Билинейной формой на линейном пространстве L называется функция b от двух векторов $x, y \in L$, линейная по каждому из аргументов (еще $z \in L$):

$$
\begin{aligned}
b(x+y, z) = b(x, z) + b(y, z), \quad b(\alpha x, y) = \alpha b(x, y) \\
b(x, y+z) = b(x, y) + b(x, z), \quad b(x, \alpha y) = \alpha b(x, y)
\end{aligned}
$$

Как пример, скалярное произведение векторов на плоскости - билинейная форма, в силу свойств скалярного произведения.

Введем базис $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в пространство L, и запишем координаты векторов x и y:

$$
x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad\qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i
$$

Тогда значение билинейной формы будет равно:

$$
b(x, y) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i j_i b(e_i, e_j)
$$

Аналогично с матрицами Грама, значения $b(e_i, e_j)$ не зависят от векторов, а только от выбора базиса, выделим их в отдельные значения

$$
\beta_{ij} = b(e_i, e_j)
$$

Тогда:

$$
b(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} x_i j_i
$$

Числа β_{ij} называются *коэффициентами билинейной формы*, и записываются в матрицу $n \times n$:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

Эта матрица называется *матрицей билинейной формы в базисе* e.
И да, в итоге аналогично с матрицей Грама можно переписать билинейную форму как умножение:

$$b(x, y) = x^T By$$

Из этой формулы видно, что матрица B от билинейной формы определяется однозначно.
При замене базиса матрица B изменится в том числе, но правила изменения матрицы при изменении базиса мы уже знаем: если S - матрица перехода из базиса e в базис e', то:

$$B' = S^T BS$$

Можно эту формулу вывести заново, конечно...
Пусть X и Y - векторы, и в базисах e и e' они записаны как x, y и x', y' соответственно, и S - матрица перехода из e в e': $x = Sx', y = Sy'$. Тогда, как мы делали раньше,

$$b(x, y) = (Sx')^T B(Sy') = (x')^T (S^T BS)y'$$

(мешанина из букв xd)
В отличие от матрицы Грама, которая задавалась скалярным произведением, матрица билинейной формы не обязательно симметричная.

Билинейная форма называется симметричной, если выполняется

$$b(x, y) = b(y, x)$$

Тогда и $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, и $B = B^T$, и вообще жизнь шоколадом просто.
В обратную сторону такое тоже работает: если матрица симметрична, то

$B = B^T$. Применяя трюк, что число можно рассматривать как матрицу 1×1, и ее транспонирование ни на что не влияет, можем записать:

$$b(x, y) = (b(x, y))^T = (x^T B y)^T = y^T B^T x = y^T B x = b(y, x)$$

отчего следует: билинейная форма симметрична тогда и только тогда $(\Leftrightarrow)$, когда ее матрица симметрична.