Квадратичная форма - сжатие билинейной формы из двух аргументов в один.
Квадратичной формой/функцией на пространстве L называется функция k, значение на любом векторе x определяется равенством

$$k(x) = b(x, x)$$

Где b - симметричная билинейная форма.

Мы такое уже использовали - квадрат длины является квадратичной формой от скалярного произведения для векторов в евклидовом пространстве.

Симметричная билинейная форма однозначно определяет квадратичную форму, и наоборот.

$$k(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) =$$

Используем симметрию билинейной формы:

$$= k(x) + 2b(x,y) + k(y)$$

Отсюда:

$$b(x,y) = \frac{1}{2}(k(x+y) - k(x) - k(y))$$

Матрицей квадратичной формы называют матрицу ее билинейной формы.

Диагональный вид

Если квадратичная форма k в базисе e имеет диагональную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

или же если квадратичная матрица считается как

$$k(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i$$

то говорят, что *квадратичная форма имеет диагональный вид.*

Для любой квадратичной формы возможно заменить базис так, чтобы она приняла диагональный вид. Покажем это:
Начальные условия: Есть квадратичная форма k с матрицей B в каком-либо базисе. Будем к ней применять элементарные преобразования, схожие с тем, как мы делали метод Гаусса.
Первый шаг - занулить первый столбик и строку, и поставить в левый верхний угол число ε_1 - привести ее к такой матрице:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

C_1 - симметричная матрица порядка $n-1$.

Напомню, что у квадратичной формы матрица симметрична, поэтому $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Мы будем работать лишь с верхней строкой.

Начнем рассуждения: если все элементы β_{1i} для $i > 1$ равны нулю, то все преобразования уже сделаны, и мы можем двигаться к следующему шагу.

Иначе же, если $\beta_{11} \neq 0$, вычитаем из каждой i-той строки первую строку, умноженную на значение β_{1i}/β_{11}. Это повлечет зануление первого столбика (кроме первого числа). После этого делаем все тоже самое, но вычитаем не из строк, а из каждого i-того столбца первый столбец, умноженный на те же коэффициенты β_{1i}/β_{11}. Тогда матрица B перейдет в матрицу B_1 с $\varepsilon_1 = \beta_{11}$.

Что делать при $\beta_{11} = 0$, но при этом существует i, при котором $\beta_{1i} \neq 0$? Делаем дополнительное преобразование.

- При $\beta_{ii} \neq 0$, сначала переставляем i-тую строку с первой, потом i-тый столбец с первым. Тогда $\beta'_{11} = \beta_{ii} \neq 0$. Наглядно обмен при $i = 4$, который сохраняет симметричность:

$$\begin{pmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{15} & a_{16} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{12} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{23} & a_{33} & a_{13} & a_{35} & a_{36} \\ a_{44} & a_{24} & a_{34} & a_{14} & a_{45} & a_{46} \\ a_{45} & a_{25} & a_{35} & a_{15} & a_{55} & a_{56} \\ a_{46} & a_{26} & a_{36} & a_{16} & a_{56} & a_{66} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{15} & a_{16} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{12} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{23} & a_{33} & a_{13} & a_{35} & a_{36} \\ a_{44} & a_{24} & a_{34} & a_{14} & a_{45} & a_{46} \\ a_{45} & a_{25} & a_{35} & a_{15} & a_{55} & a_{56} \\ a_{46} & a_{26} & a_{36} & a_{16} & a_{56} & a_{66} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{44} & a_{24} & a_{34} & a_{14} & a_{45} & a_{46} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{12} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{23} & a_{33} & a_{13} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{15} & a_{16} \\ a_{45} & a_{25} & a_{35} & a_{15} & a_{55} & a_{56} \\ a_{46} & a_{26} & a_{36} & a_{16} & a_{56} & a_{66} \end{pmatrix}$$

- При $\beta_{ii} = 0$, прибавляем i-тую строку к первой, и прибавляем i-тый столбец к первой. Получаем $\beta'_{11} = 2\beta_{1i} \neq 0$.
  В любом случае, теперь $\beta'_{11} \neq 0$, и мы можем провернуть случай выше, и привести матрицу к виду B_1.

Следующий шаг - применение этого алгоритма к полученной матрице C_1. С каждым шагом диагональ матрицы будет наполняться итоговыми значениями, и на $n-1$ шаге матрица C_{n-1} будет порядка, равного единице, и алгоритм уже не требуется применять - оставляем значение как есть. По итогу, мы получили матрицу диагонального вида:

$$B_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Канонический вид

Каноническим видом квадратной формы называется логичное продолжение диагонального вида - такой вид, где матрица B - диагональная, причем значения ε_i принимают значения только -1, 1 или 0.
Каждая квадратичная форма имеет базис, в котором она имеет канонический вид.
Мы доказали это утверждение для диагонального вида, так что начнем с момента, когда у квадратной формы уже есть диагональный вид. Если где-

то есть $\varepsilon_i \neq 0$, то разделим i-тую строку и i-тый столбец на $\sqrt{|\varepsilon_i|}$. Таким образом, β_{ii} поделится на $|\varepsilon_i|$ и станет равным либо 1, либо -1.