Как было сказано в прошлом билете, определители можно

1. Брать для матриц больше, чем 3×3 - любые $n \times n$;
2. Раскладывать - выражать их как сумму определителей меньшего порядка.
   Определитель n-го порядка - это определитель для матрицы $n \times n$:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   Геометрически, он описывает точно такое же растяжение пространства, просто для высших измерений (гиперобъемы).

Минор матрицы

В разложении используется понятие *минора* квадратной матрицы, поэтому сначала дадим его определение.

Минор матрицы - определитель матрицы меньшего порядка, полученной с помощью вычеркивания одной/нескольких строк и столбцов из оригинальной матрицы. Частным случаем является *дополнительный* минор:

Дополнительный минор матрицы A порядка n есть *определитель* $\bar{M}_j^i$ (так же обозначается как M_{ij}) порядка $n-1$ матрицы, полученной с помощью вычеркивания i-той строки и j-го столбца (всего-лишь одной строки и столбца).
Например, для матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Несколько миноров для примера:

$$\bar{M}_3^2 = \begin{vmatrix} a & b & \square \\ \square & \square & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} = ah - bg$$

$$\bar{M}_2^2 = \begin{vmatrix} a & \square & c \\ \square & \square & \square \\ g & \square & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} = ai - cg$$

$$\bar{M}_3^3 = \begin{vmatrix} a & b & \square \\ d & e & \square \\ \square & \square & \square \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$$

Разложение

Теперь как мы знаем что такое миноры, можно дать способ разложения по первому столбцу.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы A порядка n можно посчитать как знакопеременную сумму произведений элементов столбца на соответствующий дополнительный минор этого элемента.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \bar{M}_1^i$$

Разбираемся, что происходит:

1. Сумма идет по строчкам матрицы, а именно - элементы первого столбика матрицы.

2. Для каждой строчки выбирается знак. Начинаем мы с положительного знака $(-1)^{i+1} = (-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$, и потом меняем его с каждым спуском на противоположный.
3. Затем с этим знаком мы берем сам элемент первого столбика - a_{i1}.
4. Умножаем его на дополнительный минор этого элемента - $\bar{M}_1^i$.

Для примера, с помощью такого алгоритма, определитель четвертого порядка выглядит так:

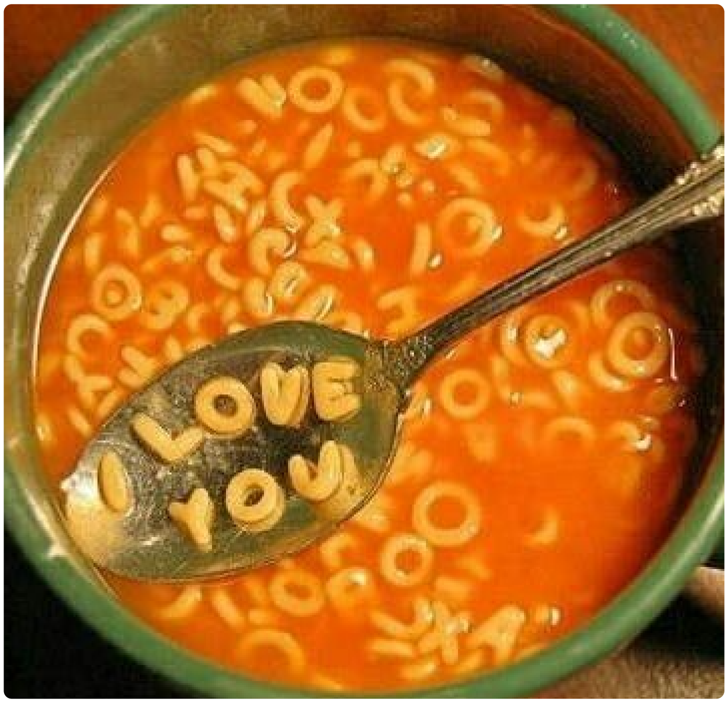
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Вещь не самая приятная для вычисления, но таков базовый алгоритм. Конечно, затем раскладывам определитель третьего порядка, там второго, и, наконец, получаем супчик из букв.

$$\begin{gathered} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + \\ + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + \\ + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + \\ + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + \\ + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \end{gathered}$$



Разложение точно так же работает и для первой *строчки*, вместо первого столбика:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1$$

Краткий ввод в доказательства с индукцией: нам нужно доказать, что формула работает для какой-то базы (минимальный случай), и что если эта формула работает для случая $n-1$, то она будет работать и для случая n. Ведь если это так, то наш случай $n-1$ может быть равен базе, и тогда формула будет равна и для случая n. Такими рассуждениями можно показать, что формула работает и для случая $n+1$, $n+2$, да и вообще для любого n больше базы.

