

Условие: найти расстояние от точки $M_0(-12; 1; 8)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-4; 2; 6)$, $M_2(2; -3; 0)$, $M_3(-10; 5; 8)$.

Решение: сначала построим каноническое уравнение плоскости, и по формуле расстояния от точки до плоскости найдем расстояние.

Каноническое уравнение мы строим с помощью смешанного произведения.

Выделим векторы, которые задают плоскость:

$$M_1M_2 = M_2 - M_1 = (6; -5; -6)$$

$$M_1M_3 = M_3 - M_1 = (-6; 3; 2)$$

Третий вектор, $M_1X = (x + 4; y - 2; z - 6)$, будет создавать нам плоскость. Если смешанное произведение, образованное этими тремя векторами, равно нулю, то они компланарны - тогда вектор $(x + 4; y - 2; z - 6)$ задаст уравнение плоскости.

$$(M_1M_2, M_1M_3, M_1X) = \begin{vmatrix} x + 4 & y - 2 & z - 6 \\ 6 & -5 & -6 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x + 6y - 3z + 14 = 0$$

Теперь можно применить формулу расстояния:

$$\begin{aligned} d(M_0) &= \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|-12 \cdot 2 + 1 \cdot 6 - 8 \cdot 3 + 14|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}} = \frac{28}{7} = 4 \end{aligned}$$

Ответ: 4.

Условие: Найти расстояние от точки $M_0(10; 1; 8)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(7; 2; 4)$, $M_2(7; 1; 2)$, $M_3(5; 2; 1)$.

Решение:

Шаг первый: посчитать векторы плоскости

$$M_1M_2 = M_2 - M_1 = (0; -1; -2)$$

$$M_1M_3 = M_3 - M_1 = (-2; 0; -3)$$

$$M_1X = X - M_1 = (x - 7; y - 2; z - 4)$$

Шаг второй: находим уравнение плоскости

$$(M_1M_2, M_1M_3, M_1X) = \begin{vmatrix} x-7 & y-2 & z-4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$3x + 4y - 2z - 21 = 0$$

Шаг третий: находим расстояние

$$\begin{aligned} d(M_0) &= \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 8 - 21|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}} = 0 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{29}}$