Линейная независимость

Любые векторы, соответствующие различным собственным значениям, будут всегда линейно независимы.

Возьмем матрицу A, для которой есть m собственных векторов $v_1, v_2, \ldots, v_m$ для них, и каждый из них соответствует своему собственному значению $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, причем они не повторяются: $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$.
Возьмем линейную комбинацию этих векторов. Если окажется, что эта комбинация тривиальная ($\alpha_i = 0$), то это докажет линейную независимость всех этих собственных векторов.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = 0$$

Применяем линейный оператор A к обоим частям равенства, получим

$$\sum_{i=1}^{m} A(\alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A(v_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i v_i = 0$$

Умножим прошлое уравнение на λ_1 и вычтем его из текущего:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = 0 | \cdot \lambda_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_1 v_i = 0$$

Вычитаем:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_1 v_i = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i = 0$$

Заметим, как первые члены этих сумм сократились, и теперь сумма начинается с $i = 2$. Можно сказать, что мы получили это уравнение с помощью применения к изначальному оператор $A - \lambda_1 E$:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (A - \lambda_1 E)(v_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i = 0$$

Первый член суммы будет равен нулю, ведь $\lambda_1 - \lambda_1 = 0$ и член обнулится в произведении. Поэтому мы имеем право сдвинуть начало на $i = 2$.
Теперь последовательно применяем операторы $A - \lambda_2 E$, $A - \lambda_3 E$, $\ldots$, $A - \lambda_{m-1} E$. В конце все члены сократятся, и останется лишь последний, для $i = m$:

$$\alpha_m (\lambda_m - \lambda_{m-1})(\lambda_m - \lambda_{m-2}) \ldots (\lambda_m - \lambda_1) v_i = 0$$

Так как $v_i \neq 0$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, единственный случай, когда уравнение равно нулю - при α_m.
Когда мы доказывали свойство $\alpha_m = 0$, мы не делали никакие условия на порядок собственных векторов. Поэтому изменяя порядок слагаемых, доказывается и $\alpha_i = 0$ для любого i. Но раз все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то линейная комбинация - тривиальна, а посему все векторы линейно независимы.

Оператор простой структуры

Линейный оператор $A : L \to L$ называется *оператором простой структуры*, если этот оператор имеет n линейно независимых собственных векторов, где n - размерность пространства L.
Другими словами, если существует базис из собственных векторов этого оператора. Матрица такого оператора будет выглядеть таким образом:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

По лемме, что мы доказали, если все собственные значения λ оператора A различны, это будет гарантировать линейную независимость собственных векторов. Однако, это не является необходимым условием: существуют матрицы с кратными собственными значениями и линейно независимыми собственными векторами.

В матрице A, i-тый столбик является собственным вектором тогда и только тогда $(\Leftrightarrow)$, когда все элементы, кроме элемента i-той строки равны нулю. Тогда i-тый элемент - собственной значение матрицы.

Если базисный вектор e_i - собственный, то $A(e_i) = \lambda e_i$. Его i-тый элемент будет равен λ, а все остальные - нулю. Но $A(e_i)$ - и есть i-тый столбик матрицы оператора A.
И в обратную сторону, если $A(e_i) = \lambda e_i$, то e_i (i-тый базисный вектор) является собственным вектором матрицы A.

Как следствие, матрица A в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ диагональная тогда и только тогда, когда все базисные векторы - собственные. Тогда все ее значения на диагонали будут собственными значениями матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Матрица является матрицей простой структуры, если она подобна некоторой диагональной матрице.