Нормальное уравнение прямой

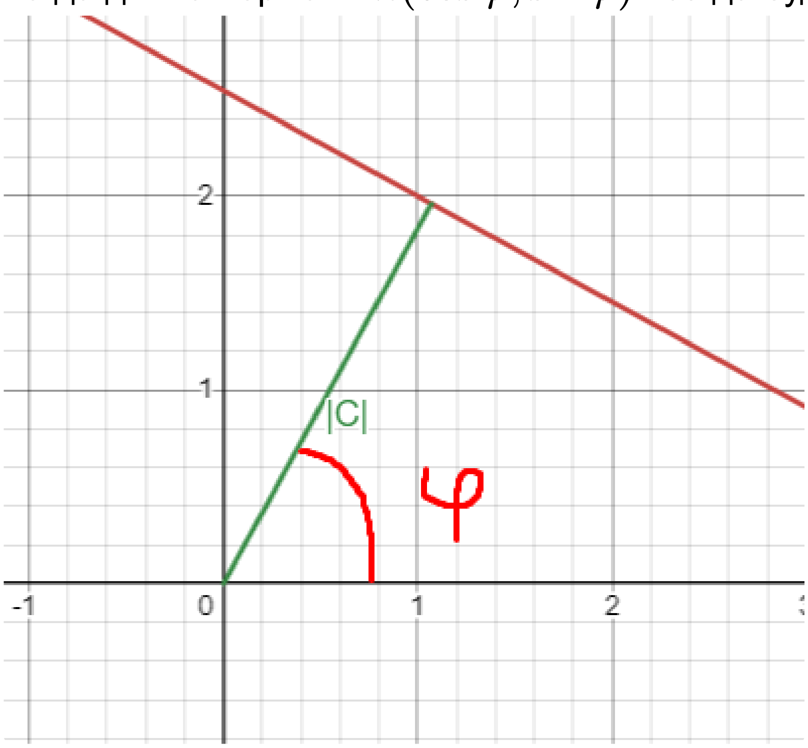
Нормальное уравнение - частный случай общего уравнения.
Такое уравнение характеризуется тем, что длина нормального вектора $\overline{n}(A;B)$ равна единице, а перед коэффициентом C стоит отрицательный знак.

$$Ax + By - C = 0, \quad |(A;B)| = 1$$

Название "нормальное" здесь приходит от слова "нормаль", длина которой равна единице, а не синонимично слову "обычное".
Раз нормальное уравнение характеризуется тем, что длина нормали равна единице, можно записать уравнение через синусы и косинусы - введем угол φ, отсчитывающий угол от положительного направления оси Ox до вектора нормали (расположенного в начале координат) против часовой стрелки (то есть все так же, как для прямой с угловым коэффициентом). Тогда можно записать прямую как:

$$\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y - C = 0$$

Тогда длина нормали $\overline{n}(\cos\varphi, \sin\varphi)$ всегда будет равна единице.



Можно записать это уравнение другим способом, введя определение направляющего косинуса вектора. Направляющий косинус вектора $\overline{a}$ для какой-то оси (в примере Ox) является косинус, задающийся следующим равенством:

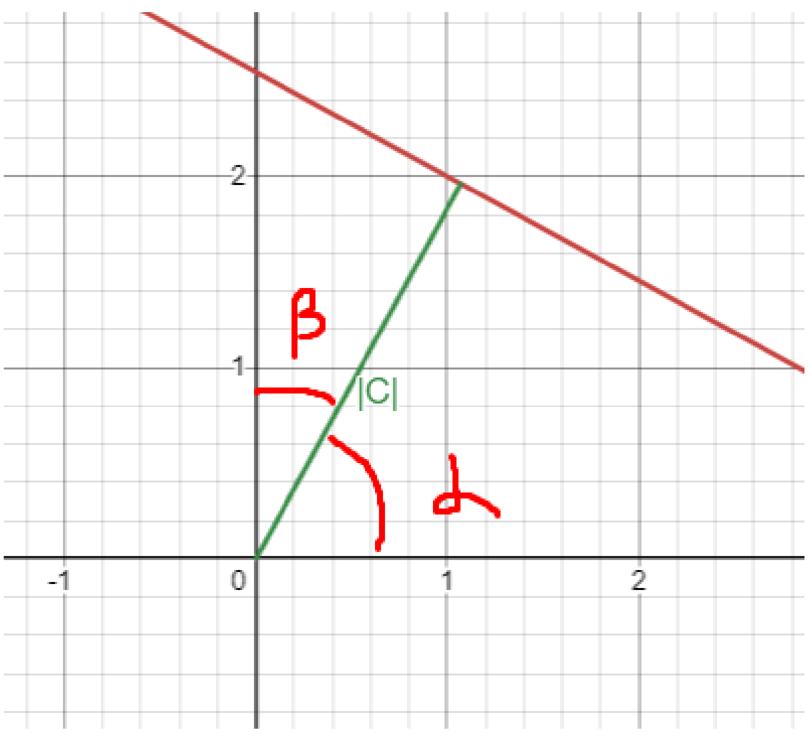
$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}$$

