Однородные системы

Рассмотрим *однородную* систему - когда столбик b равен нулю:

$$Ax = 0$$

Такая система всегда будет совместна, потому что как минимум существует тривиальное решение ($x_i = 0$). Существование других решений зависит от ранга матрицы A.
По отношению к системе $Ax = b$ такая система называется *приведенной*, ведь в этой системе $b = 0$.

Приведенные системы и оригинальные связаны своими решениями: пусть существует решение оригинальной системы x_0. Если y - решение приведенной системы, то $x = x_0 + y$ тоже будет решением оригинальной системы. Покажем это:
Пусть y - решение приведенной системы. Тогда, по линейности матриц:

$$Ax = Ax_0 + Ay = b + 0 = b$$

И обратно, если x - решение оригинальной системы, то $y = x - x_0$:

$$Ay = Ax - Ax_0 = b - b = 0$$

Более того - если x_1 и x_2 - решения приведенной системы, то любая их линейная комбинация также будет решением приведенной системы:

$$Ax_1 = 0, Ax_2 = 0 \Rightarrow A(\alpha x_1 + \beta x_2) = Ax_1\alpha + Ax_2\beta = 0\alpha + 0\beta = 0$$

Таким образом, мы можем описать множество решений совместной системы через множество решений приведенной системы. Нам достаточно решить приведенную систему и найти лишь одно решение оригинальной - этого достаточно, чтобы описать *все* решения оригинальной.

Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица

Эта мысль натурально подводит нас к идее *фундаментальной системе решений* (ФСР): мы можем указать все (линейно независимые) решения приведенной системы и записать их в одну матрицу. Матрица F высотой n будет называться *фундаментальной матрицей* для однородной системы с матрицей A размеров $m \times n$, если:

1. $AF = 0$ (каждый столбик матрицы F является линейной комбинацией для любой строки A, который обнуляет ее - решение приведенной системы).
2. Столбики F линейно независимы.
3. Каждое решение уравнения $Ax = 0$ раскладывается по столбцам матрицы F.

Столбики фундаментальной матрицы и называются *фундаментальной системой решений (ФСР)*.
Таким образом, любая линейная комбинация столбиков ФСР будет являться решением приведенной системы. Если f_i - i-тый столбик матрицы ФСР, то общий вид решения системы выглядит так:

$$x = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_3 f_3$$

Если приведенная система не имеет нетривиальных решений, то второе условие - линейная независимость столбиков - не может быть выполнено (ведь нулевой столбик является тривиальным решением и уже сразу линейно зависим), и фундаментальной матрицы быть не может.
Заметьте, что ничего не обязывает фундаментальную матрица F быть квадратной!

Теперь поговорим про ее свойства:
Любая линейная комбинация столбцов F является решением приведенной системы. Более формально:
Пусть фундаментальная матрица F состоит из p столбцов. Тогда, x является решением уравнения $Ax = 0$ тогда и только тогда $(\Leftrightarrow)$, когда найдется столбец c высоты p, что $x = Fc$ - линейная комбинация столбцов матрицы F.

Если x является решением уравнения, из третьего условия на матрицу F следует существование столбца c. В другую сторону, существование c влечет за собой существование решения уравнения x из-за ассоциативности умножения и первого условия:

$$Ax = A(Fc) = (AF)c = 0c = 0$$