

Условие: вычислить расстояние от точки $P(7; 2; 2)$ до прямой

$$\frac{x + 12}{-7} = \frac{y - 15}{16} = \frac{z + 3}{-9}$$

Решение: способ 1 - через производную расстояния.

Переведем прямую в параметрический вид:

$$f(t) = \begin{cases} x = -7t - 12 \\ y = 16t + 15 \\ z = -9t - 3 \end{cases}$$

Запишем квадрат функции расстояния от точки на прямой до P :

$$d^2 = ((-7t - 12) - 7)^2 + ((16t + 15) - 2)^2 + ((-9t - 3) - 2)^2$$

Идея в том, чтобы ее дифференцировать. Можно раскрывать эти скобки как хотите.

$$d^2 = (-9t - 5)^2 + (-7t - 19)^2 + (16t + 13)^2$$

$$(d^2)' = -18(-9t - 5) - 14(-7t - 19) + 32(16t + 13)$$

Приравниваем к нулю и ищем t для минимума функции:

$$-18(-9t - 5) - 14(-7t - 19) + 32(16t + 13) = 0 \Rightarrow t = -1$$

Подставляем в параметрическую форму:

$$f(-1) = \begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \\ z = 6 \end{cases}$$

Теперь считаем расстояние между этими двумя точками:

$$d((7; 2; 2), (-5; -1; 6)) = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$$

Ответ: 13.

Условие: вычислить расстояние от точки $P(-5; 1; 1)$ до прямой

$$\frac{x - 8}{19} = \frac{y - 24}{5} = \frac{z + 24}{-24}$$

Решение: способ 2 - через проекции.

Спроектируем вектор, соединяющий точку на прямой и точку P , на прямую. Точка на прямой известна из уравнения - то, что вычитаем: $M(8; 24; -24)$. Вектор, соединяющий точку, соответственно:

$$MP = (-13; -23; 25)$$

А вектор, на который будем проектировать, есть направляющий вектор прямой:

$$l = (19; 5; -24)$$

Векторная проекция считается по формуле:

$$\text{pr}_l MP = \frac{(MP, l)}{(l, l)} \cdot l = \frac{-962}{962} l = -l$$

Перемножаем координаты векторов между собой:

$$(MP, l) = -13 \cdot 19 - 23 \cdot 5 - 24 \cdot 25 = -962$$

Скалярное произведение считается просто как перемножение координат векторов вместе:

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Прибавляем эту проекцию к точке на прямой, чтобы получить проекцию точки P на прямую

$$P' = M - l = (-11; 19; 0)$$

Считаем расстояние между двумя точками:

$$d(P, P') = \sqrt{6^2 + 18^2 + 1^2} = 19$$

Ответ: 19.

Условие: вычислить расстояние от точки $P(9; 2; 1)$ до прямой

$$\frac{x - 4}{-3} = \frac{y - 5}{4} = \frac{z - 2}{-1}$$

Решение:

Шаг первый: выделить точку на прямой, направляющий вектор, проектируемый вектор.

$$M = (4; 5; 2)$$

$$l = (-3; 4; -1)$$

$$MP = P - M = (5; -3; -1)$$

Шаг второй: проектируем

$$\text{pr}_l MP = \frac{(l, MP)}{(l, l)} l = \frac{-26}{26} l = -l$$

$$P' = M - l = (7; 1; 3)$$

Шаг третий: находим расстояние.

$$d(P, P') = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

Ответ: 3.