Условие: вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1(-2;-1;-1)$, $A_2(0;3;2)$, $A_3(3;1;-4)$, $A_4(-4;7;3)$ и его высоту, опущенную из вершины A_3 на грань $A_1A_2A_4$.

Решение: сначала найдем объем параллелепипеда, образованного этими четырьмя точками, а потом найдем объем тетраэдра.

Найдем векторы, образовывающие стороны параллелепипеда:
$A_1A_2 = A_2 - A_1 = (2;4;3)$
$A_1A_3 = A_3 - A_1 = (5;2;-3)$
$A_1A_4 = A_4 - A_1 = (-2;8;4)$

Теперь считаем объем параллелепипеда. Это делаем с помощью смешанного произведения:

$$(A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 140$$

Получается, объем параллелепипеда равен 140. Объем тетраэдра в 6 раз меньше него, поэтому $V = \frac{140}{6} = \frac{70}{3}$.

Для высоты вспомним формулу объема тетраэдра через площадь основания и высоту, проведенную к ней: $V = \frac{Sh}{3}$. Отсюда следует, что

$$h = \frac{3V}{S}$$

Найдем площадь грани $A_1A_2A_4$. Ее площадь будет длиной вектора, полученного из векторного произведения векторов, образующих эту плоскость, деленная на два (ведь векторное произведение даст площадь параллелограмма).

$$[A_1A_2, A_1A_4] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 8 & 4 \end{vmatrix} = (-8; -14; 24)$$

$$S = |[A_1A_2, A_1A_4]|/2 = \sqrt{8^2 + 14^2 + 24^2}/2 = \sqrt{209}$$

Соответственно,

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{70}{\sqrt{209}}$$

Ответ: $V = \sqrt{209}, h = \frac{70}{\sqrt{209}}$.

Условие: вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1(-1; -5; -2)$, $A_2(-6; 0; -3)$, $A_3(3; 6; -3)$, $A_4(-10; 6; 7)$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение:

Шаг первый: получить векторы.

$A_1A_2 = A_2 - A_1 = (-5; 5; -1)$

$A_1A_3 = A_3 - A_1 = (4; 11; -1)$

$A_1A_4 = A_4 - A_1 = (-9; 11; 9)$

Шаг второй: найти объем.

$$(A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4) = \begin{vmatrix} -5 & 5 & -1 \\ 4 & 11 & -1 \\ -9 & 11 & 9 \end{vmatrix} = -828$$

Объем отрицательный, но мы просто берем модуль.

$$V = \frac{828}{6} = 138$$

Шаг третий: найти площадь треугольника.

$$[A_1A_2, A_1A_3] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 5 & -1 \\ 4 & 11 & -1 \end{vmatrix} = (6; -9; 75)$$

$$S = |[A_1A_2, A_1A_4]|/2 = \sqrt{6^2 + 9^2 + 75^2}/2 = \frac{3\sqrt{638}}{2}$$

Шаг четвертый: найти высоту.

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{276}{\sqrt{638}}$$

Ответ: $V = 138, h = \frac{276}{\sqrt{638}}$

Условие: вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1(-2; 0; -4)$, $A_2(-1; 7; 1)$, $A_3(4; -8; -4)$, $A_4(1; -4; 6)$ и его высоту, опущенную из вершины A_1 на грань $A_2A_3A_4$.

Решение:
Шаг первый: получить векторы. Т.к. в конце надо посчитать грань $A_2A_3A_4$, посчитаем векторы из точки A_2.
$A_2A_1 = A_1 - A_2 = (-1; -7; -5)$
$A_2A_3 = A_3 - A_2 = (5; -15; -5)$
$A_2A_4 = A_4 - A_2 = (2; -11; 5)$

Шаг второй: найти объем.

$$(A_2A_1, A_2A_3, A_2A_4) = \begin{vmatrix} -1 & -7 & -5 \\ 5 & -15 & -5 \\ 2 & -11 & 5 \end{vmatrix} = 500$$

$$V = \frac{500}{6} = \frac{250}{3}$$

Шаг третий: найти площадь треугольника.

$$[A_2A_3, A_2A_4] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -15 & -5 \\ 2 & -11 & 5 \end{vmatrix} = (-130; -35; -25)$$

$$S = |[A_2A_3, A_2A_4]|/2 = \sqrt{130^2 + 35^2 + 25^2}/2 = \frac{25\sqrt{30}}{2}$$

Шаг четвертый: найти высоту.

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{500}{25\sqrt{30}} = \frac{20}{\sqrt{30}}$$

Ответ: $V = \frac{250}{3}, h = \frac{20}{\sqrt{30}}$