Условие: доказать, что система линейных уравнений $Ax = b$ совместна, и найти ее общее решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Решение: если решения существуют, это уже будет доказывать совместность системы. Найдем решения.

Найдем общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Упростим расширенную матрицу системы методом Гаусса:
1: прибавить к строке $[3]$ строку $[1]$
2: вычесть из строки $[3]$ строку $[2]$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & | & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & | & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & | & 4 \end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & | & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & | & 9 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & | & 9 \end{pmatrix} \sim^{(2)}$$
$$\sim^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & | & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем, что третья строка - нулевая, а в столбиках (4) и (5) только в одной строке есть ненулевые значения. Поэтому составим систему из этой матрицы, и возьмем переменные (4) и (5) за базисные:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ x_4 = 9 - 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 \end{cases}$$

Теперь мы можем записать общее решение системы:

$$\left(x_1;\quad x_2;\quad x_3;\quad 9-2x_1+7x_2-4x_3;\quad \frac{5}{3}-\frac{1}{3}x_1+\frac{4}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3\right)$$

Домножим все свободные переменные на 3, чтобы избавиться от дробей:

$$\left(3x_1;\quad 3x_2;\quad 3x_3;\quad 9-6x_1+21x_2-12x_3;\quad \frac{5}{3}-x_1+4x_2-2x_3\right)$$

Это и будет ответом.

Условие: доказать, что система линейных уравнений $Ax=b$ совместна, и найти ее общее решение.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 3 & 4 & 0\\ 2 & -9 & 2 & 0 & 1\\ 1 & -4 & -1 & -4 & 1\end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix}$$

Решение: если решения существуют, это уже будет доказывать совместность системы. Найдем решения.

Методом Гаусса приводим к упрощенному виду:
1: прибавить к строке $[3]$ строку $[1]$.
2: вычесть из строки $[3]$ строку $[2]$.
3: вычесть из строки $[2]$ строку $[1]$, умноженную на 2.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -5 & 3 & 4 & 0 & 4\\ 2 & -9 & 2 & 0 & 1 & 7\\ 1 & -4 & -1 & -4 & 1 & 3\end{array}\right)\sim^{(1)}\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -5 & 3 & 4 & 0 & 4\\ 2 & -9 & 2 & 0 & 1 & 7\\ 2 & -9 & 2 & 0 & 1 & 7\end{array}\right)\sim^{(2)}$$

$$\sim^{(2)}\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -5 & 3 & 4 & 0 & 4\\ 2 & -9 & 2 & 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim^{(3)}$$

$$\sim^{(3)}\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -5 & 3 & 4 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -4 & -8 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Е нас есть столбик (1) как у единичной матрицы, и (5) как у единичной матрицы. Тогда переменные $(1),(5)$ будут базисными, $(2),(3),(4)$ - свободными.
Записываем уравнения:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_2 - 4x_3 - 8x_4 + x_5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ x_5 = -1 - x_2 + 4x_3 + 8x_4 \end{cases}$$

Записываем вектор общего решения:

$$(5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 4; \quad x_2; \quad x_3; \quad x_4; \quad -x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 1)$$

Условие: доказать, что система линейных уравнений $Ax = b$ совместна, и найти ее общее решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение: если решения существуют, это уже будет доказывать совместность системы. Найдем решения.

Методом Гаусса:
1: прибавить к строке $[3]$ строку $[1]$.
2: вычесть из строки $[3]$ строку $[2]$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & | & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & | & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \sim^{(2)}$$

$$\sim^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & | & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Сделаем базисными переменными (4) и (5):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_5 = -x_1 - x_2 - 4x_3 \\ 3x_4 = 1 - 3x_1 - 4x_2 - x_3 \end{cases}$$

Тогда общее решение:

$$\left(x_1; \quad x_2; \quad x_3; \quad \tfrac{1}{3} - x_1 - \tfrac{4}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3; \quad -\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 - 2x_3\right)$$

Домножаем x_1 на 2, x_2 на 6, x_3 на 3.

$$\left(2x_1; \quad 6x_2; \quad 3x_3; \quad \tfrac{1}{3} - 2x_1 - 8x_2 - x_3; \quad -x_1 - 3x_2 - 6x_3\right)$$

Условие: доказать, что система линейных уравнений $Ax = b$ совместна, и найти ее общее решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение: если решения существуют, это уже будет доказывать совместность системы. Найдем решения.
Упрощаем методом Гаусса:
1: прибавить к строке $[3]$ строку $[1]$.
2: вычесть из строки $[3]$ строку $[2]$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & | & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & | & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim^{(2)}$$

$$\sim^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & | & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Берем за базисные (4) и (5).

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_4 = -x_1 + x_2 - 4x_3 \\ 2x_5 = 1 - 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{cases}$$

Записываем вектор:

$$\left(x_1; \quad x_2; \quad x_3; \quad -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3; \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)$$

Домножаем x_1 на 6, x_2 на 3, x_3 на 6.

$$\left(6x_1; \quad 3x_2; \quad 6x_3; \quad -2x_1 + x_2 - 8x_3; \quad \frac{1}{2} - 9x_1 + 3x_2 - 3x_3\right)$$