Мы в основном работали с векторами, что записывались как m чисел в виде столбика:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Матрица - это несколько таких столбиков вместе!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Такая матрица будет размером $m \times n$. Первым обозначается количество строк (или высота столбика, ведь матрица в первую очередь - группа столбиков), и уже потом количество столбцов.

Определения видов матриц

1. Для матриц определена операция *транспонирования* - это обмен столбиков и рядов между собой - как будто мы по диагонали ее переворачиваем. Для матрицы A, транспонированная матрица обозначается как A^T. Матрица размеров $m \times n$ при транспонировании станет матрицей $n \times m$. Из определения вытекает очевидное равенство: $A^T_{ji} = A_{ij}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Матрицы делятся на квадратные и прямоугольные. Квадратные, очевидно, когда значения n и m равны $(1 \times 1,\ \ 2 \times 2,\ \ 3 \times 3,\ \ \dots)$. Во всех остальных случаях считается, что матрица прямоугольная.
3. Для квадратных матриц определены понятия "главная диагональ" и "побочная диагональ".
   - Главная диагональ идет из левого верхнего угла в правый нижний. То есть элементы a_{ii} для $0 < i \leq n$.

$$\begin{pmatrix} [a_{11}] & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & [a_{22}] & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & [a_{(n-1)(n-1)}] & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & [a_{nn}] \end{pmatrix}$$

   - Побочная диагональ же наоборот - из правого верхнего угла в левый нижний. Это будут элементы $a_{i(n+1-i)}$ для $0 < i \leq n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & [a_{1n}] \\ a_{21} & a_{22} & \dots & [a_{2(n-1)}] & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & [a_{(n-1)2}] & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ [a_{n1}] & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Квадратные матрицы делятся на диагональные и недиагональные (остальные). У диагональных матриц все элементы, не лежащих на

главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

5. Различают треугольные квадратные матрицы; а именно, верхние треугольные и нижние треугольные. Верхняя треугольная получается, когда числа образуют треугольник "сверху" - выше верхней диагонали (включительно), а все ниже заполнено нулями:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Соответственно, нижняя треугольная образует треугольник "снизу":

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6. Квадратная матрица называаеется симметричной, если для любых i, j выполняется равенство $A_{ij} = A_{ji}$. "Симметрия" матрицы здесь подразумевается относительно главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Линейные свойства матриц

Напомню, что такое линейность - сложение и умножение на скаляр (число). Соответственно, умножение двух матриц не является линейной операцией.

Сложение двух матриц происходит поэлементно, аналогично с векторами. Раз операция происходит поэлементно, то для каждого элемента в другой матрице должна найтись пара, поэтому возникает условие: для сложения, матрицы должны быть одинакового размера.

$$A + B = C \Leftrightarrow A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Умножение на скаляр тоже происходит поэлементно, все так же аналогично с векторами (матрицы это же кучка векторов вместе):

$$\alpha A = B \Leftrightarrow \alpha A_{ij} = B_{ij}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

Из определений этих двух линейных операций, вытекают свойства, напрямую выходящие из свойств сложения и умножения обычных чисел. Заглавными буквами обозначаются матрицы (одинаковых размеров), греческими буквами обозначаются скаляры:

- Коммутативность: $A + B = B + A$
- Ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Нейтральный элемент: $A + 0 = A$ (здесь 0 - нулевая матрица)
- Обратный элемент: $A + (-A) = 0$ ($-A = (-1)A$, называется *противоположной* матрицей - не путать с *обратной*)
- Ассоциативность: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$
- Дистрибутивность: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- Еще одна дистрибутивность: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- Нейтральный элемент: $1 \cdot A = A$.

Линейная зависимость матриц

Помните, как было понятие линейной зависимости системы векторов? 3. Векторные пространства. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Их свойства.
Мы говорили, что система векторов зависима, когда один из векторов представляется как линейная комбинация других векторов.
Точно такое же и с матрицами: система матриц называется *линейно зависимой*, если одна из матриц может быть представлена как линейная комбинация других матриц системы. В противном случае, система матриц будет *линейно независимой*.

Строго математически, этот критерий можно переформулировать: система называется *линейно зависимой*, когда существует нетривиальная линейная комбинация, что:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_k A_k = 0$$

Если единственное решение этой системы тривиально (все коэффициенты $a_i = 0$), то система называется *линейно независимой*.

Свойства линейно зависимых и независимых систем матриц совпадает с соответующими системами векторов (ведь матрицы, опять же, просто группы векторов).

Пример задачи

Условие: определите, линейно зависимая ли система матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Решение: если система линейно зависимая, существует такое α, что $\alpha A = B$.

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Матрицы равны, когда равны все их элементы. Соответственно:

$$\begin{cases} 2\alpha = -4 \\ -\alpha = 2 \\ 3\alpha = -6 \\ 4a = -8 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -2$$

Ответ: система линейно зависима. А именно, $-2A = B$.

Условие: определите, линейно зависимая ли система матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение: чтобы система была линейно зависимой, должны существовать α, β, что $\alpha A + \beta B = C$.
По аналогии с прошлым решением:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\beta & -\beta \\ 8\beta & 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

В систему:

$$\begin{cases} 2\alpha + 5\beta = -5 \\ -\alpha - \beta = 4 \\ 3\alpha + 8\beta = 7 \\ 4\alpha + 4\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

Можно легко увидеть, что решения нет, если взглянуть на строки 2 и 4. Раз решений нет, то...
Ответ: система линейно независима.