# Quel modèle mathématique fiable me permettrait de calculer l'année où la population du Cameroun sera maximale entre le modèle de Malthus et celui de Verhulst (ou logistique) ?

Exploration en Mathématiques
Identifiant: ktm716
Nombre de pages: 18

# Table des matières

**1 Introduction** **1**

**2 Contexte théorique et résolution de l'équation différentielle de chacun des modèles** **2**
2.1 Modèle de croissance de la population de Malthus . . . . . . . . . . . . . . . . 2
2.2 Modèle de la croissance de la population de Verhulst . . . . . . . . . . . . . . 4

**3 Modélisation de la population du Cameroun** **8**
3.1 Modèle de croissance de la population de Malthus . . . . . . . . . . . . . . . . 8
3.2 Modèle de croissance de la population de Verhulst . . . . . . . . . . . . . . . . 10

**4 Erreur absolue moyenne en poucentage** **13**

**5 Présentation des données et calcul du EAMP** **13**
5.1 Modèle de Malthus . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
5.2 Modèle de Verhulst (ou logistique) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

**6 Interprétation des résultats** **16**

**7 Évaluation** **17**

**8 Conclusion, Limites et extension de l'étude** **18**

**9 Références** **19**

# 1 Introduction

Situé en Afrique Centrale, le Cameroun est un pays peuplé de plus de 28 millions d'habitants en 2023. Sa population ne cesse d'augmenter chaque année passant entre 1960 et 2022 de 5,18 millions d'habitants à 27,91 millions d'habitants soit une augmentation d'environ 439,2%.En parallèle, cette croissance démographique est étroitement liée à l'augmentation du taux d'urbanisation dans le pays. Cette situation a accentuée les problèmes liés aux déficits de réseaux routiers, d'approvisionnement et d'assainissement en eau engendrant d'énormes problèmes sanitaires [1] notamment avec le développement et la propagation de maladies comme le choléra. Ainsi des projections démographiques pourraient être utilisées à plusieurs fins notamment en ce qui concerne les problèmes liés à la croissance démographique du Cameroun. Le but de mon exploration est de trouver la population limite que peut atteindre le Cameroun et quand est ce qu'elle sera atteinte, en comparant le modèle de Malthus et Verhulst et en utilisant les données de la population entre 2007 et 2022. J'utiliserais des notions de mathématiques analyse et approche du niveau supérieur telles que les équations différentielles à l'aide du facteur intégrant, la méthode d'Euler et la série de Maclaurin. J'ai choisi ce sujet due à mon intérêt pour les statistiques de données et les projections car être en mesure de prédire l'évolution de la population d'un pays, tout en prenant en compte les facteurs extérieurs, notamment ceux liés à l'environnement (ressources naturelles) serait extrêmement utile en ce qui concerne les prises de décisions du gouvernement, dans tous ces aspects (économiques, politiques et sociales). Pour m'y prendre je vais :

- Résoudre l'équation différentielle pour chaque modèle.
- Utiliser ses équations afin de modéliser la population du Cameroun en fonction des deux modèles entre 2007 et 2022
- Calculer le pourcentage d'erreur liée à mes calculs pour chaque modèle.
- En dernier lieu comparer les résultats obtenus aux statistiques officielles en vue d'évaluer le modèle qui se rapproche de la réalité, et je l'utiliserai pour trouver l'année où le Cameroun atteint sa population maximale à l'aide de la méthode d'Euler

- Enfin je conclurais, en évaluant les limites et l'extension de mon étude

# 2 Contexte théorique et résolution de l'équation différentielle de chacun des modèles

## 2.1 Modèle de croissance de la population de Malthus

Le modèle de Malthus de la croissance démographique d'une population a été proposé en 1798 par l'économiste anglais Thomas Malthus. Il a décrit une relation entre la croissance exponentielle (ou géométrique)[1] de la population et des ressources disponibles dans un milieu qui selon Malthus augmentent de façon arithmétique. Sachant que les ressources ne peuvent pas supporter un certain niveau de croissance de la population, il y a donc une limite de la répartition des ressources par rapport à l'augmentation d'une population [3]. Cela peut s'expliquer par le fait qu'un pays ne peut cultiver qu'une quantité limitée de nourriture, en fonction de la disponibilité des terres. Selon le modèle l'effectif de la population décroît vers 0 si le taux de mortalité est supérieur au taux de natalité et croît vers l'infini si le taux de natalité est supérieur au taux de mortalité. Le modèle mathématique de Malthus de la croissance de la population est donné par l'équation suivante :

$$\frac{dp}{dt} = \beta P \tag{2.1}$$

avec $\beta > 0$ car la population du Cameroun augmente (voir l'annexe) où :

