Размерность линейного пространства L - количество векторов, которое образует базис в этом пространстве, и обозначается как $\dim L$ (dimension -- размерность). Если базис образован из n векторов, то $\dim L = n$.
В нулевом пространстве базиса нет, отчего его размерность равна нулю.

Разберем связанные теоремы:

- Если существует базис из n векторов, то любая система из $m > n$ векторов будет линейно зависима. Разложим каждый из этих векторов по известному базису и составим матрицу из этих разложений, координаты каждого вектора в свой столбик - получится матрица $n \times m$. Но ее ранг не превосходит n, посему столбики явно будут линейно зависимы - поэтому и сами векторы линейно зависимы.
- Как следствие, если в линейном пространстве существует базис из n векторов, то и любой базис будет состоять тоже из n векторов. Если бы это было не так, и существовал базис из $p > n$ векторов, то его базисные векторы должны были бы быть линейно независимы - а это невозможно по прошлой теореме. Значит, это не так - а значит, все базисы одинакового размера.
  Понятие размерности вводится как раз из-за свойства равенства размеров базисов.
  На примерах, линейное пространство столбиков высотой n имеет $\dim \mathbb{R}^n = n$, а линейное пространство многочленов степени не выше n имеет $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$.

Попробуйте провести параллели между размерностью линейного пространства и рангом матрицы. Размерность линейного пространства векторов плоскости (двумерных векторов) равна двум, как и максимальный ранг матрицы, образованной ее векторами.

Существуют *бесконечномерные* линейные пространства - для любого m существуют m линейно независимых векторов в таком пространстве.
Базиса в таких пространствах не существует, ведь всегда можно взять больше линейно независимых векторов, чем могло быть в этом базисе.

Антоним *бесконечномерным* линейным пространствам - *конечномерные* линейные пространства.

Пример бесконечномерного линейного пространства: множество $C[a, b]$ непрерывных функций от одной переменной, определенных на отрезке $[a, b]$. Действительно, для любых m, x^m принадлежит множеству, и система векторов $1, x, \ldots, x^m$ линейно независима.

В n-мерном линейном пространстве каждая упорядоченная система из n линейно независимых векторов является базисом. Возьмем n линейно независимых векторов и еще случайный вектор y. Система из таких $n+1$ векторов будет линейно зависима, ведь их количество превышает размерность пространства - а значит вектор y делает эту линейно независимую систему линейно зависимой, и может быть разложен в нетривиальную линейную комбинацию этих n векторов. Так как это верно для любого вектора y, такая система является базисом.

В n-мерном пространстве, любую систему из $k < n$ линейно независимых векторов можно дополнить до базиса. Ведь к любой системе мы можем прибавить еще один вектор, который не раскладывается через уже имеющиеся векторы (если бы добавить нельзя было, то имеющая система уже была бы базисом, и пространство не было бы n-мерным). Получили бы систему из $k+1$ векторов. Так можно продолжать добавлять векторы, пока не получим систему из n линейно независимых векторов.