Условие: найти ядро, образ и ранг линейного отображения $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: линейное отображение представляет такую функцию:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Сначала упростим матрицу методом Гаусса:

1: вычесть строку $[3]$ из строки $[2]$

2: умножить строку $[1]$ на 3, и вычесть ее из строки $[3]$

3: вычесть строку $[2]$, умноженную на 3, из строки $[3]$, и прибавить к строке $[1]$ строку $[2]$

4: поделить строку $[3]$ на 7

5: прибавить к строке $[1]$ строку $[3]$, умноженную на $13/2$, и прибавить к строке $[2]$ строку $[3]$, умноженную на $1/2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim^{(2)}$$

$$\sim^{(2)} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 & 12 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -15 & -11 & 7 \end{pmatrix} \sim^{(3)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 13 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim^{(4)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 13 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim^{(5)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Переменные (1), (2) и (4) оказались базисными, а (3) и (5) - свободными.

$$\begin{cases} 3x_1 = -x_3 - \frac{1}{2}x_5 \\ 3x_2 = 5x_3 - \frac{1}{2}x_5 \\ -2x_4 = -x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_2 = \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

Составляем ядро:

$$\ker A = (-\tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{1}{6}x_5; \quad \tfrac{5}{3}x_3 - \tfrac{1}{6}x_5; \quad x_3; \quad \tfrac{1}{2}x_5; \quad x_5)$$

Умножим на 6 все переменные:

$$\ker A = (-2x_3 - x_5; \quad 10x_3 - x_5; \quad 6x_3; \quad 3x_5; \quad 6x_5)$$

Видно, что ранг матрицы A равен 3, ведь после упрощения матрицы все три строки ненулевые.

Так как ранг матрицы максимален (и равен трем), и отображение отображает в пространство $\mathbb{R}^3$, все векторы в $\mathbb{R}^3$ можно представить линейной комбинацией столбиков матрицы. Значит, образ равен $\mathbb{R}^3$.

Ранг отображения равен рангу ее матрицы.
Ответ:

$$\ker A = (-2x_3 - x_5; \quad 10x_3 - x_5; \quad 6x_3; \quad 3x_5; \quad 6x_5)$$
$$\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^3$$
$$\operatorname{Rg} A = 3$$

Условие: найти ядро, образ и ранг линейного отображения $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -6 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение: приведем матрицу к упрощенному виду:

1: вычесть из строки $[2]$ строку $[1]$.
2: вычесть из строки $[3]$ строку $[2]$.
3: вычесть из строки $[2]$ строку $[1]$, умноженную на 2.
4: умножить строку $[3]$ на 3.
5: вычесть из строки $[3]$ строку $[2]$.
6: поделить строки $[2]$ и $[3]$ на 3 и 6 соответственно.
7: прибавить к строке $[1]$ строку $[2]$.
8: прибавить к строке $[2]$ строку $[3]$.
9: умножить строки $[2]$ и $[3]$ на $-1/2$ и -1 соответственно.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & -6 & -4 & 1\\ 3 & -2 & 3 & 3 & -1\end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & -6 & -4 & 1\\ 2 & -4 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix} \sim^{(2)}$$

$$\sim^{(2)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & -6 & -4 & 1\\ 0 & -2 & 6 & 6 & -1\end{pmatrix} \sim^{(3)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -6 & -12 & -6 & 3\\ 0 & -2 & 6 & 6 & -1\end{pmatrix} \sim^{(4)}$$

$$\sim^{(4)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -6 & -12 & -6 & 3\\ 0 & -6 & 18 & 18 & -3\end{pmatrix} \sim^{(5)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -6 & -12 & -6 & 3\\ 0 & 0 & 30 & 24 & -6\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim^{(6)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -2 & -4 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 4 & -1\end{pmatrix} \sim^{(7)} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -4 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 4 & -1\end{pmatrix} \sim^{(8)}$$

$$\sim^{(8)} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 4 & -1\end{pmatrix} \sim^{(9)} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1/2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -5 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

Видно, что ранг матрицы A равен 3, ведь после упрощения матрицы все три строки ненулевые.
Ядро:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Возьмем переменные $(1), (2), (5)$ за базисные, $(3), (4)$ за свободные переменные. Ищем ядро:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 = 0 \\ -5x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 + x_4 \\ x_5 = 5x_3 + 4x_4 \end{cases}$$

