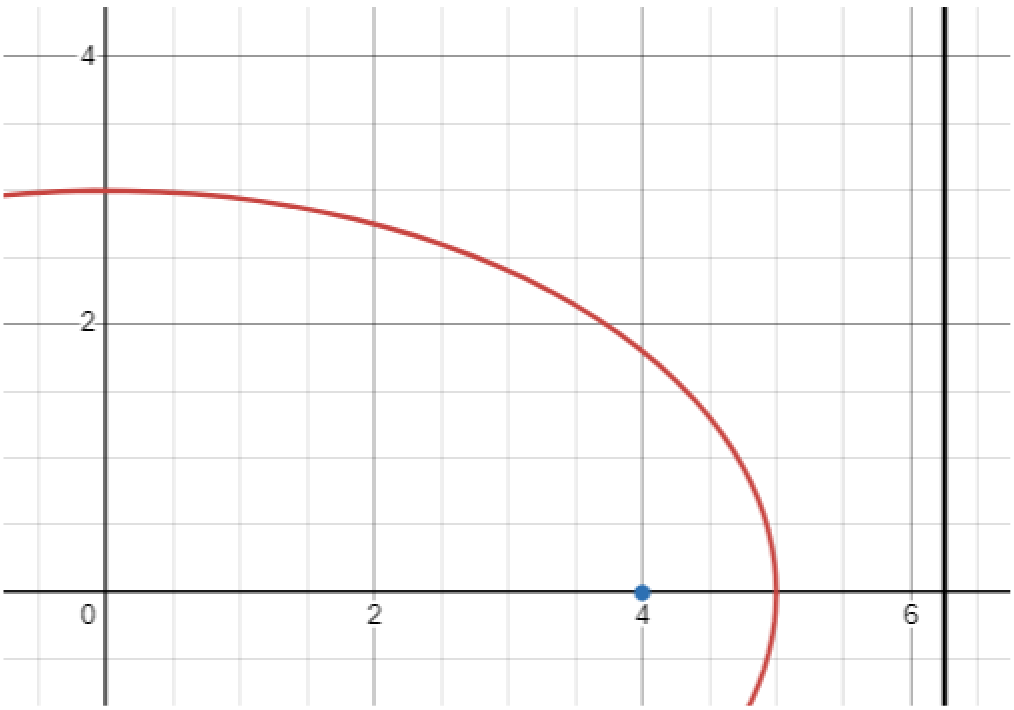
Продолжаем говорить про эллипсы - будет полезно почитать билет 21. Геометрические свойства эллипса. Фокусы. Теорема об эллипсе., если еще не читали.

Помните, как мы говорили про фокусы эллипса, и что через них можно определить эллипс как ГМТ? Так вот с директрисами происходит подобная идея. Директрисы для эллипса - это две вертикальные прямые (в канонической системе координат) - $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$. Они связывают эксцентриситет, дают ему немного больше геометрического смысла, чем было до этого.



