Что такое вектор? В целом, вектор - направленный отрезок прямой, для которого указано, какая из его точек является его началом, а какая - концом. Соответственно, вектор имеет длину и направление.

Разрешаются записи как и $\vec{AB}$, так и $\overline{AB}$ - разницы между ними нет, и является просто выбором пишущего! Есть еще страшный способ записи векторов жирным шрифтом: $\boldsymbol{AB}$, но это страшная вещь, лучше пожалейте глаза проверяющих и не пишите так. В файле будет преобладать запись $\overline{AB}$.

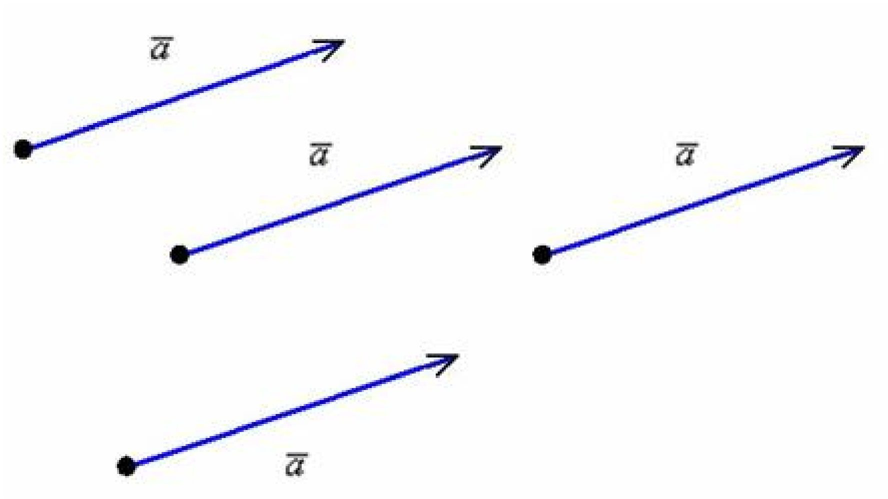
Помимо нотации "это вектор", есть две формы записи "информации" про вектор:

- Можно записывать двумя большими буквами: $\overline{AB}$. Первая буква - это точка начала вектора, а последняя - это точка конца вектора.
- Можно записывать и одной маленькой буквой: $\overline{a}$. Тогда считается что весь вектор "хранится" в этой букве.

Длина вектора обозначается с помощью "модуля": $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$.

Существует особый вектор - нулевой. Его отличительная характеристика - его начальная и конечная точка совпадают, соответственно его длина равна нулю (отсюда и название), и такой вектор направления не имеет.

В АлГеме рассматриваются *свободные векторы*. Чем они отличаются от обычных? Тем, что такие векторы можно спокойно двигать. Только двигать, крутить нельзя! Все векторы ниже одинаковые, хотя и имеют разные начальные точки.

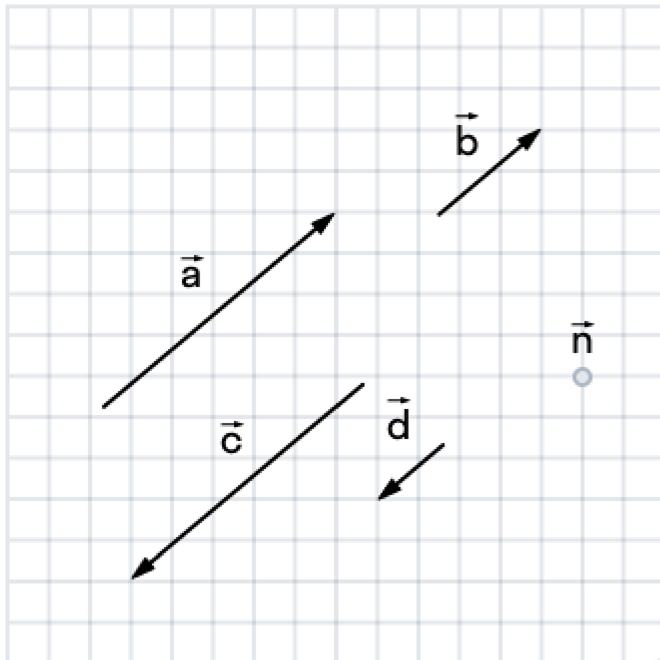


Соответственно тут мы можем подойти и к равенству векторов: векторы равны, если их длина и направление совпадают - точка начала не имеет никакого значения.

