Помните, как мы в самом начале говорили, что матрицы представляют собой трансформацию пространства? Матрица линейного отображения - генерализация этого понятия, схожая с ним, но имеющая смысл не только для геометрических векторов.

Начнем наши рассуждения с отображения $A : L \to \overline{L}$, где $\dim L = n$, $\dim \overline{L} = m$. Выберем базис $e = (e_1; \ldots; e_n)$ в пространстве L, и разложим произвольный вектор $X \in L$ по этому базису

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

Образ этого вектора в пространстве $\overline{L}$ будет выглядеть схоже:

$$A(X) = x_1 A(e_1) + x_2 A(e_2) + \ldots + x_n A(e_n)$$

Лишь зная координаты исходного вектора и образы базисных векторов, возможно найти образ.

Вот бы была матрица, позволяющая найти образы векторов... Грубо говоря, мы заменяем один базис на другой - а с этой задачей мы уже справлялись.

Выберем другой базис $f = (f_1; \ldots; f_m)$ в пространстве $\overline{L}$. Каждый образ тех старых базисных векторов можно теперь представить как линейную комбинацию базисных векторов f:

$$A(e_i) = a_{1i} f_1 + a_{2i} f_2 + \ldots + a_{mi} f_i = \sum_{p=1}^{m} a_{pi} f_p$$

Тогда выражение для $A(X)$ может быть переписано как двойная сумма:

$$A(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} x_i a_{pi} f_p$$

Если считать произведение $y_i = x_i a_{pi}$ как координаты образа вектора X, то можно переписать образ как линейную комбинацию базисных векторов $\overline{L}$

:

$$A(X) = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \ldots + y_m f_m = \sum_{p=1}^{m} y_p f_p$$

А теперь, прямо как мы делали в билете с заменой базиса - мы запишем матриц из координат образов базисных векторов $A(e_i)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Таким образом, можно с помощью умножения этой матрицы на координатный столбец вектора X в базисе пространства L получить координаты образа $A(X)$ в выбранном базисе пространства $\overline{L}$:

$$y = Ax$$

Матрица A и называется *матрицей линейного отображения* $A : L \to \overline{L}$ *в паре базисов* e *и* f*.* Домножение координат вектора в базисе e на эту матрицу будет равно координатам этого же вектора в базисе f.

Когда мы говорили о матрицах как о преобразовании пространства, мы работали с квадратными матрицами - тогда вектор высотой n переходил в такой же вектор высотой n. Теперь же генерализация - наш вектор высотой n может перейти в вектор высотой m.

Совпадение ранга матрицы с рангом отображения

Как заголовок гласит, ранг матрицы линейного отображения совпадает с рангом самого отображения. Геометрически, смысл не сильно меняется от смысла с матрицами - ранг матрицы будет равен размерности пространства, в котором будет новый вектор после применения отображения.

В матрице A найдем номера базисных столбцов: $j_1, \ldots, j_r$. Соответственно, $A(e_{j_1}), \ldots, A(e_{j_r})$ образуют базис, и все векторы $A(e_i)$ раскладываются по этим столбикам как линейные комбинации. Но ведь эти вектора представляют собой базис пространства L - любой вектор $x \in L$ можно представить как линейную комбинацию векторов $A(e_i)$. А раз их можно представить как линейную комбинацию векторов $A(e_{j_1}), \ldots, A(e_{j_r})$, то любой вектор из L можно представить как линейную комбинацию этих базисных столбцов. Таким образом, эти r векторов представляют собой базис в пространстве $\operatorname{Im} A$, и их число и равно рангу матрицы A.

Пример задачи

Условие: найти ядро, образ и ранг линейного отображения $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей A:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: наше линейное отображение представляет примерно такую функцию:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Начнем с ядра. Ядро отображения - все векторы, которые после применения матрицы перейдут в нулевой вектор, то есть $y = 0$. Сначала упростим матрицу M методом Гаусса: вычтем третью строку из второй, затем умножим первую строку на 3 и вычтем ее из третьей строки:

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 & 12 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -15 & -11 & 7 \end{pmatrix}$$

Вычитаем из третьей строки вторую, умноженную на 3, затем прибавим к первой строке вторую, и поделим третью строку на 7:

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 13 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 13 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Умножим третью строку на $\frac{13}{2}$ и сложим с первой строкой, умножим на $\frac{1}{2}$ и сложим со второй строчкой:

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Переменные (1), (2) и (4) оказались базисными, а (3) и (5) - свободными.

$$\begin{cases} 3x_1 = -x_3 - \frac{1}{2}x_5 \\ 3x_2 = 5x_3 - \frac{1}{2}x_5 \\ -2x_4 = -x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_2 = \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

