С линейной зависимостью мы тоже уже все знакомы, но время немного формализовать это понятие.
Что такое система векторов мы уже знаем - набор векторов из множества L
. Линейная комбинация нам тоже известна - сумма векторов, умноженных на скаляры.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

Формальное определение линейной независимости системы векторов: нулевой вектор пространства L раскладывается единственным образом по этой системе векторов (и этот единственный способ - тривиальный).

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0 \Rightarrow a_i = 0$$

Если это не так, то система линейно зависимая.

Как следствие, равносильное определение: система линейно зависима, если хотя бы один вектор системы раскладывается как линейная комбинация остальных:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_n} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_1 = x_n$$

Из прошлых билетов вы уже знаете некоторые виды линейно зависимых (и независимых) векторов.
Например, столбики единичной матрицы являются линейно независимыми:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Линейная комбинация векторов единичного вектора (вектор справа) будет равна нулю, когда все $a_i = 0$.

Геометрический пример, что вам тоже хорошо знаком: три геометрических вектора линейно зависимы, когда они лежат в одной плоскости.

Свойства линейно зависимых/независимых систем

Эти свойства уже разбирались в прошлых билетах касательно линейной зависимости, и ничем не отличаются от этих (ведь сейчас мы просто более формализуем это понятие) - ничего нового вы не увидите тут.

- Система из $k > 1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда $(\Leftrightarrow)$, когда хотя бы один из векторов выражается как линейная комбинация остальных векторов. Выше было показано, как это свойство выходит из стандартного определения линейной зависимости.
- Если в системе есть нулевой вектор, то эта система линейно зависима. Ведь произведение нулевого вектора и скаляра всегда будет равна нулю $(\alpha\bar{0} = 0)$, поэтому существует нетривиальная ($\alpha \neq 0$) линейная комбинация с векторами системы, что будет равна нулю.
- Если некоторые из векторов системы составляют линейно зависимую систему, то и вся такая система будет линейно зависима. В таком случае, можно взять остальные векторы системы с нулевым коэффициентом в линейной комбинации, и все равно получится нетривиальная линейная комбинация.
- Из прошлого свойства вытекает, что если система линейно независима, то и любая совокупность векторов этой системы тоже образует линейно независимую систему.
- Если вектор раскладывается по линейно независимой системе векторов, то делает это единственным образом - коэффициенты линейной комбинации определяются однозначно.

Базис и координаты в линейном пространстве

Базис - *упорядоченная*, конечная, линейно независимая система векторов, в которой каждый вектор линейного пространства L раскладывается как линейная комбинация векторов этой системы.
Про это мы тоже говорили в прошлых билетах, когда рассматривали геометрические векторы: базис - именно *упорядоченная* система векторов, ведь изменение порядка несет изменение коэффициентов линейной

комбинации этого вектора по базису (базис $((1;0);(0;1))$ не равен базису $((0;1);(1;0))$!)

Коэффициенты линейной комбинации базисных векторов для любого вектора и называются *координатами вектора* ***в этом базисе***.
У нулевого вектора все координаты равны нулю, независимо от выбора базиса.
Если мы запишем базисные векторы в виде строки, а координаты вектора в виде столбца (что называют координатным столбцом), то вектор можно представить с помощью матричного умножения:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Базис называется *стандартным*, если он состоит из векторов, координаты которых равны нулю, кроме одной координаты, равной 1.
Для базиса векторов размеров n (такое линейное пространство обозначается $\mathbb{R}^n$), такой базис состоит из векторов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для матриц размеров 2×2, стандартный базис таков:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Стандартный базис многочленов степени не выше n (такое линейное пространство обозначается $\mathbb{P}_n$):

$$e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3, \dots, e_{n+1} = x^n$$

Из линейности векторов следует линейность их координат: координата суммы векторов равна сумме координат каждого вектора, и координата произведения скаляра и вектора равна соответствующей координате вектора, умноженного на скаляр.

$$x + y = (x_1 + y_1)e_1 + \ldots + (x_n + y_n)e_n$$
$$\alpha x = (\alpha x_1)e_1 + \ldots + (\alpha x_n)e_n$$

Из этой линейности следует, что векторы линейно зависимы тогда и только тогда ($\Leftrightarrow$), когда линейно зависимы их координатные столбцы.