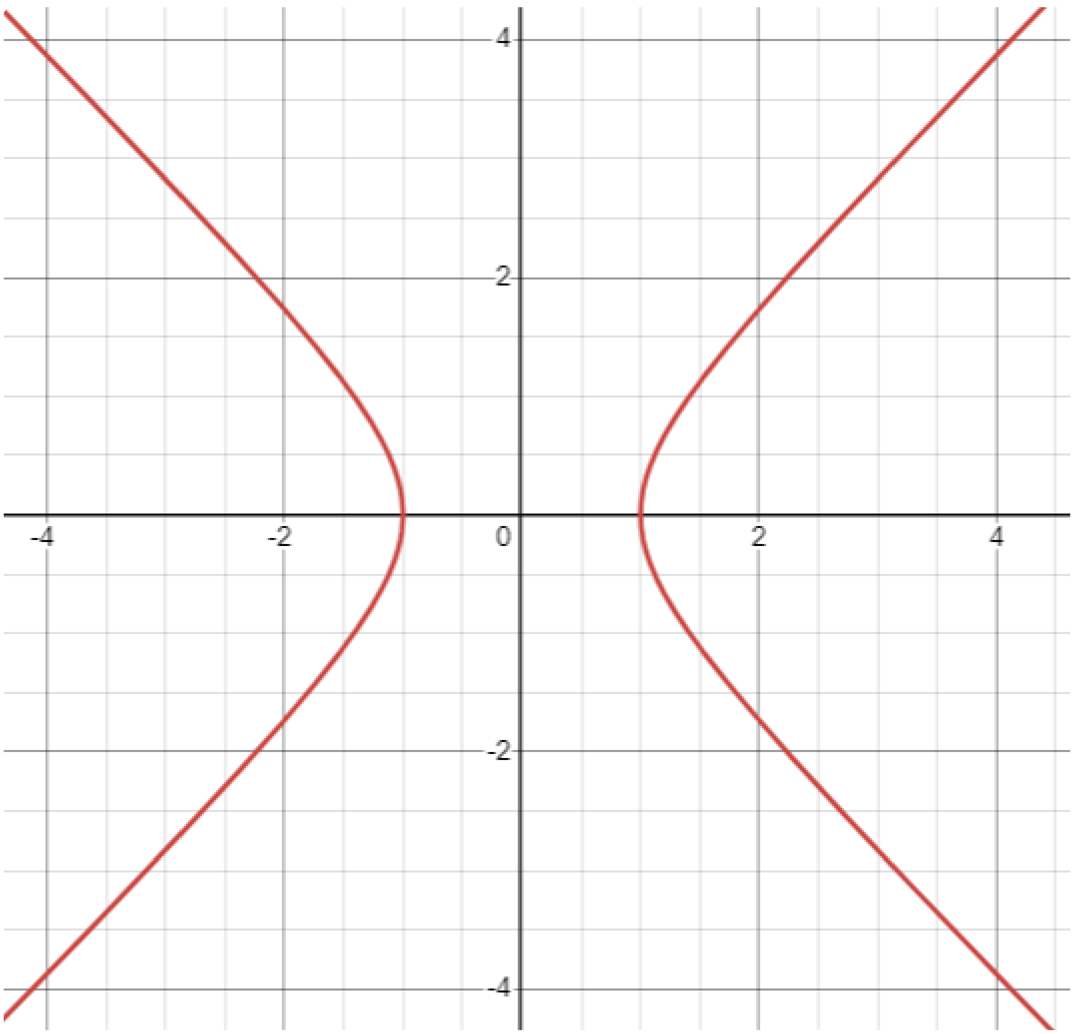
Помните билет про эллипсы? Сейчас вы увидите много схожеств гипербол с эллипсами.
Начинаем с определения: гиперболой называется такая линия, которая в декартовой прямоугольной системе задается уравнением, которое называется *каноническим уравнением гиперболы*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Все так же считаем, что $a \geq b > 0$.



Как и с эллипсом, гипербола тоже является линией второго порядка, ведь x и y находятся во второй степени.

Из уравнения можно отметить, что чтобы оно имело хоть какие-то решения, должно выполняться $|x| \geq a$. Получается внутри полосы шириной $2a$ по центру системы координат нет никаких точек, и гипербола разделена на две линии, которые называются "ветвями". Из этого так же вытекает, что гипербола не пересекает ось Oy.

