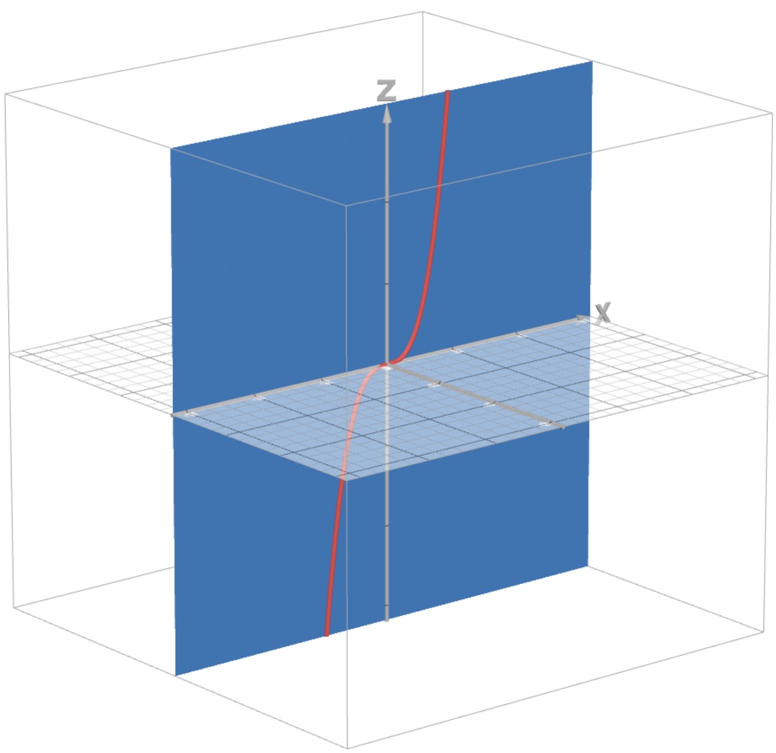
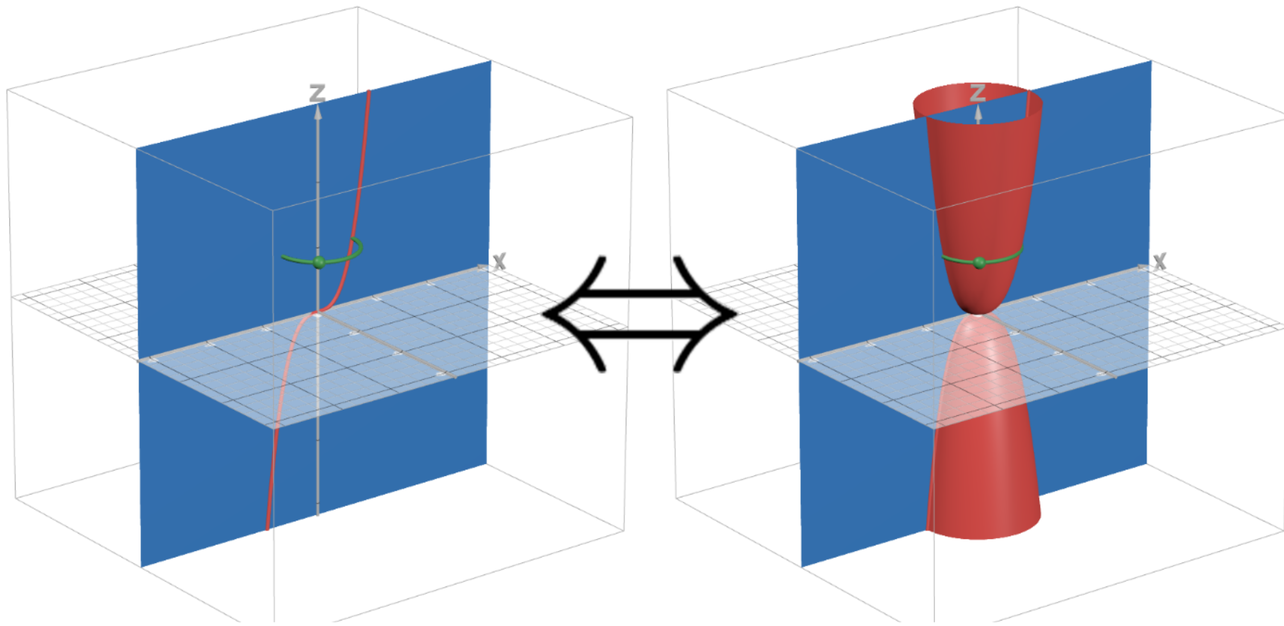
Что за вращения?