- $P$ représente la population
- $t$ représente le temps
- $\beta$ représente le taux de croissance ou taux d'accroissement[2]

[1] On parle d'un phénomène à croissance exponentielle (ou géométrique) lorsque la croissance en valeur absolue de la population est proportionnelle à la population existante, c'est-à-dire lorsque le taux de croissance est constant.

[2] Le taux de croissance de la population se calcule en faisant la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité.

Dans l'équation 2.1, l'augmentation de la population est proportionnelle à la population P, et le taux d'accroissement[3] $\beta$. Supposons que nous connaissons ou pouvons estimer la population initiale $P_0$ au temps $t = t_0$ et nous sommes intéressés à estimer la population $P_t$ à un temps futur t. La solution de l'équation 2.1 peut être obtenue de la façon suivante :

$$\frac{1}{p} \times dp = \beta \times dt \tag{2.2}$$

Ensuite, on intègre chacun des côtés pour séparer les variables qui nécessitent $P$ dans tous les termes :

$$\int \frac{1}{p} \times dp = \int \beta \times dt \tag{2.3}$$

$$\ln |P| = \beta t + A_1 \tag{2.4}$$

où $A_1$ est la constante. Maintenant, l'équation obtenue doit être réarrangée afin d'avoir la valeur absolue de $P$ :

$$|P| = e^{\beta t + A_1} \tag{2.5}$$

$$|P| = e^{\beta t} \times e^{A_1} \tag{2.6}$$

$e^{A_1}$ est une constante, ainsi on peut la mettre sous la forme : $e^{A_1} = A$. Sachant que la population est toujours positive, alors $P$ n'a pas besoin de valeur absolue. Finalement on obtient :

$$P = A \times e^{\beta t} \tag{2.7}$$

La forme générale du modèle de Malthus est :

$$P = P_0 \times e^{\beta t} \tag{2.8}$$

où $P_0$ est la population initiale au temps $t = 0$. En comparant le modèle à l'équation obtenue,

[3] L'accroissement total de population est la variation de l'effectif d'une population au cours de l'année, qu'il s'agisse d'une augmentation ou d'une diminution.

à l'issue des calculs ci-dessus, on peut en déduire que $P_0 = A$. Donc :

$$A \times e^{\beta t} = P_0 e^{\beta t} <=> A = P_0 \tag{2.9}$$

## 2.2 Modèle de la croissance de la population de Verhulst

Le modèle de Verhulst de la croissance démographique d'une population, aussi appelé équation logistique a été premièrement publié en 1845 par le statisticien belge Pierre Verhulst. Ce modèle mathématique intègre de façon explicite le concept mathématique de capacité de charge. Les hypothèses qui forment ce modèle sont les suivantes :

- Plus la taille de la population est grande, plus la capacité[4] de l'environnement à supporter la croissance diminue.
- Plus la taille de la population par habitant augmente, moins la nourriture est disponible dans ce milieu : la tendance du taux de natalité[5] est négative et celle du taux de mortalité[6] est positive.
- Les ressources ne sont pas illimitées et que la croissance d'une population se base sur la taille de la population mais aussi la manière dont cette taille n'atteint pas sa population maximale supportable.

Ce modèle peut être dérivé de l'équation à partir de l'équation différentielle du modèle de croissance continue :

$$\frac{dP}{dt} = f(t, P(t)) \tag{2.10}$$

[4]Effectifs maximum d'une population qu'il serait concevable de faire vivre dans un écosystème donné sans réduire irréversiblement la capacité à les entretenir dans le futur.

[5]Le taux de natalité est le rapport du nombre de naissances vivantes de l'année à la population totale moyenne de l'année.