Как и с эллипсом, у гиперболы есть вершины: $(-a;0)$ и $(a;0)$. Так как гипербола не пересекает ось ординат, то остальных двух вершин не существует. По той же причине, что и для эллипса (квадраты при x и y), если точка $(x;y)$ принадлежит гиперболе, то и точки $(-x;y)$, $(x;-y)$ и $(-x;-y)$ тоже будут ей принадлежать.

Числа a и b называются вещественной и мнимой полуосями гиперболы. a - вещественная, потому что можно графически увидеть расстояние от начала координат до вершин гиперболы, а b так просто не увидеть.

Про асимптоты

Рассмотирм прямую $y = kx$ - уравнения прямой с угловым коэффициентом, которая будет проходить через начало координат. Так как гипербола не пересекает ось Oy, то нет смысла рассматривать прямую $x = 0$, отчего у нас не возникет проблем при рассмотрении прямой с угловым коэффициентом.
Давайте попробуем рассмотреть точки пересечения этой прямой с гиперболой в зависимости от коэффициента k. Для этого подставим y в каноническое уравнение, чтобы получить уравнение относительно одной неизвестной:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2x^2}{b^2} = 1$$

Решая относительно x, получим

$$x^2(b^2 - a^2k^2) = a^2b^2 \Rightarrow x = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}$$

Назовем этот страшный корень снизу $\sigma = \sqrt{b^2 - a^2k^2}$. Учитывая, что $y = kx$, мы можем назвать точки пересечения для любого k при существовании σ (а это условие $b^2 - a^2k^2 > 0$):

$$\pm\left(\frac{ab}{\sigma};\frac{abk}{\sigma}\right)$$

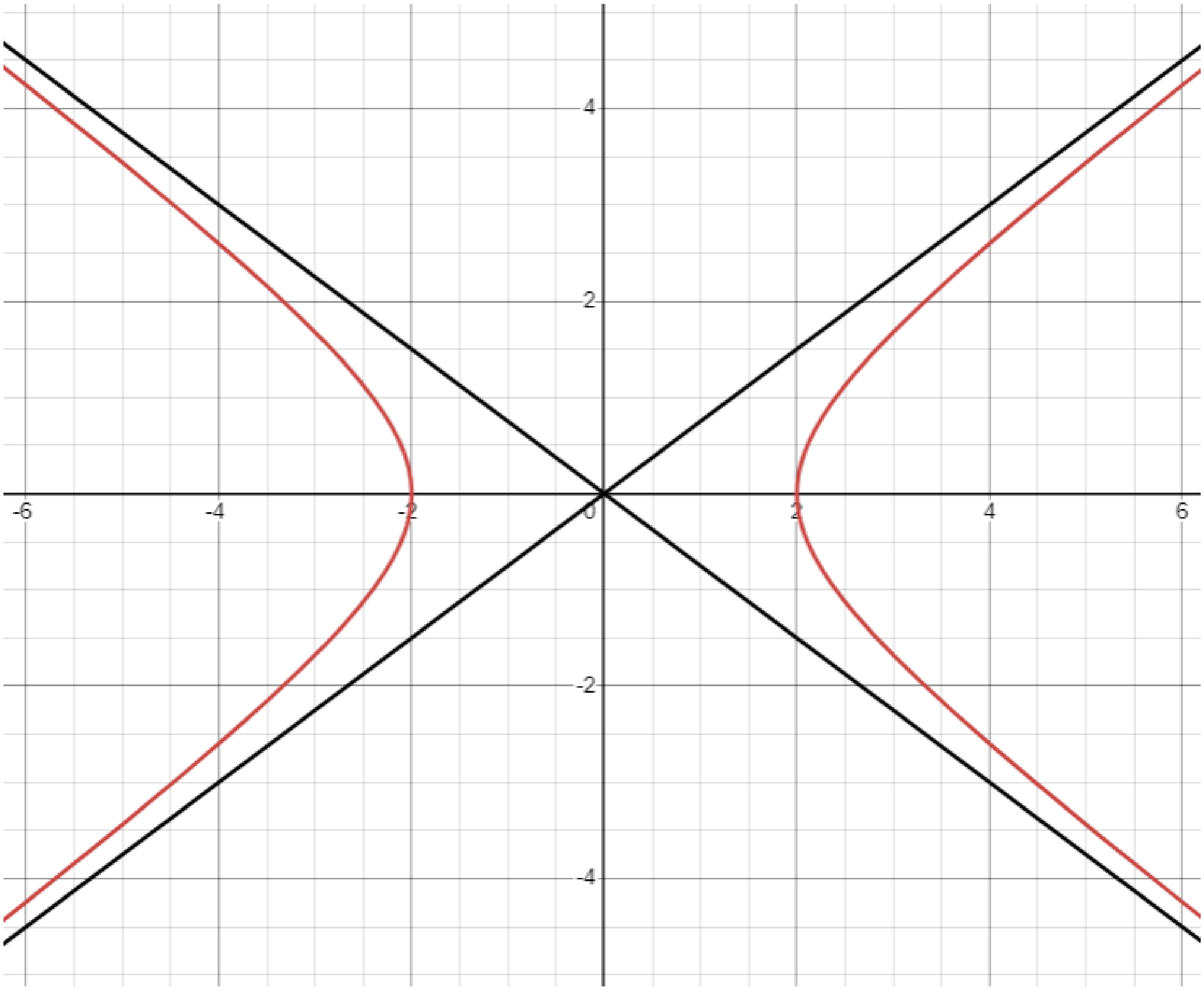
Рассмотрим поведение точек пересечения в зависимости от σ. σ принимает свое максимальное значение $\sigma = b$, когда $k = 0$. Тогда две точки пересечения становятся просто