После прохождения линий второго порядка, естественная идея теперь дать этим линиям свободу в третье измерение.
Речь пойдет о *поверхностях вращения* - поверхностях, которые образованы с помощью вращения какой-то линии вокруг какой-то оси.
Раньше мы задавали функцию линии от двух переменных, и на оси Oxz в декартовой прямоугольной системе координат в общем виде она выглядит следующим образом:

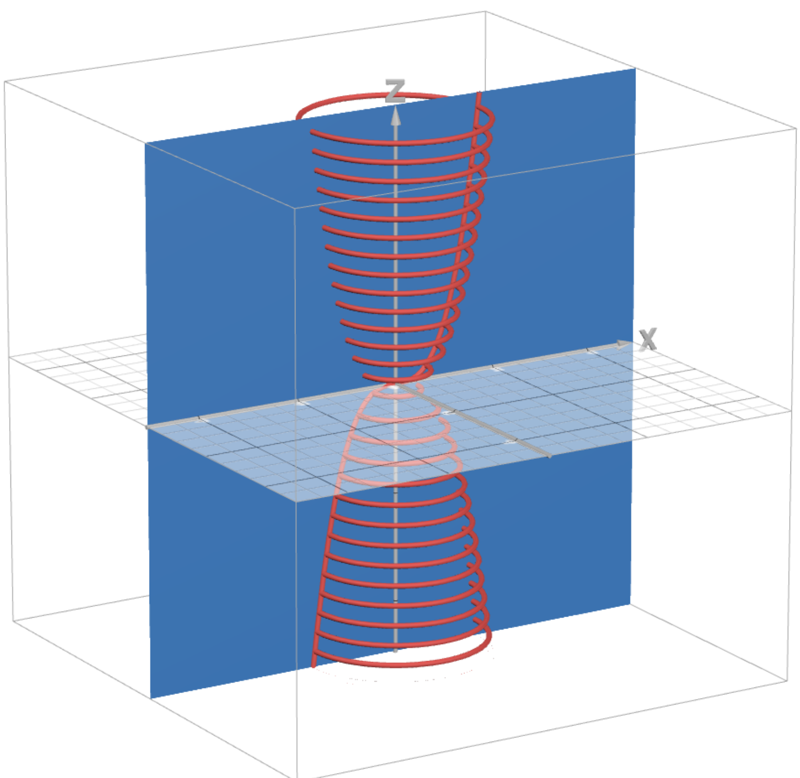
$$f(x,z) = 0 = (Ax^2 + 2Bxz + Cz^2 + 2Dx + 2Ez + F)$$



Поверхность вращения (будем вращать по оси z) задается новой функцией: точка принадлежит поверхности вращения тогда и только тогда ($\Leftrightarrow$), когда точка принадлежит окружности, перпендикулярной оси вращения, которая пересекает линию.



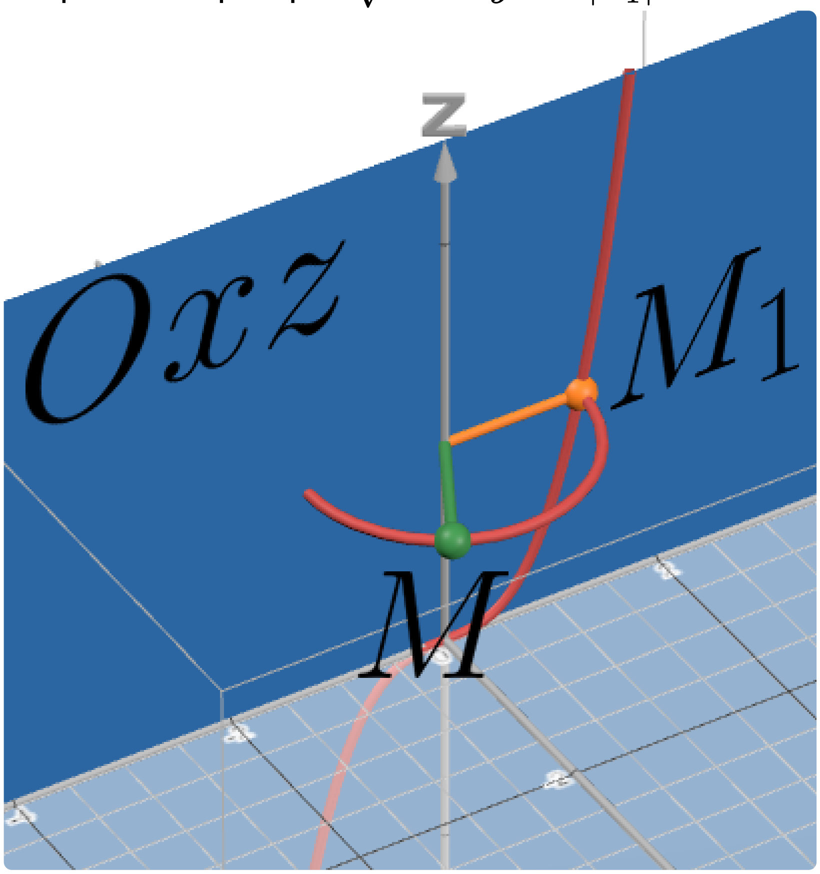
Таким образом, каждая точка на линии соответствует целой окружности точек на поверхности; вся линия (все множество ее точек) будет соответствовать всей поверхности.



