Продолжим говорить про гиперболы, заодно затронем фокусы и директрисы - опять же, будет много параллелей с эллипсами - будет полезно почитать, если еще не читали. 21. Геометрические свойства эллипса. Фокусы. Теорема об эллипсе. и 22. Директрисы эллипса. Критерий принадлежности точки к эллипсу.

Как фокусы были у эллипса, так они есть и у гиперболы. Они точно так же лежат в координатах $(c; 0)$ и $(-c; 0)$, где c называется фокусным расстоянием, и обычно обозначаются как F_1 и F_2. Однако в отличие от эллипса, c связано следующим уравнением:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

a и b, как уже было сказано, являются действительной и мнимой полуосями гиперболы. В отличие от эллипса, в уравнении тут плюс, а не минус. Из этого следует, что $c > a$, поэтому фокусы будут лежать внутри ветвей гиперболы.

Эксцентриситет остается таким же отношением как и для эллипса (гипербола и эллипс это чуть ли не один и тот же математический объект), и считается как $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Так как мы раньше установили, что $c > a$, поэтому $\varepsilon > 1$ для гипербол.

Расстояние до точки $M(x; y)$ на гиперболе до фокусов (F_1, F_2) определяется следующим образом:

$$r_1 = |a - \varepsilon x| \qquad r_2 = |a + \varepsilon x|$$

Доказательство этих формул идет через рассмотрение квадрата расстояния от этой точки до фокуса с помощью теоремы Пифагора:

$$r^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2$$

...жуть как похоже на доказательство такой же формулы для эллипса, не? В билете 21. Геометрические свойства эллипса. Фокусы. Теорема об эллипсе.

расписан весь алгебраический хоррор этого доказательства, и для гипербол оно чуть ли не идентичное. Снова я в это лезть не очень хочу.

Теорема о гиперболе

Поговорим про ГМТ?)
Теорема о гиперболе утверждает, что гипербола - ГМТ, где ***разность*** расстояний до фокусов (по абсолютной величине) равно $2a$. Другими словами, чтобы точка M лежала на гиперболе, необходимо и достаточно ($\Leftrightarrow$), чтобы абсолютная разность ее расстояний до фокусов должна быть равна $2a$.

Доказательство тоже непримечательное и схоже с доказательством теоремы об эллипсе:
(на гиперболе $\Rightarrow$ разница равна $2a$): рассмотрим разницу расстояний до фокусов.

$$r_1 - r_2 = |a - \varepsilon x| - |a + \varepsilon x|$$

Если точка лежит на правой ветви, то $x \geq a$. Тогда левый модуль раскроется со знаком минус, правый - с плюсом.

$$r_1 - r_2 = \varepsilon x - a - a - \varepsilon x = -2a$$

Соответственно абсолютная разница равна $2a$.
Аналогично и для левой ветви - $x \leq -a$:

$$r_1 - r_2 = a - \varepsilon x + a + \varepsilon x = 2a$$

Получается, на какой бы ветви точка не лежала, абсолютная разница равна $2a$.
(разница равна $2a \Rightarrow$ на гиперболе): здесь мы вычитаем расстояния до двух фокусов через теорему Пифагора, как делали это для теоремы об эллипсе, возводим пару раз в квадрат и получаем каноническое уравнение гиперболы.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Возводим в квадрат...

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

$$4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + 4xc = 0$$

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = -(xc + a^2)$$

Снова возводим в квадрат...

$$a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = x^2c^2 + 2a^2xc + a^4$$

$$a^2x^2 + \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 + \cancel{2a^2xc} + a^4$$

$$a^2(x^2 + c^2 + y^2 - a^2) = x^2c^2$$

Подставляем равенство $c^2 = a^2 + b^2$:

