Как такая теорема была для линий второго порядка на плоскости, так подобная существует и для *плоскостей второго порядка в пространстве*. Линии второго порядка - это уравнения второй степени от двух переменных (ведь плоскости - 2д). Соответственно плоскости второго порядка - это уравнения второй степени от *трех* переменных.

$$\begin{gathered}Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + \\ + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0\end{gathered}$$

Вот такое мощное уравнение выходит.

Эта теорема гласит, что любая такая плоскость при замене координат нужным образом может быть описана *одним из 17 канонических уравнений* - причем 9 из них это те, что были описаны в прошлом билете. Они достигаются, когда все коэффициенты, где есть z (быть точнее, это коэффициенты C, E, F, I), равны нулю. Тогда уравнение плоскости сводится к уравнению линии (которое из-за принадлежности пространству "выдавливается" вдоль оси z бесконечно в обе стороны).

$$Ax^2 + 2Dxy + By^2 + 2Gx + 2Hy + J = 0$$

По главной теореме из прошлого билета тут все понятно как происходят преобразования.

Вот эти 17 канонических уравнений - 8 новых и 9 старых:

1. Обычный и мнимый эллипсоиды:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

2. Однополостный и двуполостный гиперболоиды:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

3. Обычный и мнимый конусы:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

4. Эллиптический и гиперболический параболоиды:

$$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad 2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

   Остаются так же 9 старых уравнений, которым даются новые имена в честь нового измерения. Напоминаю, что из-за отсутствия координаты z в уравнении, фигуры выглядят как обычные линии на плоскости, но выдавленные вдоль оси z в обе стороны.

5. Обычный и мнимый эллиптические цилиндры:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

6. Гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

7. Параболический цилиндр:

$$y^2 = 2px$$

8. Параллельные плоскости - обычные, мнимые, совпадающие:

$$y^2 - a^2 = 0 \qquad y^2 + a^2 = 0 \qquad y^2 = 0$$

9. Пары пересекающихся плоскостей - действительные и мнимые:

$$a^2x^2 - c^2y^2 = 0 \qquad a^2x^2 + c^2y^2 = 0$$

   Про последние 9 говорить смысла нет - это было в прошлом билете. Первые 8 уравнений приводятся по аналогии с тем, как мы это делали в прошлом билете, но я все равно накину грубый шаблон рассуждений.

Помните, как мы избавлялись от коэффициента xy в уравнении линии второго порядка?

$$Ax^2 + \cancel{2Bxy} + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

На самом деле, от всех таких "смешанных" коэффициентов можно избавиться и для плоскости (и для любой квадратичной формы), с помощью метода Лагранжа.
Получается, мы можем привести самую обычную форму плоскости второго порядка к следующему уравнению с помощью изменения системы координат:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

Затем с помощью переноса системы координат (точно так же, как и для линий второго порядка), можно укоротить уравнение еще дальше:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$$

Ну и начинаем крутить его: переносим J, делим на него, получаем уравнения 1.1 и 1.2, в зависимости от знака J.

$$\frac{x^2}{\sqrt{J/A}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{J/B}^2} + \frac{z^2}{\sqrt{J/C}^2} = -1 \qquad \frac{x^2}{\sqrt{J/A}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{J/B}^2} + \frac{z^2}{\sqrt{J/C}^2} = 1$$

Когда коэффициент C отрицателен, из этих уравнений получаются уравнения 2.1 и 2.2 (или же когда C положителен, а A и B отрицательны, умножаем на -1):

$$\frac{x^2}{\sqrt{J/A}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{J/B}^2} - \frac{z^2}{\sqrt{J/C}^2} = -1 \qquad \frac{x^2}{\sqrt{J/A}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{J/B}^2} - \frac{z^2}{\sqrt{J/C}^2} = 1$$

А когда $J = 0$, остается лишь такое уравнение

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$$

Здесь мы просто делим на все коэффициенты и получаем уравнения 3.1 и 3.2 (3.2 выходит, когда C отрицателен)

$$\frac{x^2}{\sqrt{BC}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{AC}^2} + \frac{z^2}{\sqrt{AB}^2} = 0 \qquad \frac{x^2}{\sqrt{BC}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{AC}^2} - \frac{z^2}{\sqrt{AB}^2} = 0$$

Параболы остаются все так же слегка нетривиальным преобразованием, его мы получаем, начиная с такого уравнения:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

Полагаем, что $C = 0$, $A \neq 0, B \neq 0$. Тогда с помощью переноса системы координат, уравнение можно свести к такому:

$$Ax^2 + By^2 + 2Iz = 0$$

Теперь остается лишь немного алгебраической магии, и мы получаем уравнения 4.1 и 4.2, зависящие от знака B.

$$2z = \frac{x^2}{\sqrt{-I/A}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{-I/B}^2} \qquad 2z = \frac{x^2}{\sqrt{-I/A}^2} - \frac{y^2}{\sqrt{-I/B}^2}$$

Пример задачи

Замените систему координат для плоскости

$$x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz + 2yz = 0$$

чтобы ее можно было записать каноническим уравнением.
Решение: для этого будем решать методом Лагранжа: постепенно выделять полные квадраты для наших переменных, заменяя систему координат по пути.

$$\underline{x^2 + 2x(3y + z)} + 9y^2 + z^2 + 2yz = 0$$

Нужно дополнить до полного квадрата: добавляем и вычитаем $(3y + z)^2$:

$$\underline{x^2 + 2x(3y + z) + (3y + z)^2} + 9y^2 + z^2 + 2yz - \underline{(3y + z)^2} = 0$$
$$(x + 3y + z)^2 + 9y^2 + z^2 + 2yz - (9y^2 + 6yz + z^2) = 0$$
$$(x + 3y + z)^2 - 4yz = 0$$

Заменяем базис:

$$\begin{cases} x' = x + 3y + z \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$x'^2 - 4y'z' = 0$$

Осталось только слагаемое $4y'z'$. Сделаем замену, чтобы представить это слагаемое как разность квадратов.

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - z'' \\ z' = y'' + z'' \end{cases}$$

$$x''^2 - 4(y'' - z'')(y'' + z'') = 0$$
$$x''^2 - 4y''^2 + 4z''^2 = 0$$

Можно наконец сделать последнюю трансформацию чтобы подвести уравнение к каноническому - поворот.

$$\begin{cases} x'' = x^* \\ y'' = -z^* \\ z'' = y^* \end{cases}$$

$$x^{*2} - 4z^{*2} + 4y^{*2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^{*2} + 4y^{*2} - 4z^{*2} = 0$$

$$\frac{x^{*2}}{1^2} + \frac{y^{*2}}{(1/2)^2} - \frac{z^{*2}}{(1/2)^2} = 0$$

Получился конус.
Соберем все наши трансформации вместе:

1. Вначале мы сделали следующее преобразование:

$$\begin{cases} x' = x + 3y + z \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. Следующее преобразование мы дали в обратном порядке:

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - z'' \\ z' = y'' + z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Преобразуем в искомую форму с помощью обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix}$$

3. Последняя трансформация-поворот была с такой системой:

$$\begin{cases} x'' = x^* \\ y'' = -z^* \\ z'' = y^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = x'' \\ y^* = z'' \\ z^* = -y'' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Подставляя их друг в друга, мы сможем найти *композицию* всех трансформаций, перемножив промежуточные матрицы:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Я избавлю вас от лишних вычислений. После перемножения получается следующая матрица:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ну и с помощью обратной матрицы получаем:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$$