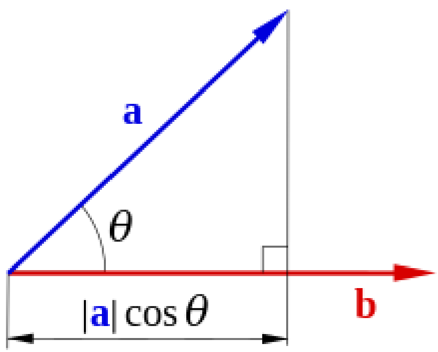
Скалярное произведение - операция, определенная на двух векторах. Записывается разными способами:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a}\overline{b}$$

Скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними θ:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\theta$$



Если посмотреть на формулу, можно объединить $|\overline{a}|$ и $\cos\theta$. Так как θ это угол между двумя векторами, произведение $|\overline{a}|\cos\theta$ можно представить как проекцию вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$. Благодаря этому, скалярное произведение можно представить как произведение длины проекции одного вектора на второй и длины второго вектора.
Так как произведение симметричное, можно представить точно так же произведение как и произведение проекции длины второго вектора на первое и длины первого вектора.
Напоминаю, что мы можем записать скалярное произведение через проекции:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} \cdot |b|$$

Длина вектора определяется по теореме Пифагора. Пусть дан вектор $\overline{a}(x_1; y_1)$. Тогда его длина:

$$|\overline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

А если задан вектор $\overline{AB}$, то его длина:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2}$$

Пройдемся по свойствам:

1. Скалярное произведение коммутативно: $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\theta = |\overline{b}||\overline{a}| \cos\theta = (\overline{b}, \overline{a})$$

2. Скалярное произведение дистрибутивно на сложении. Это свойство вытекает из свойства про сумму проекций/проекцию суммы:

$$(\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a}, \overline{c})$$
$$|\overline{a}| \cdot \text{пр}_{\overline{a}}(\overline{b} + \overline{c}) = |\overline{a}| \cdot \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} + |\overline{a}| \cdot \text{пр}_{\overline{a}}\overline{c}$$

3. Умножение на скаляр, его тоже можно понимать через смысл проекций:

$$(\alpha\overline{a}, \overline{b}) = \alpha(\overline{a}, \overline{b})$$
$$|\overline{b}| \cdot \text{пр}_{\overline{b}}(\alpha\overline{a}) = |\overline{b}| \cdot \alpha \cdot \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$$

4. Если $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$, то вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны.
5. "Чистой" ассоциативности у скалярного произведения нет, просто потому что скалярное произведение возвращает скаляр, и скалярное произведение не определено между вектором и скаляром. Однако, "ассоциативность" с двумя векторами и скаляром существует:

$$(\overline{a}, (\overline{b}, \overline{c})) = (\overline{a}, |b||c| \cos\theta) = \ ???$$

Однако со скаляром все хорошо:

$$c \cdot (\overline{a}, \overline{b}) = (c\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, c\overline{b}) = c \cdot |\overline{a}||\overline{b}| \cos\theta$$

6. Произведение само на себя - угол между одним и тем же вектором считается нулевым:

$$(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}||\overline{a}| \cdot \cos 0 = |\overline{a}|^2$$

Из этого следует, что мы можем выразить длину вектора через скалярное произведение:

$$|a| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$$

В ортонормированном базисе для векторов $\overline{a}(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и $\overline{b}(b_1; b_2; \ldots; b_n)$ справедлива следующая формула:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Докажем, что эта формула равносильна формуле с косинусом. Введем *ортонормированный* базис $(\overline{e_1}; \overline{e_2}; \ldots; \overline{e_n})$, в котором будут находится наши векторы. Разложим наши векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в линейные комбинации:

$$\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{e_i} \qquad \overline{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i \overline{e_i}$$

