Определение определителя

Определитель (или же детерминант) - особая скалярная величина, которая определена для квадратных матриц, и записывается как матрица между вертикальных палочек (как модуль), или с помощью слова $\det$.
То есть, если дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

То ее определитель можно записать как

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Но это был определитель n-ного порядка - потому что матрица была размера $n \times n$. Сначала мы поговорим про определители меньшего порядка, и как их считать.

Подсчет определителя первого, второго и третьего порядков.

Определитель первого порядка:

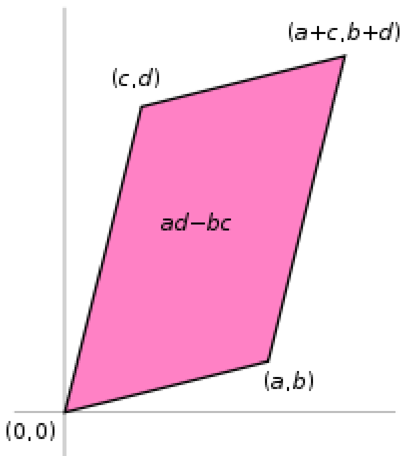
$$A = (a)$$

Это некий частный случай, но он нем все равно стоит сказать.
Определитель матрицы 1×1 просто будет равен единственному элементу этой матрицы: $|A| = a$

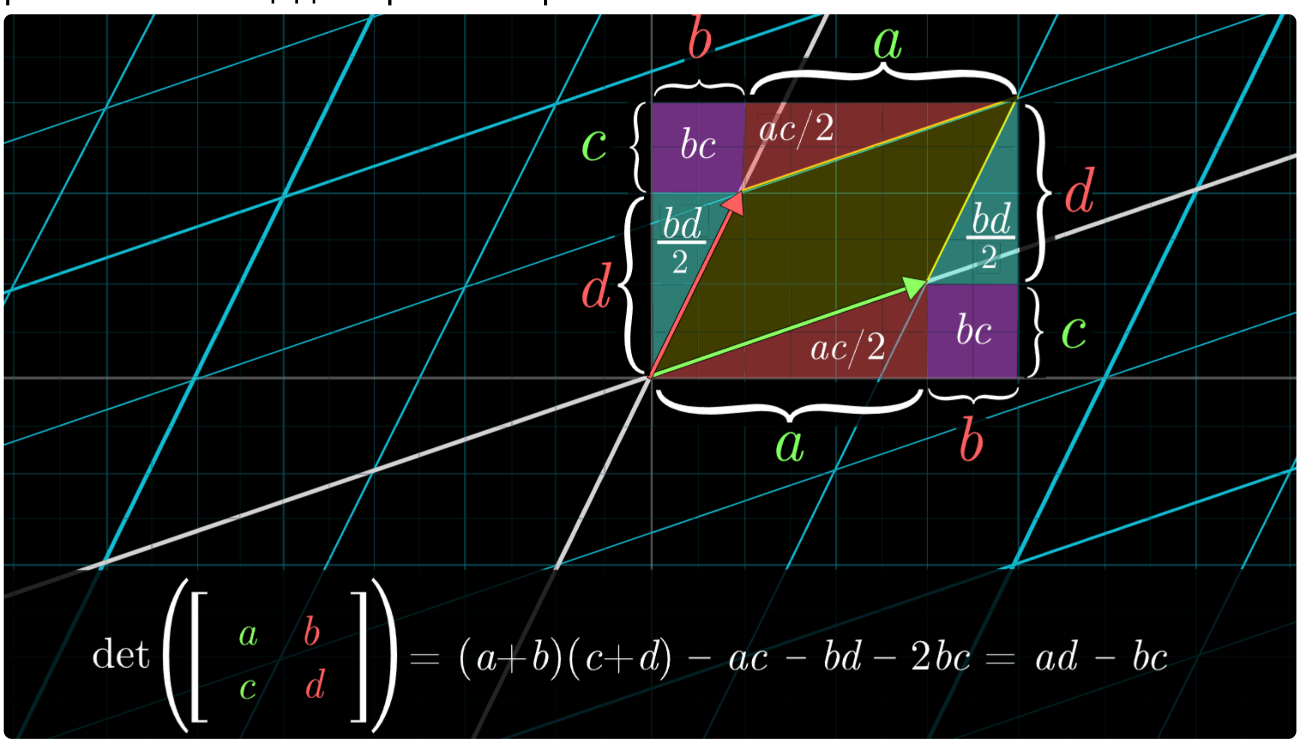
Определитель второго порядка:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Он считается, по определению, как $|D| = ad - bc$. Этот определитель описывает площадь параллелограмма, созданного векторами с одним началом и концах в точках $(a; b)$ и $(c; d)$. (или, наоборот, с концами в $(a; c)$ и $(b; d)$, но об этом поговорим в билете 38. Свойство определителя, связанное с транспонированием. Определитель верхней треугольной матрицы.)