[6]Rapport entre le nombre annuel de décès enregistré pour un âge donné et le nombre de personnes ayant cet âge

Etant donnée que la population est indépendante du paramètre $t$, ce modèle peut aussi être donnée sous la forme suivante :

$$\frac{dP}{dt} = f(P(t)) \tag{2.11}$$

A partir de la série de Maclaurin, on sait que :

$$f(P) = f(0) + f'(0) \times P + \frac{f''(0)}{2!} \times P^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \times P^3 + \dots \tag{2.12}$$

Ainsi pour obtenir le modèle logistique de croissance, le modèle de Malthus de croissance doit être pris en considération :

$$\frac{dP}{dt} = r \times P(t) \tag{2.13}$$

Dans ce modèle, une fonction linéaire $P$ donne une croissance exponentielle pour la solution de $f(P) = r \times P$. La linéarité provient de la croissance malthusienne. Donc :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= r \\ f''(0) &= \tfrac{-r}{K} \end{aligned}$$

Si les termes des ordres supérieures sont ignorés alors l'équation différentielle du modèle logistique est donnée par :

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{2.14}$$

Où :

- $P$ représente la population
- $t$ représente le temps
- $r$ représente le taux de croissance de la population
- $K$ représente la population maximale supportable[7]

[7] La population maximale qui peut être contenue dans un milieu.

Le modèle peut être résolu en séparant les variables. D'une part, l'équation a besoin d'être simplifiée sous la forme :

$$\frac{dP}{dt} = rP - \frac{rP^2}{K} \tag{2.15}$$

$$\frac{dP}{dt} - rP = -\frac{rP^2}{K} \tag{2.16}$$

Multiplions les deux côtés par $-P^{-2}$, on obtient :

$$-P^{-2} \times \frac{dP}{dt} + rP^{-1} = \frac{r}{K} \tag{2.17}$$

Soit $u = P^{-1}$, donc :

$$\frac{du}{dP} = -1 \times P^{-2} = -P^{-2} \tag{2.18}$$

$$du = -P^{-2}dp \tag{2.19}$$

Donc :

$$\frac{du}{dt} + ru = \frac{r}{K} \tag{2.20}$$

Soit le facteur intégrant $I = e^{\int rdt}$. En multipliant $I$ dans chacun des côtés on obtient :

$$\frac{du}{dt}I + ruI = \frac{r}{K} \times I \tag{2.21}$$

$$\frac{du}{dt}e^{\int rdt} + \frac{d(e^{\int rdt})}{dt}u = \frac{re^{\int rdt}}{K} \tag{2.22}$$

$$\frac{d(e^{\int rdt} \times u)}{dt} = \frac{r \times e^{\int rdt}}{K} \tag{2.23}$$

$$\frac{d(e^{rt} \times u)}{dt} = \frac{r \times e^{rt}}{K} \tag{2.24}$$

L'équation peut être résolue en intégrant de chaque côté :

$$\int \frac{d(e^{rt} \times u)}{dt} = \int \frac{r \times e^{rt}}{K} \tag{2.25}$$

$$e^{rt} \times u = \frac{r}{K} \times \frac{e^{rt}}{r} + A \tag{2.26}$$

En multipliant chaque côté par $e^{-rt}$, on obtient :

$$u(t) = \frac{1}{K} + Ae^{-rt} \tag{2.27}$$

On sait que $u(t) = \frac{1}{P(t)}$, donc :

$$\frac{1}{P(t)} = \frac{1}{K} + A \times e^{-rt} \tag{2.28}$$

$$P(t) = \frac{1}{\frac{1}{K} + A \times e^{-rt}} = \frac{1}{\frac{1+K(A \times e^{-rt})}{K}} \tag{2.29}$$

$$P(t) = \frac{K}{1 + K(A \times e^{-rt})} \tag{2.30}$$

En appliquant la condition initiale qui donne la formule exacte du modèle de croissance logistique :

$$A = \frac{1}{P_0} - \frac{1}{K} = \frac{K - P_0}{K \times P_0} \tag{2.31}$$

En remplaçant la valeur de $A$ dans l'équation 2.30 :

$$P(t) = \frac{K}{1 + K\left(\frac{K-P_0}{K \times P_0} \times e^{-rt}\right)} \tag{2.32}$$

$$P(t) = \frac{K}{1 + \frac{(K-P_0)(e^{-rt})}{P_0}} \tag{2.33}$$

Finalement, l'équation du modèle de croissance logistique est donnée par :

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0}\right) \times e^{-rt}} \tag{2.34}$$