Наши рассуждения будут идти для декартовой прямоугольной системы координат, которую потом при желании можно повернуть или переместить в другую точку.
В плоскости Oxz составляем линию, которую будем вращать. Теперь берем случайную точку на поверхности вращения, $M(x; y; z)$. Раз точка

принадлежит окружности, то есть точка, что лежит на окружности и на линии одновременно: $M_1(x_1;y_1;z_1)$.

1. Раз точка M_1 лежит на линии, то она лежит в плоскости $Oxz \Rightarrow y_1 = 0$.
2. Точка M_1 лежит на окружности, перпендикулярной ~~шампуру~~ оси вращения (z) - следовательно, координата z не меняется: $z_1 = z$.
3. Точка M_1 лежит на той же окружности, что и M - радиус сохраняется. Радиус у точки M_1 будет просто равен $|x_1|$, а для точки M - с помощью теоремы Пифагора: $\sqrt{x^2+y^2} = |x_1|$.



Наконец, точка M_1 лежит на линии, поэтому выполняется уравнение для линии:

$$f(x_1;z_1) = 0$$

Но мы провели соответствие координат M_1 и M. Подставляем полученные значения:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2};z) = 0$$

$\pm$ появляется из-за модуля. Если равенство выполняется хоть и одном из знаков, то точка будет принадлежать этой поверхности. Можно переписать следующим образом:

$$f(\sqrt{x^2+y^2}; z) \cdot f(-\sqrt{x^2+y^2}; z) = 0$$

В этом состоит геометрический смысл поверхностей вращения.

Эллипсоид

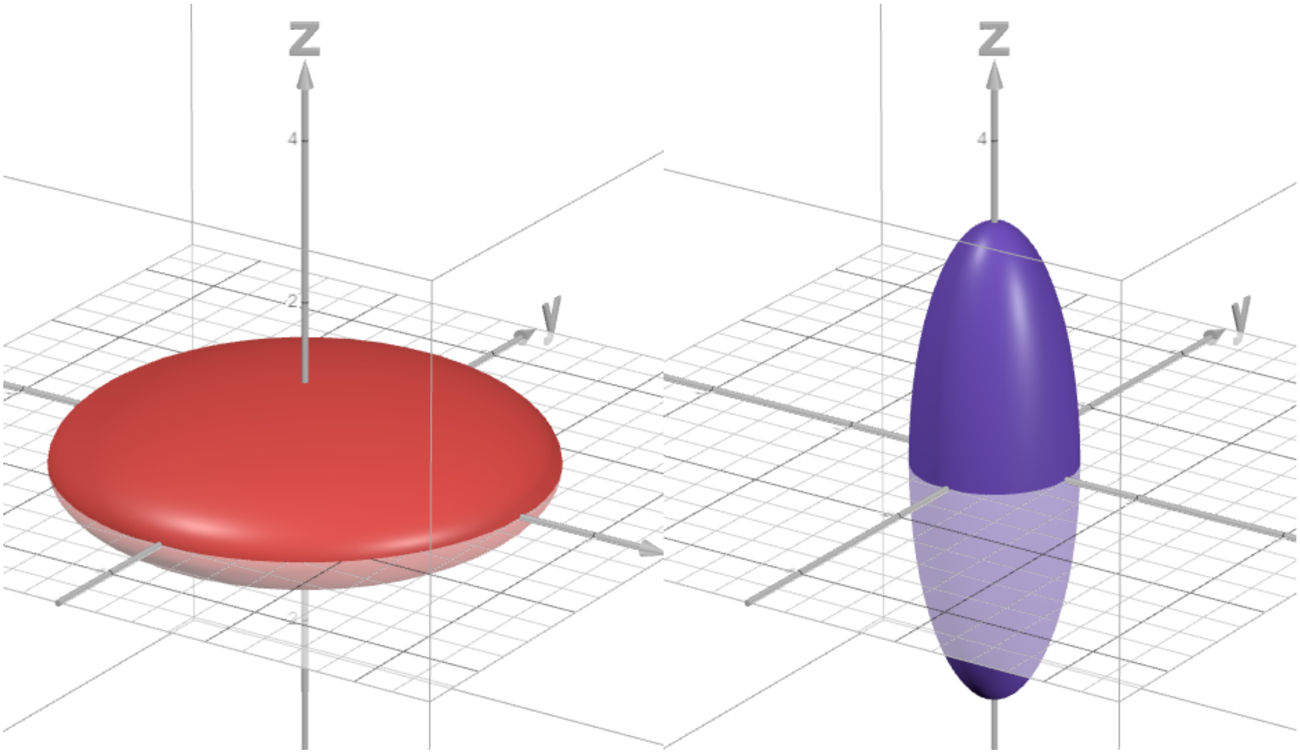
Эллипсоид, как заметно из названия, связан с эллипсом, и получается от его вращения.
Как и в теории поверхностей вращения, составим эллипс в плоскости Oxz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Используя подстановку формулы $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}; z)$ можем получить два новых уравнения, в зависимости от порядка подстановки: новое уравнение:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2+y^2}{c^2} = 1$$

