов по теореме Пифагора:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

Критерий, когда эллипс становится окружность - $c = 0$. Тогда $a^2 - b^2 = 0$, и $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.

Эксцентриситет

Отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

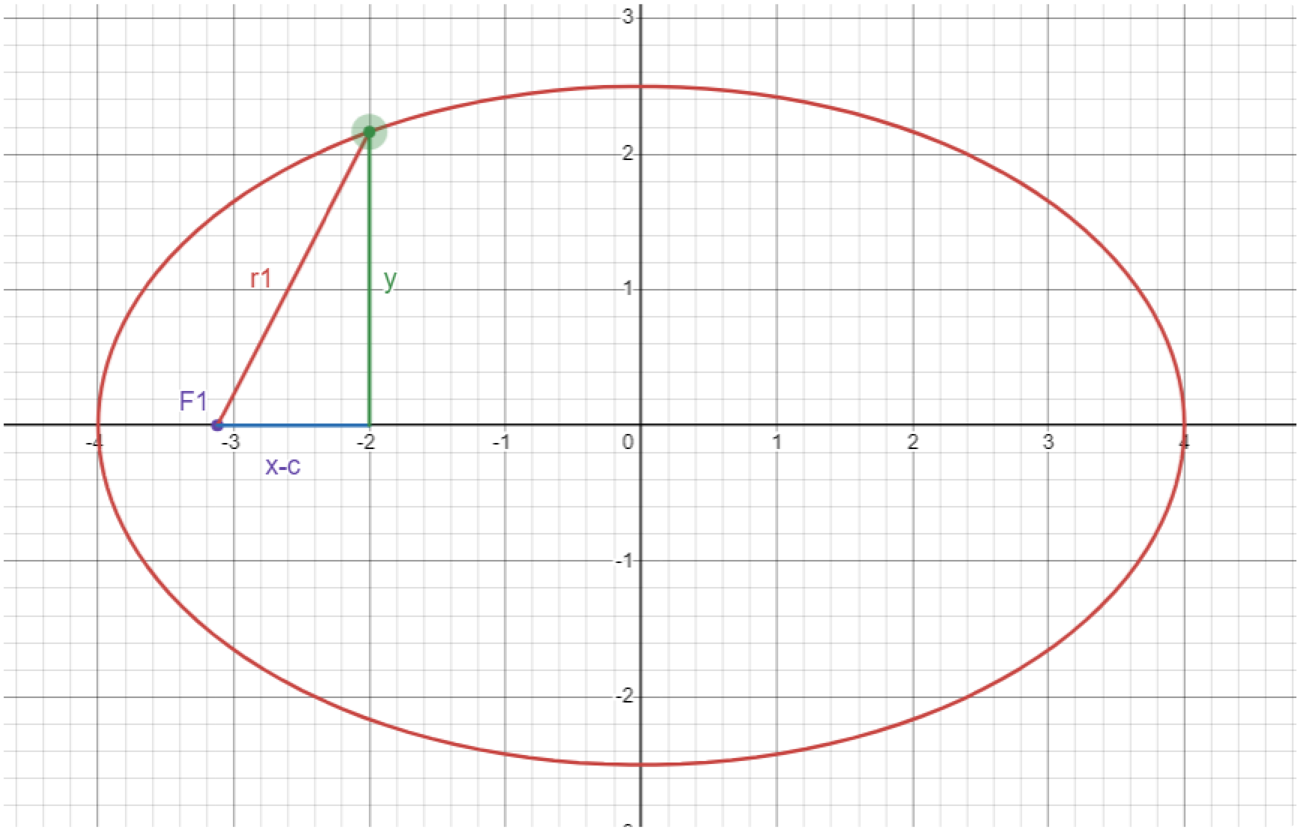
называют *эксцентриситетом* эллипса. Так как фокус всегда лежит на большой полуоси эллипса, то $\varepsilon < 1$ для эллипса. Мы говорим "для эллипса", потому что такое же понятие существует и для окружностей (там $\varepsilon = 0$) и для гипербол (там $\varepsilon > 1$).

