Словосочетание "координаты сомножителей" подразумевает наличие базиса. Обозначим его за $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Запишем векторы $x, y \in \mathcal{E}$, разложенные по этому базису:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

Тогда запишем векторное произведение этих векторов:

$$(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j)$$

В последнем шаге мы раскрыли скалярное произведение по линейности и вынесли скаляры $x_i, y_j$ за его скобки.
Как видно, скалярные произведения $(e_i, e_j)$ не зависят от выбранных векторов $x, y$ - обозначим их за числа $g_{ij} = (e_i, e_j)$, зависящие от выбора базиса $e$. Тогда:

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j g_{ij}$$

Из всех значений $g_{ij}$ можно составить матрицу:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \dots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \dots & (e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \dots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Эта матрица называется *матрицей Грама базиса $e$.* Матрица Грама является симметричной, ведь скалярное произведение коммутативно:

$$(e_i, e_j) = (e_j, e_i) \Rightarrow g_{ij} = g_{ji} \Rightarrow \Gamma^T = \Gamma$$

Благодаря матрице Грама, можно записать скалярное произведение проще:

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j g_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left( \sum_{j=1}^{n} y_j g_{ij} \right) = x^T \Gamma y$$

**Свойства матрицы Грама**

Матрица Грама, составленная из базисных векторов, является невырожденной.

Предположим, что $x$ ортогонален ко всем базисным векторам $e_1, e_2, \dots, e_n$ :

$$(x, e_1) = (x, e_2) = \ldots = (x, e_n) = 0$$

Разложим $x$ по базисным векторам:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

Подставляя в скалярные произведения разложения $x$, получим систему:

$$\begin{cases} x_1(e_1, e_1) + x_2(e_1, e_2) + \ldots + x_n(e_1, e_n) = 0 \\ x_1(e_2, e_1) + x_2(e_2, e_2) + \ldots + x_n(e_2, e_n) = 0 \\ \ldots \\ x_1(e_n, e_1) + x_2(e_n, e_2) + \ldots + x_n(e_n, e_n) = 0 \end{cases}$$

Эта система - условие на вырожденность матрицы Грама. Если среди $x_1, \dots, x_n$ есть хотя бы одно не равное нулю, то матрица Грама вырождена.

$$\Gamma x = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \ldots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \ldots & (e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Рассмотрим скалярное произведение вектора $x$ с собой:

$$\begin{gathered} (x, x) = (x, x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) = \\ = x_1(x, e_1) + x_2(x, e_2) + \ldots + x_n(x, e_n) \end{gathered}$$

Если комбинация с коэффициентами $x$ столбиков матрицы Грама равна нулю, то выполняются все уравнения системы. Тогда значит, что все скалярные произведения $(x, e_i)$ равны нулю, и поэтому скалярное произведение $(x, x)$ так же равно нулю. Но из невырожденности скалярного произведения (свойство (4)) следует, что в таком случае $x = 0$, а значит линейная комбинация - тривиальная.
Получается, такая матрица Грама является невырожденной.

Можно доказать схожую теорему, что любая матрица Грама, составленная из линейно независимых векторов, будет невырожденной.