Угол α - угол, который вектор образует с положительной полуосью координат (в примере, осью Ox).
Свойство направляющих косинусов вектора - вектор, составленный из таких косинусов, будет иметь длину, равную единице.
Например, для косинусов углов α и β:

$$|(\cos \alpha; \cos \beta)| = \sqrt{\left(\frac{a_x}{|\overline{a}|}\right)^2 + \left(\frac{a_b}{|\overline{a}|}\right)^2} = \frac{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}{|\overline{a}|} = \frac{|\overline{a}|}{|\overline{a}|} = 1$$

Мы можем переписать уравнение выше используя направляющие косинусы:

$$\cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y - C = 0$$



Геометрически, такая запись представляет из себя прямую, перпендикулярную нормальному вектору, на расстоянии $|C|$ от начала координат по направлению нормального вектора.

Как перевести общее уравнение прямой в нормальное уравнение?

$$Ax + By + C = 0$$

Самое важное условие - длина нормали должна быть равна 1. Сейчас нормаль равна $\overline{n}(A; B)$ и ее длина равна $\sqrt{A^2 + B^2}$. Чтобы привести вектор к единичной длине, нужно разделить его на его же длину. Это повлечет деление каждой координаты на это значение. Чтобы добиться такого эффекта, мы делим все уравнение на это значение, или же умножаем на $\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Это значение называется нормирующим множителем, потому что умножение на него "нормирует" нормальный вектор - приводит его к единичной длине. Получаем:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Нужно соблюсти еще второе условие - коэффициент C должен быть с отрицательным знаком. Для этого мы умножаем на противоположный знак у C:

$$-\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x - \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y - \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Все это можно сделать одним действием - умножить уравнение общего вида на $\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, взятого со знаком, противоположным знаку коэффициента C.

Нормальное уравнение плоскости

Не поверите, но для плоскости все тоже самое. Все так же нормаль равна единице и все так же свободный коэффициент (теперь уже D) с отрицательным знаком.
Перевод из общего вида уравнения в нормальное уравнение происходит точно так же с помощью нормирующего множителя, здесь правда уже будет три слагаемых под корнем:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

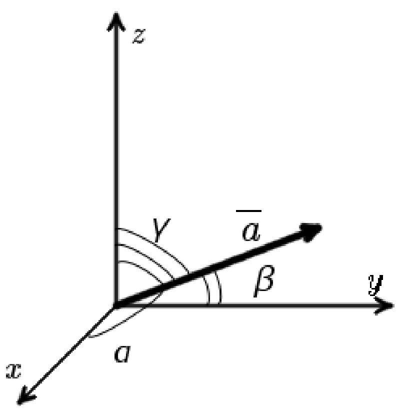
$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

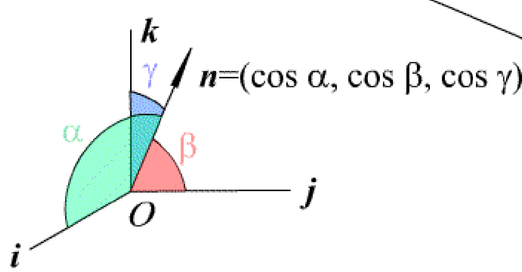
$$-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x - \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y - \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z - \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

