Условие: привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$$

Решение: сейчас ее матрица такова - симметричная матрица, где $a_{ij}$ отвечает за слагаемое $x_ix_j$. По диагонали $a_{ii}$ мы берем коэффициенты при $x_i^2$, а на элементе $a_{ij}$ берем половинный коэффициент, от того что стоит при $x_ix_j$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Метод Лагранжа - это то же самое, что и метод выделения полных квадратов. Начинаем выделять для $x_1$. Собираем все, что с $x_1$ в скобку:

$$(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + x_3^2$$
$$(x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3)) + x_3^2$$

Теперь нужно скобку дополнить так, чтобы она стала полным квадратом:

$$(a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)^2$$

Здесь довольно очевидно, что нужно прибавить:

$$(x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + \underline{(x_2 + x_3)^2}) - \underline{(x_2 + x_3)^2} + x_3^2$$

Теперь собираем квадрат:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + x_3^2$$

Теперь, чтобы привести к каноническому виду, нужно сделать замену базиса:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_2 + x_3 \\ x'_3 = x_3 \end{cases}$$

Матрица замены:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

И тогда получим

$${x'}_1^2 - {x'}_2^2 + {x'}_3^2$$

Матрица такой канонической формы будет

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка:
По формуле $B' = P^T B P$ можно найти матрицу канонической формы, если мы правильно сделали замену базиса. $P$ - матрица перехода из $x'$ в $x$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь (если умножим), равенство действительно выполняется:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

Условие: привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа:

$$2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$$

Решение: для справки, вот так выглядит матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Теперь само приведение: начинаем группировать, и начнем с $x_1$:

$$2(x_1^2 + 2x_1x_2) + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2 =$$

Достраиваем скобку до полного квадрата, и вычитаем соотвественно:

$$= 2(x_1^2 + 2x_1x_2 + \underline{x_2^2}) - \underline{2x_2^2} + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2 =$$
$$= 2(x_1 + x_2)^2 - 2x_2^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$$

Делаем первую замену базиса: $x'_1 = x_1 + x_2$:

$$= 2{x'}_1^2 - 2x_2^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$$

Работа с $x_1$ закончена. Выделим члены, независящие от $x_1$, за $k'(x)$:

$$k'(x) = x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2 =$$

Начинаем работу с $x_2$: заносим в скобки и выделяем полный квадрат:

$$= (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 3x_3^2 = (x_2 + 2x_3)^2 + 3x_3^2$$

Делаем замену $x'_2 = x_2 + 2x_3$. Ну и $x'_3 = x_3$.

$$k'(x) = {x'}_2^2 + 3{x'}_3^2$$

Соединяем все вместе:

$$k(x) = 2{x'}_1^2 + {x'}_2^2 + 3{x'}_3^2$$

Только сейчас это диагональная форма. Чтобы сделать ее канонической, нужно поделить на корни коэффициентов при числах:

$$k(x) = {x'}_1^2 + {x'}_2^2 + {x'}_3^2$$

Замена базиса:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1\sqrt{2} + x_2\sqrt{2} \\ x'_2 = x_2 + 2x_3 \\ x'_3 = x_3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} x$$

---

Условие: привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

Решение: первым делом, работаем с $x_1$:

$$(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - x_2^2 + 2x_2x_3$$
$$(x_1 + x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2x_3$$

Теперь работаем с $x_2$:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2$$
$$(x_1 + x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 + x_3^2$$

Замены:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = x_2 - x_3 \\ x'_3 = x_3 \end{cases}$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Итого:

$$
{x'}_1^2 - {x'}_2^2 + {x'}_3^2
$$

---

Условие: привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа:

$$
2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3
$$

Решение: и спрашивается "куда", где квадраты? В таком случае мы делаем вспомогательную замену:

$$
\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 \\ x_2 = x'_1 - x'_2 \\ x_3 = x'_3 \end{cases}
$$

$$
2(x'_1 + x'_2)(x'_1 - x'_2) + 2(x'_1 + x'_2)x'_3 + 2(x'_1 - x'_2)x'_3
$$
$$
2{x'}_1^2 - 2{x'}_2^2 + 2x'_1x'_3 + 2x'_2x'_3 + 2x'_1x'_3 - 2x'_2x'_3
$$
$$
2{x'}_1^2 - 2{x'}_2^2 + 4x'_1x'_3
$$

Теперь все по старому - выделяем квадрат:

$$
2({x'}_1^2 + 2x'_1x'_3 + {x'}_3^2) - 2{x'}_3^2 - 2{x'}_2^2
$$
$$
2(x'_1 + x'_3)^2 - 2{x'}_3^2 - 2{x'}_2^2
$$

Замены:

$$
\begin{cases} x''_1 = x'_1\sqrt{2} + x'_3\sqrt{2} \\ x''_2 = x'_2\sqrt{2} \\ x''_3 = x'_3\sqrt{2} \end{cases}
$$

Получаем:

$$
{x''_1}^2 - {x''_2}^2 - {x''_3}^2
$$

Составим мартицу перехода от $x''$ к $x$.
От $x'$ к $x''$ нам известна матрица:

$$x'' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} x'$$

Соответственно

$$x' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} x''$$

А матрица перехода от $x'$ к $x$ уже известна:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x'$$

Подставляем равенство для $x'$ и перемножаем матрицы:

$$x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} x''$$

Получаем полную матрицу замены базиса:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

P.S.: эти матрицы нужны, чтобы записать равенство $B' = P^T B P$, но для задач главное привести квадратичную форму к канонической, нежели считать матрицу замены базиса.