

Если векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  заданы в ортонормированном базисе, то можно вычислить векторное произведение через координаты этих векторов, используя мнемонический определитель:

$$\begin{aligned} [\bar{a}, \bar{b}] &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \bar{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \bar{k}(a_1b_2 - a_2b_1) = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

Соответственно, площадь параллелограмма - длина полученного вектора из векторного произведения:

$$S_{\text{пар}} = |[\bar{a}, \bar{b}]| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

Определитель выше можно считать и методом треугольника, но кажется способ через миноры куда более наглядный.

Заметим, что если векторы даны в двухмерном пространстве (и следовательно  $a_3 = b_3 = 0$ ), то векторное произведение сведется к

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \bar{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

И площадь параллелограмма, образованного этими двумя векторами будет равна  $|a_1b_2 - a_2b_1|$  - определителю, состоящего из координат этих двух векторов.

## Пример задачи

Условие: найдите площадь параллелограмма, тремя вершинами которого являются точки  $A_1(5; 3; 8)$ ,  $A_2(-2; 7; 3)$ ;  $A_3(9; 2; 1)$ .

Решение: для этого найдем длину результирующего вектора из векторного произведения двух векторов, образованных этими точками.

$$\vec{a} = A_2 - A_1 = (-7; 4; -5)$$

$$\vec{b} = A_3 - A_1 = (4; -1; -7)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i}(-28 - 5) - \vec{j}(49 + 20) + \vec{k}(7 - 16) =$$
$$(-33; -69; -9)$$

Теперь найдем длину вектора:

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{(-33)^2 + (-69)^2 + (-9)^2} = \sqrt{5931} = 3\sqrt{659}$$

Это и будет площадь параллелограмма. Если бы мы хотели найти площадь треугольника образованного этими тремя вершинами, то тогда мы эту площадь просто делим на два.