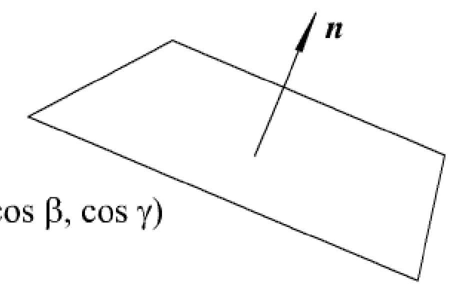
Вот здесь направляющие косинусы более интересны, чем они были для прямой. Если мы возьмем направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, то можно представить нормаль через них и прямая будет выглядеть следующим образом:

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Эти углы выглядят примерно следующим образом:

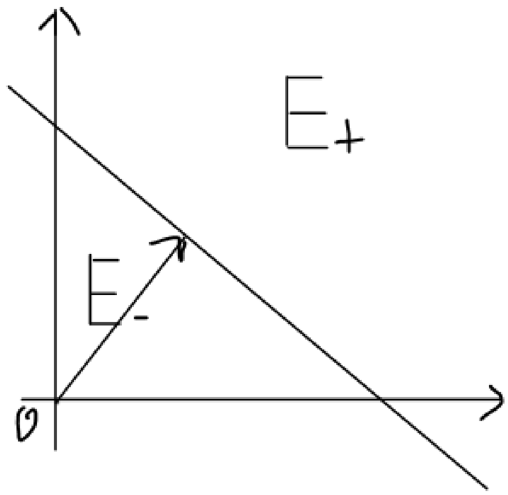


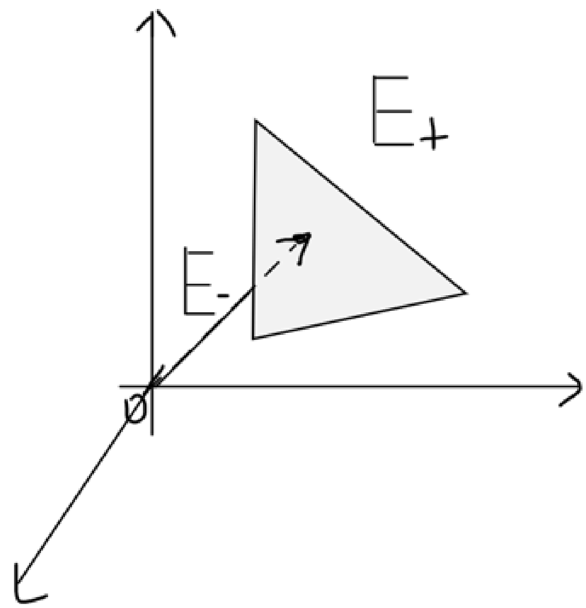




Отклонение точки от прямой/плоскости

Отклонением точки A от прямой/плоскости называется расстояние от этой точки до прямой/плоскости, и обозначается через $\delta(A)$, причем со знаком. Прямая/плоскость делит пространство в котором они лежат на две части. Если точка A лежит в той, куда направлена нормаль прямой/плоскости (на рисунках $E+$), то $\delta(A)$ положительна. В ином случае (направлена в $E-$) - отрицательна.





