Условие: вычислить расстояние от точки $P(7; 2; 2)$ до прямой

$$\frac{x+12}{-7} = \frac{y-15}{16} = \frac{z+3}{-9}$$

Решение: способ 1 - через производную расстояния.
Переведем прямую в параметрический вид:

$$f(t) = \begin{cases} x = -7t - 12 \\ y = 16t + 15 \\ z = -9t - 3 \end{cases}$$

Запишем квадрат функции расстояния от точки на прямой до P:

$$d^2 = ((-7t-12)-7)^2 + ((16t+15)-2)^2 + ((-9t-3)-2)^2$$

Идея в том, чтобы ее дифференциировать. Можно раскрывать эти скобки как хотите.

$$d^2 = (-9t-5)^2 + (-7t-19)^2 + (16t+13)^2$$

$$(d^2)' = -18(-9t-5) - 14(-7t-19) + 32(16t+13)$$

Приравниваем к нулю и ищем t для минимума функции:

$$-18(-9t-5) - 14(-7t-19) + 32(16t+13) = 0 \Rightarrow t = -1$$

Подставляем в параметрическую форму:

$$f(-1) = \begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \\ z = 6 \end{cases}$$

Теперь считаем расстояние между этими двумя точками:

$$d((7; 2; 2), (-5; -1; 6)) = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$$

Ответ: 13.

Условие: вычислить расстояние от точки $P(-5; 1; 1)$ до прямой

$$\frac{x-8}{19} = \frac{y-24}{5} = \frac{z+24}{-24}$$

Решение: способ 2 - через проекции.

Спроектируем вектор, соединяющий точку на прямой и точку P, на прямую. Точка на прямой известна из уравнения - то, что вычитаем: $M(8; 24; -24)$. Вектор, соединяющий точку, соответственно:

$$MP = (-13; -23; 25)$$

А вектор, на который будем проектировать, есть напряющий вектор прямой:

$$l = (19; 5; -24)$$

Векторная проекция считается по формуле:

$$\operatorname{pr}_l MP = \frac{(MP, l)}{(l, l)} \cdot l = \frac{-962}{962} l = -l$$

Перемножаем координаты векторов между собой:

$$(MP, l) = -13 \cdot 19 - 23 \cdot 5 - 24 \cdot 25 = -962$$

Скалярное произведение считается просто как перемножение координат векторов вместе:

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Прибавляем эту проекцию к точке на прямой, чтобы получить проекцию точки P на прямой

$$P' = M - l = (-11; 19; 0)$$

Считаем расстояние между двумя точками:

$$d(P, P') = \sqrt{6^2 + 18^2 + 1^2} = 19$$

Ответ: 19.

Условие: вычислить расстояние от точки $P(9; 2; 1)$ до прямой

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

Решение:
Шаг первый: выделить точку на прямой, направляющий вектор, проектируемый вектор.
$M = (4; 5; 2)$
$l = (-3; 4; -1)$
$MP = P - M = (5; -3; -1)$

Шаг второй: проектируем

$$\mathrm{pr}_l\, MP = \frac{(l, MP)}{(l, l)} l = \frac{-26}{26} l = -l$$

$$P' = M - l = (7; 1; 3)$$

Шаг третий: находим расстояние.

$$d(P, P') = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

Ответ: 3.

$$\text{пр}_a b \cdot a = \frac{(b, a)}{(a, a)} \cdot a = \frac{(b, a)}{|a|}$$

Условие: найти расстояние от точки $A(3; 1; 4)$ до прямой

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-1}{2}$$

Есть способ решения задачи через построение параллелограмма.
Для начала соберем направляющий вектор прямой и точку, принадлежащую ей, из уравнения прямой.
$\overline{p}=(5;4;2)$
$M=(2;-3;1)$
Теперь рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\overline{p}$ и $\overline{MA}$ как на сторонах. С одной стороны, его площадь можно найти как длину векторного произведения этих векторов. С другой, его площадь - высота, умноженная на основание. Но длина высоты - и есть расстояние от точки до прямой!

$$|[\overline{p},\overline{MA}]|=|\overline{p}|\cdot h$$

Отсюда получаем формулу расстояния:

$$h=\frac{|[\overline{p},\overline{MA}]|}{|\overline{p}|}$$

Посчитаем вектор $\overline{MA}$:

$$\overline{MA}=A-M=(3;1;4)-(2;-3;1)=(1;4;3)$$

Считаем векторное произведение:

$$[\overline{p},\overline{MA}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 5 & 4 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=(4;-13;16)$$

Его длина:

$$|[\overline{p},\overline{MA}]|=\sqrt{4^2+13^2+16^2}=21$$

Длина вектора $\overline{p}$:

$$|\overline{p}|=\sqrt{5^2+4^2+2^2}=3\sqrt{5}$$

Делим:

$$h = \frac{|[\overline{p}, \overline{MA}]|}{|\overline{p}|} = \frac{21}{3\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.