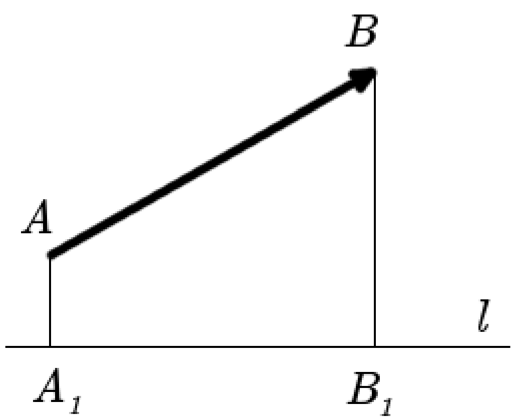
Для начала представим себе мысленную картинку проекции - проекция очень похожа на "тень" объекта. Представьте как источник света где-то далеко светит на наш объект (в нашем случае это вектор). В итоге тень будет падать от объекта строго параллельно лучам света, и проектироваться на какой-то другой объект (это может быть как другой вектор, так и ось).

Теперь два определения, которые в целом различаются лишь проекцией на ось или на другой вектор:

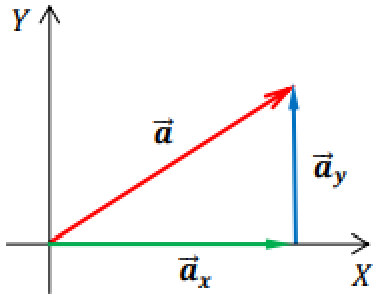
1. Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l называется *число*, равное величине отрезка A_1B_1 оси l, где точки A_1 и B_1 являются проекциями точек A и B на ось l.



2. Проекцией вектора $\overline{a}$ на направление вектора b (на вектор $\overline{b}$) называется число, равное величине проекции вектора $\overline{a}$ на ось, проходящую через вектор b.

При проекции вектора на ось получается *составляющая*. Эта составляющая и есть "тень" вектора, получившаяся при проекции. На рисунке ниже, $\overline{a_x}$ будет составляющей вектора $\overline{a}$ при проекции на ось X, а

$\overline{a_y}$ - составляющей при проекции на Y.



Проекцию вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ обозначают и считают как:

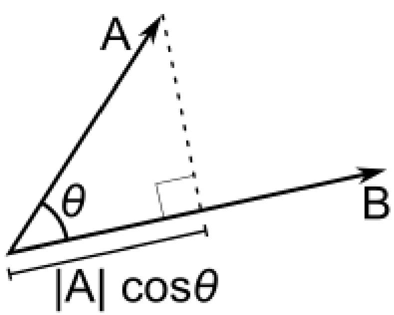
$$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|}$$

Откуда появилась такая формула? Если посмотрите на рисунок выше, то вектор $\overline{AB}$ и ось l имеют какой-то угол между ними, его мы назовем θ. По определению скалярного произведения, оно равно произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\theta$$

(рекомендую вместе с этим билетом сразу прочитать и следующий билет, что идет про скалярное произведение - эти понятия тесно связаны)

На рисунке видно, что A_1B_1 будет равно $|\overline{AB}| \cos\theta$ (ведь это проекция), отсюда и получается наша формула.



По-другому можно представить скалярное произведение как произведение длины проекции на произведение длины другого вектора (см. вопрос 8):

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} \cdot |\overline{b}|$$

Так мы и получаем нашу формулу:

$$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|}$$

Формула удобна, потому что скалярное произведение уже содержит в себе косинус (и следовательно проекцию одного вектора на другой), а посчитать скалярное произведение можно всего лишь по координатам векторов.

Если вектор в некотором базисе записан в координатной форме, то проекция на выбранный базисный вектор будет равна соответствующей координате:

$$\text{пр}_{\overline{e}_i}\overline{a} = a_i$$

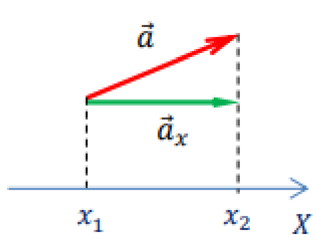
Все следующие свойства довольно очевидные, просто следующие из линейности векторов:

- У одинаковых векторов, очевидно, будут одинаковые проекции на одну ось:

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \text{пр}_l\overline{a} = \text{пр}_l\overline{b} \Leftrightarrow a_i = b_i$$

- Проекция вектора на любую координатную ось равна разности соответствующих координат его конца и начала.

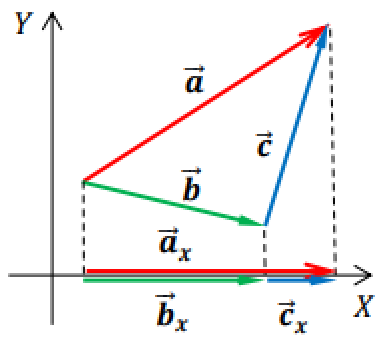
$$\text{пр}_{\overline{e_i}}\overline{AB} = B_i - A_i$$



- Из прошлого свойства вытекает другое: проекция положительна, если составляющая (спроектированный вектор) сонаправлена оси, и отрицательна если она противонаправлена. Ну и конечно, если составляющая равна нулю, то и проекция равна нулю.

- Проекция суммы векторов на определенную ось равна сумме проекций этих векторов на эту ось. Координатно это тоже очевидно, ведь линейные операции с векторами проходят покоординатно:

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} \Leftrightarrow \text{пр}_l\overline{c} = \text{пр}_l\overline{a} + \text{пр}_l\overline{b} \Leftrightarrow c_i = a_i + b_i$$



- Проекция разности точно так же равна разнцие проекций. Разность это же буквально сложение обратного вектора, поэтому почему бы это было не так?

$$\overline{c} = \overline{a} - \overline{b} \Leftrightarrow \text{пр}_l\overline{c} = \text{пр}_l\overline{a} - \text{пр}_l\overline{b} \Leftrightarrow c_i = a_i - b_i$$

- Ну и конечно умножение на скаляр: при умножении/делении вектора на число, его проекция множится/делится на это же число.

$$\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a} \Leftrightarrow \text{пр}_l\overline{c} = \lambda \cdot \text{пр}_l\overline{a} \Leftrightarrow c_i = \lambda \cdot a_i$$

Пример задачи

Условие: найдите проекцию вектора $\overline{a}(3;7)$ на вектор $\overline{b}(2;10)$.
Решение:

$$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|}$$

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 3 \cdot 2 + 7 \cdot 10 = 76$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

$$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{76}{2\sqrt{26}} = \frac{38}{\sqrt{26}} = \frac{19\sqrt{26}}{13}$$