Определение не новое нам.
Базис $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ называется *ортогональным*, если для любых $i \neq j \Rightarrow (e_i, e_j) = 0$ (все базисные векторы ортогональны друг другу).
Если при этом длина каждого базисного вектора равна единице - то есть, $|e_i| = (e_i, e_i) = 1$ - то такой базис называется *ортонормированным*.

Например, базис из столбцов является ортонормированным:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

Матрица Грама, составленная из ортогонального базиса, будет диагональной:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (e_2, e_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

А если ее составить из ортонормированного базиса, то она и вовсе будет единичной.
В ортонормированном базисе живется куда проще, и благодаря единичности матрицы Грама, формула для нахождения скалярного произведения двух векторов упрощается донельзя:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

Это уже звучит очень похоже с тем, что было в начале изучения АлГема.
Длина же находится тоже просто:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

**Линейная независимость ненулевых ортогональных векторов**

Любая система из ненулевых ортогональных векторов будет линейно независима:
Возьмем систему таких векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$: $i \neq j \Rightarrow (e_i, e_j) = 0$.
Посмотрим на линейную комбинацию этих векторов:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$$

Умножаем левую и правую части скалярно на $e_i$:

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n, e_i) = (0, e_i)$$
$$\alpha(e_1, e_i) + \ldots + \alpha_i(e_i, e_i) + \ldots + \alpha_n(e_n, e_i) = 0$$

Так как все векторы ортогональны, все скалярные произведения за исключением $(e_i, e_i)$ будут равны нулю. Остается только

$$\alpha_i(e_i, e_i) = 0$$

Но мы знаем, что $(e_i, e_i) \neq 0$, ведь $e_i \neq 0$ по условию. Значит, $\alpha_i = 0$.
Умножая линейную комбинацию на $e_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$ мы покажем, что все $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, что значит, что линейная комбинация тривиальная, а значит векторы действительно линейно независимы.