Записываем ядро:

$$\ker A = (x_3 + x_4; \quad \tfrac{1}{2}x_3 + x_4; \quad x_3; \quad x_4; \quad 5x_3 + 4x_4)$$

Умножим переменную x_3 на 2:

$$\ker A = (2x_3 + x_4; \quad x_3 + x_4; \quad 2x_3; \quad x_4; \quad 10x_3 + 4x_4)$$

Образ: раз ранг матрицы максимален (и равен трем), образ матрицы можно просто записать как $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^3$$

Ранг: ранг отображения равен рангу матрицы.

$$\operatorname{Rg} A = 3$$

Ответ:

$$\ker A = (2x_3 + x_4; \quad x_3 + x_4; \quad 2x_3; \quad x_4; \quad 10x_3 + 4x_4)$$
$$\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^3$$
$$\operatorname{Rg} A = 3$$

Условие: найти ядро, образ и ранг линейного отображения $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение: начинаем упрощать методом Гаусса:
1: вычесть строку $[1]$, умноженную на 2, из строки $[2]$
2: прибавить строку $[2]$ к строке $[3]$
3: вычесть строку $[1]$ из строки $[3]$
4: прибавить строку $[2]$ к строке $[1]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim^{(2)}$$

$$\sim^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim^{(4)}$$

$$\sim^{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базисные переменные ставим (1) и (4).
Ядро:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 + x_5 \\ x_4 = x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

Записываем ядро:

$$\ker A = (3x_3 + x_5; \quad x_2; \quad x_3; \quad x_2 + 4x_3; \quad x_5)$$

Ранг матрицы не максимален - равен двум! (Видно, потому что последняя строка матрицы нулевая). Поэтому образ мы собираем как оболочку базисных (линейно независимых) векторов. Раз базисные переменные взяли (1) и (4), то и базисные столбики $[1]$ и $[4]$ будут линейно независимы.

$$\operatorname{Im} A = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} A = (x_1 - x_4; \quad 2x_1 - x_4; \quad x_1 - 2x_4)$$

Ранг отображения равен рангу матрицы!!!
Ответ:

$$\ker A = (3x_3 + x_5; \quad x_2; \quad x_3; \quad x_2 + 4x_3; \quad x_5)$$
$$\operatorname{Im} A = (x_1 - x_4; \quad 2x_1 - x_4; \quad x_1 - 2x_4)$$
$$\operatorname{Rg} A = 2$$

Условие: найти ядро, образ и ранг линейного отображения $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 6 & -9 & 30 & -3 \end{pmatrix}$$

Решение: упрощаем методом Гаусса:
1: прибавить строку $[2]$ к строке $[1]$
2: прибавить строку $[3]$ к строке $[2]$
3: поделить строку $[2]$ на 2
4: вычесть строку $[2]$, умноженную на 3, из строки $[3]$
5: прибавить строку $[1]$, умноженную на $3/2$, к строке $[3]$ и вычесть строку $[1]$ из строки $[2]$
6: поделить строку $[1]$ на 20

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 6 & -9 & 30 & -3 \end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 6 & -9 & 30 & -3 \end{pmatrix} \sim^{(2)}$$

$$\sim^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 40 & -2 \\ 1 & 6 & -9 & 30 & -3 \end{pmatrix} \sim^{(3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 20 & -1 \\ 1 & 6 & -9 & 30 & -3 \end{pmatrix} \sim^{(4)}$$

$$\sim^{(4)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 20 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -30 & 0 \end{pmatrix} \sim^{(5)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim^{(6)}$$

$$\sim^{(6)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базисные переменные: $(1), (4), (5)$.
Находим ядро:

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ -2x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_5 = 2x_2 - 3x_3 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Записываем ядро:

$$\ker A = (0; \quad x_2; \quad x_3; \quad 0; \quad 2x_2 - 3x_3)$$

Ранг отображения равен рангу матрицы, он будет равен 3.
Так как ранг максимален, образ можно просто записать как $\mathbb{R}^3$.
Ответ:

$$\ker A = (0; \quad x_2; \quad x_3; \quad 0; \quad 2x_2 - 3x_3)$$
$$\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^3$$
$$\operatorname{Rg} A = 3$$