# 3 Modélisation de la population du Cameroun

## 3.1 Modèle de croissance de la population de Malthus

Soit la solution de l'équation différentielle du modèle mathématique de Malthus : $P(t) = P_0 \times e^{\beta t}$. Soit $t = t_0$, en l'an 2007 qui est notre année de départ; $P_0 = 18730000$. On obtient : $P(t) = 18730000e^{\beta t}$. Ensuite nous devons calculer le paramètre restant à savoir le taux d'accroissement $\beta$ entre 2007 et 2022 en utilisant la formule $\beta = \frac{\ln(P(t))-\ln(P_0)}{t}$. Pour exemple, sachant que $P_0 = 18730000$ et $t_{2007} = t_0 = 0$, on doit commencer à calculer $\beta$ à partir de 2008, soit entre 2007 et 2008 avec $t_{2008} = t_1 = 1$. On obtient :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\ln(P(t_1)) - \ln(P_0)}{t_1} \text{ où } P_{2007} = P_1 = 18730000 \\ &= \frac{\ln(19250000) - \ln(18730000)}{1} \\ &= 0,027384544 \approx 0,0274 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Cependant, cette méthode ne me permettra pas d'obtenir la meilleure valeur possible du taux d'accroissement $\beta$ afin d'effectuer les prédictions de la population du Cameroun avec précision. Ainsi je vais utiliser la méthode moindres carrées[8] pour obtenir la valeur du taux d'accroissement $\beta$ la plus optimale.

Soit $P(t) = P_0e^{\beta t}$, appliquons le logarithme des deux côtés :

$$\log(P(t)) = \log(P_0e^{\beta t}) = \log(P_0) + \log(e^{\beta t}) = \log(P_0) + \beta t \times \log(e) \tag{3.2}$$

[8]La méthode des moindres carrés est une notion mathématique permettant d'apporter à un nombre d'éléments susceptibles de comporter des erreurs un ajustement afin d'obtenir des données proches de la réalité.

Considérons les variables suivantes :

$$y = P(t); Y = \log(P(t)) = \log(y); A = \log(P_0); \beta \times \log(e) = B \tag{3.3}$$

Soient les équations suivantes :

$$\sum Y = nA + B \sum x \tag{3.4}$$

$$\sum xY = A \sum x + B \sum x^2 \tag{3.5}$$

On va s'aider du nombre de population du Cameroun entre 2007 et 2022[2] afin de calculer les valeurs des variables dans le tableau ci-dessous nécessaire à la résolution des équations 3.4 et 3.8.

| Année | $x = t$ | $y = P(t)$ (en millions) | $Y = \log(P(t))$[9] | $x^2 = t^2$ | $xY = t \ln P(t)$ [10] |
|---|---|---|---|---|---|
| 2007 | 0 | 18,73 | 7,272 | 0 | 0 |
| 2008 | 1 | 19,25 | 7,284 | 1 | 7,284 |
| 2009 | 2 | 19,79 | 7,296 | 4 | 14,592 |
| 2010 | 3 | 20,34 | 7,308 | 9 | 21,924 |
| 2011 | 4 | 20,91 | 7,320 | 16 | 29,28 |
| 2012 | 5 | 21,49 | 7,332 | 25 | 36,61 |
| 2013 | 6 | 22,08 | 7,344 | 36 | 44,064 |
| 2014 | 7 | 22,68 | 7,356 | 49 | 51,492 |
| 2015 | 8 | 23,01 | 7,362 | 64 | 58,896 |
| 2016 | 9 | 23,71 | 7,375 | 81 | 66,375 |
| 2017 | 10 | 24,39 | 7,387 | 100 | 73,87 |
| 2018 | 11 | 25,08 | 7,399 | 121 | 81,389 |
| 2019 | 12 | 25,78 | 7,411 | 144 | 88,932 |
| 2020 | 13 | 26,49 | 7,423 | 169 | 99,499 |
| 2021 | 14 | 27,20 | 7,435 | 196 | 104,09 |
| 2022 | 15 | 27,91 | 7,446 | 225 | 111,69 |
| $\sum$ | $\sum x = 120$ | | $\sum Y = 117,74$ | $\sum x^2 = 1240$ | $\sum xY = 886,987$ |

Table 1: Données permettant de calculer $\beta$

Résolvons les équations 3.4 et 3.8. En utilisant les données obtenues du tableau ci-

[9] Calculé à l'aide de la calculatrice graphique Casio à 4 chiffres significatifs

