Для начала вспомним, что такое уравнение второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + D = 0$$

Как было сказано в одном из прошлых билетов, мы добавляем 2 к некоторым коэффициентам, потому что в формулах часто используются половины этих коэффициентов.

Подробнее про замену системы координат уже было описано в 14. Замена базиса и системы координат. Изменение координат при параллельном переносе и повороте.
Замена координат сопровождается новым базисом и новой точкой начала координат. Раз у нас все в 2д (из-за двух переменных), старый базис мы зададим как $(\overline{e_1}; \overline{e_2})$, новый как $(\overline{e'_1}; \overline{e'_2})$, и эти базисные вектора заданы через старые как $\overline{e'_1} = \alpha_1\overline{e_1} + \beta_1\overline{e_2}$ и $\overline{e'_2} = \alpha_2\overline{e_1} + \beta_2\overline{e_2}$.
Новая точка начала координат в старом базисе имеет координаты $O(x_0; y_0)$.
И чтобы избавить от всех же долгих рассуждений, вектор с координатами $\overline{a}(a_1; a_2)$, будет в новом базисе иметь координаты $(a'_1; a'_2)$, связанные следующими уравнениями:

$$\begin{cases} a_1 = a'_1\alpha_1 + a'_2\alpha_2 + O_1 \\ a_2 = a'_1\beta_1 + a'_2\beta_2 + O_2 \end{cases}$$

То есть ничего нового и для линий второго порядка. Между прочим, ничего нового не будет и для линий высшего порядка, потому что рассуждения в билете #14 никак не зависили от порядка, и лишь рассматривали преобразования базисов.

Из такой системы уравнений можно заметить, что при замене системы координат степень уравнения не меняется. Он явно уж не может увеличится, ибо слева и справа координаты в первой степени, а понизиться он не может, потому что тогда бы существовала какая-то система, при преобразовании которой степень бы повысилась (а мы ток что сказали, что такого быть не может).

Теперь поговорим про повороты и смещения. Как и раньше, мы отныне считаем, что наши системы - декартовы прямоугольные.
Поворот системы координат на угол φ против часовой стрелки ничем не отличается для любых порядков линий, старые и новые координаты все так же связаны следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\phi \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \end{cases}$$

Поворот интересен тем, что с его помощью возможно занулить слагаемое $2Bxy$. Чтобы это увидеть, подставим координаты в системе выше в общее уравнение линии второго порядка.

$$\begin{gathered} A(x' \cos\varphi - y' \sin\phi)^2 + \\ +2B(x' \cos\varphi - y' \sin\phi)(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + \\ C(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 + \\ +2D(x' \cos\varphi - y' \sin\phi) + \\ +2E(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + \\ +D = 0 \end{gathered}$$

Нас интересует коэффициент $2B'$, то есть те слагаемые, что будут вместе с $x'y'$. Если посмотрите на все это уравнение, такие слагаемые получатся только из скобок рядом с A, B и C. Раскроем их полностью.

$$A(x' \cos\varphi - y' \sin\phi)^2 = A({x'}^2 \cos^2\varphi - \underline{2x'y' \cos\varphi \sin\varphi} + {y'}^2 \sin^2\varphi)$$

$$\begin{gathered} 2B(x' \cos\varphi - y' \sin\phi)(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) = \\ 2B({x'}^2 \cos\varphi \sin\varphi + \underline{x'y' \cos^2\varphi - x'y' \sin^2\varphi} - y'^2 \cos\varphi \sin\varphi) \end{gathered}$$

$$C(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 = C({x'}^2 \sin^2\varphi + \underline{2x'y' \sin\varphi \cos\varphi} + {y'}^2 \cos^2\varphi)$$

Собирая все слагаемые вместе (и деля на два), получаем выражение для коэффициента B' после подстановки.

$$B' = -A \cos\varphi \sin\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + C \sin\varphi \cos\varphi$$

Наша цель поделить на $\cos^2\varphi$ и получить квадратное уравнение, чтобы найти угол, при котором B' равен нулю, но перед этим нужно рассмотреть случай $\cos\varphi = 0$. В таком случае $\sin\varphi = 1$, и тогда B' легко считается.

$$B' = -A \cdot 0 \cdot 1 + B(0 - 1) + C \cdot 1 \cdot 0 = -B$$

То есть B' просто поменяет свой знак. Случай рассмотрен, так что делим на $\cos^2\varphi$ без зазрений совести. Полагаем $B' = 0$ (искомые корни):

$$-A\cos\varphi\sin\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + C\sin\varphi\cos\varphi = 0 \mid : \cos^2\varphi$$
$$-A\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - B(1 - \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}) + C\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0$$

Вводим замену $t = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ и получаем самое обычное квадратное уравнение:

$$Bt^2 - (C - A)t - B = 0$$

Дискриминант уравнения равен $D = (C - A)^2 + 4B^2$, что всегда будет больше нуля, пока $B \neq 0$. Но если бы он был равен нулю, мы бы не искали эти корни в первую очередь. Это значит, что есть как минимум два таких угла, которые бы обратили B' в ноль. С помощью теоремы Виета мы можем посмотреть, как эти корни связаны между собой.

$$t_1 t_2 = \frac{C}{A} = \frac{-1}{1} = -1$$

Так как $t = \operatorname{tg}\varphi$, можно думать о нем, как об угловом коэффициенте прямой $y = tx + b$. Равенство $t_1 t_2 = -1$ означает, что две прямые с такими коэффициентами будут перпендикулярны друг другу (подробнее об этом в билете 16. Параллельность и ортогональность прямых на плоскости и плоскостей в пространстве.).

По-другому можно представить это равенство как
$\operatorname{tg}(\varphi_1 + 90^\circ) = -\operatorname{ctg}(\varphi_1 + 90^\circ) = \operatorname{tg}\varphi_2$.

Это равенство значит, что после поворота на угол φ_1, мы можем поворачивать еще сколько угодно раз на 90°, и B' останется нулем.

После такого поворота изменяются все коэффициенты (в общем случае), и мы остаемся с следующим уравнением:

$$A'x^2 + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

Это уравнение можно сократить еще дальше с помощью смещения.

Если в уравнение входит *ненулевой* коэффициент при квадрате одной из координат (например A' или C'), то с помощью переноса системы координат вдоль соответствующей оси (x или y соответственно) возможно занулить член 1 степени этой координаты ($2D'x$ или $2E'y$ соответственно).

Для примера трансформации скажем мы хотим занулить $2D'x$, при условии $A' \neq 0$. Для этого занесем $2D'x$ в скобку A' и дополним ее до полного квадрата.

$$A'(x^2 + 2x\frac{D'}{A'}) + C'y^2 + 2E'y + F' = 0$$

Теперь дополняем до полного квадрата, добавляя и вычитая $\frac{D'^2}{A'}$:

$$A'\left(x^2 + 2x\frac{D'}{A'} + \left(\frac{D'}{A'}\right)^2\right) + C'y^2 + 2E'y + F' - \frac{D'^2}{A'} = 0$$

$$A'\left(x + \frac{D'}{A'}\right)^2 + C'y^2 + 2E'y + \left(F' - \frac{D'^2}{A'}\right) = 0$$

Таким образом, если мы сделаем параллельный перенос на вектор $(-\frac{D'}{A'}; 0)$.

$$\begin{cases} x' = x + \frac{D'}{A'} \\ y' = y \end{cases}$$

То уравнение принимает новый вид, без лишнего коэффициента:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2E'y' + F'' = 0$$

Аналогичным образом, можно сместить систему координат вдоль оси y чтобы привести к уравнению с тремя слагаемыми...

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$