Образ

Начнем про образ издалека. Теорема: линейное отображение $A : L \to \overline{L}$ переводит линейное подпространство $L' \subset L$ в линейное подпространство $A(L') \subset \overline{L}$, причем $\dim A(L') \le \dim L'$.
Выберем базис $e_1, e_2, \ldots, e_k$ в подпространстве L' ($\dim L' = k$); тогда каждый вектор $x \in L'$ можно разложить по этому базису как линейную комбинацию.

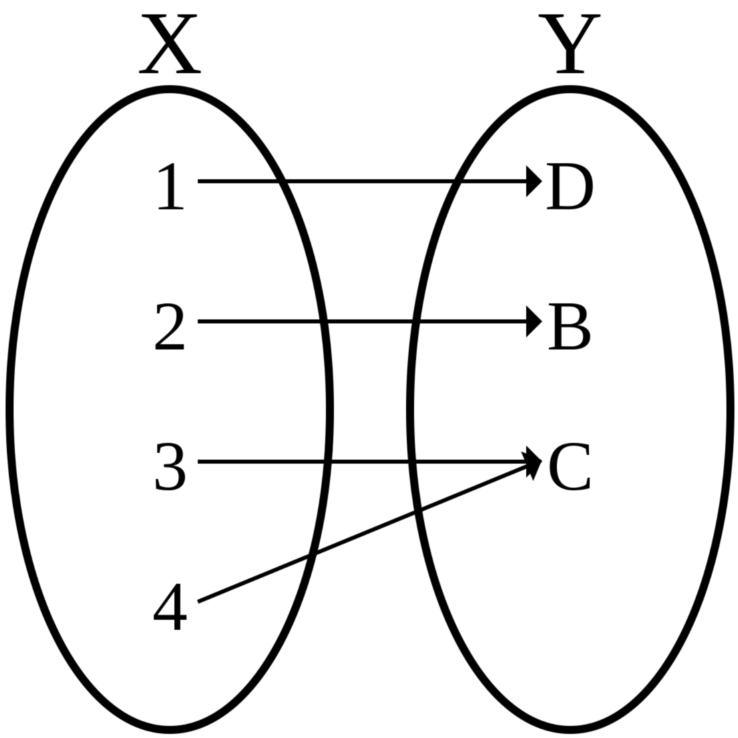
$$A(x) = x_1 A(e_1) + x_2 A(e_2) + \ldots + x_k A(e_k)$$

Получается, любой вектор $A(x) \in \overline{L}$ раскладывается как линейная комбинация векторов $A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_k)$ - и наоборот, любая линейная комбинация этих векторов соответствует какому-то вектору $x \in L'$. Таким образом, $A(L')$ образует подпространство.

Из этого следует, что для отображения $A : L \to \overline{L}$ существует подпространство $A(L)$ в $\overline{L}$ образов всех векторов $x \in L$. Такое подпространство называется *образом отображения* A, и обозначается как $\operatorname{Im} A$ (image - образ). Его размерность называется *рангом отображения*: $\operatorname{Rg} A = \dim \operatorname{Im} A$.

Когда $\operatorname{Rg} A = \dim \overline{L}$, то $A(L)$ совпадает с $\overline{L}$, и отображение A является *сюрьективным* (и в обратную сторону тоже работает). Это означает, что для каждого элемента $y \in \overline{L}$ найдется такой $x \in L$, для которого y

является образом (на рисунке, L это X, а $\overline{L}$ - это Y):



Ядро

Множество векторов, которые отображаются в нулевой вектор, называются ядром отображения, и обозначается как $\ker A$. (kernel - ядро)
Ядро $\ker L$ всегда является подпространством L: нулевой вектор всегда содержится в $\ker A$, а если существуют еще дополнительные векторы (x и y такие, что $A(x) = A(y) = 0$), то для них выполняются все нужные равенства, чтобы считать $\ker A$ подпространством L.

$$A(x+y) = A(x) + A(y) = 0 + 0 = 0, A(\alpha x) = \alpha A(x) = \alpha 0 = 0$$

Но когда ядро не нулевое ($\dim \ker A \geq 1$), существует бесконечное множество векторов (представьте прямую векторов, проходящую через нулевой вектор при $\dim \ker A = 1$, плоскость при $\dim \ker A = 2$ и т.д.), обращающихся в нулевой вектор. Из этого следует, что для каждого вектора из $A(L)$ существует бесконечное количество прообразов: для векторов $x \in L$, $x_0 \in \ker A$:

$$A(x + \alpha x_0) = A(x) + \alpha A(x_0) = A(x)$$

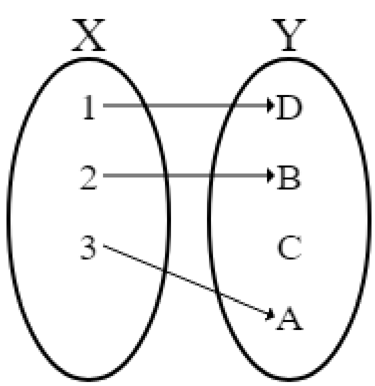
Это работает и в обратную сторону: если для какого-то вектора существует хотя бы два прообраза, ядро отображения уже не будет нулевым. Предположим есть два вектора $x_1, x_2 \in L$ и $x_1 \neq x_2$, что $A(x_1) = A(x_2) = y$, то

$$A(x_1 - x_2) = A(x_1) - A(x_2) = y - y = 0$$

Получается, вектор $x_1 - x_2$ ненулевой и принадлежит ядру отображения.

Соответственно когда ядро нулевое, для каждого вектора существует только один, уникальный, образ - такое отображение называется *инъективным*:

$$A(x_1) = A(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



При отображении, линейно зависимые векторы переходят в линейно зависимые векторы, а для инъективного отображения работает еще и "линейно независимые векторы переходят в линейно независимые векторы".

Рассмотрим линейно зависимые векторы $x_1, x_2, \dots x_n$- для скаляров α, где хотя бы один не равен нулю, выполняется:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

Отображаем левую и правую часть:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = A(0)$$
$$\alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) + \ldots + \alpha_n A(x_n) = 0$$

Как видно, отображенные векторы $A(x_1), A(x_2), \ldots, A(x_n)$ так же будут линейно зависимы, с теми же коэффициентами.

В обратную же сторону, если линейно зависимы образы векторов, то:

$$\alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) + \ldots + \alpha_n A(x_n) = 0$$
$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = A(0)$$

Если отображение инъективно, можно утвержать, что и вектора $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут линейно зависимыми. Так как (для инъективного отображения) мы показали, что линейная зависимость переходит в две стороны (векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы их образы при инъективном отображении), то линейно независимые векторы должны переходить в линейно независимые векторы.