Ортогональное дополнение $\mathcal{E}'^{\perp}$ подпространства $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ - это подпространство, содержащее все векторы из $\mathcal{E}$ такие, которые ортогональны каждому вектору из $\mathcal{E}'$.

То, что $\mathcal{E}'^{\perp}$ является линейным подпространством $\mathcal{E}$, следует из линейности скалярного произведения. Для любых $x, y \in \mathcal{E}'^{\perp}$ и $z \in \mathcal{E}'$ по определению выполняется:

$$(x, z) = (y, z) = 0$$

Тогда выполняется и для любого вектора $\alpha x + \beta y$:

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0$$

Для ортогонального дополнения выполняется уравнение:

$$\dim \mathcal{E}'^{\perp} + \dim \mathcal{E}' = \dim \mathcal{E}$$

Пусть $\dim \mathcal{E}' = k \leq n = \dim \mathcal{E}$. Возьмем в $\mathcal{E}$ базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ такой, что в $\mathcal{E}'$ система $e = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ была базисом. Возьмем случайный вектор $x \in \mathcal{E}$ и разложим его по базисным векторам:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

Чтобы вектор x так же принадлежал подпространству $\mathcal{E}'^{\perp}$, он должен быть перпендикулярен любому вектору из подпространства $\mathcal{E}'$. Но достаточное условие - перпендикулярность всем базисным векторам: если он перпендикулярен им, то он будет перпендикулярен и любой их линейной комбинации.

$$\begin{cases} (x, e_1) = 0 \\ (x, e_2) = 0 \\ \ldots \\ (x, e_k) = 0 \end{cases}$$

Подставляя разложение x по базисным векторам, как мы делали с матрицей Грама, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \ldots + g_{1n}x_n = 0 \\ g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + \ldots + g_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ g_{k1}x_1 + g_{k2}x_2 + \ldots + g_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Так как матрица коэффициентов A этой системы уравнений состоит из первых k строк матрицы Грама для базисных векторов $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, то мы можем утвержать, что все строки этой системы линейно независимы (будь это не так, эти же строки были линейно зависимы в системе Грама, что противоречит невырожденности матрицы Грама). Т.к. $k < n$, ранг матрицы коэффициентов $\operatorname{Rg} A = k$. Получается, что размерность пространства решений этой системы будет равна $n - k$:

$$\dim \mathcal{E}'^{\perp} = n - k = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{E}'$$

Для ортогонального дополнения так же выполняется $(\mathcal{E}'^{\perp})^{\perp} = \mathcal{E}'$.
Понятно, что как минимум $\mathcal{E}'$ является подпространством $(\mathcal{E}'^{\perp})^{\perp}$: если $x \in \mathcal{E}'$, то для $y \in \mathcal{E}'^{\perp}$ выполняется $(x, y) = 0$. Но тогда $x \in (\mathcal{E}'^{\perp})^{\perp}$.

Параллельно с этим выполняется

$$\dim(\mathcal{E}'^{\perp})^{\perp} = n - \dim \mathcal{E}'^{\perp} = n - (n - k) = k = \dim \mathcal{E}'$$

Из-за того, что совпадают размерности подпространства и пространства, мы заключаем, что совпадают и они сами: $(\mathcal{E}'^{\perp})^{\perp} = \mathcal{E}'$.

Проекция и составляющая

Любой вектор $x \in \mathcal{E}$ возможно разбить в сумму двух векторов:

$$x = x_1 + x_2$$

где $x_1 \in \mathcal{E}'$, а $x_2 \in \mathcal{E}'^{\perp}$.
x_1 в таком случае называется *ортогональной проекцией*, и обозначается как $\operatorname{pr}_{\mathcal{E}'} x$, а x_2 - *ортогональной составляющей* вектора относительно $\mathcal{E}'$, и обозначается как $\operatorname{ort}_{\mathcal{E}'} x$.
Так же отметим, что раз x_2 является ортогональной составляющей вектора

относительно $\mathcal{E}'$, то если их поменять местами, x_1 станет ортогональной составляющей, но относительно уже $\mathcal{E}'^{\perp}$.

Расстояние между векторами

Расстоянием между двумя векторами называют длину разности векторов:

$$d(x, y) = |x - y| \geq 0$$

Расстояние симметрично, и для него выполняется неравенство треугольника - все наследуется от скалярного произведения.

На основе этого вводят понятие расстояние от вектора x до подмножества X: наименьшее расстояние от x до всех векторов этого подмножества.

$$d(x, X) = \inf_{y \in X} d(x, y)$$

Для любого вектора $x \in \mathcal{E}$, ближайшим вектором в $\mathcal{E}'$ является его ортогональная проекция $x_1 = \operatorname{pr}_{\mathcal{E}'} x$, и эта длина равна длине ортогональной составляющей $x_2 = \operatorname{ort}_{\mathcal{E}'} x$.
Доказательство: берем произвольный вектор $y \in \mathcal{E}'$:

$$|x - y|^2 = |(x_1 + x_2) - y|^2 = |x_2 + (x_1 - y)|^2 =$$

В силу того, что x_1 и x_2 ортогональны, а x_1 и y лежат в одном подпространстве, поэтому ортогональны x_2 и $x_1 - y$, воспользуемся теоремой Пифагора:

$$= |x_2|^2 + |x_1 - y|^2$$

Отсюда видно, что минимума расстояние достигает при $y = x_1 = \operatorname{pr}_{\mathcal{E}'} x$, и тогда оно равно $d(x, \mathcal{E}') = x_2 = \operatorname{ort}_{\mathcal{E}'} x$.