[10] Calculé à l'aide de la calculatrice graphique Casio où le résultat varie entre 4 et 5 chiffres significatifs

dessous, on obtient le système d'équation suivant :

$$117,74 = 16A + 120B \tag{3.6}$$

$$886,987 = 120A + 1240B \tag{3.7}$$

Nous trouvons les résultats suivants [11] :
$A = \log(P_0) = \frac{988979}{136000}$ ; $B = \beta \log(e) = \frac{3937}{340000}$
Déterminons $P_0$ et $\beta$ :

$$\begin{aligned} A &= \frac{988979}{136000} & B &= \frac{3937}{340000} \\ \log(P_0) &= \frac{988979}{136000} & \beta \log(e) &= \frac{3937}{340000} \\ P_0 &= 10^{\frac{988979}{136000}} & \beta &= \frac{3937}{340000 \times \log(e)} \end{aligned}$$

$P_0 \approx 18730000$ habitants et $\beta \approx 0,026663$
On obtient la modélisation suivante selon le modèle de Malthus de la croissance démograpique du Cameroun : $P(t) = 18730000e^{0,026663t}$.

## 3.2 Modèle de croissance de la population de Verhulst

Soit l'équation différentielle du modèle mathématique de Verhulst : $P(t) = \frac{K}{1+(\frac{K}{P_0}-1)\times e^{-rt}}$.
Afin de pouvoir modéliser la population du Cameroun selon le modèle logistique, il nous faudrait d'une part trouver les expressions des paramètres r, soit le taux de croissance de la population et k la population maximale supportable. Nous utiliserons une méthode différente de la régression linéaire pour ajuster les paramètres $r$ et $K$ aux données.
Sachant que $P_0$ est la population au temps $t = 0$; $P_T$ au temps $t = T$ et $P_{2T}$ au temps $t = 2T$.

[11] Calculé à l'aide de la calculatrice graphique Casio

A partir de l'équation 2.34 :

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) \times e^{-rt}}$$

$$P(t) = \frac{K}{1 + \frac{Ke^{-rt}}{P_0} - e^{-rt}}$$

$$1 + \frac{Ke^{-rt}}{P_0} - e^{-rt} = \frac{K}{P(t)}$$

$$1 - e^{-rt} = \frac{K}{P(t)} - \frac{Ke^{-rt}}{P_0}$$

$$1 - e^{-rt} = K\left(\frac{1}{P(t)} - \frac{e^{-rt}}{P_0}\right)$$

$$\frac{1}{K}\left(1 - e^{-rt}\right) = \frac{1}{P(t)} - \frac{e^{-rt}}{P_0} \tag{3.8}$$

Ainsi pour $t = T$ et $t = 2T$, nous pouvons en déduire que :

$$\frac{1}{K}\left(1 - e^{-rT}\right) = \frac{1}{P_T} - \frac{e^{-rT}}{P_0} \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{K}\left(1 - e^{-2rT}\right) = \frac{1}{P_{2T}} - \frac{e^{-2rT}}{P_0} \tag{3.10}$$

En divisant l'équation 3.10 par l'équation 3.9 pour éliminer K, on obtient :

$$\frac{1 - e^{-2rT}}{1 - e^{-rT}} = \frac{\frac{1}{P_{2T}} - \frac{e^{-2rT}}{P_0}}{\frac{1}{P_T} - \frac{e^{-rT}}{P_0}} \tag{3.11}$$

$$1 + e^{-rt} = \frac{P_0\left(P_{2T} - P_T\right)}{P_{2T}\left(P_T - P_{2T}\right)} \tag{3.12}$$

Ainsi :

$$e^{-rT} = \frac{P_0\left(P_{2T} - P_T\right)}{P_{2T}\left(P_{2T} - P_0\right)} \tag{3.13}$$

$$-rT = \ln\left(\frac{P_0\left(P_{2T} - P_T\right)}{P_{2T}\left(P_{2T} - P_0\right)}\right) \tag{3.14}$$

$$rT = \ln\left(\frac{P_{2T}\left(P_{2T} - P_0\right)}{P_0\left(P_{2T} - P_T\right)}\right) \tag{3.15}$$

$$r = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{P_{2T}\left(P_{2T} - P_0\right)}{P_0\left(P_{2T} - P_T\right)}\right) \tag{3.16}$$

