

Как векторное, так и смешанное произведение работают только с трехмерными векторами!

Свойства векторного произведения

- Вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ будет направлен таким образом, что тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ будет *правой*. Подробнее об ориентации в вопросе 9.
Ориентация прямой, плоскости, пространства.
- Модуль (длина вектора) векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ равен площади параллелограмма, образованного векторами \vec{a} и \vec{b} .
- Векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ равно нулю тогда и только тогда (\Leftrightarrow), когда вектора \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.
- Антикоммутативно - меняет свой знак при перестановке аргументов:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$$

- Ассоциативность при умножении на скаляр:

$$[\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha \cdot \vec{b}] = \alpha \cdot [\vec{a}, \vec{b}]$$

- Дистрибутивность по сложению:

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$$

- С векторами векторное произведение не ассоциативно, однако выполняется уравнения Якоби:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] = \vec{0}$$

- Операция с одним вектором дает ноль:

$$[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$$

Свойства смешанного произведения

- Модуль смешанного произведения $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ равно объему параллелипипеда, образованного векторами \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} .
- Смешанное произведение это просто операции векторного и скалярного произведения вместе:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}])$$

- При "прокрутке" векторов внутри смешанного произведения его знак не меняется:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$$

- Однако при обмене двух векторов местами знак смешанного произведения меняется:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})$$

- Если три вектора компланарны (как следствие - линейно зависимые), то смешанное произведение будет равно нулю (ведь тогда у параллелипипеда не будет объема).
- Как следствие, если любые два вектора коллинеарны (тоже линейно зависимые), то смешанное произведение будет равно нулю.
- *Как следствие этого следствия*, если любые два вектора равны, то смешанное произведение будет равно нулю.