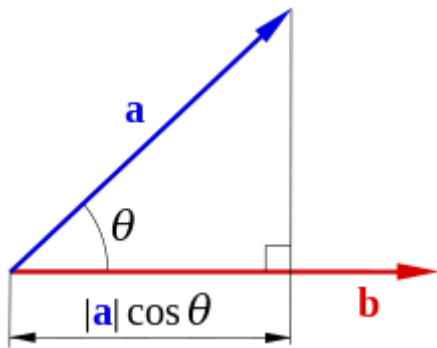


Скалярное произведение - операция, определенная на двух векторах.
Записывается разными способами:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a}\bar{b}$$

Скалярное произведение двух векторов \bar{a} и \bar{b} равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними θ :

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}| \cos \theta$$



Если посмотреть на формулу, можно объединить $|\bar{a}|$ и $\cos \theta$. Так как θ это угол между двумя векторами, произведение $|\bar{a}| \cos \theta$ можно представить как проекцию вектора \bar{a} на вектор \bar{b} . Благодаря этому, скалярное произведение можно представить как произведение длины проекции одного вектора на второй и длины второго вектора.

Так как произведение симметричное, можно представить точно так же произведение как и произведение проекции длины второго вектора на первое и длины первого вектора.

Напоминаю, что мы можем записать скалярное произведение через проекции:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} \cdot |\bar{b}|$$

Длина вектора определяется по теореме Пифагора. Пусть дан вектор $\bar{a}(x_1; y_1)$. Тогда его длина:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

А если задан вектор \overline{AB} , то его длина:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2}$$

Пройдемся по свойствам:

1. Скалярное произведение коммутативно: $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos \theta = |\overline{b}||\overline{a}| \cos \theta = (\overline{b}, \overline{a})$$

2. Скалярное произведение дистрибутивно на сложении. Это свойство вытекает из свойства про сумму проекций/проекцию суммы:

$$(\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a}, \overline{c})$$

3. Умножение на скаляр, его тоже можно понимать через смысл проекций:

$$(\alpha \overline{a}, \beta \overline{b}) = \alpha \beta (\overline{a}, \overline{b})$$

4. Если $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$, то вектора \overline{a} и \overline{b} ортогональны.

5. "Чистой" ассоциативности у скалярного произведения нет, просто потому что скалярное произведение возвращает скаляр, и скалярное произведение не определено между вектором и скаляром. Однако, "ассоциативность" с двумя векторами и скаляром существует:

$$(\overline{a}, (\overline{b}, \overline{c})) = (\overline{a}, |\overline{b}||\overline{c}| \cos \theta) = ???$$

Однако со скаляром все хорошо:

$$c \cdot (\overline{a}, \overline{b}) = (c\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, c\overline{b}) = c \cdot |\overline{a}||\overline{b}| \cos \theta$$

6. Произведение само на себя - угол между одним и тем же вектором считается нулевым:

$$(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}||\overline{a}| \cdot \cos 0 = |\overline{a}|^2$$

Из этого следует, что мы можем выразить длину вектора через

скалярное произведение:

$$|a| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$$

В ортонормированном базисе для векторов $\bar{a}(a_1; a_2; \dots; a_n)$ и $\bar{b}(b_1; b_2; \dots; b_n)$ справедлива следующая формула:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Докажем, что эта формула равносильна формуле с косинусом.

Введем *ортонормированный* базис $(\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n)$, в котором будут находиться наши векторы. Разложим наши векторы \bar{a} и \bar{b} в линейные комбинации:

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{e}_i \quad \bar{b} = \sum_{i=1}^n b_i \bar{e}_i$$

Рассмотрим скалярное произведение двух базисных векторов (\bar{e}_i, \bar{e}_j) .

Когда $i \neq j$ произведение будет равно нулю, ведь базисные векторы ортогональны друг другу. Когда $i = j$, произведение будет равно $|\bar{e}_i|^2$, что в свою очередь равно 1, т.к. в ортонормированном базисе все вектора единичной длины.

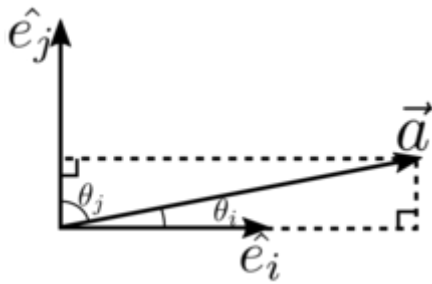
$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Рассмотрим теперь скалярное произведение вектора на базисный вектор:

$$(\bar{a}, \bar{e}_i) = |\bar{a}| |\bar{e}_i| \cos \theta = |\bar{a}| \cos \theta = a_i$$

Первый переход по геометрическому определению скалярного произведения, второй переход из-за того, что длина базисного вектора в ортонормированном базисе равна единице, и последний переход - проекция вектора на базисный вектор будет равно координате этого вектора на этом базисе. Попробуйте мысленно себе представить проекцию вектора \bar{a} на

базисный вектор.



Наконец, перейдем к главному доказательству:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \sum_{i=1}^n b_i \bar{e}_i)$$

Для начала мы раскладываем вектор \bar{b} в линейную комбинацию. Теперь, зная, что скалярное произведение дистрибутивно на сложении, мы можем занести вектор \bar{a} внутрь суммы:

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \sum_{i=1}^n b_i \bar{e}_i) &= (\bar{a}, b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2 + \dots + b_n \bar{e}_n) = \\ &= (\bar{a}, b_1 \bar{e}_1) + (\bar{a}, b_2 \bar{e}_2) + \dots + (\bar{a}, b_n \bar{e}_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\bar{a}, b_i \bar{e}_i) = \sum_{i=1}^n b_i (\bar{a}, \bar{e}_i) \end{aligned}$$

Теперь вспоминаем, чему равно скалярное произведение и делаем наш последний переход:

$$\sum_{i=1}^n b_i (\bar{a}, \bar{e}_i) = \sum_{i=1}^n b_i a_i = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Доказательство закончено.

Благодаря этой формуле появляется еще одно интересное свойство, которое более полно раскрыто в вопросе [13. Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей.](#):

При умножении по-координатно, орты векторов "убираются":

$$((a_1\bar{i}; a_2\bar{k}; a_3\bar{j}), (b_1\bar{i}; b_2\bar{k}; b_3\bar{j})) = a_1b_1\cancel{\bar{i}} + a_2b_2\cancel{\bar{j}} + a_3b_3\cancel{\bar{k}}$$

Зная скалярное произведение, можно найти косинус угла между двумя векторами:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

Пример задачи

Условие: вычислите скалярное произведение векторов $\bar{a}(5; 3)$ и $\bar{b}(8, -3)$.

Решение:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 = 5 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 40 - 9 = 31$$

Условие: вычислите скалярное произведение векторов, длина которых 5 и 7, и угол между ними равен 60° .

Решение:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}| \cos \theta = 5 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ = \frac{5 \cdot 7}{2} = 17.5$$

Условие: найдите длину вектора $\bar{a}(-5; 12)$.

Решение:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Условие: найдите угол между векторами $\bar{a}(0; 5)$ и $\bar{b}(5\sqrt{3}; 5)$.

Решение: чтобы найти угол, нужно знать длину векторов и их скалярное произведение:

$$|\bar{a}| = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{5^2} = 5$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = 5 \cdot \sqrt{4} = 10$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \cdot 5\sqrt{3} + 5 \cdot 5 = 25$$

Дальше выражаем косинус угла из формулы скалярного умножения:

$$\cos \theta = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{25}{5 \cdot 10} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$$