> ***Concrete Mathematics*, поля 3ей страницы.**
>
> Математическая индукция доказывает, что мы можем подняться по лестнице на любую высоту, доказав, что мы можем взобраться на первую ступеньку (**база**) и что с каждой ступеньки мы можем подняться на следующую (**шаг**).

Доказательство проводится индуктивно. Для базы $n = 2$ мы можем ручками проверить, что два разных выражения дают одно и то же:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\bar{M}_j^1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\bar{M}_1^i$$

Теперь шаг индукции: предположим, что эта формула работает для $n - 1$ порядка. Тогда докажем, что она верна и для n-го порядка.
Идея такова: выразим сначала определитель через столбец (уже знаем, как это делать), потом выразим минор через строку с помощью предположения индукции. Минор получился с помощью зачеркивания двух строк и двух столбцов, поэтому элегантно переставляя множители, можно показать, что этот определитель мог быть выражен через строку.

Определитель по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\bar{M}_1^i$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \overset{j = 4}{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

Вытащим отдельно первый член этой суммы:

$$\det A = a_{11}\bar{M}_1^1 + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\bar{M}_1^i$$

Порядок минора $\bar{M}_j^1$ равен $n - 1$, поэтому по предположению его можно разложить по строчке:

$$\bar{M}_1^i = \sum_{j=2}^{n} (-1)^j a_{1j} (\bar{M}_1^i)_j^1$$

Тут, $(\bar{M}_1^i)_j^1$ - определитель матрицы, из которой сначала вычеркнули i-ую строчку и первый столбик, а потом первую строчку и j-ый столбик.
Получается такой "двойной" минор:

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{matrix} \quad & \quad & \quad & \quad & i=5 & \quad \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ j=4 \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \boxed{a_{15}} & a_{16} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\
\boxed{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\
a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Подставляем выражение для этого минора в изначальное выражение определителя, и начинаем крутить символы:

$$\det A = a_{11}\bar{M}_1^1 + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \sum_{j=2}^{n} (-1)^j a_{1j} (\bar{M}_1^i)_j^1$$

Вносим множитель $(-1)^{i+1}a_{i1}$ внутрь второй суммы по закону дистрибутивности на конечных суммах: для (-1) степени складываются.

$$\det A = a_{11}\bar{M}_1^1 + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{i+j+1} a_{i1} a_{1j} (\bar{M}_1^i)_j^1$$

Теперь время перекручивать в форму для первой строчки.
В силу конечности суммы (для бесконечных сумм так делать нельзя!), можем перегруппировать члены (поменять сигмы местами):

$$\det A = a_{11}\bar{M}_1^1 + \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+j+1} a_{i1} a_{1j} (\bar{M}_1^i)_j^1$$

Теперь мы перекручиваем минор со следующей мыслью - по картинке выше видно, что неважно, какую пару строчки-столбца мы убираем сначала: $i1$ или $1j$. Поэтому мы спокойно меняем их местами:

$$\det A = a_{11}\bar{M}_1^1 + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{i1}a_{1j}(\bar{M}_j^1)_1^i$$

Выносим из двойной суммы те члены, что зависят только от j:

$$\det A = a_{11}\bar{M}_1^1 + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}a_{i1}(\bar{M}_j^1)_1^i$$

А что за сумма по i осталась? Это ведь и есть минор, разложенный первому столбцу (посмотрите на картинку еще раз):

$$\det A = a_{11}\bar{M}_1^1 + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\bar{M}_j^1 = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\bar{M}_j^1$$

И в итоге у нас получилась формула для выражения определителя через строчку, что доказывает наш индукционный шаг.

Пример задачи

Условие: вычислить определитель матрицы с помощью разложения по первому столбцу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(20-0) - 1(-25-21) - 3(0-12) = 40 + 46 + 36 = 122$$

Условие: вычислить определитель матрицы с помощью разложения по первой строке:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$2(20-0) + 5(5-0) + 3(7+12) = 40 + 25 + 57 = 122$$