Существование и количество столбцов

Как было сказано, для существования фундаментальной матрицы нужны нетривиальные решения однородной системы.

Если ранг матрицы однородной системы r меньше числа неизвестных переменных n, то система имеет фундаментальную матрицу из $n - r$ столбцов (чем меньше ранг системы, тем больше фундаментальная система).
Самый примитивный случай - ранг максимальный ($r = n$), тогда матрица невырожденная, отчего система имеет лишь одно решение. Мы знаем, что приведенная система всегда имеет тривиальное решение, поэтому оно будет единственное. Однако если тривиальное решение - единственное, как уже было написано, фундаментальной матрицы не существует.

Найдем решения для приведенной системы, с помощью метода Гаусса, описанного ранее. Так как у приведенной системы $b = 0$, то коэффициенты b_i отпадают. Фиксируем свободные переменные "константами" c и получаем систему:

$$\begin{cases} x_1 = -(a'_{11}x_{r+1} + a'_{12}x_{r+2} + \ldots + a'_{1(n-r)}x_n) \\ x_2 = -(a'_{21}x_{r+1} + a'_{22}x_{r+2} + \ldots + a'_{2(n-r)}x_n) \\ \ldots \\ x_r = -(a'_{r1}x_{r+1} + a'_{r2}x_{r+2} + \ldots + a'_{r(n-r)}x_n) \\ x_{r+1} = c_1 \\ x_{r+2} = c_2 \\ \ldots \\ x_n = c_{n-r} \end{cases}$$

Эта система совпадает с уравнением $x = Fc$,где

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

Записываем коэффициенты системы в матрицу F. Раньше у нас была "длинная" матрица, но теперь у нее будет дополнение по вертикали (единичной матрицей):

$$F = \begin{pmatrix} -A' \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a'_{11} & -a'_{12} & \dots & -a'_{1(n-r)} \\ -a'_{21} & -a'_{22} & \dots & -a'_{2(n-r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a'_{r1} & -a'_{r2} & \dots & -a'_{r(n-r)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1. Для любого c, произведение $x = Fc$ будет являться решением уравнения $Ax = 0$, поэтому условие (3) выполнено для матрицы F. (вектор c разложил решение по столбикам F)
2. Ранг матрицы F равен количеству столбиков, ведь нижняя часть этой матрицы - единичная матрица. У единичной матрицы ранг максимален (равен $n - r$), а ранга больше у матрицы шириной $n - r$ попросту быть не может. Раз ранг максимален, то все **столбики** линейно независимы, и условие (2) выполнено.
3. Наконец, условие (1). Произведение $AF = 0$ можно рассмотреть как сумму произведений матриц A на каждый столбик F (вспомните билет с умножением матриц)

$$
A \begin{pmatrix} -a'_{11} \\ -a'_{21} \\ \vdots \\ -a'_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} -a'_{12} \\ -a'_{22} \\ \vdots \\ -a'_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + A \begin{pmatrix} -a'_{1(n-r)} \\ -a'_{2(n-r)} \\ \vdots \\ -a'_{r(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0
$$

> Но каждое такое произведение равно нулю, потому что взяв c равным j -тому столбику единичной матрицы, после произведения Fc мы получим j-тый столбик матрицы F. А раз для любого столбика c, $x = Fc \Rightarrow Ax = 0$, то все произведения выше равны нулю (мы ищем произведение A на каждый столбик F). Условие (1) выполнено!

Все три условия выполнились, а значит F является фундаментальной матрицей.
Напомню, что все, что мы сделали, чтобы найти матрицу F - привели A к упрощенному виду и нашли матрицу, соответствующую новой системе уравнений.
Как мы показали этим алгоритмом, из любой матрицы с нетривиальными решениями можно получить фундаментальную матрицу. Причем у этой матрицы получилось $n - r$ столбиков, что и доказывает теорему.

Составление собственной ФСР

Любая система из $n - r$ линейно независимых решений является ФСР! Матрица P, составленная из таких решений, сразу будет удовлетворять условиям (1) и (2). Чтобы показать условие (3), рассмотрим матрицу, состоящую из склееных фундаментальной матрицы F, матрицы решений P и какого-то решения системы x:

$$
V = (F|P|x)
$$

Так как все столбики P и x - линейные комбинации столбиков F (ведь те столбики - решения системы), а $\operatorname{Rg} F = n - r$ (ведь столбики линейно независимы), то и $\operatorname{Rg} V = n - r$. Но и в матрице P все столбики линейно независимые, поэтому и $\operatorname{Rg} P = n - r$. Получается, P - тоже базисная подматрица, и как следствие, x раскладывается по столбцам P - условие (3) выполнено.

