Если в пространстве $\mathcal{E}'$ дан ортогональный базис $e_1, \ldots, e_n$, то возможно найти ортогональную проекцию вектора x на пространство $\mathcal{E}'$ можно найти по довольно простым формулам.
Разложим вектор x в линейную комбинацию базисных векторов:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

Скалярные произведения вектора и базисного вектора считаются просто - большинство скалярных произведений становятся равными нулю, ведь базис - ортогональный. Остается такое выражение:

$$(x, e_i) = (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, e_i) = x_i (e_i, e_i)$$

$$x_i = \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}$$

Вектор с такими координатами и есть проекция вектора x на пространство $\mathcal{E}'$:

$$\operatorname{pr}_{\mathcal{E}'} x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

Если же $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$, то проекция вектора совпадает с самим вектором, и можно считать формулу выше разложением вектора x по ортогональному базису:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, e_i)}{|e_i|^2} e_i$$

Вычисляя (x, x) и подставляя туда разложение выше, получим равенство Парсеваля:

$$(x, x) = |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, e_i)^2 (e_i, e_i)}{|e_i|^4} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, e_i)^2}{|e_i|^2}$$

Метод ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис в пространстве $\mathcal{E}$. Построим на их основе ортогональный базис $f_1, \ldots, f_n$.

Изначально, положим $f_1 = e_1$. Затем, f_2 будет равен ортогональной составляющей e_2 на пространство, образованное вектором f_1.

$$f_2 = \operatorname{ort}_{f_1} e_2$$

Теперь f_1, f_2 - ортогональны друг другу.
f_3 будет равен ортогональной составляющей базисного вектора e_3 на пространство, образованное векторами f_1 и f_2.

$$f_3 = \operatorname{ort}_{<f_1, f_2>} e_3$$

И так далее... Пространство, образованное векторами, *называется линейной оболочкой*, но так как за все это время билеты не требовали этого понятия, я его и не вводил никогда...

$$f_k = \operatorname{ort}_{<f_1, \ldots, f_{k-1}>} e_k = e_1 - \operatorname{pr}_{<f_1, \ldots, f_{k-1}>} e_k$$

Подставляя формулы, полученные для проекции вектора в ортогональный базис, получаем:

$$f_k = e_k - \frac{(e_k, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \ldots - \frac{(e_k, f_{k-1})}{(f_{k-1}, f_{k-1})} f_{k-1}$$

f_k по факту является линейной комбинацией векторов e_i, ведь все векторы f_i рано или поздно разложатся в комбинации e. Более того, эта комбинация - нетривиальная, ведь перед первым коэффициентом (e_k) стоит единица. Так как векторы $e_1, \ldots, e_k$ линейно независимы, то и f_k будет отличен от нуля.

Векторы $f_1, \ldots, f_k$ - попарно ортогональные и ненулевые, а значит линейно независимые (см. прошлый билет), и образуют ортогональный базис.

Существование

В любом n-мерном пространстве существует ортогональный базис. Доказательство теперь несложно, ибо раз пространство n-мерное, в нем существует *какой-то* базис из n векторов. Этот базис можно методом Грама-Шмидта привести к ортогональному, что и доказывает существование ортогонального базиса)