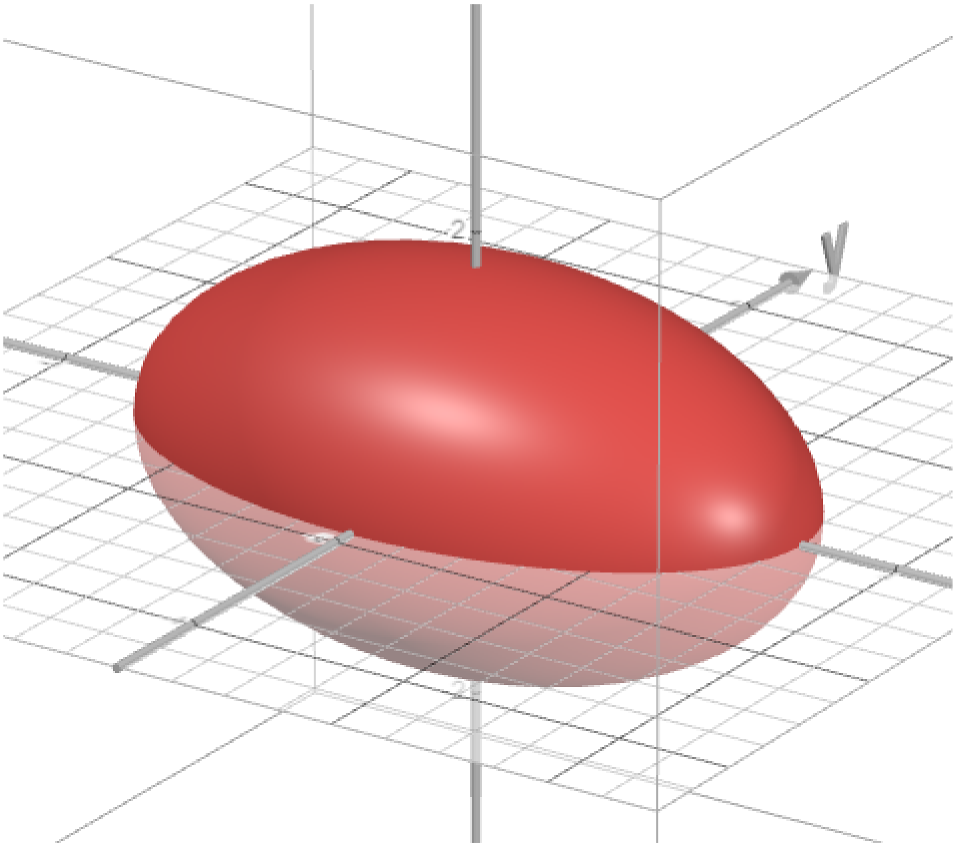
Где по соглашению $a > c$. Эти два уравнения называются "сжатым эллипсоидом вращения" и "вытянутым эллипсоидом вращения" соответственно, ибо в первом он больше похож на блинчик, и во втором - на шип.



Естественная идея - отделить каждую координату на собственный коэффициент (а не то как у x и y одинаковый коэффициент a):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Таким образом мы и получаем уравнение эллипсоида. Строго математически, это отделение y на собственный коэффициент - сжатие системы координат по оси y.



Аргументы симметричности эллипсоида точно такие же, как и для эллипса. Частный случай эллипсоида - сфера.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Сжатием системы координат по трем осям позволяет добавить эти коэффициенты a, b, c и перейти к эллипсоиду.

Однополостный и двуполостный гиперболоид

Эти два вида плоскостей получаются с помощью вращения гиперболы (отсюда и название).

