Перестановка строк/столбцов

Свойство таково - если поменять любые две строки (или столбца) в матрице, то ее определитель изменит знак. Другими словами, поменяется ориентация базиса.

Доказательство начинается с доказательства этого свойства для двух соседних строк, а затем будет расширение этого свойства для двух любых строк.

1. Как всегда, по индукции начинаем рассуждать. Вводим базу $n = 2$, и ручками доказываем:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(cb - da) = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

   Полагаем, что формула работает для матриц порядка $n-1$, и докажем что тогда формула работает и для матриц порядка n.
   Теперь рассматриваем два соседних элемента, допустим строки p и $p+1$. Пусть матрица A и B совпадают, за исключением элементов на строках p и $p+1$, которые были поменяны.

$$\begin{cases} a_{pi} = b_{(p+1)i} \\ a_{(p+1)i} = b_{pi} \end{cases}, \quad i \in \overline{1, n}$$

   Запишем разложения определителей этих двух матриц по первому столбцу:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det \bar{A}_1^i$$
$$|B| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} \cdot \det \bar{B}_1^i$$

   Теперь выделим из этих сумм члены p и $p+1$ (не пугайтесь суммы на следующей строке, они просто не вмещаются на одну линию):

$$|A| = (-1)^{p+1} a_{p1} \det \bar{A}_1^p + (-1)^{(p+1)+1} a_{(p+1)1} \det \bar{A}_1^{p+1} +$$

$$+\sum_{i=1, i\neq p, i\neq p+1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\det \bar{A}_1^i$$

$$|B| = (-1)^{p+1}b_{p1}\det \bar{B}_1^p + (-1)^{(p+1)+1}b_{(p+1)1}\det \bar{B}_1^{p+1} +$$

$$+\sum_{i=1, i\neq p, i\neq p+1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}\det \bar{B}_1^i$$

В суммах мы просто искусственно убрали из суммы итерацию по строкам p и $p+1$.

Теперь преобразуем члены в определителе $|B|$:

- По определению матрицы B, $b_{p1} = a_{(p+1)1}, b_{(p+1)1} = a_{p1}$.
- По индукционному предположению, $\det \bar{B}_1^i = -\det A_1^i$:

$$|B| = (-1)^{p+1}a_{(p+1)1}\det \bar{B}_1^p + (-1)^{(p+1)+1}a_{p1}\det \bar{B}_1^{p+1} -$$

$$-\sum_{i=1, i\neq p, i\neq p+1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}\det \bar{A}_1^i$$

- Миноры в выделенных членах на самом деле не изменились по строкам, и поэтому $\det \bar{B}_1^p = \det \bar{A}_1^{p+1}$ и $\det \bar{B}_1^{p+1} = \det \bar{A}_1^p$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

- Несмотря на то, что сами миноры не изменились, они находятся под разными знаками в силу $(-1)^{p+1}$ и $(-1)^{p+2}$ - поэтому эти определители будут стоять под противоположным знаком по сравнению с теми, что стоят в определителе $|A|$:

$$|B| = (-1)^{p+1} a_{(p+1)1} \det \bar{A}_1^{p+1} + (-1)^{(p+1)+1} a_{p1} \det \bar{A}_1^{p} - \sum \ldots =$$
$$= -(-1)^{p+1} a_{p1} \det \bar{A}_1^{p} - (-1)^{(p+1)+1} a_{(p+1)1} \det \bar{A}_1^{p+1} - \sum \ldots =$$
$$= -|A|$$

Вот такими алгебраическими преобразовании мы и показали, что при перестановке двух соседних строк определитель обязательно изменит свой знак.
Расширим наше свойство для произвольных строк. Поменяем две строки с номерами p и $p+q$. Посчитаем, сколько нужно обменов соседних строк, чтобы поменять лишь эти две строчки:

2. Сначала мы двигаем строку p в сторону q. Мы начинаем обмен $(p, p+1)$, затем $(p+1, p+2)$, и так далее, последним обменом станет $(p+q-1, p+q)$. В этот момент строка, что раньше была на позиции p, станет на позицию $p+q$, а строка $p+q$ сместится на позицию $p+q-1$. Итого всего произошло q обменов.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & q_{55} & q_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & q_{55} & q_{56} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$
3. Теперь осталось подвинуть строчку $p+q$ (которая теперь уже на $p+q-1$) на позицию p. Для этого мы точно так же обмениваем строчки, но в обратном порядке: $(p+q-1, p+q-2)$, $(p+q-2, p+q-3)$, и в конце будет $(p+1, p)$. Итого $q-1$ обмен. Можно представить по-другому: обмен $p \to q$ и $q \to p$ симметричен, но когда мы обмениваем в одну сторону, вторая строчка смещается на 1 ближе к цели, поэтому в итоге будет на одно меньше действие.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & q_{55} & q_{56} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & q_{55} & q_{56} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

Сколько всего получилось обменов? $q + q - 1 = 2q - 1$, а это нечетное число. Значит, какую бы строчку мы не меняли, всегда произойдет нечетное количество обменов, а значит нечетное количество раз перевернется знак - а значит, он всегда после таких обменов изменится на противоположный. Вот такое интересное доказательство.

Для столбиков доказательство аналогичное, хотя можно и продолжить сразу из рабочего доказательства для строчек и применения теореме о определителе транспонированной матрицы. Если B мы получили с помощью перестановки двух столбцов из матрицы A, то B^T будет получена путем перестановки двух строк из матрицы B^T. А как мы знаем, определители матрицы и ее транспонированной равны, посему:

$$\det A = \det A^T = -\det B^T = -\det B$$

Из этого свойства становится видно, почему смешанное произведение кососимметрично - меняет свой знак при обмене двух векторов местами. Смешанное произведение ведь считается как определитель третьего порядка, а как мы показали, при обмене строк меняется знак - отсюда и свойство.

Еще одно забавное следствие из этого свойства - если два столбика/строчки равны друг другу, то определитель матрицы равен нулю. С одной стороны, когда мы их поменяем местами, знак должен измениться. С другой стороны, матрица не изменилась (ведь строчки равны друг другу), поэтому и определитель тоже не должен был измениться. Эти два факта приводят лишь к тому, что определитель равен нулю.

Определитель по любой строке/столбцу

Раньше мы брали определитель по первой строке/столбцу. Так же мы знаем, что при смещении соседних строк определитель меняет знак. Из этого вытекает, что сместив p-тую строку/стобцев на первое место и поменяв знак по четности p, возможно взять определитель по p-той строке/столбцу. Получаются следующие формулы разложения по p-той строке или столбцу:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{p+i} a_{ip} \bar{M}_p^i$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+p} a_{pj} \bar{M}_j^p$$

Доказательство выглядит не сложно: перемещаем p-тую строку матрицы A перестановками соседних строк, чтобы p-тая строка стала первой. На это потребуется $p-1$ перестановок, и соответственно у получившейся матрицы B, определитель $\det B = (-1)^{p-1} \det A$.
Соответственно раскладываем определитель матрицы B по первой строке, и заменяем переменные на элементы матрицы A:

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} b_{1j} \det \bar{B}_j^1$$

Элементы b_{1j}, из-за того что мы переставляли строки из матрицы A, будут равны элементами a_{pj}. Дополнительный минор $\det \bar{B}_j^1$ будет соответствовать минору $\det \bar{A}_j^p$ по той же причине.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

Переписываем:

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{pj} \det \bar{A}_j^p$$

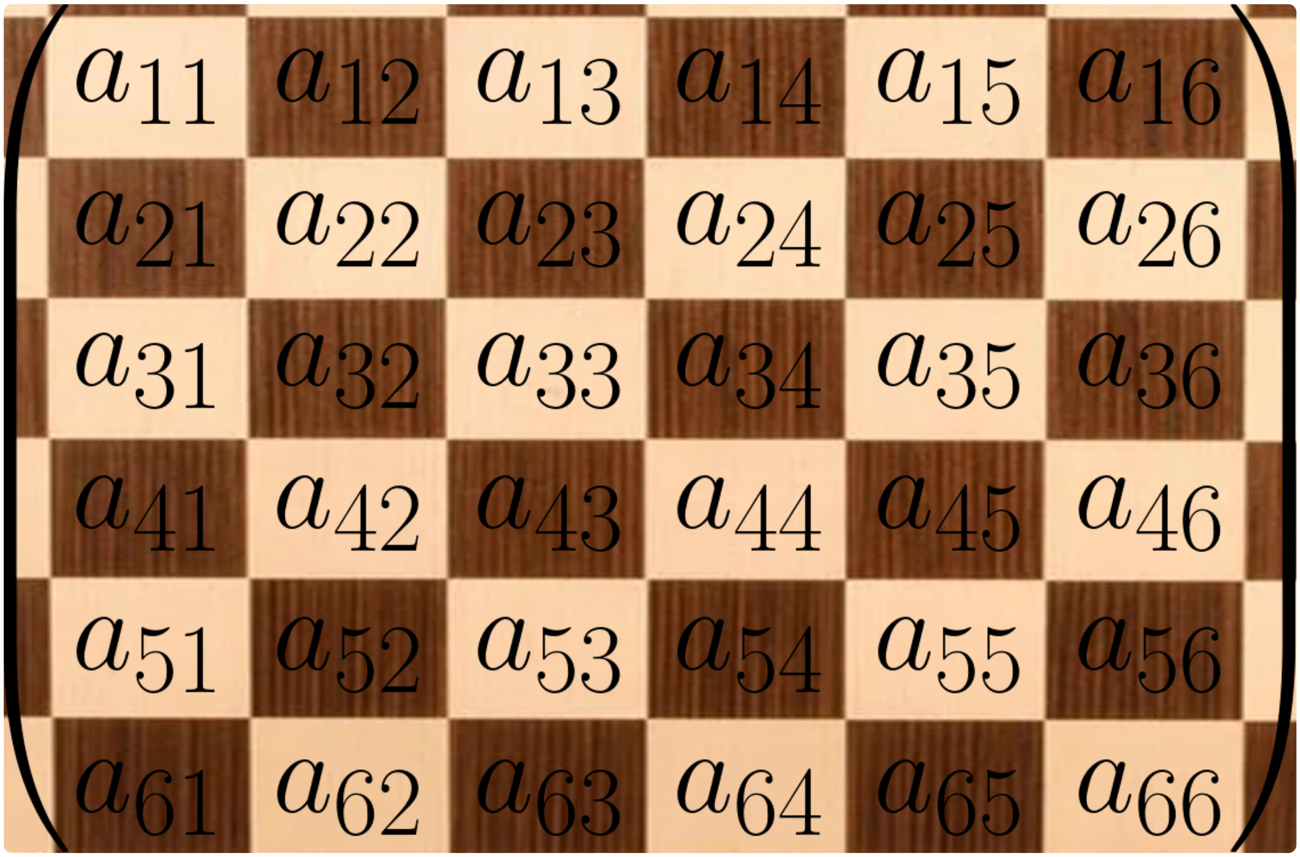
В свою очередь, $\det B = (-1)^{p-1} \det A$, из-за чего кстати следует и обратное утверждение: $\det A = (-1)^{p-1} \det B$ (просто поделили на $(-1)^{p-1}$). Подставляем и считаем:

$$\det A = (-1)^{p-1} \det B = \det A = (-1)^{p-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{pj} \det \bar{A}_j^p$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+p} a_{pj} \det \bar{A}_j^p$$

Что и доказывает работоспособность этой формулы. Доказательство для столбиков аналогично.
В силу этого свойства вытекает, что если в матрице есть нулевая строка/столбик, то определитель этой матрицы равен нулю - достаточно просто разложить определитель по этой строке/столбцу, чтобы это заметить.

Из этого свойства следует, что "матрица знаков" на матрице расположена в шахматном порядке. На "белых клетках" стоит плюс, на "черных" - минус. При разложении по любой строке/столбцу достаточно умноажть элементы на миноры в соответствии с этими знаками:



Пример задачи

Условие: посчитайте определитель матрицы A по второй строке

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 6 & -5 & 1 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение: вторая строка - четная, поэтому начинаем чередовать с минуса.

$$|A| = -6\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -6(18+2) - 5(54+8) - 1(18-24) = -424$$

Условие: посчитайте определитель матрицы B по третьему столбцу

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \\ 9 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение: третий столбик - четный, поэтому начинаем чередовать с плюса.

$$|B| = 1 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$= 1(24 - 63) + 2(16 - 54) - 4(14 - 18) = -99$$