Si l'on remplace l'expression de r dans l'équation 3.16 dans l'équation 2.34 :

$$K = \frac{P_T\left(P_0 P_T - 2P_0 P_{2T} + P_T P_{2T}\right)}{P_{T^2} - P_0 P_{2T}} \tag{3.17}$$

D'autre part, pour obtenir les valeurs de $r$ et $K$, nous pouvons choisir des valeurs de $t$ compris entre 0 et 15 de sorte à ce que $T$ et $2T$ soient dans l'intervalle. Soit $t = T = 7$ et $t = 2T = 14$. En référence au tableau 1 les valeurs correspondantes de $P_T$ et $P_{2T}$ sont : $P(7) = P_7 =$ 22 680 000 habitants $P(14) = P_{14} =$ 27 200 000 habitants avec $P_0 = 18730000$ habitants. En substituant les valeurs de $P_0$; $P_7$ et $P_{14}$ dans l'équation 3.17, on obtient :

$$K = \frac{22680000\left(18730000 \times 22680000 - 2 \times 18730000 \times 27200000 + 22680000 \times 2720000\right)}{22680000^2 - 18730000 \times 27200000}$$

$$K = 104875664,2 \approx 104875664\ habitants$$

A partir de l'équation 3.16 et des valeurs de $P_0$, $P_T$ et $P_{2T}$, on obtient :

$$r = \frac{1}{7}\ln\left(\frac{27200000\left(22680000 - 18730000\right)}{18730000\left(27200000 - 22680000\right)}\right)$$

$$r \approx 0,034042$$

On obtient la modélisation suivante selon le modèle logistique de la croissance démographique du Cameroun :

$$P(t) = \frac{104875664}{1 + \left(\frac{104875664}{18730000} - 1\right) \times e^{-0,034042t}} = \frac{104875664}{1 + \left(\frac{86145664}{18730000}\right) \times e^{-0,034042t}}$$

# 4 Erreur absolue moyenne en poucentage

L'erreur absolue moyenne en pourcentage (EAMP) est une mesure de l'exactitude de la prédiction d'une méthode de prédiction en statistique. On peut la mesurer à l'aide de la méthode suivante :

$$EAMP = \frac{1}{N} \sum \left| \frac{X_t - X}{X_t} \right| \times 100 \tag{4.1}$$

# 5 Présentation des données et calcul du EAMP

## 5.1 Modèle de Malthus

| Année | $t$ | Population actuelle ($X_t$) | Population prédite selon le modèle de Malthus | $\lvert X_t - X \rvert$ (différence[12] absolue) | $\frac{\lvert X_t - X \rvert}{X_t} \times 100$ (pourcentage d'erreur absolue)[13] |
|---|---|---|---|---|---|
| 2007 | 0 | 18 730 000 | 18 730 000 | 0 | 0% |
| 2008 | 1 | 19 250 000 | 19 236 115 | 13885 | 0,072% |
| 2009 | 2 | 19 790 000 | 19 755 907 | 34093 | 0,172% |
| 2010 | 3 | 20 340 000 | 20 289 744 | 50256 | 0,247% |
| 2011 | 4 | 20 910 000 | 20 838 006 | 71994 | 0,344% |
| 2012 | 5 | 21 490 000 | 21 401 083 | 88917 | 0,414% |
| 2013 | 6 | 22 080 000 | 21 979 375 | 100625 | 0,456% |
| 2014 | 7 | 22 680 000 | 22 573 294 | 106706 | 0,470% |
| 2015 | 8 | 23 010 000 | 23 183 261 | 173261 | 0,753% |
| 2016 | 9 | 23 710 000 | 23 809 711 | 99711 | 0,421% |
| 2017 | 10 | 24 390 000 | 24 453 088 | 63088 | 0,259% |
| 2018 | 11 | 25 080 000 | 25 113 851 | 33851 | 0,135% |
| 2019 | 12 | 25 780 000 | 25 792 468 | 12468 | 0,0484% |
| 2020 | 13 | 26 490 000 | 26 489 423 | 577 | 0,00218% |
| 2021 | 14 | 27 200 000 | 27 205 210 | 5210 | 0,0192% |
| 2022 | 15 | 27 910 000 | 27 940 340 | 30340 | 0,109% |

Table 2: Comparaison entre la population actuelle du Cameroun et celle prédite selon le modèle de Malthus entre 2007 et 2022

