Правило Крамера - или метод Крамера - или формулы Крамера - способ решения ***с***истем ***л***инейных ***а***лгебраических ***у***равнений (сокращенно, СЛАУ), где число уравнений равно числу неизвестных.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Такую систему уравнений, как известно, можно записать как матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Коэффициенты перед x идут в большую матрицу, сами x (что повторяются по строчкам), записываются как вектор рядом (в произведении), и результаты b записываются как вектор через знак равенства. При умножении вектора на матрицу и получается вектор, содержащий изначальные линейные комбинации.
Кратко, это уравнение записывается как

$$Ax = b$$

"Решить" матричное уравнение значит найти вектор x, для которого уравнение выполняется. Есть несколько способов это делать, один из который требует нахождения обратной матрицы (мы это делали в билете с заменой базиса). Другой способ - метод Крамера.

Метод Крамера утверждает, что найти отдельный x_i можно поделив определитель матрицы, в которой i-тый столбец заменен на вектор b (матрица A_i), на определитель исходной матрицы:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

Матрица A_i выглядит следующим образом:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Столбик $(a_{1i}; a_{2i}; \dots; a_{ni})$ был заменен на вектор b.

Доказательство не из приятных. План:

1. Составляем новую матрицу, полученную с помощью приставки вектора b в конец матрицы.
2. Записываем разложение определителя этой матрицы по первой строке.
3. Дополнительные миноры, которые мы встретим при разложении, приводим к виду матрицы A_i - таким образом их выражаем через эту матрицу.
4. Крутим символы и получаем нашу формулу.

Начинаем: создаем новую матрицу, приписываем к ней справа вектор b. Чтобы матрица осталась квадратной, дублируем строчку i и ставим ее наверх (как бонус, определитель становится нулем):

$$D = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Раскладываем по первой строчке - мы запишем суммой, как обычно, для элементов a_{ij}, а для b_i мы вынесем как отдельный член - его минор будет изначальной матрицей A.

$$\det D = \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{ik}\det \bar{D}_k^1\right) + (-1)^{(n+1)+1}b_i \det A$$

Однако в матрице D есть две одинаковые строки i - поэтому ее определитель равен нулю - $\det D = 0$.

Рассмотрим миноры $\det \bar{D}_k^1$: можете посмотреть по матрице выше, т.к $k \leq n$, самый правый столбик матрицы будет равен вектору b.
Выражаем минор $\det \bar{D}_k^1$ через определитель матрицы A_k - матрицы A, в которой k-тый столбик заменен на вектор b. Для этого перемещаем самый правый (n-ный) столбик матрицы $\bar{D}_k^1$ на позицию k. Для этого потребуется $n-k$ перестановок:

$$\det \bar{D}_k^1 = (-1)^{n-k}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det \bar{D}_k^1 = (-1)^{n-k}\det A_k$$

Подставляем полученный определитель в изначальную формулу для $\det D$ и крутим буквы:

$$\det D = \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{ik}(-1)^{n-k}\det A_k\right) + (-1)^{(n+1)+1}b_i \det A$$

$$\det D = \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+n}a_{ik}\det A_k\right) + (-1)^{(n+1)+1}b_i \det A$$

$(-1)^{1+n}$ теперь не зависит от k, поэтому его можно вынести. Вспоминаем, что $\det D = 0$, ведь там две одинаковые строчки. Наконец, смотрим на члены $(-1)^{1+n}$ и $(-1)^{(n+1)+1}$ - понимаем, что они будут разных знаков. Получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det A_k - b_i \det A = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\det A_k}{\det A} = b_i$$

А это уравнение описывает решение i-той строчки нашей системы уравнений:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

Следуя из этого уравнения, каждое x_k задается следующим выражением:

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$$

Что и доказывает метод Крамера для решения СЛАУ.

Пример задачи

Условие: решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 12 \\ 3x - y + 7z = 18 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

Записываем систему как матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Для решения методом Крамера, для начала найдем определитель матрицы, я его разложу по второму столбику.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(9-7) - (15-1) - 2(35-3) = -82$$

Теперь посчитаем три определителя, подставляя столбик результатов на каждое возможное место для столбика. Посчитаю их правилом Саррюса:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 \\ 18 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -36 + 28 + 36 - (-2 + 168 + 108) = -246$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 12 & 1 \\ 3 & 18 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 270 + 84 + 6 - (18 + 70 + 108) = 164$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 12 \\ 3 & -1 & 18 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 36 + 72 - (-12 + 180 + 12) = -82$$

Теперь считаем переменные:

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-246}{-82} = 3 \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{164}{-82} = -2 \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-82}{-82} = 1 \end{cases}$$