Напомним, что такое ортогональность - это обобщение перпендикулярности, расширение его на большее количество пространств. Ортогальность завязана на скалярном произведении - два вектора ортогальны тогда и только тогда ($\Leftrightarrow$), когда их скалярное произведение равно нулю.

### Прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Рассмотрим нормали этих двух прямых: $\overline{N_1}(A_1; B_1), \overline{N_2}(A_2; B_2)$. (смотрите билет 15. Общие уравнения прямой и плоскости.)
Прямые однозначно задаются своими нормалями + смещением от начала координат, поэтому мы можем понять параллельность/ортогональность отталкиваясь лишь от нормалей (ведь смещение никак на это не влияет).

1. Если нормали коллинеарны/параллельны, то будут коллинеарны/параллельны и сами прямые. Математически, это если существует такое число $\lambda \neq 0$, что

   $$\overline{N_1} = \lambda \overline{N_2}$$

2. Если нормали ортогональны, соответственно ортогональны и прямые. Это мы можем узнать с помощью скалярного произведения:

   $$(\overline{N_1}, \overline{N_2}) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

   Все эти рассуждения мы проводили с нормалями, хотя ничто не останавливает нас сделать все то же самое, но с сонаправленными векторами $\overline{P_1}(-B_1; A_1), \overline{P_2}(-B_2; A_2)$:
3. $\overline{P_1} = \lambda \overline{P_2}$
4. $(\overline{P_1}, \overline{P_2}) = 0 \Leftrightarrow B_1B_2 + A_1A_2 = 0$

Если прямая записана в каноническом виде (см. билет 19. Прямая в пространстве. Общие, канонические и параметрические уравнения прямой.), взять направляющий вектор тоже не составляет труда, а с ним точно так же проводятся все те же рассуждения.

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$

$\overline{P_1}(A; B; C)$ - направляющий вектор к этой прямой.

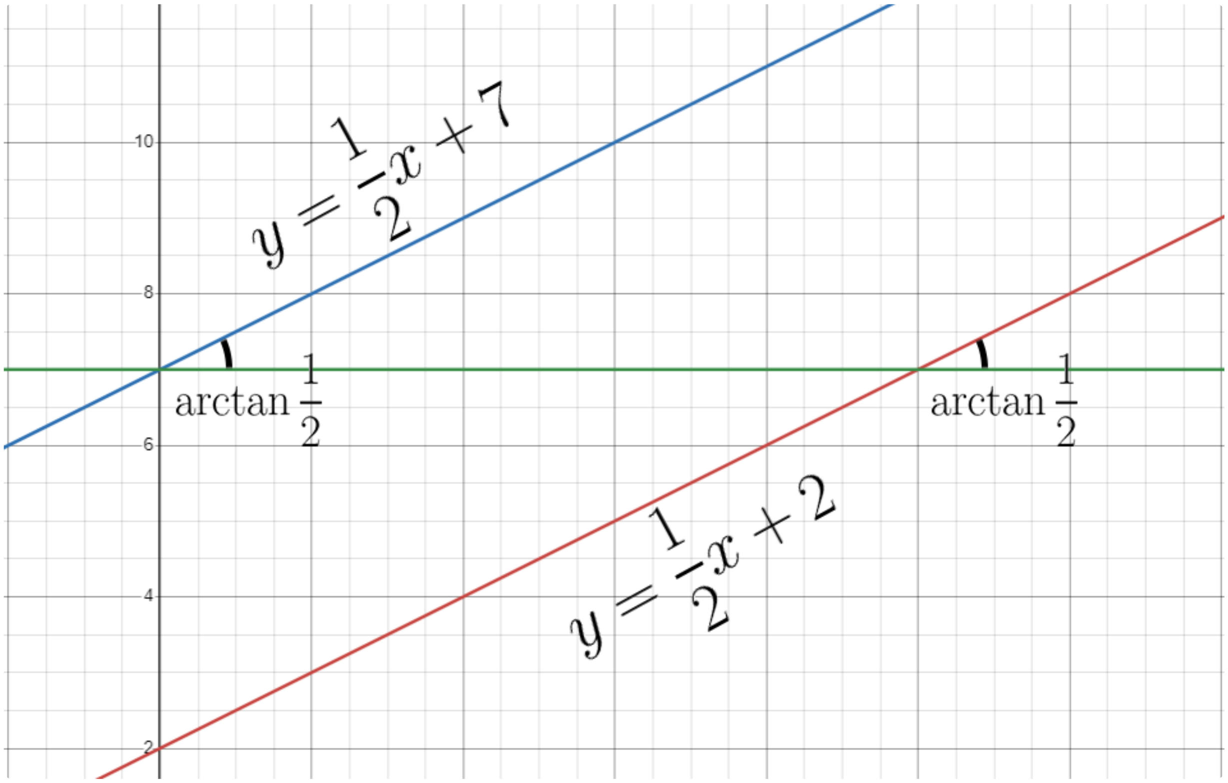
А если нам даны прямые с угловым коэффициентом, способ определения будет похожим.

$$y_1 = a_1 x + b_1$$
$$y_2 = a_2 x + b_2$$

Здесь прямые определяются угловым коэффициентом + смещением от начала координат. По такой же логике как и до этого, можно все определить лишь с помощью угловых коэффициентов.

1. Если угловые коэффициенты равны, то прямые параллельны. Это можно представить себе геометрически - угловой коэффициент это тангенс угла наклона, а параллельные прямые имеют одинаковые соответственные углы при одной секущей. Строим секущую $y = b_1$ или

$y = b_2$ и смотрим за углами.