Противоположно *свободным векторам* существуют *связанные векторы*, для которых начальная точка зафиксирована.

Теперь про характеристики векторов:

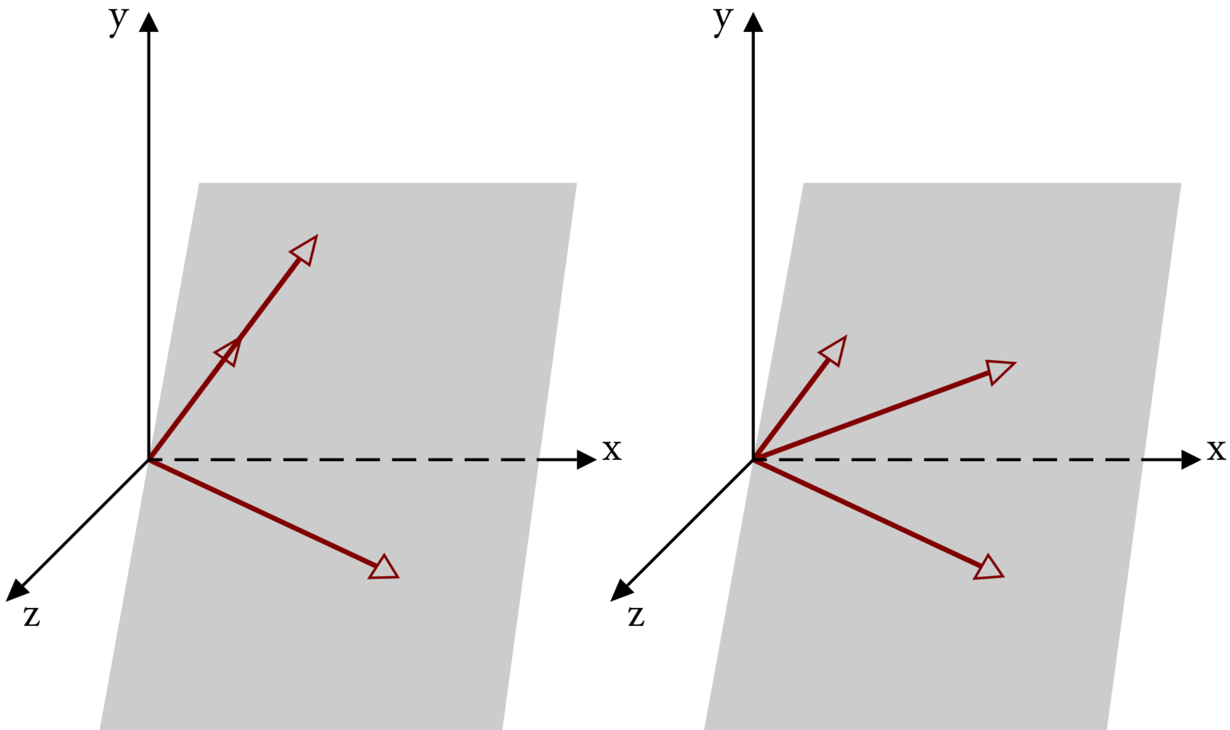
- Векторы *коллинеарны*, если лежат на одной или параллельных прямых. Условие про параллельные прямые легко понять, если вспомнить, что векторы можно спокойно двигать. По-другому можно сказать, что векторы коллинеарны, если они сами "параллельны". Ну и конечно, векторы коллинеарны если либо их направление совпадает, либо оно ровно противоположно (см. векторы $\overline{b}$ и $\overline{d}$ ниже).



