Замена базиса

Дано отображение $A : L \to \overline{L}$, из базиса e для векторов L в базис f для векторов $\overline{L}$. Как изменится матрица отображения A, если сделать замену базисов e и f на базисы e' и f' соответственно?

Если матрица A переводит вектор из базиса e в базис f, то *новая матрица* A' будет переводить вектор из базиса e' в базис f'.

$$y = Ax \qquad\qquad y' = A'x'$$

Для нахождения этой новой матрицы A' рассмотрим какой-то вектор $X \in L$, и его образ $Y = L(X) \in \overline{L}$, и проследим за их изменениями в разных базисах.
Введем обозначения:

- Координаты вектора X в базисах e и e' обозначим за x и x',
- Координаты вектора Y в базисах f и f' обозначим y и y' соответственно.
- Сами матрицы перехода к новым базисам обозначим за S и P: $x = Sx'$, $y = Py'$.

Теперь мы можем начать рассуждения. По определению матрицы отображения, получить образ вектора просто:

$$y = Ax$$

Заменяя эти векторы на векторы в новом базисе, получим:

$$Py' = ASx'$$

Раз P - матрица перехода, для нее существует обратная. Умножим на нее:

$$y' = P^{-1}ASx'$$

Но y' мы можем выразить через новую матрицу отображения:

$$y' = A'x' \Rightarrow A'x' = P^{-1}ASx'$$

Сокращаем на x' и получаем уравнение, связывающее старую и новую матрицу отображения:

$$A' = P^{-1}AS$$

Сумма и произведение отображений

Отображения можно суммировать и умножать на скаляры. Нашими подопытными линейными отображениями будут $A : L \to \overline{L}$ и $B : L \to \overline{L}$. Сумму отображений записывают как $A + B$. Имеется ввиду следующее отношение:

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$$

Произведение отображения на число как λA, и имеется ввиду следующее:

$$(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$$

Такие суммы и произведения тоже будут линейными отображения, ведь выполняются равенства линейности.
Сначала сумма отображений:

- Для суммы, рассмотрим векторы $x, y \in L$:

$$(A + B)(x + y) = A(x + y) + B(x + y) =$$
$$= A(x) + A(y) + B(x) + B(y) = (A + B)(x) + (A + B)(y)$$

- Произведение на скаляр:

$$(A + B)(\alpha x) = A(\alpha x) + B(\alpha x) = \alpha A(x) + \alpha B(x) = \alpha(A + B)(x)$$

  А для произведения отображения на число:

- Сумма:

$$(\lambda A)(x + y) = \lambda A(x + y) = \lambda A(x) + \lambda A(y) = (\lambda A)(x) + (\lambda A)(y)$$

- Произведение на скаляр:

$$(\lambda A)(\alpha x) = \lambda A(\alpha x) = \lambda\alpha A(x) = \alpha\lambda A(x) = \alpha(\lambda A)(x)$$

Эти четыре равенства и доказывают линейность отображений суммы и произведения на число.

Соответственно если эти отображения представлены матрицами, то матрица суммы отображений будет равна сумме матриц, а матрица произведения отображения на число - произведению матрицы на число.

Рассмотрим кое-что пожарче - произведение двух отображений. Сделаем три пространства L, L', L'', и два отображения $A : L \to L', B : L' \to L''$. Тогда произведений этих отображений будет называться отображение $BA : L \to L''$ (заметьте, что отображение, что делается первым - A, записано справа, аналогично произведению матриц) - оно обозначает последовательное применение отображений.

$$(BA)(x) = B(A(x))$$

Ну и конечно, это произведение тоже является линейным.

- Сумма:

$$(BA)(x+y) = B(A(x+y)) = B(A(x)+A(y)) = \\ = B(A(x)) + B(A(y)) = (BA)(x) + (BA)(y)$$

- Произведение на скаляр:

$$(BA)(\alpha x) = B(A(\alpha x)) = B(\alpha A(x)) = \alpha B(A(x) = \alpha(BA)(x)$$

С произведением отображений и матрицами идея аналогичная. Если для пространств L, L', L'' были выбраны базисы e, f, g соответственно, где матрица A - матрица отображения из базиса e в f, и B - из f в g, то отображение BA будет иметь матрицу BA из базиса e в g.

При векторе $x \in L$ в первом пространстве, можно прийти к вектору пространства L'' с последовательным умножением на матрицы:

$y = Ax \in L'$, а $z = By = BAx \in L''$. Получаем, что отображению BA соответствует матрица BA.

Из свойства ранга произведения матриц следует, что ранг отображения не превышает рангов отдельных отображений.