Расстояние от точки до прямой (2д)

Условие: найти расстояние от точки $A(1;5)$ до прямой $4x+3y=6$:
Решение: У нас есть формула для нахождения расстояния:

$$d(A)=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot1+3\cdot5-6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{13}{5}=2.6$$

Ответ: 2.6.

Расстояние от точки до прямой (3д)

Условие: найти расстояние от точки $A(3;1;4)$ до прямой

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-1}{2}$$

Решение: тут все не так просто, поэтому придумаем свой способ.
Запишем прямую в параметрическом виде, и найдем минимум функции расстояния от точки от аргумента t до точки A.
Для начала, линия в параметрическом виде:

$$L(t)=\begin{cases}x=2+5t\\ y=-3+4t\\ z=1+2t\end{cases}$$

Расстояние между двумя точками вычисляется как

$$d(t)=\sqrt{(L(t)_x-A_x)^2+(L(t)_y-A_y)^2+(L(t)_z-A_z)^2}$$

Найдем ее минимум. Проще будет найти минимум квадрата расстояния, (ведь минимумы совпадают). Для этого дифференциируем по t:

$$d^2(t)=(2+5t-3)^2+(-3+4t-1)^2+(1+2t-4)^2$$

$$d^2(t)=(5t-1)^2+(4t-4)^2+(2t-3)^2$$

$$d^2(t)' = 5(5t-1) + 4(4t-4) + 2(2t-3)$$

Приравниваем к нулю:

$$\begin{gathered} 5(5t-1) + 4(4t-4) + 2(2t-3) = 0 \\ 25t - 5 + 16t - 16 + 4t - 6 = 0 \\ 45t - 27 = 0 \\ t = \tfrac{27}{45} \end{gathered}$$

Теперь подставляем это t в $L(t)$, чтобы найти точку на прямой с минимальным расстоянием:

$$L(\frac{27}{45}) = \begin{cases} x = 2 + 5 \cdot \frac{27}{45} \\ y = -3 + 4 \cdot \frac{27}{45} \\ z = 1 + 2 \cdot \frac{27}{45} \end{cases} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3/5 \\ 11/5 \end{pmatrix}$$

Теперь расстояние считается просто как длина разницы этих точек:

$$\begin{gathered} d(A) = |L(\tfrac{27}{45}) - A| = \\ = |(5-3, -3/5-1, 11/5-4)| = \\ = |(2, -8/5, -9/5)| = \\ = \sqrt{2^2 + (8/5)^2 + (9/5)^2} = \tfrac{7\sqrt{5}}{5} \end{gathered}$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Другое решение задачи через построение параллелограмма.
Для начала соберем направляющий вектор прямой и точку, принадлежащую ей, из уравнения прямой.
$\overline{p} = (5; 4; 2)$
$M = (2; -3; 1)$
Теперь рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\overline{p}$ и $\overline{MA}$ как на сторонах. С одной стороны, его площадь можно найти как длину векторного произведения этих векторов. С другой, его площадь - высота, умноженная на основание. Но длина высоты - и есть расстояние от точки до

прямой!

$$|[\overline{p}, \overline{MA}]| = |\overline{p}| \cdot h$$

Отсюда получаем формулу расстояния:

$$h = \frac{|[\overline{p}, \overline{MA}]|}{|\overline{p}|}$$

Посчитаем вектор $\overline{MA}$:

$$\overline{MA} = A - M = (3; 1; 4) - (2; -3; 1) = (1; 4; 3)$$

Считаем векторное произведение:

$$[\overline{p}, \overline{MA}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (4; -13; 16)$$

Его длина:

$$|[\overline{p}, \overline{MA}]| = \sqrt{4^2 + 13^2 + 16^2} = 21$$

Длина вектора $\overline{p}$:

$$|\overline{p}| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 2^2} = 3\sqrt{5}$$

Делим:

$$h = \frac{|[\overline{p}, \overline{MA}]|}{|\overline{p}|} = \frac{21}{3\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

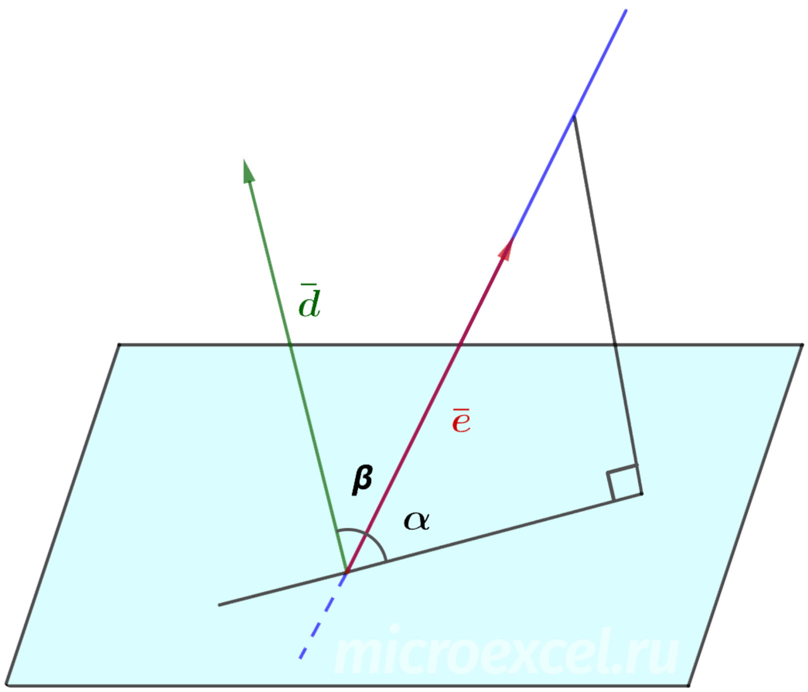
Угол между плоскостью и прямой

Условие: найдите угол между плоскостью

$$3y + 4z + 6 = 0$$

и прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{6}$$



Решение: первая мысль при задачах с углами - скалярное/векторное произведение. Одна из формул для них использует длины векторов и *угол между ними*.

Но эти произведения работают с векторами - а у нас есть плоскость. Чтобы сработать с ней, возьмем ее нормальный вектор: $\overline{n}(0; 3; 4)$. Так как x в уравнении нет, это равносильно $0x + \ldots$, поэтому в векторе ставим ноль.

Для прямой тоже стоит взять вектор - но тут можно просто взять направляющий вектор: $\overline{p}(2; 3; 6)$.

Готовы два вектора, так что можем взять скалярное произведение двух векторов:

$$(\overline{n}, \overline{p}) = 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 9 + 24 = 33$$

С другой стороны,

$$(\overline{n}, \overline{p}) = \cos\beta \cdot |\overline{n}| \cdot |\overline{p}|$$

Найдем длины векторов:

$$|\overline{n}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\overline{p}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

Отсюда косинус:

$$\cos\beta = \frac{(\overline{n}, \overline{p})}{|\overline{n}||\overline{p}|} = \frac{33}{5 \cdot 7} = \frac{33}{35}$$

Но ведь это косинус *бета*! Посмотрите на рисунке, какой именно угол мы нашли. Нам нужен угол α. А раз угол между нормалью и плоскостью - прямой, то α можно выразить как $90^\circ - \beta$. Вспоминаем наши любимые тригонометрические формулы:

$$\cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

Ответ: $\sin\alpha = \frac{33}{35}$, ну или $\alpha = \arcsin\frac{33}{35}$.