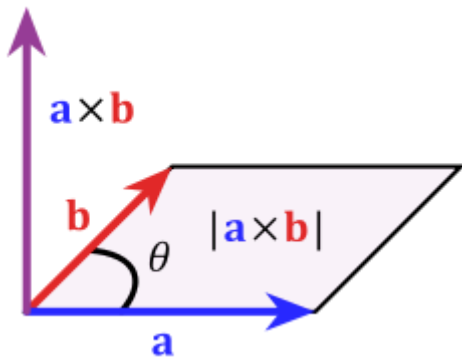


Векторное произведение

Векторное произведение двух векторов - операция, результатом которой является новый вектор, перпендикулярный плоскости, образованной исходными векторами.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

Этот новый вектор имеет величину, равную площади параллелограмма, образованного исходными векторами - в этом по сути и заключается геометрический смысл векторного произведения.



Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} будет такой вектор \vec{c} , который определяются следующим образом:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$, θ - угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .
2. \vec{c} ортогонален каждому из векторов \vec{a} и \vec{b} .
3. Осталось два возможных направления, куда может быть направлен \vec{c} .
Вобьем последний гвоздь - \vec{c} направлен так, что тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ - правая.

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или какой-то из векторов нулевой, то исходя из пункта 1 очевидно, что \vec{c} - нулевой вектор.

Смешанное произведение

Смешанное произведение векторов - операция, результатом которой является *скалярное значение*. Для трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, смешанное произведение определяется как скалярное произведение вектора \vec{a} на векторное произведение $[\vec{b}, \vec{c}]$:

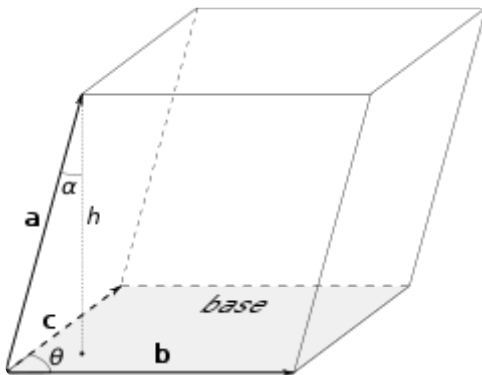
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

По определению, смешанное произведение нулевое, если хотя бы два вектора коллинеарны, или если хотя бы один вектор нулевой. (подробнее об этом в свойствах)

Геометрический смысл смешанного произведения - его абсолютное значение равно объему параллелепипеда, образованного тремя векторами, и может быть использовано для нахождения объема в трехмерном пространстве.

Говоря конкретнее, если тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ - правая, то смешанное произведение будет равно объему параллелепипеда, построенного на этих трех векторах.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = V$$



А если тройка - левая, то смешанное произведение будет тоже равно объему параллелепипеда, но со знаком минус.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -V$$

Отсюда и следует, что абсолютное значение будет равно объему параллелепипеда:

$$|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})| = V$$

Кстати, объем пирамиды, построенной на этой тройке векторов, равен

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$$

Пример задачи

Условие: найдите объем пирамиды, образованной вершинами $A_1(14; 4; 5)$, $A_2(-5; -3; 2)$, $A_3(-2; -6; -3)$, $A_4(-2; 2; -1)$.

Решение: чтобы найти объем пирамиды, сначала найдем объем параллелепипеда. Для этого посчитаем смешанное произведение векторов:

$$\bar{a} = A_2 - A_1 = (-19; -7; -3)$$

$$\bar{b} = A_3 - A_1 = (-16; -10; -8)$$

$$\bar{c} = A_4 - A_1 = (-16; -2; -6)$$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} -19 & -7 & -3 \\ -16 & -10 & -8 \\ -16 & -2 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -19(60 - 16) + 7(96 - 128) - 3(32 - 160) = -676$$

Объем пирамиды находим, деля наш результат на 6:

$$V_{\text{пир}} = \frac{|-676|}{6} = \frac{338}{3}$$