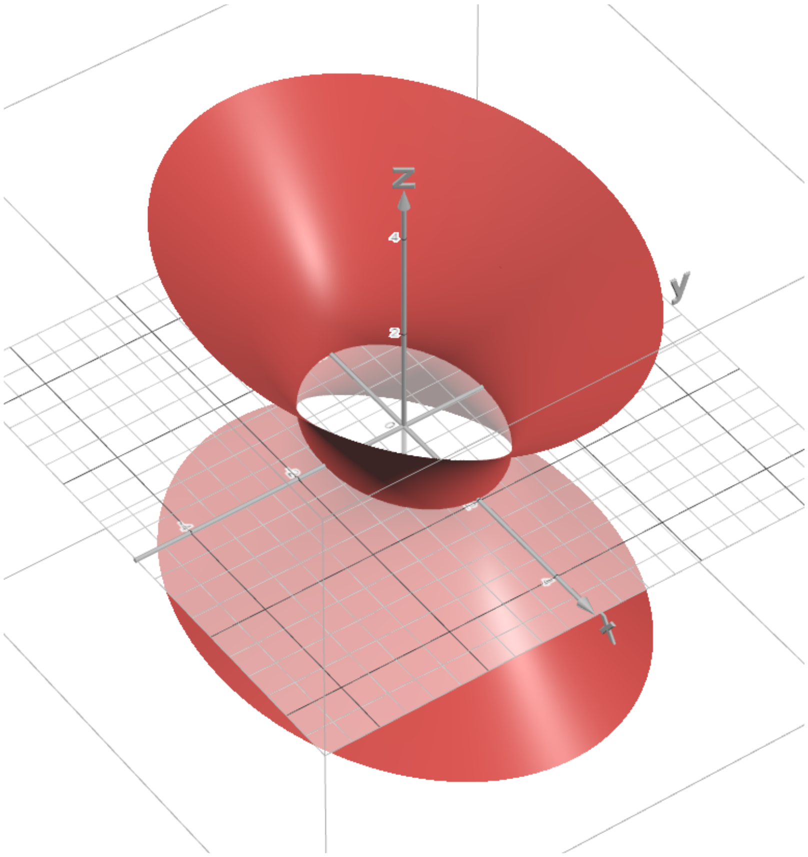
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

При вращении получаем новую формулу:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

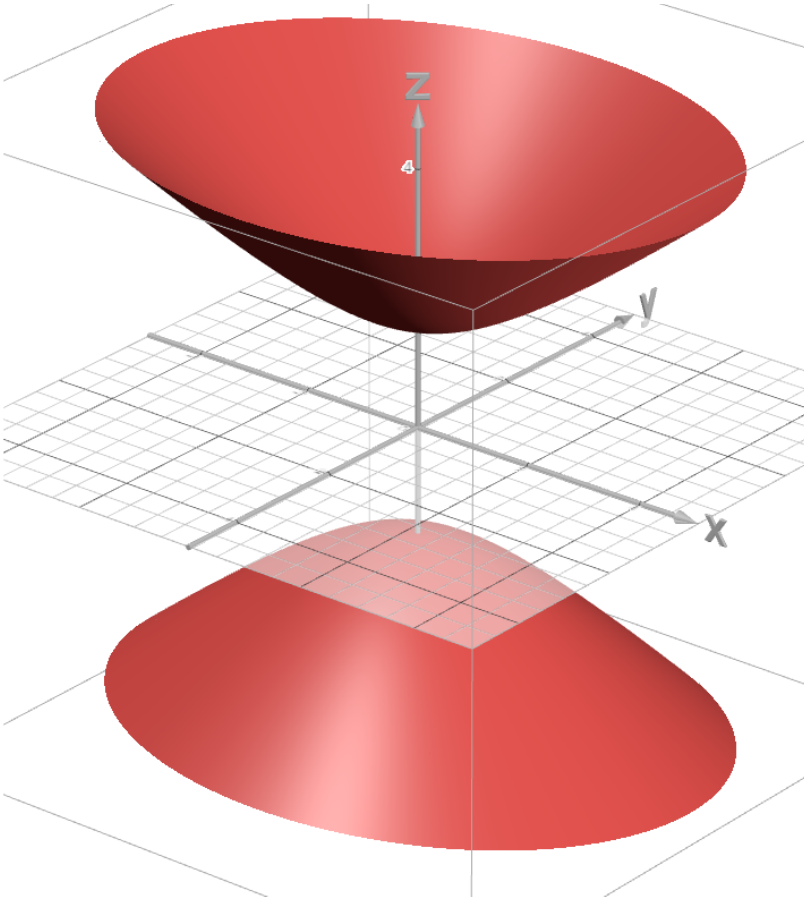
Как и раньше, есть сильное желание отделить все коэффициенты друг от друга, и мы получаем однополостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



При вращении повернутой на 90° градусов гиперболу, получаем уже двуполостный гиперболоид:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

