

Расстояние от точки до прямой (2д)

Условие: найти расстояние от точки $A(1; 5)$ до прямой $4x + 3y = 6$:

Решение: У нас есть формула для нахождения расстояния:

$$d(A) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 5 - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{13}{5} = 2.6$$

Ответ: 2.6.

Расстояние от точки до прямой (3д)

Условие: найти расстояние от точки $A(3, 1, 4)$ до прямой

$$\frac{x - 2}{5} = \frac{y + 3}{4} = \frac{z - 1}{2}$$

Решение: тут все не так просто, поэтому придумаем свой способ.

Запишем прямую в параметрическом виде, и найдем минимум функции расстояния от точки от аргумента t до точки A .

Для начала, линия в параметрическом виде:

$$L(t) = \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -3 + 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Расстояние между двумя точками вычисляется как

$$d(t) = \sqrt{(L(t)_x - A_x)^2 + (L(t)_y - A_y)^2 + (L(t)_z - A_z)^2}$$

Найдем ее минимум. Проще будет найти минимум квадрата расстояния, (ведь минимумы совпадают). Для этого дифференцируем по t :

$$d^2(t) = (2 + 5t - 3)^2 + (-3 + 4t - 1)^2 + (1 + 2t - 4)^2$$

$$d^2(t) = (5t - 1)^2 + (4t - 4)^2 + (2t - 3)^2$$

$$d^2(t)' = 5(5t - 1) + 4(4t - 4) + 2(2t - 3)$$

Приравниваем к нулю:

$$5(5t - 1) + 4(4t - 4) + 2(2t - 3) = 0$$

$$25t - 5 + 16t - 16 + 4t - 6 = 0$$

$$45t - 27 = 0$$

$$t = \frac{27}{45}$$

Теперь подставляем это t в $L(t)$, чтобы найти точку на прямой с минимальным расстоянием:

$$L\left(\frac{27}{45}\right) = \begin{cases} x = 2 + 5 \cdot \frac{27}{45} \\ y = -3 + 4 \cdot \frac{27}{45} \\ z = 1 + 2 \cdot \frac{27}{45} \end{cases} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3/5 \\ 11/5 \end{pmatrix}$$

Теперь расстояние считается просто как длина разницы этих точек:

$$\begin{aligned} d(A) &= |L\left(\frac{27}{45}\right) - A| = \\ &= |(5 - 3, -3/5 - 1, 11/5 - 4)| = \\ &= |(2, -8/5, -9/5)| = \\ &= \sqrt{2^2 + (8/5)^2 + (9/5)^2} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

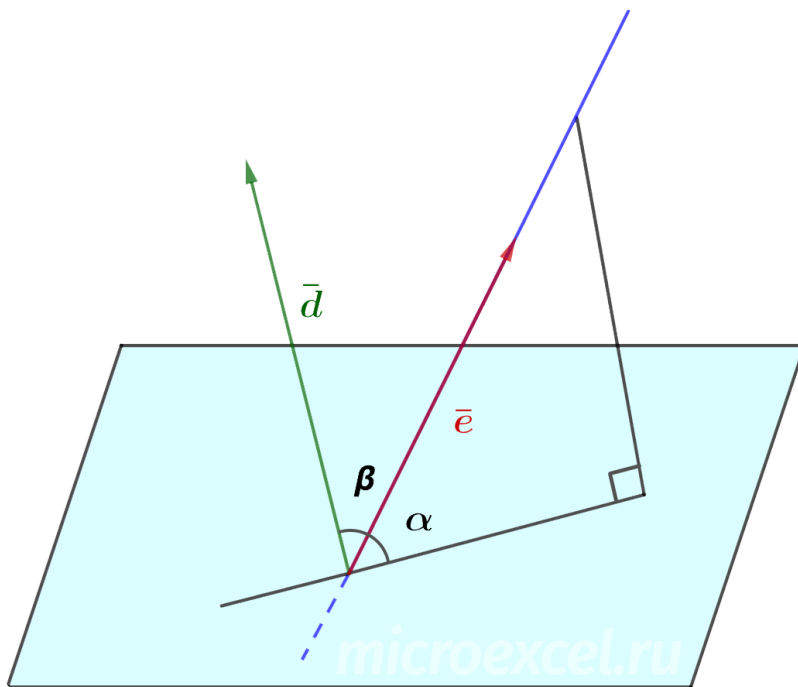
Угол между плоскостью и прямой

Условие: найдите угол между плоскостью

$$3y + 4z + 6 = 0$$

и прямой

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z - 2}{6}$$



Решение: первая мысль при задачах с углами - скалярное/векторное произведение. Одна из формул для них использует длины векторов и *угол между ними*.

Но эти произведения работают с векторами - а у нас есть плоскость. Чтобы сработать с ней, возьмем ее нормальный вектор: $\vec{n}(0; 3; 4)$. Так как x в уравнении нет, это равносильно $0x + \dots$, поэтому в векторе ставим ноль. Для прямой тоже стоит взять вектор - но тут можно просто взять направляющий вектор: $\vec{p}(2; 3; 6)$.

Готовы два вектора, так что можем взять скалярное произведение двух векторов:

$$(\vec{n}, \vec{p}) = 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 9 + 24 = 33$$

С другой стороны,

$$(\vec{n}, \vec{p}) = \cos \beta \cdot |\vec{n}| \cdot |\vec{p}|$$

Найдем длины векторов:

$$|\vec{n}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

Отсюда косинус:

$$\cos \beta = \frac{(\bar{n}, \bar{p})}{|\bar{n}| |\bar{p}|} = \frac{33}{5 \cdot 7} = \frac{33}{35}$$

Но ведь это косинус *бета*! Посмотрите на рисунке, какой именно угол мы нашли. Нам нужен угол α . А раз угол между нормалью и плоскостью - прямой, то α можно выразить как $90^\circ - \beta$. Вспоминаем наши любимые тригонометрические формулы:

$$\cos \beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

Ответ: $\sin \alpha = \frac{33}{35}$, ну или $\alpha = \arcsin \frac{33}{35}$.