Получается, ядро отображения будет равно:

$$\ker A = (-\tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{1}{6}x_5; \quad \tfrac{5}{3}x_3 - \tfrac{1}{6}x_5; \quad x_3; \quad \tfrac{1}{2}x_5; \quad x_5)$$

Выглядит противно - можем избавиться от дробных чисел, домножив всю строку на какое-то число, описание ядра от этого не изменится. Умножим на 6 очевидно (это НОК всех знаменателей):

$$\ker A = (-2x_3 - x_5; \quad 10x_3 - x_5; \quad 6x_3; \quad 3x_5; \quad 6x_5)$$

(На самом деле, можно было умножать на НОК знаменателей индивидуальных свободных переменных: на 3 умножить все коэффициенты x_3, и на 6 умножить все коэффициенты x_5)

Образ отображения это всевозможные векторы, которые получаются после применения этого отображения. Такие векторы мы можем описать с

помощью линейной комбинации базисных векторов.
Как мы уже нашли, наша матрица M эквивалентна другой, попроще:

$$M \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Базис тут создают столбики $(1), (2), (4)$:

$$E_M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

С таким базисом можно описать любой вектор в пространстве $\mathbb{R}^3$. Можно записать, что $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^3$, либо мы берем эти столбики из оригинальной матрицы M и записываем их линейную комбинацию:

$$\operatorname{Im} A = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} A = (x_1 - x_2 + 4x_4; \quad 3x_1 + 9x_2 + 2x_4; \quad 3x_1 + 6x_2 + x_4)$$

Но куда лучше будет написать, что $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^3$, ведь все столбики линейно независимы.
Ранг отображения по определению равен рангу образа, или же по теореме что мы доказали, равен рангу матрицы M. Но $\operatorname{Rg} M = 3$, ведь в M есть подматрица E_M с ненулевым определителем, поэтому и $\operatorname{Rg} A = 3$.
Ответ:

$$\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^3$$
$$\ker A = (-2x_3 - x_5; \quad 10x_3 - x_5; \quad 6x_3; \quad 3x_5; \quad 6x_5)$$
$$\operatorname{Rg} A = 3$$

Условие: найти ядро, образ и ранг линейного отображения $A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 9 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение: как и раньше, упрощаем матрицу методом Гаусса: из третьей строчки вычитаем первую:

$$M \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Вторая и третья строчка совпадает, поэтому мы от нее избавимся.
Вычитаем из второй строчки первую, умноженную на 2, и потом складываем с первой строчкой вторую, умноженную на $\frac{1}{5}$:

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & 5 & -6 & -11 \end{pmatrix}$$

Как видно, ранг M будет равен двум, потому что есть подматрица $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ с ненулевым определителем, а подматрицы большего порядка быть не может.
Переменные $(1), (2)$ будут базисными, $(3), (4)$ - свободные.
Для ядра матрицы (линейные комбинации равны нулю) система выглядит так:

$$\begin{cases} 3x_1 = -\frac{14}{5}x_3 - \frac{14}{5}x_4 \\ 5x_2 = 6x_3 + 11x_4 \end{cases}$$

Запишем вектор:

$$\ker A = (-\frac{14}{15}x_3 - \frac{14}{15}x_4; \quad \frac{6}{5}x_3 + \frac{11}{5}x_4; \quad x_3; \quad x_4)$$

Или же домножая на НОК=15,

$$\ker A = (-14x_3 - 14x_4; \quad 18x_3 + 33x_4; \quad 15x_3; \quad 15x_4)$$

Теперь образ отображения. В этом случае отображение может описать не любой вектор, а лишь некоторую плоскость (ведь ее ранг равен 2, когда получаемые векторы высотой 3). Снова выбираем базисные векторы. Если первые два столбика у нас линейно независимы, то выбираем их как базисные столбики, но выбираем их из оригинальной матрицы, высотой 3.

$$E_M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда образ отображения записывается как линейная комбинация этих столбиков:

$$\operatorname{Im} A = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} A = (3x_1 - x_2; \quad 6x_1 + 3x_2; \quad 9x_1 + 2x_2)$$

Образ отображения в данном случае описывает плоскость в трехмерном пространстве.
Ранг отображения равен рангу матрицы, который мы уже нашли. $\operatorname{Rg} A = 2$.
Ответ:

$$\operatorname{Im} A = (3x_1 - x_2; \quad 6x_1 + 3x_2; \quad 9x_1 + 2x_2)$$
$$\ker A = (-14x_3 - 14x_4; \quad 18x_3 + 33x_4; \quad 15x_3; \quad 15x_4)$$
$$\operatorname{Rg} A = 2$$