Можно показать визуально и алгебраически, почему такая разность равняется площади параллелограмма:



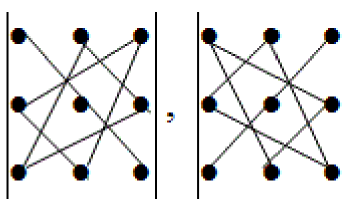
Проведите параллели с тем, как мы считали векторное произведение через координаты (билет #12) - в частности, случай, когда z-составляющие векторов равны нулю.

Определитель третьего порядка:

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Есть три способа подсчета такого определителя - метод треугольника, правило Саррюса, и разложение по строке (эта тема будет подробно раскрыта в следующих билетах).

Метод треугольника: он предлагает начертить кучу треугольников в матрице, и собрать по ним сумму произведений элементов.



«+» «–»

Для "плюса", мы чертим главную диагональ, и оставшиеся точки собираем в треугольники (симметричные, пересекающие диагональ). Для "минуса" мы делаем побочную диагональ, и так же составляем треугольники. Теперь складываем с учетом знака произведения элементов в одной линии.
Не знаю, как это объяснить нормально, проще всего посмотреть на рисунок выше.
Плюс: $aei + bfg + cdh$
Минус: $ceg + afh + bdi$
Складываем с учетом знака: $|C| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$

Правило Саррюса: достраиваем справа от матрицы ее копию, и проводим диагонали по этой копии. С плюсом делаем три "главные" диагонали, затем с минусом - "побочные".

$$\begin{pmatrix} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{pmatrix}$$

Плюс: $aei + bfg + cdh$
Минус: $ceg + afh + bdi$
Складываем с учетом знака: $|C| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$.

Разложение по строке/столбику: это будет описано подробнее в билете 37. Определение определителя n-го порядка. Разложение определителя по первому столбцу.. Идея в том, что мы можем разложить детерминант как сумму определителей вторых порядков (а их мы умеем считать):

$$|C| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} =$$

$$= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

Мы идем по первой строчке слева-направо (или по первому столбцу сверху-вниз), и умножаем элемент этой строчки на его *минор*, и складываем с переменным знаком (начиная с плюса).
Минор элемента - матрица меньшего порядка, получаемая зачеркиванием строки и столбика, в котором находится этот элемент.

$$\bar{M}_2^1 = \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

Геометрически, определитель третьего порядка определяет объем параллелепипеда, образованного тремя векторами в столбиках матрицы. Проведите параллели с подсчетом смешанного произведения!

Смысл определителя

Помните, что матрицы описывают линейные трансформации пространства? Так вот геометрический смысл определителя - коэффициент "растяжения" пространства при применении трансформации, описанной матрицей. "Пространство" тут подразумевает *площадь* для матриц 2×2, *объем* для матриц 3×3, ну и какой-нибудь *гиперобъем* для матриц высшего порядка.
Чтобы показать, что я имею ввиду под растяжением, рассмотрим матрицы 2×2, но для матриц высшего порядка все будет схоже (просто не площадь, а объемы).
Скажем изначально дан ортонормированный 2д-базис, он описан единичной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ее детерминант равен 1, это будет нашей единицей площади - при применении трансформации, которая ничего не делает, площадь тоже не изменится.
Затем применим матрицу трансформации *растяжения*, скажем 3 по оси x и 2 по оси y. После применения такой трансформации матрица станет

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ее детерминант равен 6 - площадь прямоугольника со сторонами 3 и 2. Получается, после применения трансформации, "площадь" пространства - любой фигуры в прошлой системе - увеличится в 6 раз.
При применении матрицы поворота площадь, очевидно, не меняется:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |B| = 1$$

Однако площадь всегда неотрицательна, а определитель таковым может быть. Когда определитель отрицательный, это значит, что *ориентация* базиса изменилась - например, перешла из право ориентированного в лево ориентированный.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |C| = -1$$

Пример задачи

Условие: посчитайте определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение: $5 \cdot 4 - 7 \cdot 3 = 20 - 21 = -1.$

Условие: посчитайте определитель матрицы с помощью правила Саррюса/метода треугольника

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:
Плюс: $7 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \cdot 9 + 3 \cdot 5 \cdot (-3) = 30$
Минус: $3 \cdot 3 \cdot 9 + 7 \cdot 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 \cdot 4 = 40$
Итого, $|B| = 30 - 40 = -10$

Условие: посчитайте определитель матрицы с помощью разложения по 1 строчке

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 5 & -6 & 3 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение: чередуем знаки и записываем миноры с элементами:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1((-6)\cdot(-4) - 3\cdot 8) - 7(5\cdot(-4) - 3\cdot 1) - 3(5\cdot 8 - (-6)\cdot 1) =$$
$$= 0 + 23\cdot 7 - 3\cdot 46 = 23$$

Условие: посчитайте определитель матрицы с помощью разложения по 1 столбцу (можете посмотреть следующий билет для подробного разбора)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 5 & -6 & 3 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение: чередуем знаки и записываем миноры с элементами:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(24 - 24) - 5(-28 + 24) + 1(21 - 18) =$$

$$= 0 + 20 + 3 = 23$$