Для матриц

Приписывание столбца к матрице не меняет ее ранга тогда и только тогда $(\Leftrightarrow)$, когда этот столбец - линейная комбинация столбцов матрицы. (Для строк аналогично)

Теорема естественно понимается: если столбик можно выразить через уже имеющиеся столбцы матрицы, то соотвественно он будет лежать в пространстве, описываемом этими базисными векторами. Чтобы ранг расширился, новый столбик (вектор) должен лежать в новом пространстве, и значит не может быть описанным имеющимися столбиками.

(линейная комбинация $\Rightarrow$ не меняет ранга): рассмотрим матрицу, полученную приписыванием столбика b к матрице A: $(A|b)$. Раз b является линейной комбинацией, с помощью элементарных преобразований можно вычесть из b линейную комбинацию столбиков A, так что получится матрица $(A|0)$, причем ранг этой матрицы не изменится (из-за элементарных преобразований, билет #47). Но нулевой столбик на ранг никак влиять не может, поэтому

$$\operatorname{Rg}(A|b) = \operatorname{Rg}(A|0) = \operatorname{Rg} A$$

(не меняет ранга $\Rightarrow$ линейная комбинация): если ранг не изменяется при добавление столбца, то $\operatorname{Rg}(A|b) = \operatorname{Rg} A$, то A является базисной подматрицей что в матрице A (очевидно), так и в матрице $(A|b)$, по свойствам ранга. Но если A является базисной матрицей, то столбик b (как и любой столбик матрицы $(A|b)$) раскладывается по базисной матрице - то есть, существует линейная комбинация столбиков A, что равна столбику b.

Аналогично и для строк, если посмотреть на транспонированные матрицы.

Для СЛАУ

Система линейных уравнений совместна (имеет решения) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы

(матрицы системы, дополненной справа столбиком свободных членов $(A|b)$).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A|b)$$

Смысл теоремы для СЛАУ не меняется - точно так же, если b лежит в "базисном пространстве" векторов A, и его вообще возможно выразить как линейную комбинацию их, то решения будут. Это базисное пространство и проверяется с помощью ранга. Иначе, как не крутись, нельзя выразить этот вектор через вектора матрицы A, прямо как мы не можем строить 4д объекты в нашем 3д мире.

Бонус - ранг произведения

Ранг произведения AB не превосходит ранги матриц A и B. Геометрически легко понять - если после трансформации матрица ужмет пространство, другая матрица уже не сможет его "расжать" обратно - поэтому ранг ограничен минимумом из рангов этих двух матриц.

Мы можем составить матрицу $D = (A|AB)$. AB - подматрица D, поэтому $\operatorname{Rg} AB \leq \operatorname{Rg} D$. При этом столбики AB - линейные комбинации столбиков A, поэтому по теореме Кронекера-Капелли, $\operatorname{Rg} D = \operatorname{Rg} A$. Получается, $\operatorname{Rg} AB \leq \operatorname{Rg} A$. Аналогично доказывается и для $\operatorname{Rg} AB \leq \operatorname{Rg} B$.

Более того, если A - невырожденная матрица, то

$$\operatorname{Rg} AB = \operatorname{Rg} B \qquad \operatorname{Rg} CA = \operatorname{Rg} C$$

Доказательство: $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} A^{-1}(AB) \leq \operatorname{Rg} AB$, и $\operatorname{Rg} AB \leq \operatorname{Rg} B$ по теореме выше. Значит, $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} AB$. Доказательство для второго равенства аналогично.
