Мы уже затрагивали определение линейных операторов - это такие линейные отображения, что проектирует вектор из пространства в то же самое пространство:

$$A : L \to L$$

Ранее мы говорили про матрицы отображения из базиса в базис, для каждого из пространств. Тут же пространство одно, поэтому нам достаточно одного базиса: $e = (e_1; e_2; \ldots; e_n)$. Из-за того, что переводим мы в одно и то же пространство, матрица будет квадратной:

$$A = \begin{pmatrix} A(e_{11}) & A(e_{21}) & \ldots & A(e_{n1}) \\ A(e_{12}) & A(e_{22}) & \ldots & A(e_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(e_{1n}) & A(e_{2n}) & \ldots & A(e_{nn}) \end{pmatrix}$$

При замене базиса e, формулы, что мы вывели в прошлом билете становится чуть проще:

$$A' = S^{-1}AS$$

Так как операторы являются частным случаем отображений, они наследуют большинство их свойств, но при этом получают еще больше других - за счет того, что вектор и его образ лежат в одном пространстве.

Например, определитель матрицы линейного оператора не меняется при замене базиса - он является инвариантом, и называется просто *определителем оператора*.

$$A' = S^{-1}AS \Rightarrow \det A' = \det(S^{-1}AS)$$
$$\det A' = \det S^{-1} \cdot \det A \cdot \det S$$
$$\det A' = \det A \cdot \frac{\det S}{\det S} = \det A$$
$$\det A' = \det A$$

Если операторы A и B одного пространства, то так же будут определены операторы AB и BA. Когда $AB = BA$, операторы A и B *коммутируют*. Очевидно, что A коммутирует сам с собой, ведь $AA = AA$. Произведение AA естественно обозначать за A^2, и любую степень A по индукции...

$$A^k = AA^{k-1} = AA\underbrace{\dots}_{k \text{ раз}}A$$

Нулевую степень, как и с обычными числами, принято обозначать за единичный элемент. В матрицах, это единичная матрица $A^0 = E$. Многочлен

$$p(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots \alpha_n A^n$$

называется *многочленом от оператора*. Результат многочлена будет являться не числом, а матрицей! Любые два многочлена от одинакого оператора будут коммутировать в силу коммутативности умножения.