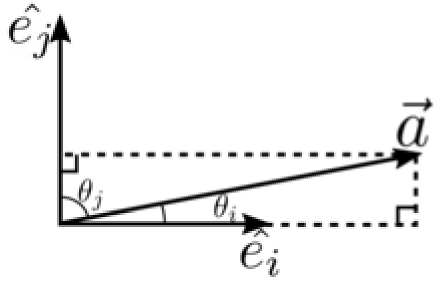
Рассмотрим скалярное произведение двух базисных векторов $(\overline{e_i}, \overline{e_j})$. Когда $i \neq j$ произведение будет равно нулю, ведь базисные векторы ортогональны друг другу. Когда $i = j$, произведение будет равно $|\overline{e_i}|^2$, что в свою очередь равно 1, т.к. в ортонормированном базисе все вектора единичной длины.

$$(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Рассмотрим теперь скалярное произведение вектора на базисный вектор:

$$(\overline{a}, \overline{e}_i) = |\overline{a}||\overline{e}_i| \cos\theta = |\overline{a}| \cos\theta = a_i$$

Первый переход по геометрическому определению скалярного произведения, второй переход из-за того, что длина базисного вектора в ортонормированном базисе равна единице, и последний переход - проекция вектора на базисный вектор будет равно координате этого вектора на этом базисе. Попробуйте мысленно себе представить проекцию вектора $\overline{a}$ на базисный вектор.



Наконец, перейдем к главному доказательству:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, \sum_{i=1}^{n} b_i \overline{e_i})$$

Для начала мы раскладываем вектор $\overline{b}$ в линейную комбинацию. Теперь, зная, что скалярное произведение дистрибутивно на сложении, мы можем занести вектор $\overline{a}$ внутрь суммы:

$$(\overline{a}, \sum_{i=1}^{n} b_i \overline{e_i}) = (\overline{a}, b_1\overline{e_1} + b_2\overline{e_2} + \ldots + b_n\overline{e_n}) =$$

$$= (\overline{a}, b_1\overline{e_1}) + (\overline{a}, b_2\overline{e_2}) + \ldots + (\overline{a}, b_n\overline{e_n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\overline{a}, b_i\overline{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\overline{a}, \overline{e_i})$$

Теперь вспоминаем, чему равно скалярное произведение и делаем наш последний переход:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(\overline{a}, \overline{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Доказательство закончено.

Благодаря этой формуле появляется еще одно интересное свойство, которое более полно раскрыто в вопросе 13. Выражение смешанного

произведения через координаты сомножителей.:
При умножении по-координатно, орты векторов "убираются":

$$((a_1\overline{i};a_2\overline{k};a_3\overline{j}),(b_1\overline{i};b_2\overline{k};b_3\overline{j}))=a_1b_1\cancel{\overline{i}}+a_2b_2\cancel{\overline{j}}+a_3b_3\cancel{\overline{k}}$$

Зная скалярное произведение, можно найти косинус угла между двумя векторами:

$$(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$

Пример задачи

Условие: вычислите скалярное произведение векторов $\overline{a}(5;3)$ и $\overline{b}(8,-3)$.
Решение:

$$(\overline{a},\overline{b})=a_1b_1+a_2b_2=5\cdot8-3\cdot3=40-9=31$$

Условие: вычислите скалярное произведение векторов, длина которых 5 и 7, и угол между ними равен 60°.
Решение:

$$(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\theta=5\cdot7\cdot\cos60^{\circ}=\frac{5\cdot7}{2}=17.5$$

Условие: найдите длину вектора $\overline{a}(-5;12)$.
Решение:

$$|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{169}=13$$

Условие: найдите угол между векторами $\overline{a}(0;5)$ и $\overline{b}(5\sqrt{3};5)$.
Решение: чтобы найти угол, нужно знать длину векторов и их скалярное произведение:

$$|\overline{a}| = \sqrt{0^2+5^2} = \sqrt{5^2} = 5$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(5\sqrt{3})^2+5^2} = 5\cdot\sqrt{4} = 10$$

$$(\overline{a},\overline{b}) = 0\cdot 5\sqrt{3} + 5\cdot 5 = 25$$

Дальше выражаем косинус угла из формулы скалярного умножения:

$$\cos\theta = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{25}{5\cdot 10} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arccos\frac{1}{2} = 60^\circ$$