A l'aide du tableau 2 et de l'équation 4.1, on peut déduire que :

$$EAMP = \frac{0 + 0,072 + 0,172 + 0,247 + 0,344 + 0,414 + 0,456 + 0,470 + 0,753}{16} + \frac{+0,421 + 0,259 + 0,135 + 0,0484 + 0,00218 + 0,0192 + 0,109}{16}$$

$$EAMP \approx 0,245\% \tag{5.1}$$

[12] Calculé à l'aide de la calculatrice scientifique Casio

[13] Calculé à l'aide de la calculatrice scientifique Casio à 3 chiffres significatifs

## 5.2 Modèle de Verhulst (ou logistique)

| Année | $t$ | Population actuelle ($X_t$) | Population prédite selon le modèle logistique | $\|X_t - X\|$ (différence[14] absolue) | $\frac{\|X_t-X\|}{X_t} \times 100$ (pourcentage d'erreur absolue) [15] |
|---|---|---|---|---|---|
| 2007 | 0 | 18 730 000 | 18 730 000 | 0 | 0% |
| 2008 | 1 | 19 250 000 | 19 259 447 | 9477 | 0,0492% |
| 2009 | 2 | 19 790 000 | 19 800 481 | 10481 | 0,053% |
| 2010 | 3 | 20 340 000 | 20 353 070 | 13070 | 0,0643% |
| 2011 | 4 | 20 910 000 | 20 917 289 | 7289 | 0,0349% |
| 2012 | 5 | 21 490 000 | 21 493 171 | 3171 | 0,0148% |
| 2013 | 6 | 22 080 000 | 22 080 738 | 738 | 0,00334% |
| 2014 | 7 | 22 680 000 | 22 679 999 | 1 | 0,00000441% |
| 2015 | 8 | 23 010 000 | 23 290 949 | 280949 | 1,22% |
| 2016 | 9 | 23 710 000 | 23 913 568 | 203568 | 0,856% |
| 2017 | 10 | 24 390 000 | 24 547 823 | 157823 | 0,647% |
| 2018 | 11 | 25 080 000 | 25 193 665 | 113665 | 0,453% |
| 2019 | 12 | 25 780 000 | 25 851 031 | 71031 | 0,276% |
| 2020 | 13 | 26 490 000 | 26 519 841 | 29841 | 0,113% |
| 2021 | 14 | 27 200 000 | 27 199 998 | 2 | 0,00000735% |
| 2022 | 15 | 27 910 000 | 27 891 390 | 18610 | 0,0667% |

Table 3: Comparaison entre la population actuelle du Cameroun et celle prédite selon le modèle logistique entre 2007 et 2022

A l'aide du tableau 3 et de la section 4.2, on peut en déduire que :

$$EAMP = \frac{0 + 0,0492 + 0,0530 + 0,0643 + 0,0349 + 0,0148 + 0,00334 + 0,00000441}{16}$$
$$+ \frac{1,22 + 0,858 + 0,647 + 0,453 + 0256 + 0,113 + 0,00000735 + 0,0667}{16}$$

$$EAMP \approx 0,241\%$$

[14]Calculé à l'aide de la calculatrice scientifique Casio

[15]Calculé à l'aide de la calculatrice scientifique Casio à 3 chiffres significatifs