Все три условия выполнены, а значит P - фундаментальная матрица.

Общее решение неоднородной системы

Фундаментальные матрицы помогают нам решать неоднородные системы. Если для любого столбика c, $y = Fc$ - решение приведенной системы $Ay = 0$, а $x = x_0 + y$ описывает множество решений для неоднородной системы $Ax = b$, (x_0 - какое-то решение неоднородной системы) получается, что

$$x = x_0 + Fc$$

Выражение справа ($x_0 + Fc$) называется *общим решением неоднородной системы линейных уравнений*, или же:

$$x = x_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots c_{n-r} f_{n-r}$$

В начале билета мы говорили, чтобы у системы было только одно решение, матрица системы A должна быть невырождена ($\det A \neq 0$). Теперь мы можем показать, что если $\det A = 0$, то $\operatorname{Rg} A < n$ (n - количество строк в матрице A), а значит, приведенная система имеет бесконечное количество решений. Из этого следует, если у оригинальной системы есть хоть одно решение, то благодаря фундаментальной матрице можно увидеть бесконечное количество решений. Если же решений у оригинальной системы нет, то их не будет вовсе.

Пример задачи

Условие: найти общее решение системы линейных уравнений $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Решение: совместность этой системы мы уже доказали в прошлом билете, и узнали, что "ее ранг" равен двум.
Для отработки пройденого материала, найдем сначала общее решение приведенной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Я просто скопирую к чему мы пришли с помощью метода Гаусса из прошлого билета:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Сложим с первой строкой вторую, умноженную на четыре, чтобы явно отделить базисные переменные:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Переменные (1) и (2) (там, где только единицы в одной строке, а во всех остальных - нули) будут базисными, остальные ($(3), (4), (5)$) - свободными.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 4x_4 - 21x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ x_2 = -x_4 + 6x_5 \end{cases}$$

Общее решение записывается как вектор - базисные векторы выражаются через свободные, а свободные просто записываются на свои места без каких-либо модификаций. Общее решение приведенной системы:

$$(-2x_3 - 4x_4 + 21x_5; \quad -x_4 + 6x_5; \quad x_3; \quad x_4; \quad x_5)$$

Бонус: построение фундаментальной матрицы через общее решение получается просто с помощью подстановки в каждую свободную переменную единицу, а в остальные нули:

$$\begin{gathered} x_3 : (-2; \quad 0; \quad 1; \quad 0; \quad 0) \\ x_4 : (-4; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 0) \\ x_5 : (21; \quad 6; \quad 0; \quad 0; \quad 1) \end{gathered}$$

Тогда фундаментальная матрица выглядит так (ведь все это решения, и они линейно независимы, ведь внизу находится единичная матрица, поэтому ранг максимален и все такое)

$$F = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 21 \\ 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение ***равносильно*** можно записать как линейную комбинацию столбиков этой матрицы:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ну да вернемся к решению. Мы нашли общее решение приведенной системы, но нам же нужно найти решение оригинальной системы!
В этом и плюс нашего общего решения: чтобы найти все решения оригинальной системы, мы можем найти лишь одно решение оригинальной системы, и прибавить к нему общее решение приведенной.

Быстренько методом Гаусса приведем расширенную матрицу системы к упрощенному виду:

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Система выглядит таким образом:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ x_2 = -1 - x_4 + 6x_5 \end{cases}$$

В общем виде:

$$(1 - 2x_3 - 4x_4 + 21x_5; \quad -1 - x_4 + 6x_5; \quad x_3; \quad x_4; \quad x_5)$$

Нам нужно любое решение этой системы, поэтому возьмем самое простое - примитивное. Подставляем нули за все иксики:

$$(1; -1; 0; 0; 0)$$

Теперь общее решение оригинальной системы будет равно сумме частного решения оригинальной и общего решения приведенной:

$$\begin{pmatrix} -2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ -x_4 + 6x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 - 4x_4 + 21x_5 + 1 \\ -x_4 + 6x_5 - 1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Это и будет *общим решением системы уравнений*.

Ради проверки, возьмем какие-нибудь значения для свободных переменных - единички. Тогда одно из решений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -2 - 4 + 21 + 1 \\ -1 + 6 - 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Подставляем их в систему:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot 16 - 4 \cdot 4 + 2 + 0 + 3 = 5 \\ 2 \cdot 16 - 7 \cdot 4 + 4 + 1 = 9 \\ 1 \cdot 16 - 3 \cdot 4 + 2 + 1 - 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5 \\ 9 = 9 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

Проверка успешна :)