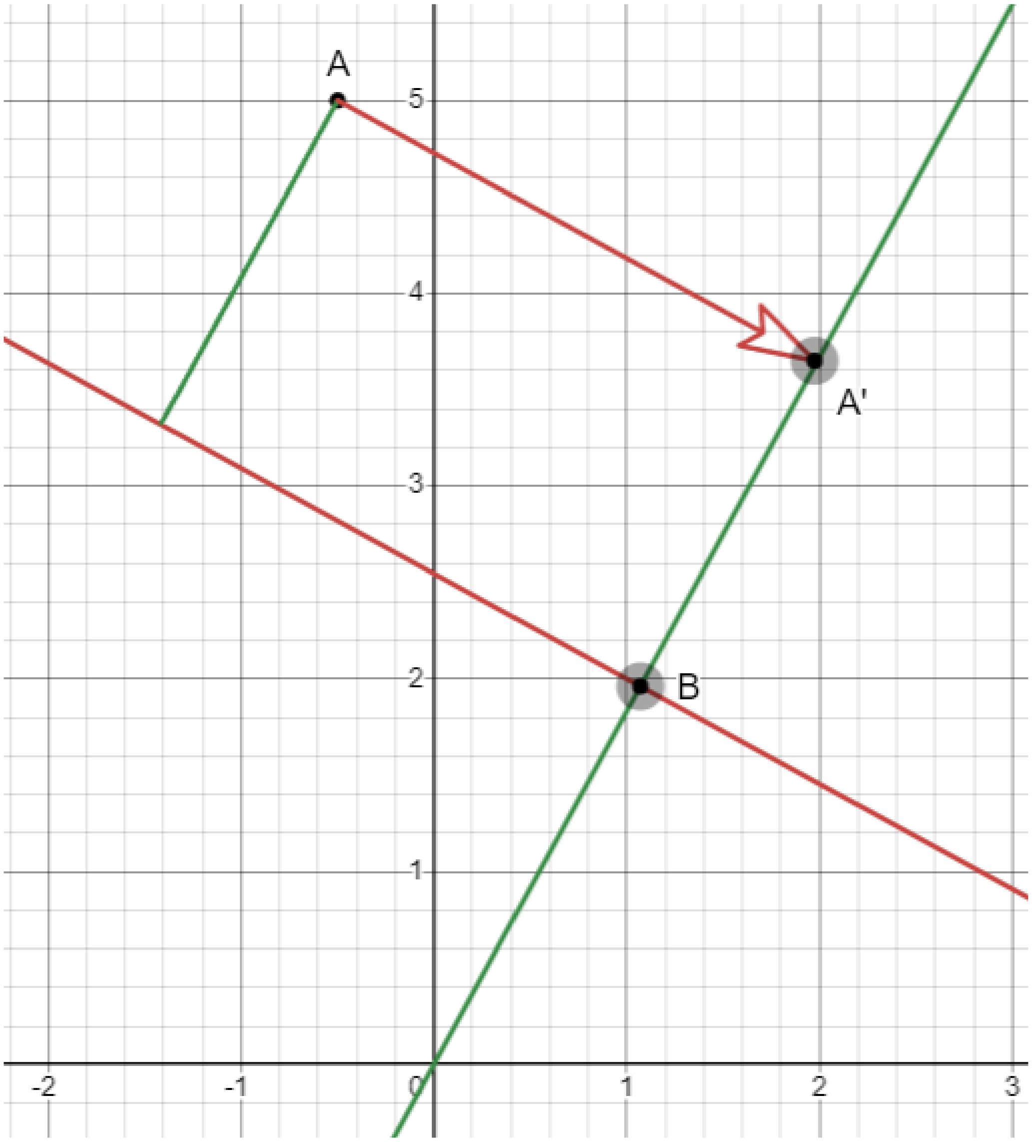
И самое сладкое - значение этого отклонения мы можем получить, просто подставив координаты точки в уравнение прямой/плоскости!

$$\delta(A) = \cos\alpha \cdot A_x + \cos\beta \cdot A_y - C$$
$$\delta(A) = \cos\alpha \cdot A_x + \cos\beta \cdot A_y + \cos\theta \cdot A_z - D$$

Как это понимать интуитивно? Как было написано выше, геометрический смысл такой записи - сдвиг на расстояние C (или D) от начала координат по направлению нормального вектора. Соответственно это отклонение и считает "лишний сдвиг":

$$\cos\alpha \cdot A_x + \cos\beta \cdot A_y - (C + \delta(A)) = 0$$
$$\cos\alpha \cdot A_x + \cos\beta \cdot A_y + \cos\theta \cdot A_z - (D + \delta(A)) = 0$$

Формальное доказательство проводится через проекции. Тут докажем для прямой, но для плоскости рассуждения идентичные. Проведем ось l через начало координат по направлению нормального вектора. Эта ось будет пересекать прямую под прямым углом, ведь мы построили эту ось по направлению нормального вектора. Назовем эту точку пересечения как B.



