

Условие: найти точки M эллипса, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

расстояние от которых до правого фокуса равно 4.

Решение:

Шаг первый: выделить a , b и найти эксцентриситет

$$a = \sqrt{36} = 6$$

$$b = \sqrt{9} = 3$$

Обратите на разницу формулу эксцентриситета для эллипса и гиперболы:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Шаг второй: найти функцию расстояния до фокуса. Расстояние от точки M на эллипсе до фокусов F_1 и F_2 определяется по формулам:

$$r_1 = |a - ex| \quad r_2 = |a + ex|$$

r_1 принимает минимальное значение при $x > 0$, а значит оно отвечает за правый фокус (ведь он находится в правой половине координатной системы).

Находим x :

$$4 = |6 - \frac{\sqrt{3}}{2}x|$$

$$\begin{cases} 4 = 6 - \frac{\sqrt{3}}{2}x \\ -4 = 6 - \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{3}} \\ x = \frac{20}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Шаг третий: отсеять ложное значение. Для эллипсов это значение, что выходит за границы возможных x , т.е. слишком большое:

$$20/\sqrt{3} > 6 \Rightarrow \frac{x^2}{36} > 1$$

y как следствие не имеет действительных корней при таком значении.

Рассматриваем только $x = 4/\sqrt{3}$:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y^2 = 9 \left(1 - \frac{x^2}{36} \right) = 9 \left(1 - \frac{16}{36 \cdot 3} \right) = \frac{23}{3}$$

Ответ: $M = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}; \pm \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}} \right)$

Условие: найти точки M эллипса, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

расстояние от которых до правого фокуса равно 13.

Решение:

Шаг первый: выделить a , b , найти эксцентриситет

$$a = \sqrt{100} = 10$$

$$b = \sqrt{36} = 6$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{4}{5}$$

Шаг второй: берем функцию расстояния и считаем

$$r_1 = |a - ex|$$

Находим x :

$$13 = |10 - \frac{4}{5}x| \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{15}{4} \\ x = \frac{115}{4} \end{cases}$$

Шаг третий: отсеять ложное значение.

$$115/4 > 10 \Rightarrow \frac{x^2}{100} > 1$$

Считаем для $x = -15/4$:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow y^2 = 36 \left(1 - \frac{x^2}{100} \right) = \frac{495}{16}$$

Ответ: $M = \left(-\frac{15}{4}, \pm \frac{\sqrt{495}}{\sqrt{16}} \right)$