Прибавление строк

В прошлом билете мы обсудили, что происходит с определителем при умножении строки на скаляр. Теперь поговорим про суммирование двух строк.

Свойство: при прибавлении к одной строке определителя другой строки, умноженной на скаляр, *этот определитель не меняется*.

Скажем, мы получили матрицу B из матрицы A, с помощью прибавления к строке i строку j, умноженной на скаляр λ. Другими словами, матрица B равна матрице A, кроме строки i.

$$B_{ip} = A_{ip} + \lambda A_{jp}$$

Как мы уже говорили в прошлом билете, определитель линеен по строкам, поэтому выполняется

$$\det B = \det A + \lambda \det C$$

Матрица C равна матрице A, лишь за исключением, что ее строка i равна строке j. Но раз у матрицы C есть две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю. Соотвественно,

$$\det B = \det A$$

И определитель от сложения строк не изменился. И конечно, как и всегда, такие рассуждения работают и для столбиков.

Определитель Вандермонда

Матрица Вандермонда - квадратная матрица особого вида, которая однозначно задается лишь строкой элементов, и выглядит следующим образом:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Вертикально ставятся сами элементы, а по горизонтали проходят степени от 0 до $n-1$.
Определителем Вандермонда, очевидно, является определитель этой матрицы.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Этот определитель интересен тем, что он равен произведению всевозможных разностей $x_i - x_j$, где $1 \le j < i \le n$.

Докажем это, конечно же, индуктивно. Базу $n = 2$ проверяем ручками:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

Теперь шаг: предполагаем, что это свойство работает для $n-1$, и доказываем, что в таком случае это будет работать и для n.
Рассматриваем определитель порядка n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Мы только что доказывали, что складывание/вычитание домноженных строк не меняет определитель. Тогда начнем вычитать строки снизу, и подниматься вверх: сначала вычтем строку $n-1$, умноженную на x_1, из строки n, затем вычтем строку $n-2$ тоже умноженную на x_1 из строки $n-1$, и будем подниматься таким образом, пока не поднимемся до вычета 1 строки, умноженной на x_1, из строки 2. Получится новый определитель, причем без всяких множителей:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1x_2 & x_3^2 - x_1x_3 & \dots & x_n^2 - x_1x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Наша мотивация: мы не меняем значение определителя, при этом с помощью таких операций наша цель (почти) обнулить первый столбик. После разложения определителя по первому столбику мы сможем прийти к определителю Вандермонда меньшего порядка и по предположению индукции закончить. Но перед этим, нам нужно вынести общие множители из каждого столбика, чтобы привести минор к виду определителя Вандермонда:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & \dots & (x_n - x_1) \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

Теперь раскладываем этот определитель по первому столбцу. Все члены, кроме 1, обратятся в ноль, поэтому этот определитель равен дополнительному минору:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & \dots & (x_n - x_1) \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

Так как умножение столбика определителя будет равно умножению самого определителя на это значение, мы можем вынести общие множители из каждого столбика этого определителя:

$$\Rightarrow (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

По предположению индукции, получившийся определитель Вандермонда меньшего порядка равен $\prod_{2 \le j < i \le n}(x_i - x_j)$. А левые множители - как раз это же произведение, но для фиксированного $j = 1$. Объединяем:

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \prod_{2 \le j < i \le n} (x_i - x_j) =$$

$$= \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

Так и заканчивается доказательство.

Из такого свойства определителя Вандермонда следует, что если существует такая пара $x_i = x_j, i \neq j$, то определитель будет равен нулю.

Мотивация

А зачем такая матрица вообще сдалась? Самое популярное применение матрицы Вандермонда - нахождение многочлена, проходящую через множество точек: мы хотим составить многочлен, что будет проходить через точки $(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3)$. Система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 = y_1 \\ a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 = y_2 \\ a_1 + a_2 x_3 + a_3 x_3^2 = y_3 \end{cases}$$

Переписывая эту систему в матричное уравнение, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Слева получилась матрица Вандермонда. Решая уравнение относительно вектора $(a_1; a_2; a_3)$ можно будет построить такой полином, что проходит через эти точки. Решить можно, например, с помощью формул Крамера, о которых мы поговорим в следующем билете.

Пример задачи

Условие: посчитайте определитель матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 2 \\ 9 & 49 & 25 & 4 \\ 27 & 343 & 125 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение: несложно заметить, что это матрица Вандермонда. Посчитаем ее определитель по формуле

$$\det A = \prod_{1 \leq j < i \leq 4} (x_i - x_j)$$

$$\det A = (2-3)(2-7)(2-5)(5-3)(5-7)(7-3) = \\ = (-1)(-5)(-3)(2)(-2)(4) = 240$$

Можно было для усложнения покрутить строчки и столбцы местами, повычитать тут и там строки, но я решил этот пример не усложнять сильно.