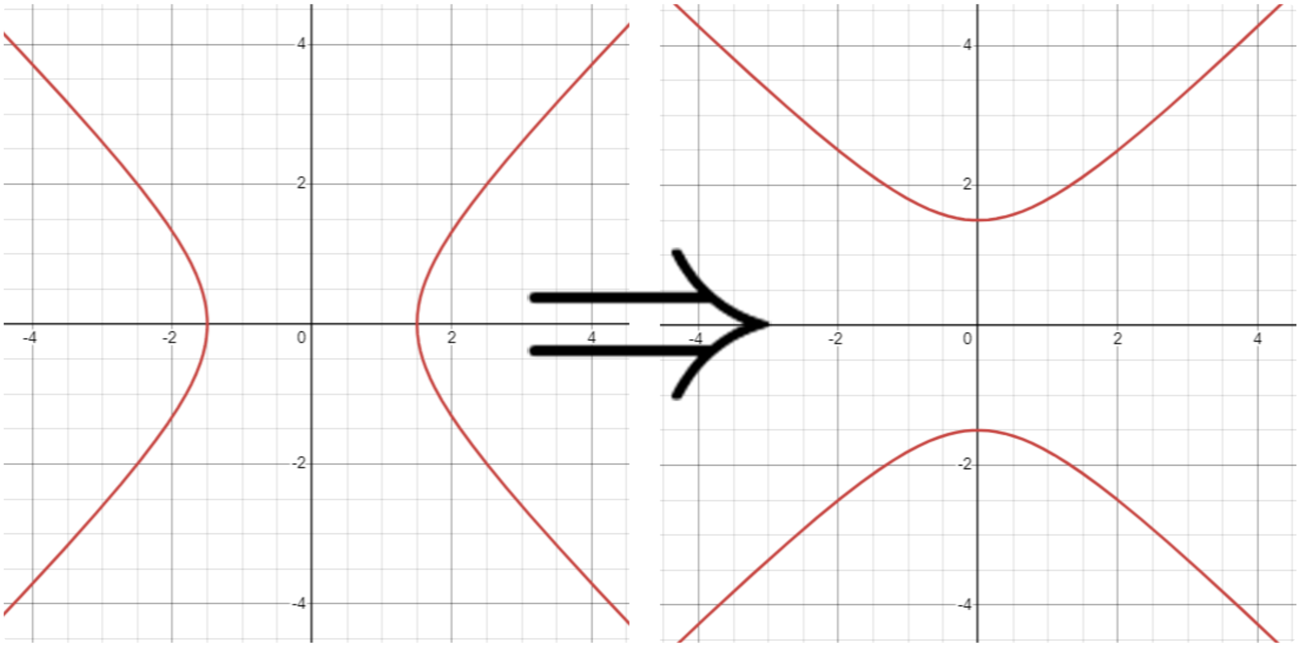


А теперь вопрос - в чем разница? Почему мы вращаем гиперболу на 90°, что за названия?

Сначала мы вращали параболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Как помните из теории про гиперболы, у такой параболы есть полоса шириной $2a$, которая расположена посередине начала координат - соответственно, такая линия не будет пересекать ось вращения (z). При вращении соответственно полученная плоскость ось тоже не пересечет. Получится такая соединенная "ядерная труба".

Отсюда и идет название: "однополостная" - одна ***полость*** (не полоса, полость!) - она нигде не разрывается...в отличие от своего близнеца.

Вторая же гипербола это оригинальная, но с замененными осями. Можно считать это поворотом, можно считать это отзеркаливанием - из-за симметрии не отличить. В любом случае, теперь гипербола *упала на бок*.



Соответственно теперь при вращении ~~шашлыка~~ этой линии у нас останется пустота внутри, и две "чаши" гиперболы будут висеть независимо друг от друга. Эти две чаши и есть две-полости: двуполостный гиперболоид.

У однополостного гиперболоида есть множество прямых образующих - прямые линии, каждая точка которых содержится на этом гиперболоиде. Для двуполостного гиперболоида таких образующих не может быть, просто потому что они разделены пустым пространством между ними.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Это уравнение мы можем переписать как разность квадратов и раскрыть:

