Определитель и транспонирование

Закидываю свойство сразу: определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы!

$$\det A = \det A^T$$

Это свойство очень полезно, когда мы в подсчетах (например, векторного или смешанного произведения) можем поставить координаты векторов как в столбики матрицы, так и в строчки.

Доказательство снова будет индукционное (это тренд с матрицами). Введем буквенные обозначения для матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

База индукции $n = 1$, тут очевидно $\det A = \det A^T = a_{11}$.
Для шага мы полагаем, что для определителя порядка $n - 1$ формула работает, и доказываем для порядка n.
Разложим матрицу A^T по первому столбцу.

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (A^T)_{k1} \det((\bar{A}^T)_1^k)$$

($\det(\bar{A}^T)_1^k$ - соответствующий минор транспонированной матрицы)
В силу того, что это транспонированная матрица, мы можем поменять столбец и строки местами при взятии дополнительного минора:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\
\overset{j=4}{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\
a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66}
\end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{21} & a_{31} & \underset{j=4}{a_{41}} & a_{51} & a_{61} \\
a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} \\
a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} \\
a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} \\
a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} \\
a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66}
\end{pmatrix}
$$

$$\det(\bar{A}^T)_1^k = \det(\bar{A}_k^1)^T$$

Матрица $\bar{A}_k^1$ будет порядка $n-1$, и в силу предположения индукции, определитель транспонированной матрицы равен определителю изначальной матрицы, поэтому $\det(\bar{A}_k^1)^T = \det(\bar{A}_k^1)$.
$(A^T)_{k1}$ заменяем на a_{1k} в силу того, как мы их определили, и получаем итоговое выражение:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det \bar{A}_k^1$$

А это есть ни что иное, как подсчет $\det A$ по первой строчке - индукционный шаг доказан.

Определитель треугольной матрицы

Если матрица - треугольная (верхнетреугольная или нижнетреугольная, или вовсе диагональная), то ее определитель равен произведению элементов на главной диагонали.

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix}, \quad |A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}
$$

Докажем это свойство для верхнетреугольной матрицы, индуктивно)
Базой поставим $n = 2$ (можно и $n = 1$, там тоже тривиально), для чего видно ручками, что формула выполняется:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - 0 \cdot a_{12} = a_{11}a_{22}$$

Теперь шаг: допустим, что работает для определителя порядка $n - 1$.
Докажем, что свойство тогда работает и для определителя порядка n.
Разложим определитель по первому столбику:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_1^i$$

Вычленим первый член из суммы:

$$\det A = a_{11}M_1^1 + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_1^i$$

Но все элементы a_{i1} для $i > 1$ равны нулю (смотрим на матрицу), посему и вся сумма будет равна нулю. Получили, что

$$\det A = a_{11}M_1^1$$

Порядок дополнительного минора M_1^1 равен $n - 1$, и по предположению индукционного шага равен $\prod_{i=2}^{n} a_{ii}$:

$$\det A = a_{11}M_1^1 = a_{11} \prod_{i=2}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

И таким образом доказательство заканчивается. Аналогичным образом доказывается и для нижнетреугольной матрицы.

Пример задачи

Условие: посчитайте определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Решение: путем пристального взгляда, заключаем, что матрица A - верхнетреугольная. Значит, ее определитель равен произведению элементов главной диагонали.

$$|A| = 7 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot (-5) = -1890$$

Условие: посчитайте определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 & 6 & 1 \\ -6 & 3 & -1 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: пристальным взглядом тут тоже видно треугольник, однако он какой-то кривой - не с той стороны. Применим знания, которые мы получили после понятия доказательства формулы для треугольных матриц. Раскладываем определитель по последнему столбику. По шахматной сетке в правой верхней клетке плюс, поэтому получается

$$\det A = 1 \cdot \det \bar{A}_n^1$$

Смотрим на минор - с его точки зрения, 6 тоже находится в правой верхней клетке, однако в 4-ом столбике - то есть "клетка" черная - берем с минусом.

$$\det \bar{A}_n^1 = -6 \cdot \det(\bar{A}_n^1)_{n-1}^2$$

Ну дальше все по аналогии, чередуем знак каждый второй элемент:

$$\det A = (1) \cdot (-1)(6) \cdot (-2) \cdot (-1)(1) \cdot (4) = 1 \cdot 6 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 4 = -48$$

Здесь было бы хорошее место для формулы для побочной диагонали, но мне так лень ее писать, не поверите)