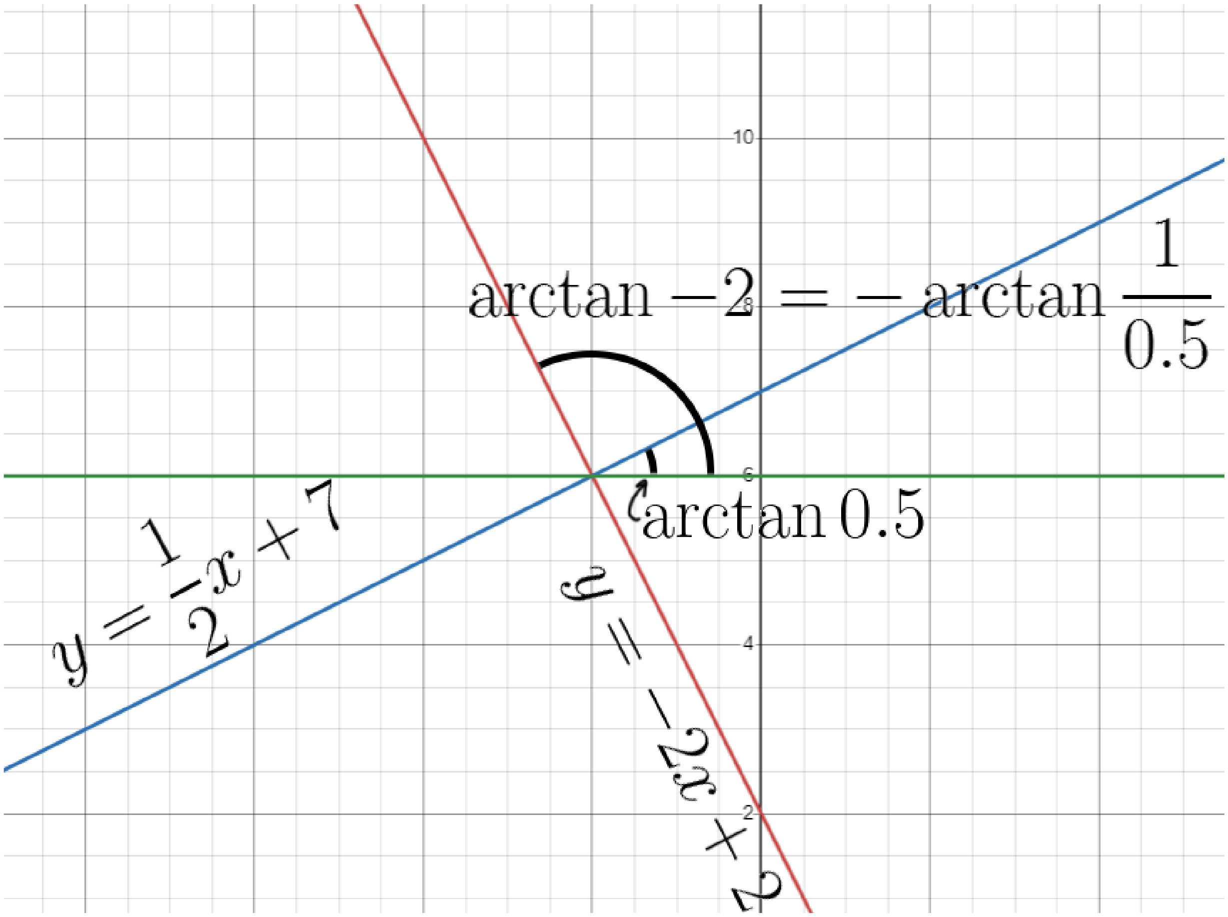



2. Если произведение угловых коэффициентов равно $-1$ ($a_1 a_2 = -1$), то прямые ортогональны. Это все так же исходит из того, что угловой коэффициент - это тангенс угла наклона. Вспомним формулу приведения:

$$\operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{tg}\frac{1}{\alpha}$$

Из условия мы можем вывести что $a_1 = \frac{-1}{a_2}$. Т.к. это тангенсы, то мы получаем $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\frac{-1}{\alpha_2} = -\operatorname{tg}\frac{1}{\alpha_2}$, где $\alpha_1, \alpha_2$ - углы наклона прямых. А как мы поняли из формулы приведения, это возможно когда

$\alpha_1 + 90^\circ = \alpha_2$, откуда и выходит наша ортогональность.




**Плоскость**

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Не поверите, но так как прямая и плоскость - это чуть ли не один и тот же объект, для плоскостей все повторяется: рассматриваем нормальные векторы для плоскостей $\overline{N_1}(A_1; B_1; C_1), \overline{N_2}(A_2; B_2; C_2)$

- Плоскости параллельны, если их нормальные векторы коллинеарны. Математически, существует $\lambda \neq 0$, что

$$\overline{N_1} = \lambda \overline{N_2}$$

- Плоскости ортогональны, если скалярное произведение их нормальных векторов равно нулю:

$$(\overline{N_1}, \overline{N_2}) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Если уравнение плоскости задано в виде отрезков, то для определения проще всего просто перевести его в общий вид и затем искать параллельность/ортогональность.

**Пример задачи**

Условие: определите, ортогональна/параллельна ли плоскость $x + y + z = 0$ плоскости $2x - 2y = 3$.
Решение: для начала возьмем нормальные векторы.
$\overline{N_1} = (1; 1; 1)$
$\overline{N_2} = (2; -2; 0)$
Проверим параллельность:

$$\overline{N_1} = \lambda\overline{N_2} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2 \cdot \lambda \\ 1 = -2 \cdot \lambda \Rightarrow \varnothing \\ 1 = 0 \cdot \lambda \end{cases}$$

Значит, плоскости не параллельны. Проверим ортогональность:

$$(\overline{N_1}, \overline{N_2}) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 0$$

Значит, *плоскости ортогональны*.