Отображение - это одно из более фундаментальных понятий в математике, и означает переход из одного множества в другое. f называется отображением из множества X в Y, если каждому элементу $x \in X$ сопоставлен единственный элемент $y \in Y$, и обозначается как $f : X \to Y$. y называется образом x, обозначается как $f(x)$, а x называется прообразом y. То есть отображение не сильно отличается от функций, которые мы все любим.

Линейное отображение - подкласс из всех отображений: $A : L \to \overline{L}$ называется *линейным отображением*, если для любых x и y из L и любого скаляра α выполняются два равенства:

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \qquad A(\alpha x) = \alpha A(x)$$

Интересное замечание, что операции сложении по левую и правую стороны уравнений, вообще говоря, разные, ведь происходят в разных пространствах с разными векторами.
В силу этих равенств, нулевой вектор всегда переходит в нулевой, и $f(-x) = -f(x)$.
Используя два равенства выше, можно показать, что линейная комбинация векторов L переходит в линейную комбинацию образов из $\overline{L}$ с такими же коэффициентами.

$$\begin{gathered}\overline{L}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = \\ = \overline{L}(\alpha_1 x_1) + \overline{L}(\alpha_2 x_2) + \ldots + \overline{L}(\alpha_n x_n) = \\ = \alpha_1 \overline{L}(x_1) + \alpha_2 \overline{L}(x_2) + \ldots + \alpha_n \overline{L}(x_n)\end{gathered}$$

Линейное отображение называется *линейным оператором*, если пространства L и $\overline{L}$ совпадают (то есть он переводит векторы в то же пространство)

Примеры

1. Сопоставляя каждому вектору $x \in L$ вектор λx, мы создаем линейное отображение $L \to L$ - получается линейный оператор.
2. Выбирая в n-мерном пространстве базис, можно сопоставить каждому вектору из L его координатный столбец в $\mathbb{R}^n$. Получается линейное отображение $L \to \mathbb{R}^n$.
3. Сопоставляя столбцу $x \in \mathbb{R}^n$ новый столбец Ax, где A - матрица $m \times n$, получим новый столбец $x' \in \mathbb{R}^m$. Получается отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, и в силу линейности умножения матриц, полученное отображение - линейное. Смысл за перемножением матриц как линейного отображения и отражается в геометрическом смысле "матрицы это трансформация пространства".
4. Сопоставляя каждому $x \in L$ нулевой вектор $0 \in \overline{L}$, получим еще одно линейное отображение. Такое отображение называется *нулевым отображением*.
5. Линейное отображение $L \to L$ называется *тождественным оператором*, ведь каждый вектор переходит в сам себя.