Эксцентриситет эллипса несет в себе смысл примерно "насколько сильно отличается (сжат) этот эллипс от окружности".
Другой его полезной функцией является возможность выразить расстояние от точки $M(x; y)$ на эллипсе до двух фокусов с помощью эксцентриситета:

$$r_1 = |F_1M| = a - \varepsilon x$$
$$r_2 = |F_2M| = a + \varepsilon x$$

Доказательство: по теореме Пифагора можно найти квадрат расстояния точки на эллипсе до фокуса:

$$r^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2$$



Если выразить из канонического уравнения эллипса y^2 и подставить в уравнение выше, получим...

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow r^2 = (x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow$$

$$r^2 = (x-c)^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$r^2 = x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

Т.к. $c^2 = a^2 - b^2$:

$$r^2 = a^2 - 2xc + x^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$r^2 = a^2 - 2xc + \frac{x^2(a^2-b^2)}{a^2} = a^2 - 2xc + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$r^2 = (a - \frac{c}{a}x)^2 \Rightarrow r = (a - \varepsilon x)$$

Для другого расстояния выводится так же, просто в начале расстояние по горизонтали будет не $x - c$, а $x + c$.

Теорема об эллипсе

Чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно ($\Leftrightarrow$), чтобы сумма ее расстояний до фокусов равнялась большой оси эллипса ($2a$).

Мы доказали это читерным способом раньше, но полностью алгебраически это выглядит так:
(точка на эллипсе $\Rightarrow$ сумма равна $2a$): Если точка лежит на эллипсе, работают расстояния до фокусов (то, что мы выводили выше). Складываем и получаем:

$$r_1 + r_2 = a - \cancel{\varepsilon x} + a + \cancel{\varepsilon x} = 2a$$

(сумма равна $2a \Rightarrow$ точка на эллипсе): По условию $r_1 + r_2 = 2a$. Тогда, используя расстояние до одного из фокусов (тот рисунок выше, что я приводил):

$$r_1 = 2a - r_2$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

И погнали херачить - возводим в квадрат :)

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

$$-2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2xc$$

Вот сюда мы вернемся через билет...:

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Снова возводим в квадрат :))))

$$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2)$$

$$x^2c^2 = a^2(x^2 + \cancel{2xc} + c^2 + y^2 - a^2 - \cancel{2xc})$$

$$x^2c^2 = a^2(x^2 + c^2 + y^2 - a^2)$$

Снова подставляем уравнение для фокусного расстояния $c^2 = a^2 - b^2$:

$$x^2(a^2 - b^2) = a^2(x^2 + \cancel{a^2} - b^2 + y^2 - \cancel{a^2})$$

$$\cancel{x^2a^2} - x^2b^2 = \cancel{a^2x^2} - a^2b^2 + a^2y^2$$

$$a^2y^2 + x^2b^2 = a^2b^2$$

Делим на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Что это значит? Если координаты наши были (x, y) (то, с чем мы считали расстояния r_1 и r_2), то эти координаты будут соответствовать этому уравнению - каноническому уравнению эллипса.
Доказательство закончено. По сути после этого только мы можем утвержать, что эллипс можно ввести как ГМТ. Но если мы изначально вводим эллипс как ГМТ, жизнь становится куда проще..

Пример задачи

Условие: запишите каноническое уравнение эллипса с фокусным расстоянием $c = 5$ и эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
Решение: зная эксцентриситет и фокусное расстояние, можно найти полуось a.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\varepsilon} = 10$$

Из уравнения, связывающее полуоси и фокусное расстояние, можно найти теперь и полуось b:

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 10^2 - 5^2 = 75$$

$$b = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

Итого получаем, что $a = 10$, $b = 5\sqrt{3}$. Записываем уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$$