Условие: используя обратную матрицу, найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению

$$X\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$$

Решение: для обратных матриц неважно, умножать слева или справа. Поэтому мы умножим каждую часть на обратную матрицу матрицы слева. Но для начала ее нужно найти:

$$\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 5\end{pmatrix}^{-1}$$

Посчитаем ее через алгебраические дополнения: сначала считаем определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 5\end{vmatrix} = 15 - 20 = -5$$

Для каждой ячейки находим минор и вписываем его в эти же клетки - матрица миноров:

$$\begin{pmatrix}5 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}$$

Меняем знаки в матрице в шахматном порядке - алгебраические дополнения:

$$\begin{pmatrix}5 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}$$

Транспонируем матрицу алгебраических дополнений, делим на определитель, и получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & -5\\ -4 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix}$$

Умножаем изначальное уравнение на обратную матрицу справа с двух сторон уравнений:

$$X\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 5\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix}$$

Матрица и ее обратная "сокращаются", остается посчитать матричное произведение справа:

$$X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\cdot 5+1\cdot 4 & 2\cdot 5-1\cdot 3\\ 3\cdot 5-1\cdot 4 & -3\cdot 5+1\cdot 3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-6 & 7\\ 11 & -12\end{pmatrix}$$

Исключительно в целях самопроверки себя, проверяем:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-6 & 7\\ 11 & -12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-18+28 & -30+35\\ 33-48 & 55-60\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10 & 5\\ -15 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$$

Сошлось :)

Ответ: $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-6 & 7\\ 11 & -12\end{pmatrix}$

Условие: используя обратную матрицу, найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению:

$$X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

Для этого умножим на обратную матрицу $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$ справа, чтобы слева остался только X. Для этого для начала найдем обратную матрицу. Найдем ее методом Гаусса: слева ставим матрицу, для которой мы хотим найти обратную, а справа ставим единичную матрицу. Элементарными преобразованиями превращаем левую часть в единичную матрицу, а в правой появится обратная матрица.

1: вычесть из строки $[2]$ строку $[1]$.
2: умножить строку $[2]$ на -1.
3: вычесть из строки $[1]$ строку $[2]$, умноженную на 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -1 & | & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim^{(2)}$$

$$\sim^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 & 2 \\ 0 & 1 & | & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Забираем обратную матрицу с правой части:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Умножаем на обратную матрицу справа с двух сторон:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Осталось умножить матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0 & 4+0 \\ -3-1 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

Условие: используя обратную матрицу, найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению:

$$X \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Находим обратную матрицу по формуле:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-21 + 20} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Умножаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 10 & -4 + 14 \\ 0 + 15 & 0 - 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 15 & -21 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 15 & -21 \end{pmatrix}$

Условие: используя обратную матрицу, найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению:

$$X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Находим обратную матрицу по формуле:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2 - 1 \cdot 5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Умножаем...

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - 5 & -7 + 3 \\ -6 + 0 & 3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$