$$a^2(x^2 + \cancel{a^2} + b^2 + y^2 - \cancel{a^2}) = x^2(a^2 + b^2)$$

$$\cancel{a^2x^2} + a^2y^2 + a^2b^2 = \cancel{x^2a^2} + x^2b^2$$

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

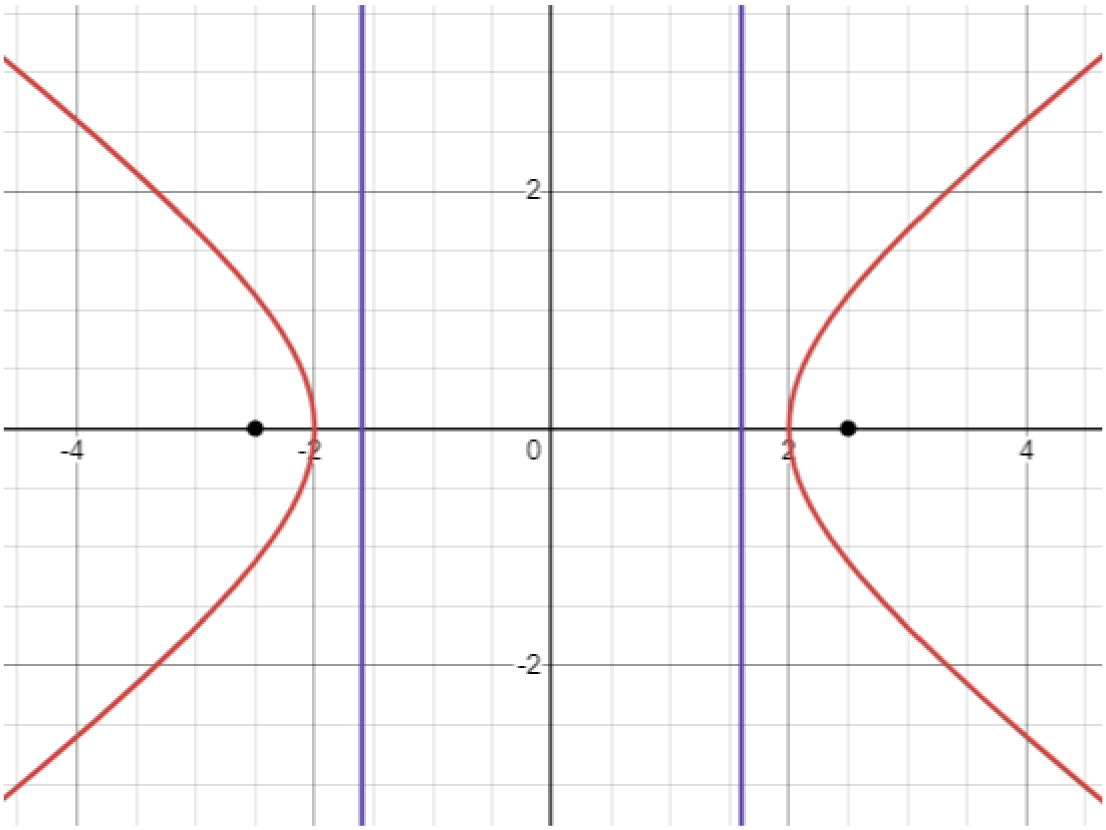
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Доказали в обе стороны, поэтому доказательство окончено.

Вот казалось бы, куча математических преобразований было написано, "ой какое громоздкое доказательство", а на деле все то же самое, что и для эллипса.

Ну да ладно, давайте теперь про директрисы. Как я упоминал уже для эллипсов (22. Директрисы эллипса. Критерий принадлежности точки к эллипсу.), директрисы это прямые, такое что отношение расстояния от любой точки на линии (здесь уже гипербола) до фокуса к расстоянию этой же точки до этой прямой равно эксцентриситету - ничего не меняется.

Все не меняется настолько сильно, что директрисы записываются ровно так же: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$. Раз для гипербол $\varepsilon > 1$, то эти директрисы будут лежать внутри полосы $2a$ в центре координат - следовательно, пересекать гиперболу они не будут.



Кто бы мог подумать, что для директрис, ровно как и с эллипсом, можно ввести ГМТ?
Это ГМТ и есть критерий принадлежности точки к гиперболе, и по формулировке оно полностью повторяет критерий для эллипса.
Чтобы точка лежала на гиперболе, необходимо и достаточно ($\Leftrightarrow$), чтобы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету (ε).

Гиперболы все подсосали у эллипса, и это включает все доказательства.
(на гиперболе $\Rightarrow$ отношение равно ε): расстояние от правой директрисы будет равно, если точка на правой ветви (причины смотрите в других билетах, которые описывают директрисы):

$$d = x - \frac{a}{\varepsilon}$$

Расстояние до фокуса справа мы уже вывели раньше:

$$r = \varepsilon x - a$$

Отношение их, не поверите...

$$\frac{r}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon x - a}{(\varepsilon x - a)\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Для левой директрисы все точно так же в силу симметрии...
(отношение равно $\varepsilon \Rightarrow$ точка на эллипсе): как и для эллипсов, рассмотрим расстояние через Пифагора. Если отношение равно ε, то...

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \Rightarrow r = \varepsilon d$$

Для левого фокуса и точки на правой ветке:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \varepsilon(x + \frac{a}{\varepsilon}) = ex + a$$

Так как $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}x + a \Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^2$$

И мы снова приходим к этому уравнению, и снова возвращаю вас на билет 22. Директрисы эллипса. Критерий принадлежности точки к эллипсу., в пункт, выделенный жирным.
Необходимость и достаточность доказана, и значит доказательство завершено. Самые душные доказательства, боже.

Пример задачи

Условие: зная директрису $x = 3$ и эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{5}{3}$, запишите каноническое уравнение гиперболы.
Решение: как и в задаче с эллипсом, начинаем крутить числа:

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow a = \varepsilon x = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \varepsilon a = \frac{5}{3} \cdot 5 = \frac{25}{3}$$

Для гипербол, правда, равенство с фокальным расстоянием чуть другая:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = \left(\frac{25}{3} - 5\right)\left(\frac{25}{3} + 5\right) = \left(\frac{20}{3}\right)^2$$

Записываем гиперболу:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{400/9} = 1$$