$$(\pm a;0)$$

Когда σ стремится к нулю, координаты пересечения будут стремится к бесконечности. σ стремится к нулю когда k стремится к значению $\frac{b}{a}$. Если k станет больше этого значения, подкоренное значение станет отрицательным, и σ будет неопределена. Тогда и точек пересечения не будет.
Из таких рассуждений получаем прямую граничного случая:

$$y = \frac{b}{a}x$$

Если мы поставим угловой коэффициент чуть меньше, мы получим прямую, что будет пересекать гиперболу. Поставим чуть больше - пересечений не будет.
Для прямой $y = -\frac{b}{a}x$ действуют все те же утверждения (только симметрично обратные) в силу симметрии гиперболы.
Эти две прямые называются *асимпотами гиперболы*.



Асимпота (не только для гипербол) - это такая прямая, что расстояние от нее до кривой (в данном случае до гиперболы) стремится к нулю при устремлении точки по кривой в бесконечность.

Мы можем доказать это свойство для гипербол. Запишем уравнение прямой асимптоты в общем виде:

$$bx \pm ay = 0$$

Рассмотрим точку на гиперболе, $M(x, y)$. Тогда расстояния от этой точки до прямой будет равно: (см. билет 18. Нормальные уравнения прямой и плоскости. Отклонение точки от прямой и плоскости.)

$$h_1 = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad h_2 = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Так как точка M лежит на гиперболе, она удовлетворяет каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Перемножим расстояния вместе:

$$h_1h_2 = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

Что получается? Произведение расстояний от точки до асимптот - не зависящая от координат точки константа! Куда не двигай точку, оно не поменяется. С помощью этого факта и будем доказывать.

Начнем двигать точку по ветви гиперболы вправо-вверх. Расстояние до нижней асимптоты начнет монотонно расти - а так как произведение расстояний это константа, то расстояние до верхней асимптоты начнет монотонно убывать. Раз расстояние - это неотрицательная функция, то по теореме Вейерштрасса (привет матанализ) это расстояние стремится к нулю.

Такие же рассуждения действуют и для всех остальных ветвей и расстояний, что и доказывает свойство асимптот.

Пример задачи

Условие: найдите расстояние точки $M(6;8)$ до двух асимптот параболы

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$$

Решение: для начала соберем a и b:

$a = \sqrt{4} = 2$

$b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Составляем уравнения прямых:

$$\begin{array}{cc} y = \frac{b}{a}x & y = -\frac{b}{a}x \\ ay - bx = 0 & ay + bx = 0 \end{array}$$

Теперь находим расстояния от точки до прямой в общем виде:

$$d(M) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 8 \pm 2\sqrt{2} \cdot 6|}{\sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{|16 \pm 12\sqrt{2}|}{\sqrt{12}}$$

$$d_1(M) = \frac{|16 - 12\sqrt{2}|}{\sqrt{12}} \approx 0.28$$

$$d_2(M) = \frac{|16 + 12\sqrt{2}|}{\sqrt{12}} \approx 9.51$$

Ну и для самопроверочки:

$$d_1 \cdot d_2 \approx 2.6628 \approx \frac{32}{12} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$