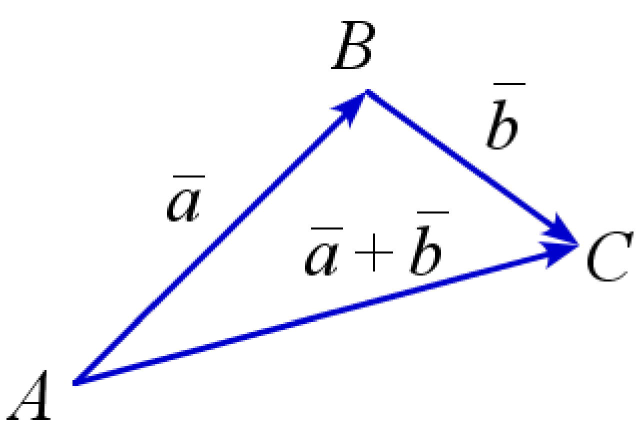
Здесь все векторы коллинеарны друг с другом.
Особый случай - нулевой вектор. Он будет коллинеарен с любым вектором.

- Векторы быть *сонаправлены* - если они имеют одинаковое направление друг с другом. Можно описать более строго: если они коллинеарны и точки их конца лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их точки начала.
- Соответственно, они могут быть *противонаправлены* - если они имеют противоположное направление друг с другом. Можно опредилить противонаправленность через сонаправленность: векторы будут противонаправлены, если они коллинеарны и при этом не сонаправлены (соответственно остается только 1 случай, когда их направления противоположны).
- Через сонаправленность так же можно определить *равенство* векторов: векторы равны если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.
- Для трех и более векторов определено понятие *компланарности*. Векторы компланарны, если при приведении их к одному началу они лежат в одной плоскости. Для двух векторов это свойство имеет мало

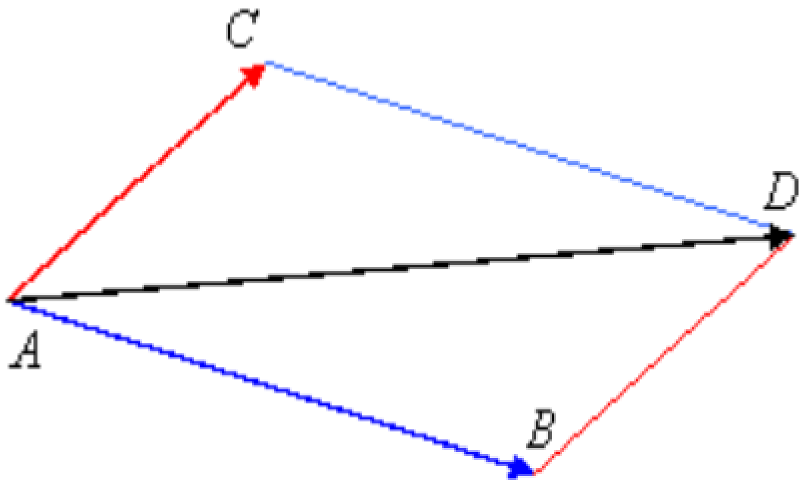
смысла, ведь любые два вектора могут быть в одной плоскости (если приведем их к одному началу, то у нас будет три различные точки - а по любым трем точкам можно создать плоскость).



- Вектор может являться *ортом*, или же единичным вектором. Такой вектор имеет длину равную единице, откуда и получается название "единичный" вектор
- Векторы бывают линейно зависимыми и линейно независимыми, но об этом в следующем вопросе.
- Векторы можно складывать, тогда они складываются "по правилу треугольника" или "по правилу параллелограмма".
    - В правиле треугольника, начало второго вектора прикладывается к концу первого, и сумма этих двух векторов - вектор, проходящий от начала первого вектора до конца приложенного второго.



- В правиле паралеллограмма, начала векторов соединяются, и к концам откладывают параллельные парные вектора. В точке, где параллельные вектора пересекаются и будет конец суммы векторов (а начало в точке где изначальные векторы были соединены).