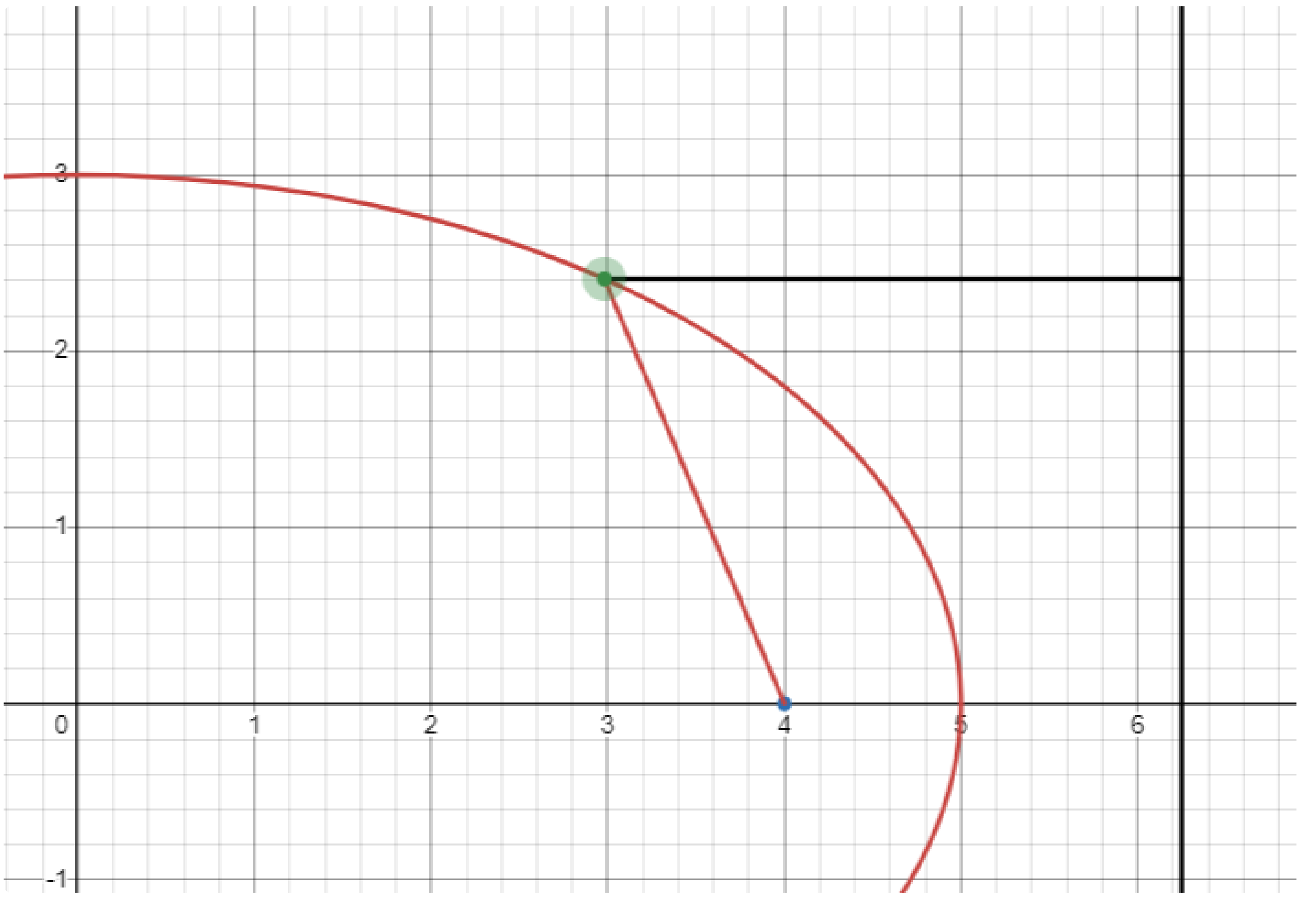
Из того, что эксцентриситет эллипса меньше единицы, следует, что директрисы эллипса лежат вне самого эллипса (и не пересекают его).

В общем смысле, директриса - это такая прямая, что отношение расстояния любой точки на линии (здесь - эллипс) до фокуса к расстоянию этой же точки до этой прямой равно эксцентриситету.

Критерий принадлежности точки к эллипсу можно, конечно, дать как "координаты точки должны удовлетворять уравнению эллипса", но это не совсем то, чего от нас хотят тут.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Я упомянул, что через директрисы можно сделать новое определение через ГМТ. Вот это и есть оно:
Чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно $(\Leftrightarrow)$, чтобы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей (на той же стороне) директрисы равнялось эксцентриситету эллипса ε.



Другими словами, это просто определение директрисы.
Ну давайте докажем и это:
(точка на эллипсе $\Rightarrow$ отношение равно ε): расстояние от правой директрисы будет равно (по очевидным причинам, схожие описаны в билете 25. Геометрические свойства параболы. Фокус, директриса. Теорема о параболе. тоже для директрис)

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - x$$

Из билета 22. Директрисы эллипса. Критерий принадлежности точки к эллипсу. мы можем забрать формулу для расстояния до фокуса:

$$r = a - \varepsilon x$$

Отношение их, на удивление...

$$\frac{r}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{a - \varepsilon x}{(a - \varepsilon x)\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Ну и конечно для левой директрисы все симметрично аналогично.
(отношение равно $\varepsilon \Rightarrow$ точка на эллипсе): здесь мы рассмотрим расстояния чисто через теорему Пифагора. Если отношение равно ε, то...

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \Rightarrow r = \varepsilon d$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \varepsilon(x + \frac{a}{\varepsilon}) = ex + a$$

Так как $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}x + a \Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^2$$

А вот это уже что-то знакомое... Помните, в прошлом билете мы уже это разрешивали? Я даже оставил метку в прошлом билете "сюда мы вернемся потом". В общем это равенство в итоге сводится к каноническому виду эллипса, что доказывает это следствие.
А раз мы доказали в обе стороны, мы доказали теорему. Эллипс действительно можно определить как ГМТ, где отношение расстояний равно эксцентриситету.

Пример задачи

Условие: зная правую директрису $x = 7$ и эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{4}{7}$, найдите каноническое уравнение, описывающее эллипс с такими характеристиками.

Решение: директриса задается уравнением $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Отсюда можно найти $a = \varepsilon x = \frac{4}{7} \cdot 7 = 4$.
Из определения эксцентриситета можно взять фокальное расстояние:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \varepsilon a = \frac{4}{7} \cdot 4 = \frac{16}{7}$$

И теперь находим b через фокальное расстояние:

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = \left(4 - \frac{16}{7}\right)\left(4 + \frac{16}{7}\right) = \frac{528}{49}$$

Знаем обе оси, теперь можно и формулу записать:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{528/49} = 1$$