Это второй раз, когда мы начинаем изучать то, что уже изучали, но более глубже и более строго математически. В аналитической геометрии мы давали в пространстве сразу понятие длины и угла, и потом дали скалярное произведение. Но длина и угол нельзя описать только с помощью линейности векторов, и в произвольном линейном пространстве эти понятия отсутствуют.

Поэтому мы вводим новое понятие: *евклидово пространство* - это такое вещественное линейное пространство, в котором введено понятие скалярного произведения двух векторов.
Для скалярного произведения должны выполняться следующие условия:

- Коммутативность: $(x, y) = (y, z)$
- Линейность по сложению: $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- Линейность по умножению: $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
- $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$, и $(x, x) = 0$ при $x = 0$.

Если скалярное произведение ввести в комплексном пространстве, получится *унитарное пространство*.

Свойства (2) и (3) образуют линейность по первому аргументу. Применяя свойство коммутативности (1), получим линейность по любому аргументу.
Из этих свойств следует линейность скалярного произведения:

$$(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n, y) = \alpha_1(x_1, y) + \ldots + \alpha_n(x_n, y)$$

Для второго аргумента аналогично.
Из свойств так же следует, что скалярное произведение с нулевым вектором равно нулю:

$$(x, 0) = (x, 0y) = 0(x, y) = 0$$

Примеры

Прям как мы начинали в начале изучения геометрии, для геометрических векторов мы определяли скалярное произведение как

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos \varphi$$

Все четыре условия на скалярное произведение выполняются, поэтому плоскость геометрических векторов является евклидовым пространством.

Пространство, образованное столбиками высоты n ($\mathbb{R}^n$), станет евклидовым, если ввести скалярное произведение для двух векторов

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

Такое пространство обозначается за $\mathbb{E}^n$.

Линейное пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций тоже можно дополнить до евклидова пространства, введя скалярное произведение через интеграл:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x$$