Если вы готовились к матану, а я думаю такого было избежать тяжело, то комплексные числа были первым билетом на коллоке - общее понимание у всех должно быть. К счастью, я уже про комплексные числа писал, поэтому привожу краткое содержание билета с матана:

О комплексных числах можно думать как о расширении действительных чисел в 2д-плоскость. Если действительные числа обозначаются через $\mathbb{R}$, то комплексные - через $\mathbb{C}$. Все комплексные числа связаны с особым числом i, которое определено через его свойство:

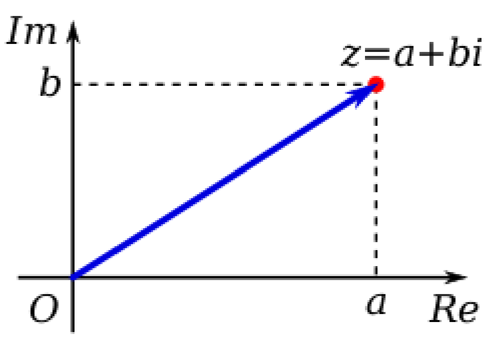
$$i^2 = -1$$

Заметьте, что мы не говорим, что $i = \sqrt{-1}$, ведь это не совсем правильно.

Для начала представим алгебраическую форму записи числа:

$$z = a + bi \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Идея следующая: комплексное число будет состоять из двух частей - действительная часть a, и мнимая часть b, домноженная на i чтобы "поднять" ее в другое направление.



Проведите эту параллель между 2д векторами и комплексными числами! В этом смысле, число $a + bi$ - это вектор $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, записанный в базисе $[\overline{1}; \overline{i}]$. По действительному "вектору" мы отводим a, и по "мнимому" еще b.

Модуль

Ловим еще одну параллель с векторами, ведь модуль комплексного числа это тоже самое, что и модуль вектора - его длина!
Модуль - $|z|$ - длина линии от начала координат до числа на комплексной плоскости, считается через теорему Пифагора:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Где a и b - действительная и мнимая части числа в алгебраической форме.

Матричные комплексные числа

Продолжая тему АлГема, комплексные числа можно представить в виде матриц. Введем следующие две матрицы:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Где матрица I представляет действительную часть, а J - мнимую. Матрицы выбраны таким образом, что для них выполняются уравнения

$$\begin{cases} I^2 = I \\ J^2 = -I \\ IJ = JI = J \end{cases}$$

Аналогичные для стандартных комплексных чисел.
Тогда число $a + bi$ можно записать в матричной форме как $aI + bJ$:

$$aI + bJ = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Операции

Введем два комплексных числа,с которыми будем делать операции:

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \qquad z_2 = a_2 + b_2 i$$

Сложение и вычитание остается простым:

$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Умножение не такое простое, но выводится как и прошлые:
$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$
$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Деление чуть сложнее, чтобы его можно было адекватно записать, введем отдельное понятие:
Сопряженное число для $z = a + bi$ есть $\overline{z} = a - bi$. Обозначается с помощью черты над числом. Сопряженное число имеет противоположную мнимую часть по отношению к оригинальному числу.

Сопряженные числа интересны из-за их произведения:

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Теперь, вместе с этим фактом, попробуем найти обратное к комплексному числу, домножив на сопряженное:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

После такого задания мы можем попробовать найти частное двух комплексных чисел, так же домножая на сопряженное знаменателя:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$$

Пример задачи

Условие: найдите произведение чисел $2 + 3i$ и $5 - 2i$.
Решение:

$$(2+3i)(5-2i) = 10 - 4i + 15i - 6i^2 = 10 + 6 + 11i = 16 + 11i$$

Условие: найдите частное чисел $2+2i$ и $\sqrt{3}+i$.
Решение:

$$\frac{2+2i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2\sqrt{3}+2\cdot 1}{\sqrt{3}^2+1^2} + \frac{2\sqrt{3}-2\cdot 1}{\sqrt{3}^2+1^2}i = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

Но можно делить и с помощью перевода в показательную запись, что *имхо* удобнее:

$$2+2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}} \qquad \sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi i}{6}}$$

$$\frac{2+2i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}}{2e^{\frac{\pi i}{6}}} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}-\frac{\pi i}{6}} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{12}}$$

Получились одинаковые числа, просто в разных видах.
Проблема с переводом в показательный вид обстоит в том, что угол не всегда получается посчитать.