Будем рассматривать общий случай, совместную систему из m уравнений и n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Матрица системы выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Упрощенный вид матрицы

Что такое упрощенная матрица? Это такая матрица ($m \times n$), ***некоторые*** столбцы (r штук) которой являются столбцами единичной матрицы, а последние строки ($m - r$ штук) равны нулю. Типо такой:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & 0 & a_{1*} & \ldots & 0 & a_{1(r+1)} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{2*} & \ldots & 0 & a_{2(r+1)} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{3(r+1)} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{r(r+1)} & \ldots & a_{rn} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Каждую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к такому виду! Идея очень схожа с той, что была описана в билете

46. Теорема о преобразовании невырожденной матрицы в единичную. Метод Гаусса. Вычисление обратной матрицы. - как будто с помощью метода Гаусса, потихоньку превращаем матрицу в единичную. Но там было условие на невырожденность матрицы, отчего ненулевой элемент в строке всегда можно было найти. Сейчас же мы говорим про *любую* матрицу, поэтому это не всегда так.
Но если ненулевого элемента в строке нет, то вся строка - нулевая. В таком случае, спихиваем ее в низ матрицы и продолжаем метод Гаусса как ни в чем не бывало.
В конце получится, что несколько столбцов у нас станут как в единичной матрице, а внизу будут нулевые строки. Остаются пару столбцов, что содержат другие числа (не нули/единицы), но на них нам плевать - на этом моменте уже получен упрощенный вид матрицы.

Если переставить столбики матрицы, можно получить единичную матрицу в верхнем левом углу, справа будут числа, а снизу - нули. К сожалению, это не является элементарным преобразованием, однако мы вернемся к этой идее чуть ниже.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1(r+1)} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2(r+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r(r+1)} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

У такой матрицы получается единичная подматрица порядка r. У такой матрицы будет и ранг равен r, ведь ранг единичной подматрицы максимален (равен r), а любая подматрица большего порядка будет содержать в себе нулевую строчку, и будет вырождена как следствие.
Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, поэтому можно утверждать, что и у оригинальной матрицы тоже ранг равен r, поэтому метод Гаусса хорош и для нахождения ранга матрицы.

Нахождение решений методом Гаусса

Вернемся к нашей совместной системе. Обозначим ранг матрицы A как r. Так как добавление столбика b к A не изменит ранга матрицы (ведь система совместная, посему b можно выразить как линейную комбинацию столбиков A), то и базисная матрица этой матрицы не изменится. Как описали выше, приведем расширенную матрицу $(A|b)$ к упрощенному виду. Система не изменит свое множество решений, и в ней будет r линейно независимых уравнений.
Несмотря на то, что перемещение столбиков не является элементарным преобразованием, мы можем их переместить *с помощью изменения нумерации неизвестных*. Переместим все столбики единичной матрицы налево и отбросим нулевые строки. Тогда расширенная матрица примет вид

$$(E|A'|b') = ((E|A')|b')$$

Где E - единичная матрица порядка r, A' - матрица размера $r \times (n-r)$, и b - преобразованный столбец свободных членов высоты r.

Чтобы получить систему уравнений обратно, нужно умножить матрицу $(E|A')$ на столбик неизвестных, x. Ширина этой матрицы будет $r + (n-r) = n$, как и высота столбика x (количество неизвестных в изначальной матрице):

$$(E|A')x = b'$$

Перемножение будет интересным - верхняя и нижняя части столбика x умножатся на разные матрицы - E и A' соответственно. Первые r элементов x (обозначим за $x^{(1)}$) умножатся на единичную матрицу, и эта часть x не изменится, а последние $n-r$ (обозначим за $x^{(2)}$) элементов перемножатся с A', оставляя после себя линейную комбинацию этих строк. Тогда:

$$(E|A')x = Ex^{(1)} + A'x^{(2)} = x^{(1)} + A'x^{(2)} = b'$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{11}x_{r+1} + a'_{12}x_{r+2} + \ldots + a'_{1(n-r)}x_n \\ a'_{21}x_{r+1} + a'_{22}x_{r+2} + \ldots + a'_{2(n-r)}x_n \\ \vdots \\ a'_{r1}x_{r+1} + a'_{r2}x_{r+2} + \ldots + a'_{r(n-r)}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_r \end{pmatrix}$$

Переводя это обратно в систему уравнений, получаем зависимости для "базисных" переменных:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - (a'_{11}x_{r+1} + a'_{12}x_{r+2} + \ldots + a'_{1(n-r)}x_n) \\ x_2 = b'_2 - (a'_{21}x_{r+1} + a'_{22}x_{r+2} + \ldots + a'_{2(n-r)}x_n) \\ \ldots \\ x_r = b'_r - (a'_{r1}x_{r+1} + a'_{r2}x_{r+2} + \ldots + a'_{r(n-r)}x_n) \end{cases}$$

Выглядит страшно? Существование матрицы A' определяет, будет ли у системы одно решение или бесконечное количество. Если матрица A' существует, будут существовать и скобки справа. Фиксируя любые значения $x_{r+1}, \ldots x_n$, будут однозначно задаваться решения $x_1, \ldots, x_r$.
А существование матрицы A' зависит от вырожденности оригинашьной матрицы A!

Обычно мы привыкли к решению СЛАУ, в которых есть четко одно решение - тогда и матрица A является невырожденной, и все четко. Но если, например, переменных становится больше чем уравнений, не получится четко зафиксировать неизвестные - значения одних будут зависить от других. Это и показывается в скобках выше.

Посмотрите примеры задач в конце этого билета, чтобы увидеть как выглядят бесконечные решения на практике.