Вырожденная квадратная матрица A - такая, чей определитель $\det A$ равен нулю.
Соответственно, у невырожденной определитель отличен от нуля)

Другое, эквивалентное определение: вырожденная матрица A - такая, у которой есть линейно зависимые столбики/строки (и наоборот для невырожденной). Это можно записать через линейную комбинацию: если существует нетривиальная линейная комбинация строк матрицы A, равная нулю, то матрица будет вырожденной. Это можно записать через произведение матрицы A на строку $c \neq 0$:

$$cA = 0 \Leftrightarrow c_1(A_{11}; A_{12}; \ldots) + c_2(A_{21}; A_{22}; \ldots) + \ldots = (0; 0; \ldots)$$

Геометрический смысл вырожденной матрицы: она сжимает пространство в ноль, что понижает возможные векторы, которые можно описать в пространстве, после применения трансформации, описанной этой матрицей. Скажем, если у нас было трехмерное пространство, и мы умножили его на вырожденную матрицу - после этого, все векторы станут лежать уже не в пространстве, а на какой-то плоскости (или даже на прямой или в одной точке!)

Важные леммы

- Если A вырождена, то произведение AB так же будет вырождено. Это следует из ассоциативности умножения:

  $$cA = 0 \Rightarrow c(AB) = (cA)B = 0B = 0$$

  Геометрически понимается, что если пространство уже было сжато, его нельзя "разжать" - каждый вектор может переходить только в один вектор, а не в целую прямую векторов.
- После применения элементарного преобразования, линейно независимые строки останутся линейно незавимыми, а линейно зависимые останутся линейно зависимыми.
  В случае линейно независимых строк достаточно рассмотреть всего два элементарных преобразования.

Первый случай: прибавим одну строку к другой. Для простоты записи, пусть мы прибавим первую строку a_1 ко второй a_2. Напишем линейную комбинацию для строк новой матрицы, и приравняем ее к нулю.

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2(a_1 + a_2) + \alpha_3 a_3 + \ldots =$$
$$a_1(\alpha_1 + \alpha_2) + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots = 0$$

a_i - i-тая строка матрицы. Раз строки были линейно независимы, единственное решение уравнения выше - тривиальное:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0$$

Из этого уравнения вытекает и $\alpha_1 = 0$, что значит что все $\alpha_i = 0$, а поэтому строки получившейся матрица тоже линейно независимы.
Второй случай: умножаем строку на число (для простоты записи, первую). Точно так же получаем уравнения вида

$$\lambda\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \ldots = 0$$
$$\lambda\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0$$
$$\lambda\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Для двух возможных случаев мы показали, что линейно независимые строки остаются линейно независимыми. Теперь рассмотрим линейно зависимые строки, для них рассуждение интересней, чем обычные алгебраические процессы. Как мы знаем, для каждого примитивного преобразования существует ему обратное.
Если бы мы могли получить из линейно зависимых строк с помощью примитивного преобразования получить линейно независимые строки, то должна существовать обратная операция, которая приведет линейно независимые строки к линейно зависимым. Как мы уже показали, *это невозможно.*

- Из этого в целом вытекает, что после применения элементарного преобразования, невырожденные матрицы остаются невырожденными, а вырожденные - вырожденными. Это свойство имеет некоторые параллели с тождественностью эквивалентности и равенства ранга.

Скорее свойства, чем леммы

- Как было сказано в прошлых билетах, обратные матрицы существуют только для матриц с ненулевым определителем. Другими словами, только для невырожденных матриц. Для вырожденных матриц обратной матрицы существовать не может.
- Вырожденная матрица имеет ненулевое ядро.
  Мы еще про ядра не говорили, поэтому пока что краткий экскурс: как помните, матрицы описывают линейные преобразования, однако при определителе равном нулю, ее ранг падает, и матрица, что раньше, например, описывала 3д пространство, может начать описывать плоскость (2д) (вспомните, что я писал про геометрический смысл ранга). В этом случае, куча точек, что лежала в пространстве "спроектируется" на эту плоскость. Соответственно, в нашем примере, существует такая прямая точек, что спроектируется в ноль линейного пространства. Вот такая прямая и есть ядро матрицы.
- Вырожденная матрица не может быть приведена к диагональной матрице. Это вытекает из тождественности эквивалентности и равенства ранга, ведь у диагональной матрицы ранг максимальный, в отличие от вырожденной матрицы.
- Матрица невырождена тогда и только тогда, когда ее можно разложить в произведение элементарных матриц.