$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$

  Вычитание - это сложение вектора в обратную сторону)

- Векторы можно умножать на скаляр λ. Тогда, если скаляр положительный, то его длина увеличится в λ раз, а направление не изменится. Если скаляр будет отрицательный, то длина все так же увеличивается в $-\lambda$ раз (длина всегда положительная), а вот направление становится обратным. Ну и в случае если скаляр равен нулю, то вектор становится нулевым.

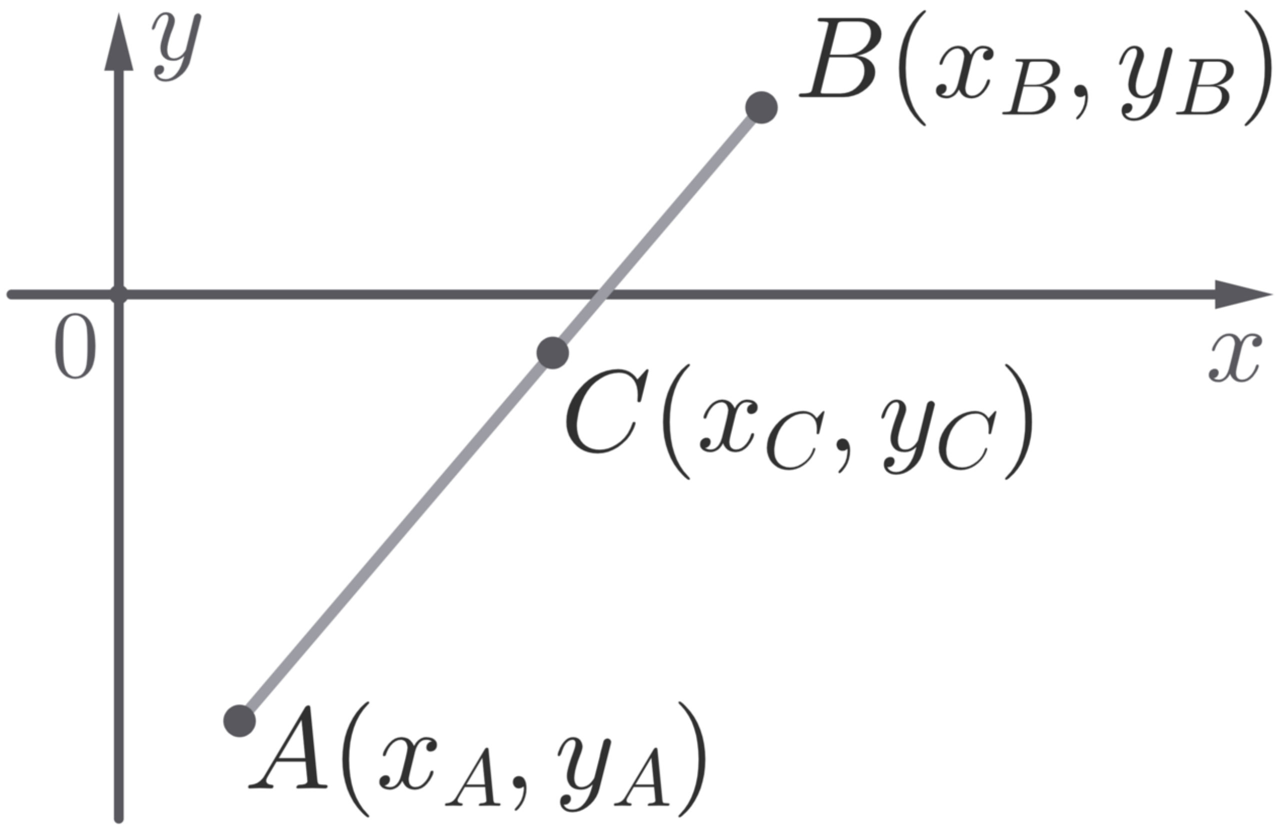
Деление отрезка в данном отношении

Есть у нас отрезок AB, и мы его хотим поделить точкой C в данном (заданом!) отношении. А как это отношение задано? Обычно задано как $\frac{AC}{CB} = \lambda$, и нам нужно, зная координаты точек A и B, найти координаты точки C.