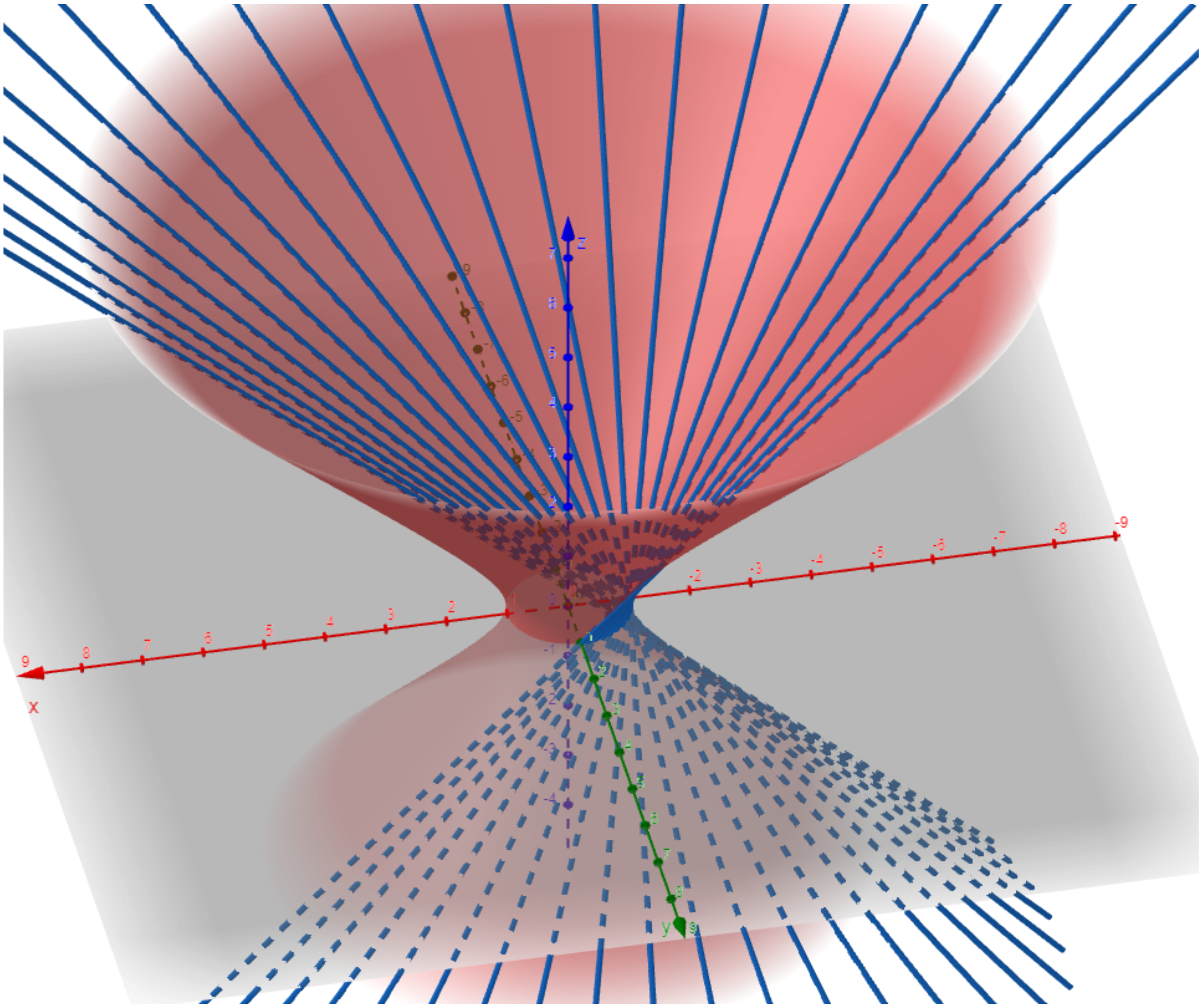
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

Рассмотрим теперь прямую, заданную в общем виде - перечениями двух плоскостей:

$$\begin{cases} \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \lambda(1 + \frac{y}{b}) \\ \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \mu(1 - \frac{y}{b}) \end{cases}$$

Если перемножить уравнения и сократить $\lambda\mu$, мы получим снова уравнение для однополостного гиперболоида.

Точка лежит на этой линии $\Rightarrow$ оба уравнения удовлетворены $\Rightarrow$ уравнение, полученное из произведения, тоже будет удовлетворено $\Rightarrow$ уравнение однополостного гиперболоида удовлетворено.



Можно сделать еще другие прямые для образующих, если заменить знаки:

$$\begin{cases} \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) = \lambda(1-\frac{y}{b}) \\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) = \mu(1+\frac{y}{b}) \end{cases}$$

Еще один факт, что можно отметить - если проврaщать асимптоты гиперболы, то получится конус, который называется асимптотическим (но о конусах мы поговорим потом).

