Тригонометрическая форма

Она выглядит следующим образом:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$$

Здесь $|z|$ обозначает *модуль* комплексного числа. О модуле можно думать как о "длине" линии от начала координат до числа на комплексной плоскости. Напоминаю:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

φ - "аргумент" комплексного числа. Можно о нем думать, как об угле от оси x до линии от начала координат до числа на комплексной плоскости.

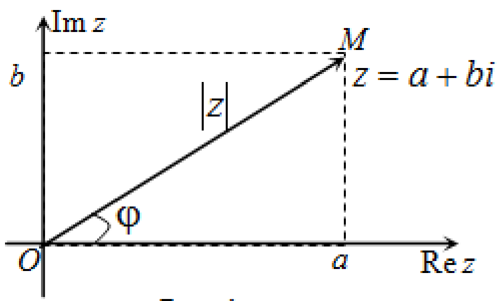


Рис. 1

Его можно посчитать как и любой другой угол, с помощью катета и гипотенузы:

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}, \cos\varphi = \frac{a}{|z|}$$

Само значение аргумента можно попробовать посчитать через арктангенс или арккотангенс:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arcctg}\frac{a}{b}$$

Эта форма представляет число как произведение "единичного вектора" $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ на его модуль/длину $|z|$.

Показательная форма

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

Она очень похожа на тригонометрическую, но $\cos\varphi + i\sin\varphi$ заменяется на $e^{i\varphi}$.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Смысл показательный формы следующий: $e^{i\varphi}$ "вращает" точку на окружности с радиусом $|z|$ на угол φ против часовой стрелки.

Формула Эйлера

Так как все формы записи комплексных чисел равны между собой, и число z мы можем записать как в тригонометрической форме, так и в показательной, мы получим:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

Сокращая на $|z|$, получим такое равенство:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Это и есть формула Эйлера. Правда это не доказательство, а скорее причина, почему и показательная форма записи вообще работает.
Доказательство включает в себя разложение $e^{i\varphi}, \cos\varphi, i\sin\varphi$ в ряды Маклорена (ряды Тейлора вокруг $x_0 = 0$), и затем демонстрацию, что при сумме двух последних получаем первый ряд.

Формула Муавра

$$z^n = |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

То есть для возведения числа в степень, нужно просто умножить угол на эту степень.
Доказательство простое и следует из формулы Эйлера.
По показательной форме записи:

$$z = |z|e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad z^n = (|z|e^{i\varphi})^n = |z|^n(e^{i\varphi})^n$$

По свойствам степеней:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{i \cdot n\varphi}$$

И по формуле Эйлера, из прошлого равенства вытекает следующее:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Теперь, соответственно, вместе с самим числом z, подставляем в тригонометрическую и показательные записи:

$$z^n = |z|^n (e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi}$$

$$z^n = |z|^n (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Корни из единицы

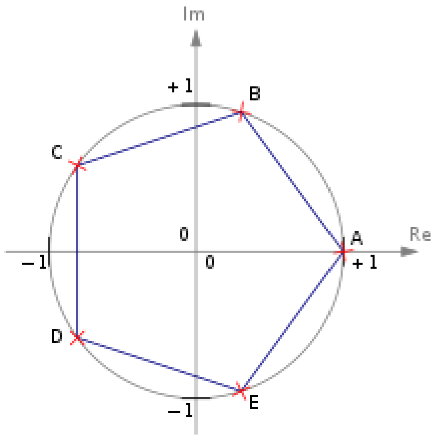
Из формулы Муавра, можно найти корни многочлена $x^n - 1$:
k-тый корень этого многочлена задается следующим образом:
Раз $x^n = 1 = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k$, то с помощью возведения в степень $1/n$ (корень $n-$ной степени), получаем

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

Возводя все в n-ную степень, справа (из-за формулы Муавра), получится

$$x_k^n = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

Геометрический смысл этих корней - они все лежат на правильном многоугольнике ($k-$угольнике), вписанном в окружность единичного радиуса. Так, например, корни $x^5 - 1$:



Корень n-ной степени

Из этого вообще следует, что можно брать корни любой степени из любого числа, причем результат будет не один (по основной теореме алгебры).
Корень n-ной степени числа z определяется как решение уравнения:

$$(z')^n = z$$

Решение такого уравнения обычно заключается в переводе числа в показательную степень, возведения в степень $1/n$ и подсчета корней по формуле Муавра.
Для примера, найти корни (второй степени) числа $z = 1 + i\sqrt{3}$ - переведем в показательную степень:

$$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

Тогда в показательной записи (и в тригонометрической) число выглядит так:

$$z = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)\right)$$

Добавка $2\pi k$ как раз понадобится для того, чтобы найти *все* корни.
По формуле Муавра теперь возводим в степень $1/2$:

$$z^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right)\right)$$

Теперь подставляя разные значения k мы можем найти все корни. Так как мы брали корнь второй степени, достаточно пройтись лишь по двум соседним числам k - все остальные числа будут повторяться:

$$z'_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z'_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Оба корня при возведении в квадрат дадут $1 + i\sqrt{3}$.

Пример задачи

Условие: найдите корни третьей степени числа $z = 2 + 2i$.
Решение: переведем в тригонометрическую запись.

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right)$$

Возводим в степень $1/3$:

$$z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$$

Делим угол на степень:

$$z^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)$$

И начинаем крутить $k = \{0, 1, 2\}$:

$$z'_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$
$$z'_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$$
$$z'_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

На этом нахождение корней окончено. Теперь осталось просто покрутить углы, чтобы можно было посчитать все синусы и косинусы.

Считать $\cos\frac{\pi}{12}$ и $\sin\frac{\pi}{12}$ можно по-разному, например с помощью разницы:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos\frac{17\pi}{12} = \cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12}$$
$$\sin\frac{17\pi}{12} = \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = -\cos\frac{\pi}{12}$$

$$z'_0 = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$
$$z'_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -1 + i$$
$$z'_2 = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$