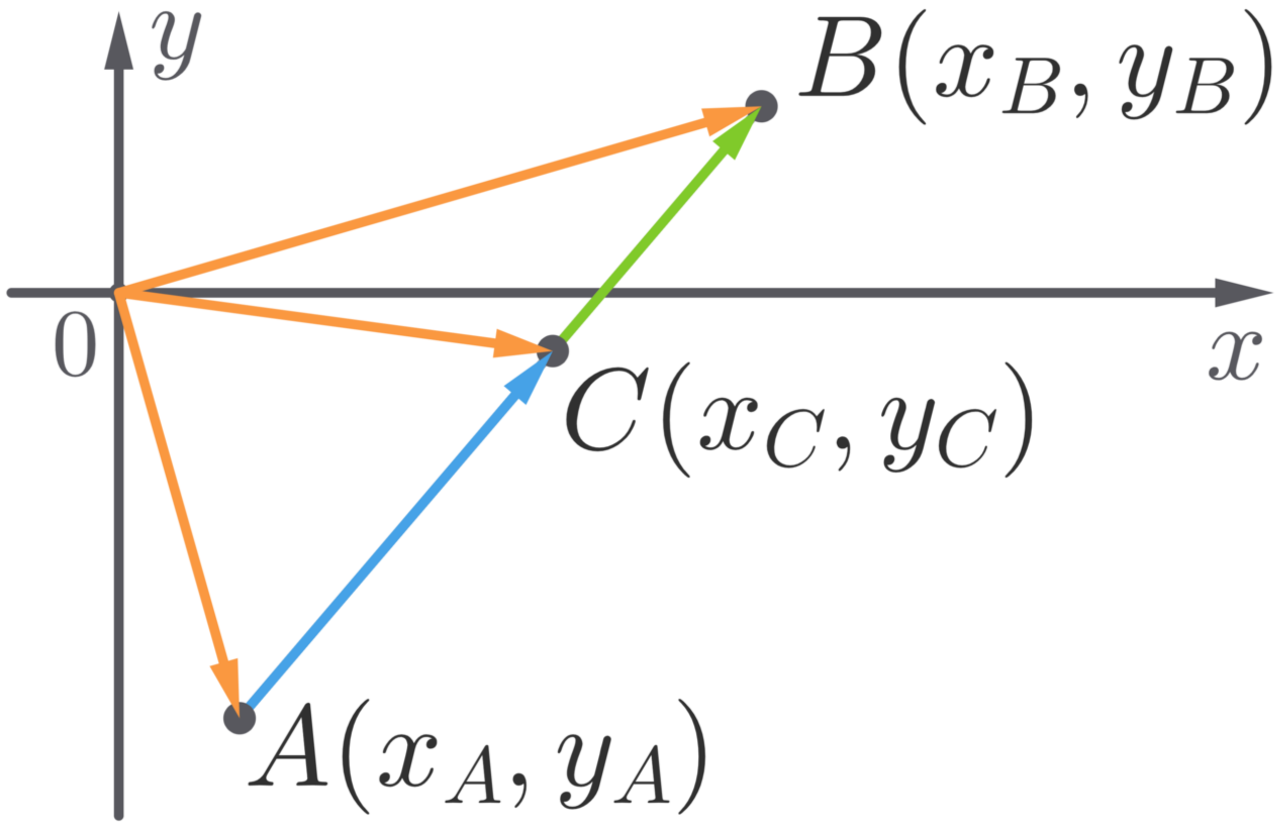
Самый тривиальный случай когда $\lambda = 1$, тогда просто точка C делит отрезок пополам. Тогда эта точка - среднее арифметическое концов отрезка.

$$C = \frac{A+B}{2} \qquad \begin{cases} C_x = \frac{A_x+B_x}{2} \\ C_y = \frac{A_y+B_y}{2} \\ \dots \end{cases}$$

Как показано выше, с точками операции выполняются покоординатно.
Ну и конечно, это разбиение работает не только на плоскости, но и в сколь высоком измерении.