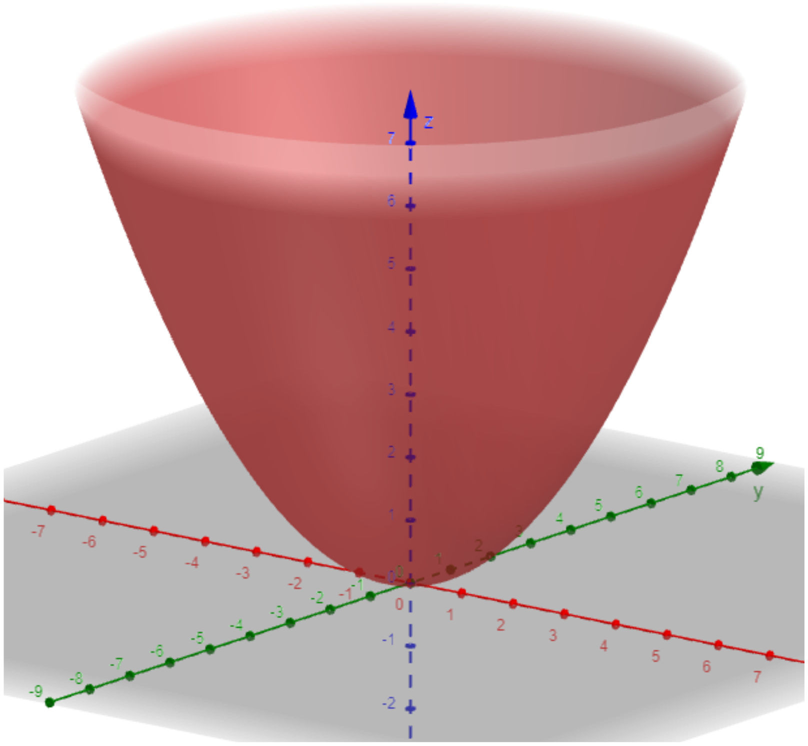
Эллиптический парабалоид

Парабалоиды, как следует из названия, получаются от вращения парабол:

$$x^2 = 2pz$$

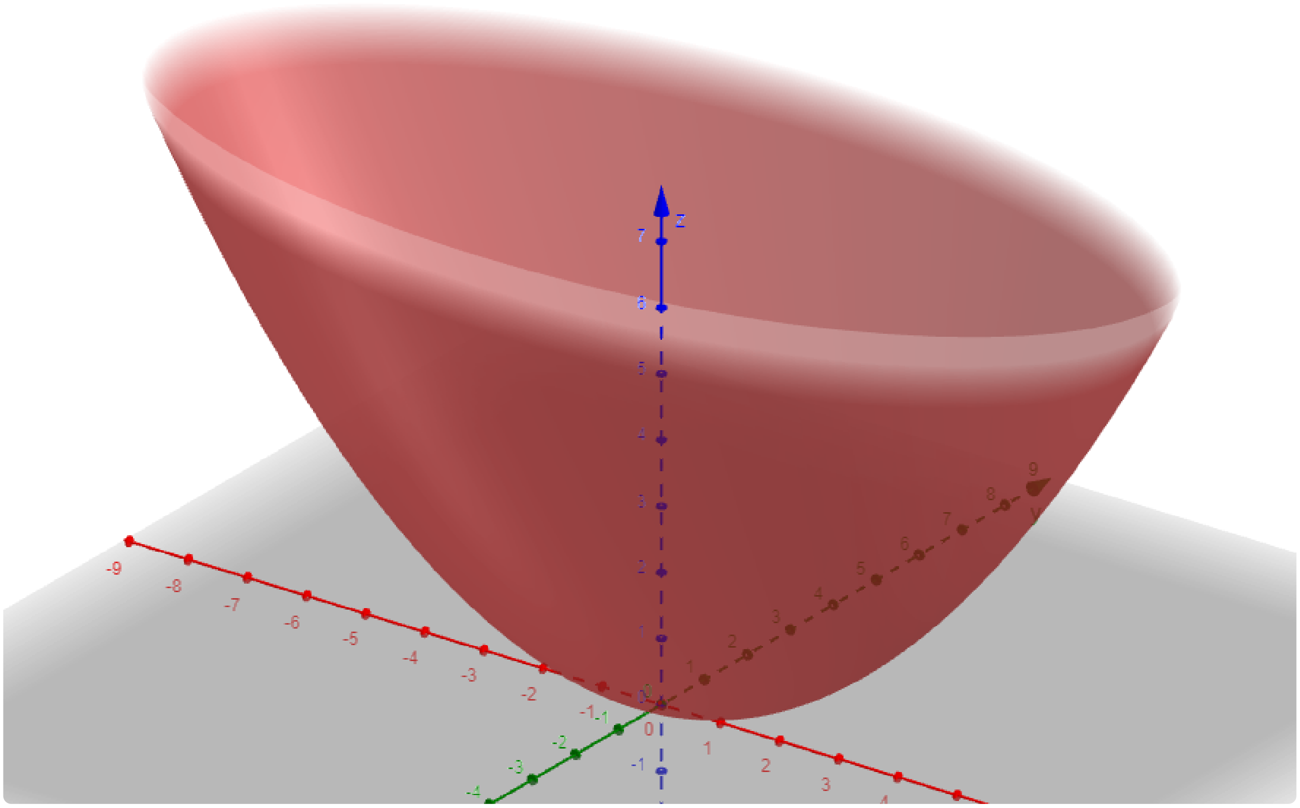
Вращая с помощью замены координат (по функции), получаем

$$x^2 + y^2 = 2pz$$



Разбиваем на собственные коэффициенты, и получаем эллиптический парабалоид (от p мы избавились, ведь его можно представить с помощью a и b):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



А теперь - самый неоправданный скачок между билетами. Начнем изучение *гиперболического* параболоида после короткого перерыва!