Этот билет в целом повторяет билет #14, поэтому ничего фундаментально нового вы тут тоже не увидите. Однако, спустя все эти билеты, у нас появилось более глубокое понимание матриц, и можно попробовать найти новый смысл в замене базиса.
Скажем, есть в пространстве какой-то базис $e = (e_1; e_2; \ldots; e_n)$, и мы хотим перейти к новому базису $e' = (e'_1; e'_2; \ldots; e'_n)$.
Так как и старый, и новый - базисы, можно выразить одни векторы через линейные комбинации других:

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots a_{1n}e_n \\ e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots a_{2n}e_n \\ \ldots \\ e'_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots a_{nn}e_n \end{cases}$$

Мы можем записать эту систему как матричное уравнение $e' = eA$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что коэффициенты в *строчках* системы были записаны в *столбики* матрицы - это потому что в матричном уравнении матрица A встала справа - ведь базисы e и e' мы записываем как строчки, а не столбики. А в строчки они записаны, потому что запись вектора X в базисе e с координатами x записывается через матричное уравнение как $X = ex$.

Матрица A называется *матрицей перехода от базиса e к базису e'*.

Более того, любая невырожденная матрица A ($\det A \neq 0$) переводит базис e в какой-то другой базис - ее столбики линейно независимые, и составляют координаты новых базисных векторов.

Идея замены базиса теперь становится проста: скажем, есть вектор X. В базисах e и e' он записывается как ex и $e'x'$ соответственно. Это один и тот же вектор, поэтому $ex = e'x'$. Но базис e' можно представить как $e' = eA$. Подставляя и сокращая e получаем:

$$ex = eAx' \Rightarrow x = Ax'$$

Формула перехода из нового базиса в старый. Чтобы перейти из старого в новый, просто умножаем обе стороны на обратную матрицу:

$$A^{-1}x = A^{-1}Ax' \Rightarrow x' = A^{-1}x$$