Условие: найти точки M гиперболы, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$$

расстояние от которых до левого фокуса равно 8.

Решение:
Сначала выпишем a и b из канонического уравнения (знаменатели):
$a = \sqrt{36} = 6$
$b = \sqrt{9} = 3$
Найдем эксцентриситет:

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{36}} = \frac{\sqrt{45}}{6}$$

Расстояние от точки M на гиперболе до фокусов F_1 и F_2 определяется по формулам:

$$r_1 = |a - ex| \qquad r_2 = |a + ex|$$

r_2 принимает минимальное значение при $x < 0$, а значит оно отвечает за левый фокус (ведь он находится в левой половине координатной системы).
Находим x для этого фокуса:

$$8 = |6 + \frac{\sqrt{45}}{6} x|$$

$$\left[\begin{array}{l} 8 = 6 + \frac{\sqrt{45}}{6} x \\ -8 = 6 + \frac{\sqrt{45}}{6} x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{12}{\sqrt{45}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ x = \frac{-14 \cdot 6}{\sqrt{45}} = -\frac{28}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

Теперь, чтобы найти y, нужно просто подставить x в уравнение гиперболы и решить на y.
Однако, одно из этих значений ложно. $4/\sqrt{5} < 6$, поэтому

$$\frac{x^2}{36} < 1 \qquad \text{при } x = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Это значит, что в уравнении гиперболы не существует действительных корней для y. Решаем только для $x = -28/\sqrt{5}$.

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y^2 = 9\left(\frac{x^2}{36} - 1\right)$$

$$y^2 = 9\left(\frac{28^2}{36 \cdot 5} - 1\right) = \frac{28^2}{20} - 9 = \frac{14^2}{5} - 9 = \frac{151}{5}$$

Ответ: $M = \left(-\frac{28}{\sqrt{5}}, \pm\sqrt{\frac{151}{5}}\right)$

Условие: найти точки M гиперболы, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

расстояние от которых до левого фокуса равно 7.

Решение:
Шаг первый: выделить коэффициенты a, b, найти эксцентриситет.
$a = \sqrt{9} = 3$
$b = \sqrt{16} = 4$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{5}{3}$$

Шаг второй: решить уравнение для расстояния до фокуса. Мы выбираем формулу

$$r_2 = |a + ex|$$

по аналогичной логике как в прошлом задании.

$$7 = |3 + \frac{5}{3}x|$$

$$\left[\begin{aligned} 7 &= 3 + \tfrac{5}{3}x \\ -7 &= 3 + \tfrac{5}{3}x \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} x &= \tfrac{14}{5} \\ x &= -6 \end{aligned}\right.$$

Шаг третий: отсеять ложное значение. Обычно это наименьшее значение, и действительно:

$$14/5 < 3 \Rightarrow \frac{x^2}{9} < 1$$

Решаем только для $x = -6$.

$$y^2 = 16\left(\frac{x^2}{9} - 1\right) = 16\left(\frac{36}{9} - 1\right) = 48$$

Ответ: $M = \left(-6; \pm 4\sqrt{3}\right)$

Условие: найти точки M гиперболы, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

расстояние от которых до правого фокуса равно 6.

Решение:
Шаг первый: выделить коэффициенты a, b, найти эксцентриситет.
$a = \sqrt{4} = 2$
$b = \sqrt{9} = 3$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Шаг второй: решить уравнение для расстояния до фокуса. Теперь, т.к. фокус правый, мы берем другую формулу:

$$r_1 = |a - ex|$$

Находим x:

$$6 = |2 - \frac{\sqrt{13}}{2} x|$$

$$\left[\begin{array}{l} 6 = 2 - \frac{\sqrt{13}}{2} x \\ -6 = 2 - \frac{\sqrt{13}}{2} x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{8}{\sqrt{13}} \\ x = \frac{16}{\sqrt{13}} \end{array}\right.$$

Шаг третий: отсеять ложное значение.

$$-8/\sqrt{13} > 2 = 8/\sqrt{16}$$

Ложного значения нет! Считаем для двух значений - эти точки будут лежать на разных ветвях.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y^2 = 9\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)$$

Для $x = -8/\sqrt{13}$:

$$y^2 = 9\left(\frac{64}{4 \cdot 13} - 1\right) = 9\left(\frac{16}{13} - 1\right) = \frac{27}{13}$$

Для $x = 16/\sqrt{13}$:

$$y^2 = 9\left(\frac{16 \cdot 16}{4 \cdot 13} - 1\right) = 9\left(\frac{64}{13} - 1\right) = \frac{51 \cdot 9}{13} = \frac{459}{13}$$

Ответ: $M_1 = (-\frac{8}{\sqrt{13}}, \pm\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{13}})$, $M_2 = (\frac{16}{\sqrt{13}}, \pm\frac{\sqrt{459}}{\sqrt{13}})$