Условие: найти матрицу оператора φ в базисе i, j, k, производящего поворот вокруг оси Oz на 45°.

Решение: в задачах такого типа мы должны применить оператор к каждому базисному вектору i, j, k, и записать полученную матрицу.

Матрица поворота на угол в двухмерном пространстве выглядит следующим образом:

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

В трехмерном же они становятся такими: $M_x(\theta), M_y(\theta), M_z(\theta)$ для вращения вокруг осей x, y, z соотвественно.

$$M_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$M_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$M_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нас конечно интересует последняя матрица. Подставляя угол 45°, получаем

$$M_z(45^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Это и будет матрицей оператора при повороте на 45°.

Условие: найти матрицу оператора φ в базисе i, j, k, производящего ортогональное проектирование на плоскость $x + y + z = 0$.

Решение: здесь мы проектируем каждый базис схоже с задачей на нахождение симметричной точки для плоскости.
Каждый базисный вектор мы проектируем на эту плоскость:

$$\operatorname{pr}_\pi v = v - \frac{(v, n)}{(n, n)} n$$

n - нормальный вектор к плоскости, и собирается из коэффициентов A, B, C плоскости: $n = (1; 1; 1)$.
Тогда:

$$\begin{aligned}
\operatorname{pr}_\pi(1, 0, 0) = (1, 0, 0) - \tfrac{1}{3}(1, 1, 1) = (\tfrac{2}{3}; -\tfrac{1}{3}; -\tfrac{1}{3}) \\
\operatorname{pr}_\pi(0, 1, 0) = (0, 1, 0) - \tfrac{1}{3}(1, 1, 1) = (-\tfrac{1}{3}; \tfrac{2}{3}; -\tfrac{1}{3}) \\
\operatorname{pr}_\pi(0, 0, 1) = (0, 0, 1) - \tfrac{1}{3}(1, 1, 1) = (-\tfrac{1}{3}; -\tfrac{1}{3}; \tfrac{2}{3})
\end{aligned}$$

Получается матрица: базисные столбики записываются в столбики матрицы!

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Условие: найти матрицу оператора φ в базисе i, j, k, производящего ортогональное проектирование на ось $x = 0, y = z$.

Решение: здесь же мы проектируем на прямую, а не на плоскость. Процесс такой же, просто меняется вектор нормали на направляющий вектор прямой (и следовательно формула проекции тоже).
Прямая задается параметрически как $(0; y; y)$, поэтому направляющий вектор будет $p = (0; 1; 1)$.

$$\mathrm{pr}_\pi v = \frac{(v,p)}{(p,p)}p$$

Проектируем:

$$\mathrm{pr}_\pi(1;0;0) = \tfrac{0}{2}(0;1;1) = (0;0;0)$$
$$\mathrm{pr}_\pi(0;1;0) = \tfrac{1}{2}(0;1;1) = (0;\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2})$$
$$\mathrm{pr}_\pi(0;0;1) = \tfrac{1}{2}(0;1;1) = (0;\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2})$$

Записываем в столбики:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Условие: найти матрицу оператора φ в базисе i, j, k, производящего зеркальное отражение относительно плоскости $x + y + z = 0$.

Решение: аналогично с проектированием на плоскость и билетом с симметричными точками, мы просто удваиваем проекцию:

$$\mathrm{pr}_\pi v = v - 2\frac{(v,n)}{(n,n)}n$$

n все также равен $(1;1;1)$, и проектируя базисные векторы:

$$\mathrm{pr}_\pi(1,0,0) = (1,0,0) - \tfrac{2}{3}(1,1,1) = (\tfrac{1}{3}; -\tfrac{2}{3}; -\tfrac{2}{3})$$
$$\mathrm{pr}_\pi(0,1,0) = (0,1,0) - \tfrac{2}{3}(1,1,1) = (-\tfrac{2}{3}; \tfrac{1}{3}; -\tfrac{2}{3})$$
$$\mathrm{pr}_\pi(0,0,1) = (0,0,1) - \tfrac{2}{3}(1,1,1) = (-\tfrac{2}{3}; -\tfrac{2}{3}; \tfrac{1}{3})$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Условие: найти матрицу оператора φ в базисе i, j, k, производящего зеркальное отражение относительно оси $x = z, y = 0$.

Решение: все аналогичнoooo, тут же мы удваиваем проекцию с направляющим вектором.

$$\mathrm{pr}_\pi v = 2\frac{(v,p)}{(p,p)}p - v$$

$p = (1;0;1)$
Преобразуем базисы:

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}_\pi(1;0;0) = (1;0;1) - (1;0;0) = (0;0;1)\\ \mathrm{pr}_\pi(0;1;0) = 0(1;0;1) - (0;1;0) = (0;-1;0)\\ \mathrm{pr}_\pi(0;0;1) = (1;0;1) - (0;0;1) = (1;0;0)\end{gathered}$$

Матрица:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Условие: найти матрицу оператора φ в базисе i, j, k, производящего векторное произведение с $i + j + k$.

Решение: наиболее тривиальный случай - просто перемножаем базисы.

$$\begin{gathered}[(1;0;0),(1;1;1)] = (0;-1;1)\\ [(0;1;0),(1;1;1)] = (1;0;-1)\\ [(0;0;1),(1;1;1)] = (-1;1;0)\end{gathered}$$

Матрица:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$