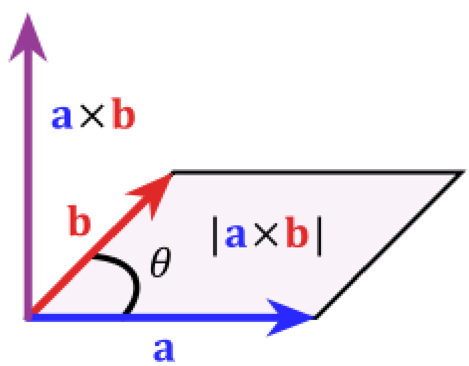
Векторное произведение

Векторное произведение двух векторов - операция, результатом которой является новый вектор, перпендикулярный плоскости, образованной исходными векторами.

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{a} \times \overline{b}$$

Этот новый вектор имеет величину, равную площади параллелограмма, образованного исходными векторами - в этом по сути и заключается геометрический смысл векторного произведения.



Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будет такой вектор $\overline{c}$, который определяются следующим образом:

1. $|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\theta$, θ - угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
2. $\overline{c}$ ортогонален каждому из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
3. Осталось два возможных направления, куда может быть направлен $\overline{c}$. Вобьем последний гвоздь - $\overline{c}$ направлен так, что тройка векторов $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ - правая.

Если $\overline{a}||\overline{b}$ или какой-то из векторов нулевой, то исходя из пункта 1 очевидно, что $\overline{c}$ - нулевой вектор.

Смешанное произведение

Смешанное произведение векторов - операция, результатом которой является *скалярное значение*. Для трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, смешанное произведение определяется как скалярное произведение вектора $\overline{a}$ на векторное произведение $[\overline{b}, \overline{c}]$:

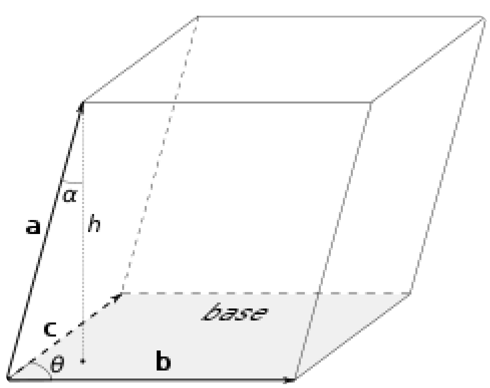
$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$$

По определению, смешанное произведение нулевое, если хотя бы два вектора коллинеарны, или если хотя бы один вектор нулевой. (подробнее об этом в свойствах)

Геометрический смысл смешанного произведения - его абсолютное значение равно объему параллелепипеда, образованного тремя векторами, и может быть использовано для нахождения объема в трехмерном пространстве.

Говоря конкретнее, если тройка векторов $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ - правая, то смешанное произведение будет равно объему параллелепипеда, построенного на этих трех векторах.

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = V$$



А если тройка - левая, то смешанное произведение будет тоже равно объему параллелепипеда, но со знаком минус.

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -V$$

Отсюда и следует, что абсолютное значение будет равно объему параллелепипеда:

$$|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})| = V$$

Это следует из геометрического смысла векторного произведения и свойства скалярного умножения:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = |[\overline{a}, \overline{b}]| \cdot \text{пр}_{[\overline{a}, \overline{b}]} \overline{c}$$

$|[\overline{a}, \overline{b}]|$ будет численно равна площади параллелограмма со сторонами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, а проекция c на перпендикулярной этой плоскости вектор и будет высотой параллелепипеда, построенного на трех векторах как на сторонах.

Кстати, объем пирамиды, построенной на этой тройке векторов, равен

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})\right|$$

Пример задачи

Условие: найдите объем пирамиды, образованной вершинами $A_1(14; 4; 5), A_2(-5; -3; 2), A_3(-2; -6; -3), A_4(-2; 2; -1)$.
Решение: чтобы найти объем пирамиды, сначала найдем объем параллелепипеда. Для этого посчитаем смешанное произведение векторов:
$\overline{a} = A_2 - A_1 = (-19; -7; -3)$
$\overline{b} = A_3 - A_1 = (-16; -10; -8)$
$\overline{c} = A_4 - A_1 = (-16; -2; -6)$

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} -19 & -7 & -3 \\ -16 & -10 & -8 \\ -16 & -2 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -19(60 - 16) + 7(96 - 128) - 3(32 - 160) = -676$$

Объем пирамиды находим, деля наш результат на 6:

$$V_{пир} = \frac{|-676|}{6} = \frac{338}{3}$$