Вот правда, почему мы снова будем обсуждать вычисление обратной матрицы, когда билет #43 вроде как хорошо с этим справился?

Метод Гаусса

Теорема в билете гласит, что любую невырожденную матрицу возможно преобразовать к единичной матрице путем применения элементарных преобразований. Это можно сделать с помощью метода Гаусса, который мы сейчас и опишем. Начинаем со случайной матрицы A, у которой $\det A \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Наша цель - превратить ее в единичную.
Начинаем с первой строчки - в ней должен быть ну хотя бы один элемент, не равный нулю, иначе вся эта строча бы была нулевая. Тогда раскладывая определитель по первой строке мы бы получили, что он равен нулю, что не сходится с условием.
Пусть этот ненулевой элемент находится в столбце с номером s_1: a_{1s_1}. Этот столбик сейчас будем превращать в первый столбик единичной матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1s_1} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2s_1} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3s_1} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{4s_1} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{5s_1} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{6s_1} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

Теперь мы делим всю строчку на этот элемент. Остальные элементы просто делятся, а элемент a_{1s_1} становится равным единице.

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{a_{1s_1}} & \frac{a_{12}}{a_{1s_1}} & \frac{a_{13}}{a_{1s_1}} & 1 & \frac{a_{15}}{a_{1s_1}} & \frac{a_{16}}{a_{1s_1}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2s_1} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3s_1} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{4s_1} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{5s_1} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{6s_1} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

Теперь из каждой строчки вычитаем первую, умноженную на s_1-тый элемент этой строки: a_{is_1} - для того, чтобы при вычете, этот элемент стал равным нулю (если я нигде код не напутал, выглядит так):

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{a_{1s_1}} & \frac{a_{12}}{a_{1s_1}} & \frac{a_{13}}{a_{1s_1}} & 1 & \frac{a_{15}}{a_{1s_1}} & \frac{a_{16}}{a_{1s_1}} \\ a_{21} - \frac{a_{2s_1}a_{11}}{a_{1s_1}} & a_{22} - \frac{a_{2s_1}a_{12}}{a_{1s_1}} & a_{23} - \frac{a_{2s_1}a_{13}}{a_{1s_1}} & 0 & a_{25} - \frac{a_{2s_1}a_{15}}{a_{1s_1}} & a_{26} - \frac{a_{2s_1}a_{16}}{a_{1s_1}} \\ a_{31} - \frac{a_{3s_1}a_{11}}{a_{1s_1}} & a_{32} - \frac{a_{3s_1}a_{12}}{a_{1s_1}} & a_{33} - \frac{a_{3s_1}a_{13}}{a_{1s_1}} & 0 & a_{35} - \frac{a_{3s_1}a_{15}}{a_{1s_1}} & a_{36} - \frac{a_{3s_1}a_{16}}{a_{1s_1}} \\ a_{41} - \frac{a_{4s_1}a_{11}}{a_{1s_1}} & a_{42} - \frac{a_{4s_1}a_{12}}{a_{1s_1}} & a_{43} - \frac{a_{4s_1}a_{13}}{a_{1s_1}} & 0 & a_{45} - \frac{a_{4s_1}a_{15}}{a_{1s_1}} & a_{46} - \frac{a_{4s_1}a_{16}}{a_{1s_1}} \\ a_{51} - \frac{a_{5s_1}a_{11}}{a_{1s_1}} & a_{52} - \frac{a_{5s_1}a_{12}}{a_{1s_1}} & a_{53} - \frac{a_{5s_1}a_{13}}{a_{1s_1}} & 0 & a_{55} - \frac{a_{5s_1}a_{15}}{a_{1s_1}} & a_{56} - \frac{a_{5s_1}a_{16}}{a_{1s_1}} \\ a_{61} - \frac{a_{6s_1}a_{11}}{a_{1s_1}} & a_{62} - \frac{a_{6s_1}a_{12}}{a_{1s_1}} & a_{63} - \frac{a_{6s_1}a_{13}}{a_{1s_1}} & 0 & a_{65} - \frac{a_{6s_1}a_{15}}{a_{1s_1}} & a_{66} - \frac{a_{6s_1}a_{16}}{a_{1s_1}} \end{pmatrix}$$

Эту матрицу мы называем $A^{(1)}$. Индекс (1) означает, что с первой строкой сделаны операции, позволившие привести s_1-тый столбик к виду "единица и много нулей".

Продолжаем преобразовывать матрицу по этому алгоритму, правда уже для второй строки, и получаем $A^{(2)}$. Заметим, что раз мы делаем лишь элементарные преобразования, а изначально матрица была невырожденная, после этих операций матрица останется невырожденной: в процессе алгоритма, в каждой строчке найдется хотя бы один ненулевой элемент. В конце, матрица $A^{(n)}$ будет выглядеть похожим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь все, что нам остается - разместить столбики в нужном порядке, и мы получим единичную матрицу.

Нахождение обратной матрицы, скорее всего, говорит о методе, описанном в билете 43. Обратная матрица и ее свойства. Существование и единственность обратной матрицы. Формулы для элементов обратной матрицы.

На всякий, повторю его здесь:

Мы записываем две матрицы вместе, получая матрицу размером $n \times 2n$.

Первая матрица будет исходная, вторая рядом - единичная.

$$D = (A|E) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Путем элементарных преобразований, именно как мы делали это методом Гаусса, меняем левую часть этой двойной матрицы так, чтобы она стала равной единичной матрице:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} = (E|A^{-1})$$

Забираем матрицу с правой части - это и будет обратная матрица.

Пример задачи

Условие: найдите обратную матрицу методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: составляем двойную матрицу.

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Наша цель: оставить в первом столбике только одно ненулевое значение, не равное нулю. Для этого мы будем вычитать строчки друг из друга, пока не останется только одна строчка, где первое значение не нулевое.
Первое, что хочется сделать - вычесть из первой строчки вторую и третью:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычтем из второй строчки третью, умноженную на два:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -11 & -5 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"Треугольный" вид получен, теперь начинаем работу над диагональным. Будем занулять все значения (кроме одного) в третьем столбике: для этого складываем со второй строчкой первую, умноженную на $\frac{5}{4}$, и вычитаем из третьей первую, умноженную на $\frac{1}{4}$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -11 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} \\ 1 & 5 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Теперь с третьей строчкой складываем вторую, умноженную на $\frac{5}{11}$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -11 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{14}{44} & \frac{6}{44} & -\frac{10}{44} \end{pmatrix}$$

Почти все готово - меняем строчки местами, чтобы подвести к виду единичной матрицы слева:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{14}{44} & \frac{6}{44} & -\frac{10}{44} \\ 0 & -11 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

И делим на соответствующие числа в каждой строке (и приводим все к общему знаменателю, чтобы слева была единичная матрица, а справа -

получилась обратная):

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{14}{44} & \frac{6}{44} & -\frac{10}{44} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{44} & \frac{1}{44} & \frac{13}{44} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{44} & -\frac{11}{44} & -\frac{11}{44} \end{pmatrix} = (E|A^{-1})$$

Получается, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{44} & \frac{6}{44} & -\frac{10}{44} \\ -\frac{5}{44} & \frac{1}{44} & \frac{13}{44} \\ \frac{11}{44} & -\frac{11}{44} & -\frac{11}{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 14 & 6 & -10 \\ -5 & 1 & 13 \\ 11 & -11 & -11 \end{pmatrix}$$