Неравенство Коши-Буняковского

Выглядит для векторов x, y следующим образом:

$$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$$

Доказательство: для случая $y = 0$ равенство очевидно выполняется. Будем рассматривать случаи с $y \neq 0$. По свойству (4), для любого λ выполняется

$$(x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0$$

По линейности раскрываем:

$$\begin{gathered}(x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x - \lambda y) - (\lambda y, x - \lambda y) = \\ = ((x,x) - (x, \lambda y)) - \lambda((y,x) - (y, \lambda y)) = \\ = (x,x) - \lambda(x,y) - \lambda(y,x) + \lambda^2(y,y) = \\ = (y,y)\lambda^2 - 2(x,y)\lambda + (x,x) \geq 0\end{gathered}$$

Последнее выражение верно для любого λ, и в частности для

$$\lambda = \frac{(x,y)}{(y,y)}$$

Подставим его в неравенство, и получим неравенство Коши-Буняковского:

$$\begin{gathered}(y,y)\tfrac{(x,y)^2}{(y,y)^2} - 2(x,y)\tfrac{(x,y)}{(y,y)} + (x,x) = \\ = (x,x) - \tfrac{(x,y)^2}{(y,y)} \geq 0 \\ (x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)\end{gathered}$$

И это неравенство выполняется для любого скалярного произведения. В частности,

$$(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2)$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

Коллинеарность векторов

Определим понятие *коллинеарности векторов*, как и в аналитической геометрии: вектор x *коллинеарен* вектору y, если существует λ такая, что $x = \lambda y$. Из определения так же следует, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда ($\Leftrightarrow$), когда векторы коллинеарны. Действительно, ведь при $x = \lambda y$,

$$(x, y)^2 = (\lambda y, y)^2 = \lambda^2 (y, y)^2$$
$$(x, x)(y, y) = (\lambda y, \lambda y)(y, y) = \lambda^2 (y, y)^2$$

Левая и правая стороны неравенства совпали.
В обратную сторону же, для векторов выполняется уравнение

$$(x, y)^2 = (x, x)(y, y)$$

то взяв всю ту же $\lambda = (x, y)/(y, y)$ как в доказательстве, можно свести уравнение обратно к скалярному произведению $(x - \lambda y, x - \lambda y) = 0$, а скалярное произведение от одного аргумента по свойству (4) равно нулю только когда $x - \lambda y \Leftrightarrow x = \lambda y$ - векторы коллинеарны.

Длина в пространстве

Длиной вектора x обозначается значение $\sqrt{(x, x)}$, и обозначается за $|x|$.

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

Таким образом в пространстве $\mathbb{E}^n$ длина вектора считается всем давно уже известной формулой:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Длина функции из пространства $C[a, b]$, как бы это классно не звучало, считается по этому определению как

$$|f| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x}$$

Теперь с помощью длины, неравенство Коши-Буняковского можно переписать как

$$|(x, y)| \leq |x||y|$$

Неравенство треугольника

Для любых векторов x, y выполняется неравенство:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Название "неравенство треугольника" приходит из того, что векторы x, y можно представить как стороны треугольника, а $x + y$ - третья сторона, соединяющая концы этих векторов. И любая сторона в треугольника будет не больше суммы двух оставшихся.
Доказательство:
С одной стороны,

$$\begin{gathered} |x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \\ = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 \end{gathered}$$

С другой стороны,

$$\begin{gathered} (|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = \\ = |x|^2 + 2|(x, y)| + |y|^2 \end{gathered}$$

Так как $(x, y) \leq |(x, y)|$, то и

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

И из этого следует неравенство треугольника:

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

Угол

Углом между двумя векторами x, y называется число φ, удовлетворяющее

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x||y|}$$

Гарантия, для любых x, y значение $(x,y)/(|x||y|)$ будет меньше единицы по модулю гарантируется как раз неравенством Коши-Буняковского:

$$|(x,y)| \le |x||y| \Rightarrow -1 \le \frac{(x,y)}{|x||y|} \le 1$$

Вместе с углом вводится и понятие ортогональности: векторы x, y ортогональны друг другу, когда угол между ними равен $\pi/2$ - что возможно когда $(x,y) = 0$.
Из этого определения, нулевой вектор не только коллинеарен любому вектору, но и ортогонален!

Теорема Пифагора

Тоже всем известная штука, но теперь на уровне евклидовых пространств: если x, y ортогональны, то выполняется уравнение:

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Доказательство алгебраическое. Пользуемся фактом, что раз векторы ортогональны, то $(x,y) = 0$:

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = |x|^2 + |y|^2$$