Как видно, при смещении точки A по прямой, параллельной нашей, отклонение $\delta(A)$ не меняется от точки A к точке A'.
$\delta(A) = \delta(A') = \text{пр}_l \overline{BA}$. В свою очередь, $\overline{BA} = A - B = \overline{OA} - \overline{OB}$, и по свойствам проекций,

$$\text{пр}_l \overline{BA} = \text{пр}_l \overline{OA} - \text{пр}_l \overline{OB}$$

По определению проекции:

$$\text{пр}_l \overline{OA} = \frac{(\overline{n}, \overline{OA})}{|\overline{n}|} = (\overline{n}, \overline{OA}) = A_x \cdot \cos\alpha + A_y \cdot \cos\beta$$

С вектором $\overline{OB}$ из геометрических соображений мы уже выяснили, что его длина равна C, да и он уже лежит на оси l, поэтому $\text{пр}_l \overline{OB} = |\overline{OB}|$. Но строго математически:

$$\text{пр}_l\overline{OB} = \frac{(\overline{n}, \overline{OB})}{|\overline{n}|} = (\overline{n}, \overline{OB}) = B_x \cdot \cos\alpha + B_y \cdot \cos\beta$$

Но потому что точка B лежит на нашей прямой, то выполняется равенство:

$$B_x \cdot \cos\alpha + B_y \cdot \cos\beta - C = 0$$

Объединяя эти два уравнения и получаем, что

$$\text{пр}_l\overline{OB} = C$$

Остается только подставить:

$$\delta(A) = \text{пр}_l\overline{BA} = \text{пр}_l\overline{OA} - \text{пр}_l\overline{OB} = A_x \cdot \cos\alpha + A_y \cdot \cos\beta - C$$

А раз мы нашли отклонение для прямых в нормальном виде, мы можем воспользоваться все тем же и для прямых в общем виде! Помните, как мы делили все на нормирующий множитель? Точно так же и поступим еще раз.

$$\delta(P) = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \delta(P) = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Другое следствие из функции отклонения: две точки будут лежать в одной же полуплоскости ($E+\ /\ E-$), когда их отклонения имеют одинаковый знак.

Но отклонения мы используем редко, поэтому превратим их в формулы для расстояния $d(P)$:

$$d(P) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad d(P) = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Это формулы ***расстояния*** для точки $P(x; y; \{z\})$ до прямой или плоскости. Заметьте, как мы ставим модуль в числителе - потому что расстояние всегда положительное, в отличие от отклонения:

$$d(P) = |\delta(P)|$$

Пример задачи

Условие: привести прямую, записанную в общем виде к нормальному виду.

$$12x - 5y + 26 = 0$$

Решение: составляем нормирующий множитель.

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{13^2}} = \frac{1}{13}$$

При коэффициенте C стоит плюс, значит берем μ со знаком минус.

$$\mu = -\frac{1}{13}$$

И умножаем наше уравнение на этот множитель:

$$-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 2 = 0$$

Условие: привести плоскость, записанную в общем виде к нормальному виду.

$$2x - y - 2z + 12 = 0$$

Решение: составляем нормирующий множитель.

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

При D стоит плюс, поэтому берем μ со знаком минус.

$$\mu = -\frac{1}{3}$$

И умножаем:

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 4 = 0$$

Условие: найти расстояние точки $A(1;1;1)$ до плоскости $2x-2y+z+3$:
Решение: подставим все в формулу. Вместо x, y, z подставляем координаты точки A, а снизу считаем нормищующий множитель.

$$d(A)=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2-2+1+3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}$$

Можно было решить и с помощью приведения к нормальному виду + отклонение:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^3}}=\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$$

Коэффициент D с положительным знаком, поэтому берем с минусом:

$$\mu=-\frac{1}{3}$$

Итого прямая:

$$-\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}-\frac{z}{3}-1=0$$

Теперь считаем отклонение:

$$\delta(A)=-\frac{2\cdot 1}{3}+\frac{2\cdot 1}{3}-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}$$

И расстояние соответственно будет:

$$d(A)=|\delta(A)|=\frac{4}{3}$$