Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы в ортонормированном базисе, то можно вычислить векторное произведение через координаты этих векторов, используя мнемонический определитель:

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \overline{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \overline{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \overline{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \overline{k}(a_1b_2 - a_2b_1) =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

(Доказательство этого факта следует при раскрытии векторного произведения $[a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3}, b_1\overline{e_1} + b_2\overline{e_2} + b_3\overline{e_3}]$)
Соответственно, площадь параллелограмма - длина полученного вектора из векторного произведения:

$$S_{пар} = |[\overline{a}, \overline{b}]| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

Определитель выше можно считать и методом треугольника, но кажется способ через миноры куда более наглядный.

Заметим, что если векторы даны в двухмерном пространстве (и следовательно $a_3 = b_3 = 0$), то векторное произведение сведется к

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \overline{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

И площадь параллелограмма, образованного этими двумя векторами будет равна $|a_1b_2 - a_2b_1|$ - определителю, состоящего из координат этих двух векторов.

Пример задачи

Условие: найдите площадь параллелограмма, тремя вершинами которого являются точки $A_1(5;3;8), A_2(-2;7;3); A_3(9;2;1)$.
Решение: для этого найдем длину результирующего вектора из векторного произведения двух векторов, образованных этими точками.
$\overline{a} = A_2 - A_1 = (-7;4;-5)$
$\overline{b} = A_3 - A_1 = (4;-1;-7)$

$$[\overline{a},\overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -7 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$\overline{i}(-28-5) - \overline{j}(49+20) + \overline{k}(7-16) =$$

$$(-33;-69;-9)$$

Теперь найдем длину вектора:

$$|[\overline{a},\overline{b}]| = \sqrt{(-33)^2 + (-69)^2 + (-9)^2} = \sqrt{5931} = 3\sqrt{659}$$

Это и будет площадь параллелограмма. Если бы мы хотели найти площадь треугольника образованного этими тремя вершинами, то тогда мы эту площадь просто делим на два.