Назовем следующие две операции на квадратных матрицах *элементарными преобразованиями*:

1. Умножение строки (или столбца) на произвольное число, отличное от нуля:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Прибавление одной строки (или столбца) матрицы к другой строке (или столбцу):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & \dots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   Из этих двух операций можно ввести две новые, как композиции (их мы все равно будем называть элементарными):

3. Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число (отличное от нуля!):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & \dots & a_{in} + \alpha a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Композиция:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ \alpha b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a + \alpha b \\ \alpha b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a + \alpha b \\ b \end{pmatrix}$$

4. Перестановка двух строк:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Композиция:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a + b \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a + b \\ b - a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

Из-за того, что у нас есть пары "сложение и вычитание" (в силу возможности умножить строку на -1 и сложить) и пары "умножение и деление" (ведь на 0 умножать запрещается), можно утвержать, что для любой последовательности элементарных преобразований, способных превратить матрицу A в матрицу B, существует другая последовательность элементарных преобразований, способная превратить матрицу B в матрицу A - *свойство обратимости элементарных преобразований*.

Теперь, как мы ввели понятие элементарных преобразований - введем понятие элементарных матриц: это такие матрицы, что получены из единичной матрицы путем применения элементарного преобразования 1 раз. С помощью умножения исходной матрицы A на элементарную матрицу S (приписывается слева) можно получить матрицу, к которой было применено соответствующее этой матрице элементарное преобразование. Матрицы можно легко запомнить, ведь при применении желаемого преобразования к единичной матрице, мы и получим элементарную матрицу. Скажем, мы хотим получить элементарную матрицу для прибавления *третьей строки*, умноженной на 2, к *первой строке*. Делаем такую операцию с единичной матрицей:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Теперь мы можем умножить матрицу 3×3 на нее, чтобы получить желаемое преобразование:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2g & b+2h & c+2i\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

Умножение второй строки на скаляр, например, выглядит таким образом:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

В случае, если мы хотим делать операции на столбики, а не на строки, нужно умножать ***справа*** - тут представлено сложение первого столбика, умноженного на 2, с третьим столбиком:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c+2a \\ d & e & f+2d \\ g & h & i+2g \end{pmatrix}$$

Эквивалентность

Если матрицу B можно получить из матрицы A путем применения элементарным преобразований, то такие матрицы называются *эквивалентными*, и обозначаются как $A \sim B$.
Тут можно чуть задуматься над вопросом - не все ли матрицы эквивалентны между собой? И ведь действительно, элементарные преобразования дают неплохую свободу действий - перемещение строк, все арифметические действия... Любую невырожденную матрицу можно получить с помощью элементарных преобразований единичной матрицы, а значит, обратное тоже возможно. Получается все матрицы связаны с собой через единичную матрицу? Грубо говоря - да. На деле, влияет *ранг* матрицы - смотрим билет 47. Совпадение строчного и столбцового ранга. Ранг матрицы.

Когда матрица невырожденная, ее ранг максимальный - тогда их всех можно свести вместе через единичную матрицу (приводим матрицу к единичной, затем из единичной делаем желаемую). Для меньшего ранга все сводятся через другую матрицу и т.д. Например, для матриц 2×2, существует три "класса" эквивалентности - для каждого ранга своя:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицы эквивалентны тогда и только тогда ($\Leftrightarrow$), когда равны их *ранги*.

Пример задачи

Условие: найдите определитель матрицы путем приведения ее к треугольному виду.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение: сначала поменяем 1 и 3 строки местами. Это изменит знак определителя.

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

Зануляем первый столбик: умножаем первую строку на 3 и складываем со второй строкой, и умножаем первую строку на 7 и вычитаем из второй строки.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ -3+1\cdot 3 & 2+8\cdot 3 & 5+2\cdot 3 \\ 7-1\cdot 7 & 1-8\cdot 7 & 4-2\cdot 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 26 & 11 \\ 0 & -55 & -10 \end{vmatrix} =$$

Теперь умножаем вторую строку на $55/26$ и складываем с третьей)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 26 & 11 \\ 0+0\cdot 55/26 & -55+26\cdot 55/26 & -10+11\cdot 55/26 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 26 & 11 \\ 0 & 0 & (-260+11\cdot 55)/26 \end{vmatrix} =$$

Треугольная матрица составлена. Умножаем на элементы главной диагонали, и не забываем про отрицательный знак, что получили в самом начале:

$$\det A = -1\cdot 26\cdot(-260+11\cdot 55)/26 = 260-55\cdot 11 = -345$$