Как и с векторным произведением, вычисление через координаты возможно только когда векторы записаны в *ортонормированном базисе*.

Определим три вектора в общей форме, с которыми будем работать:

$$\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$$
$$\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$$
$$\overline{c} = (c_1; c_2; c_3)$$

Как мы знаем, смешанное произведение - это просто комбинация скалярного и векторного произведения вместе:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$$

Тогда, в ортонормированном базисе, смешанное произведение можно представить как определитель матрицы третьего порядка, где эти векторы записаны как столбцы (или строчки, ведь определитель не меняется, если транспонировать матрицу):

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2a_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 =$$

$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

В случае неортонормированного базиса, определитель нужно умножить на смешанное произведение базисных векторов:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$$

Доказательство этого факта следует из раскрытия смешанного произведения с координатами, конечно же! А вы думали все так просто, хаха)

$$(a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3}, b_1\overline{e_1} + b_2\overline{e_2} + b_3\overline{e_3}, c_1\overline{e_1} + c_2\overline{e_2} + c_3\overline{e_3})$$

Раскрываем по линейности, циклируем базисные координаты с помощью свойств (3), (4) билета #11, собираем координаты обратно в определитель.

Есть два способа доказать, почему это работает, но для них нужно сперва почитать 12. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей. Вычисление площади параллелограмма.

Первый способ

Сначала получим векторное произведение $[\overline{b}, \overline{c}]$:

$$[\overline{b}, \overline{c}] = (b_2c_3 - b_3c_2; b_3c_1 - b_1c_3; b_1c_2 - b_2c_1)$$

Как мы знаем из вопроса 8. Скалярное произведение и его свойства. Вычисление скалярного произведения. Нахождение длины вектора и косинуса угла между векторами., скалярное произведение умножается покоординатно:

$$(\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

Если перефасовать слагаемые и множители местами, можно увидеть, что получившееся - ровно то же самое, что и с определителем.

Второй способ

Посчитаем векторное произведение через мнемонический определитель: где во вторую и третью строчку мы записываем векторы $\overline{b}$ и $\overline{c}$, а в первую - орты $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$:

$$[\overline{b}, \overline{c}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}(b_2c_3 - b_3c_2) - \overline{j}(b_1c_3 - b_3c_1) + \overline{k}(b_1c_2 - b_2c_1)$$

А теперь заметим следующее интересное свойство для скалярного произведения: при умножении по-координатно, орты "убираются":

$$((a_1\overline{i}; a_2\overline{k}; a_3\overline{j}), (b_1\overline{i}; b_2\overline{k}; b_3\overline{j})) = a_1b_1\cancel{\overline{i}} + a_2b_2\cancel{\overline{j}} + a_3b_3\cancel{\overline{k}}$$

Поэтому, если посмотреть на результат определителя выше, можно нагло заменить первую строчку на вектор $\overline{a}$, чтобы получить результат смешанного произведения!

$$(\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Пример задачи

Условие: найдите смешанное произведение векторов
$\overline{a}(7; 3; 1), \overline{b}(-3; 8; 1), \overline{c}(4; -2; 6)$.
Решение:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$7(48 + 2) - 3(-18 - 4) + 1(6 - 32) = 390$$