Разберемся, как получить эти координаты для любой λ:
Сначала давайте превратим наши точки в вектора: точки A, B, C станут векторами $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$, где O - начало координат. Соответственно векторы будут обозначаться точно так же, как и точки, и все действия будут проводиться с ними точно так же.



По условию дано, что $\frac{AC}{CB} = \lambda$, а значит $AC = \lambda \cdot CB$. Так как AC и CB - длины соответвующих векторов, то $|\overline{AC}| = \lambda \cdot |\overline{CB}|$.
Так как $\lambda > 0$, то $\lambda \cdot \overline{CB}$ остается сонаправленным с $\overline{CB}$, отчего и с $\overline{AC}$ он тоже сонаправлен. Длина векторов равна, они сонаправлены, значит по определению и сами вектора равны:

$$\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB}$$

Теперь выразим $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ через $O-$векторы (через точки):

$$\begin{cases} \overline{AC} = C - A \\ \overline{CB} = B - C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} \\ \overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC} \end{cases}$$

И все готово! Теперь просто подставляем векторы в уравнение выше и выражаем $\overline{OC}$ (которое будет иметь координаты точки C):

$$\overline{OC} - \overline{OA} = \lambda(\overline{OB} - \overline{OC})$$

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \lambda\overline{OB}}{\lambda + 1}$$

Переводим векторы обратно в точки:

$$C = \frac{A + \lambda B}{\lambda + 1}$$

И все готово! Можно проверить, например, для $\lambda = 1$, что эта формула дает верные значения.

Понимание формулы деления отрезка

Есть еще более интуитивный способ понять эту формулу:
Представим λ как именно отношение $\frac{AC}{CB}$, и обозначим его как $\frac{\alpha}{\beta}$ для удобства. Теперь это значит, что мы хотим разделить отрезок AB точкой C в отношении $\alpha : \beta$. Перезапишем формулу выше используя отношение вместо лямбды:

$$C = \frac{A + \frac{\alpha}{\beta} B}{\frac{\alpha}{\beta} + 1}$$

И теперь домножим на β числитель и знаменатель:

$$C = \frac{\beta A + \alpha B}{\alpha + \beta}$$

Что получается - средняя взвешенная сумма из точек A и B! Мы суммируем точки с некоторыми коэффициентами, и затем делим на эти коэффициенты дабы точка все-таки осталась между этими точками. Для любителей физики (если такие есть, конечно), это схоже с расчетом центра масс из двух точек)

Можно представить по-другому. Отложим точку C от точки A на какое-то расстояние по прямой соединяющей A и B:

$$C = A + k(B - A)$$

k - какой-то множитель. Какой же это будет множитель? Можно искать разными способами, но если наш отрезок AB разделен в отношении $\alpha : \beta$, то всего там будет $\alpha + \beta$ кусочков, и точка C будет находиться на α-том делении. Поэтому так и поступим:

$$C = A + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(B - A)$$

А теперь просто приведем к общему знаменателю:

$$C = \frac{A(\alpha+\beta) + \alpha B - \alpha A}{\alpha+\beta} = \frac{\beta A + \alpha B}{\alpha+\beta}$$

И получили формулу как в средней взвешенной сумме. Конечно, вводя $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, мы можем прийти к оригинальной форме, как и доказывали.

Пример задачи

Условие: найдите координаты точки C, делящую отрезок AB в отношении $5:3$ считая от точки A. $A = (5;8), B = (13;24)$.
Решение: раз нам дано отношение, составляем лямбду: $\lambda = \frac{5}{3}$.
Ищем точку:

$$C = \frac{A+\lambda B}{1+\lambda} = \frac{3}{8}((5;8) + \frac{5}{3}(13;24)) = \frac{1}{8}((15;24) + 5(13;24) =$$

$$\frac{(15+5\cdot 13;6\cdot 24)}{8}=\left(\frac{5\cdot(3+13)}{8};\frac{6\cdot 24}{8}\right)=(10;18)$$