Система линейных уравнений - всем уже известное понятие, и название вполне себе очевидно: это *система* из *линейных уравнений*.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Такая система уравнений называется системой из m уравнений с n неизвестными.
В задачах на решение системы линейных уравнений, коэффициенты a и b считаются известными, и нужно найти все x_i соответствующие системе.
Тут как раз и пересекается решение системы и АлГем - с помощью матричных уравнений. Запишем все коэффициенты a в матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Искомые коэффициенты x и *столбик свободных членов* b запишем как векторы:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тогда, с помощью матричного умножения, можно записать систему выше как уравнение $Ax = b$.
При умножении Ax получится вектор, состоящий из линейных комбинаций a и x, а равенство векторов означает поэлементное равенство слева и справа. Получается, такая запись эквивалентна записи в системе.

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} = b$$

Нахождение всех чисел вектора x и является решением системы.
Матрица $(A|b)$, получаемая приписыванием столбика b справа от матрицы A, называется *расширенной матрицей системы*:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & & b_m \end{pmatrix}$$

Если b (столбик свободных членов) - нулевой вектор (все $b_i = 0$), система называется *однородной*.

Системы уравнений отличаются по количеству решений, что они имеют. Некоторые не имеют решений вовсе, некоторые - только одно, некоторые - бесконечное количество. Имеющие решения системы называются *совместными*, не имеющие - *несовместными*.

Естественно назревающий вопрос: может ли быть несколько (конечного количества) решений? Не может. Решение системы описывает линейную комбинацию для вектора b, и поэтому либо вектор нельзя выразить через столбики A в целом, либо возможно выразить бесконечным количеством способов (система векторов A - линейно зависимая. Один из столбиков будет равен другим, взятым в какой-то пропорции, посему можно выбирать бесконечное количество комбинаций, в которых они будут друг друга компенсировать), либо b выражается единственным способом как линейная комбинация столбиков A (свойство базиса).

Геометрически, решение такого уравнения представляет из себя нахождение такого вектора x, который после применения трансформации, описанной матрицей A, превратится в вектор b.

Из геометрических соображений тоже понятно, почему не может быть, например, лишь двух решений. Представим 3×3 пространство, и матрица A превращает его в 2×2 плоскость. Если b лежит вне этой плоскости, решений быть не может. Если же b лежит в этой плоскости, будет целая прямая в 3×3 пространстве, что будет ужата в этот вектор b после трансформации. Не может быть лишь одного такого вектора в пространстве, что будет соответствовать другому вектору на плоскости - куда денутся все остальные векторы на такой прямой?

Основным способом решения СЛАУ является метод Гаусса, о котором мы говорили в прошлых билетах, но и нахождение обратной матрицы или решение методом Крамера тоже работает - в конце концов, решение СЛАУ соответствует решению матричного уравнения.

Важно отметить, что элементарные преобразования расширенной матрицы не меняют множество решений системы уравнений. Домножение строки на скаляр соответствует домножению соответствующего уравнения в системе, как и сложение строк соответствует сложению уравнений, а такие действия не меняют множества решений уравнений. Более того, элементарные преобразования являются обратимыми: поэтому как мы можем получить новую систему из старой, так и из новой системы можно получить старую - как в одну сторону, так и в другую, множество решений не меняется.

Условие совместности

Сначала обозначим его для системы уравнений с n неизвестными и n уравнениями.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Система будет иметь решение (причем только одно), если матрица A - невырожденная ($\det A \neq 0$). По леммам, что мы доказали ранее, если матрица A порядка n невырождена, то любой столбик высоты n

раскладывается по ее столбикам как линейная комбинация - а столбик b как раз такой высоты, и соответственно он тоже будет раскладываться по столбикам A.
Можно показать по-другому: систему можно записать как матричное уравнение $Ax = b$. Чтобы найти x, необходимо домножить левую и правую стороны на обратную матрицу: $x = A^{-1}b$. А условие существования обратной матрицы - невырожденность матрицы!

В более общем случае, условием совместности выступает теорема Кронекера-Капелли (см. билет 50. Теорема Кронекера-Капелли. > Для СЛАУ):

Система линейных уравнений совместна (имеет решения) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы (матрицы системы, дополненной справа столбиком свободных членов $(A|b)$).
Причина, почему теорема является условием совместности, была описана в билете, но если кратко: если добавление столбика b не меняет ранг матрицы A, то он является линейно зависимым от столбиков матрицы A - а значит, решение существует (ведь столбик x - коэффициенты линейной комбинации).

Пример задачи

Условие: доказать, что система линейных уравнений $Ax = b$ совместна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Решение: условие совместности - неизменность ранга по теореме Кронекера-Капелли.
Найдем сначала ранг матрицы A. Внимательные могли сразу подметить, что вычитая из второй строки первую, мы получаем третью (а первые две строки линейно независимы, поэтому ранг равен двум), но я просто покажу нахождение ранга методом Гаусса.

Как известно, элементарные преобразования не меняют ранг матрицы, посему начинаем метод Гаусса: из второй строки вычитаем первую, умноженную на два, из третьей строки просто вычитаем первую (домножаем так, чтобы числа в первом столбце стали равны нулю!)

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Вторая и третья строчки совпадают, они очевидно линейно зависимы, поэтому можем ее просто убрать и ранг от этого не поменяется.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Матрица приведена к упрощенному виду, можно на этом остановится и сказать, что ранг матрицы равен двум (количество строк). Более строго: первый и четвертый столбик образуют единичную матрицу, а у нее ранг максимальный (и равен 2 в этом случае). Раз у нас всего две строчки осталось, выше ранг у этой матрицы быть не может. Если у такой матрицы ранг равен двум, то и у оригинальной ранг тоже равен двум.

$$\operatorname{Rg} A = 2$$

Теперь найдем ранг расширенной матрицы (добавление столбика b):

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Точно так же, как и с прошлой матрицей, вычитаем строки по методу Гаусса:

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Две строки все так же равны, их исключаем, и столбики $(1, 4)$ образуют единичную матрицу второго порядка. Заключаем, что и ранг расширенной матрицы равен двум. Ранги матриц совпали, а значит по теореме Кронекера-Капелли, ***матрица совместна***.