# 6 Interprétation des résultats

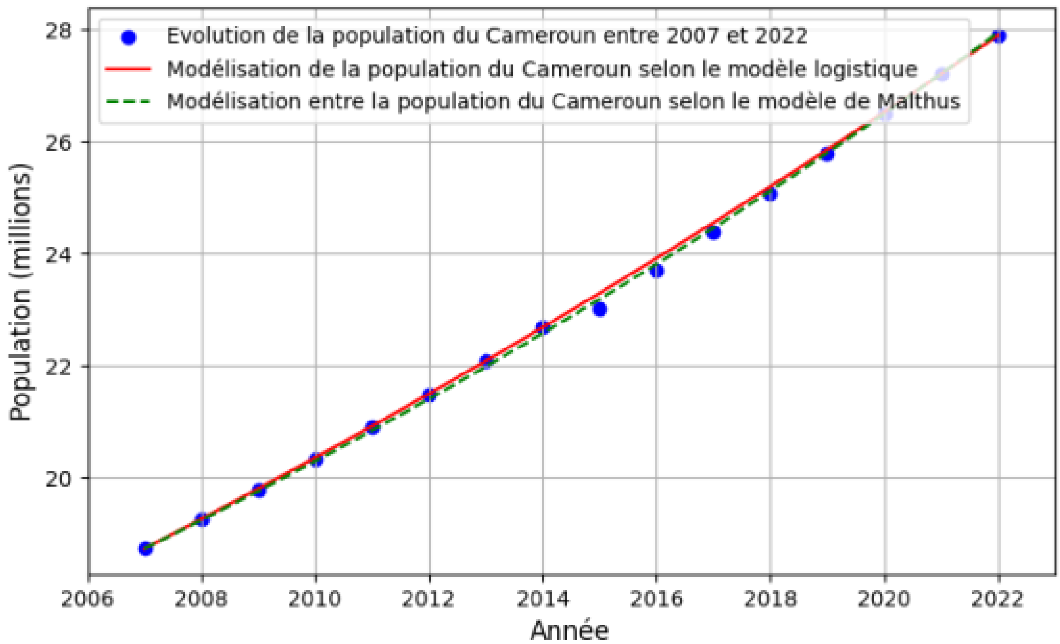


Figure 1: Population du Cameroun et modélisation selon deux modèles entre 2007 et 2022 (fait avec python)

Comme on peut le voir sur la figure 1, les deux modèles sont très proches de l'évolution de la population du Cameroun entre 2007 et 2022, représentée par un nuage de point en bleu, ce qui est justifiable par une très faible erreur absolue moyenne en pourcentage.

A l'aide des tableaux 1 et 2, nous avons pu calculer l'erreur en pourcentage, et nous avez trouve grâce aux calculs que la méthode logistique est la plus fiable car son erreur absolue moyenne en pourcentage est plus faible que pour le modèle malthusien.

En évaluant la théorie qui englobe les différents modèles, on peut en déduire que le modèle de Malthus est moins pertinent car malgré que le taux de natalité est supérieur au taux de mortalité, la population ne peut va pas forcément continuer à augmenter indéfiniment. Des facteurs tels que l'espace ou la situation sociale et économique du pays peuvent handicaper cette croissance. Ainsi, je vais utiliser le modèle logistique afin d'estimer l'année où la population du Cameroun va atteindre la population limite. Au vue de nos calculs précédents, nous connaissons la valeur des différents coefficients du modèle à savoir : $r = 0,034042$ et $K = 104875664$ habitants. Nous allons utiliser la méthode implicite d'Euler :

$$f(P(t)) = 0,034042P\left(1 - \frac{P}{104875664}\right) = 0,034042P - \frac{0,034042P^2}{104875664} \tag{6.1}$$

Sachant que t est incrémenté de 1, on obtient :

$$t_{n+1} = t_n + 1 \tag{6.2}$$

$$P_{n+1} = P_n + f(P_n(t)) = P_n + 0,034042P_n - \frac{0,034042P^2}{104875664} \tag{6.3}$$

Les conditions intiales sont : $t_0 = 0$ et $P_0 = 18730000$. A l'aide de la calculatrice graphique, j'ai trouvé $t = 666$. Ainsi, à l'aide du modèle logistique, l'année durant laquelle, la population du Cameroun atteindra sa population limite est à l'an $2007 + 666 = 2673$.

## 7 Évaluation

Les modèles de Malthus de Verhulst de croissance de la population sont des modèles théoriques qui peuvent être aisément manipulés afin de s'ajuster aux données, ce qui les rend donc très précis et efficace pour les prédictions de la population sur le long terme. Ils décrivent également une forte corrélation entre le temps $t$ en année et le nombre d'individus $P$. Cependant, ces modèles restent hypothétiques, et ils ne considèrent pas les facteurs externes qui peuvent influencer la population. Cela peuvent s'apercevoir dans les tableaux 2 et 3, l'erreur en pourcentage était très inconsistant, notamment car le taux de croissance de la population du Cameroun n'est pas constant comme le soutient les deux modèles, il peut varier. De ce fait souvent le pourcentage d'erreur est élevé ou bas. La méthode de calcul que j'ai utilisé dans un premier temps pour trouver les valeurs de $r$ et $K$ présente des irrégularités, notamment car j'aurai pu utiliser d'autres valeurs de $P_T$ et $P_{2T}$ ce qui aurai influencer mes résultats. De plus malgré que le modèle logistique est plus fiable, le calcul de la population maximale reste hypothétique et aurait pu changer si plus de données avaient été utilisées.

## 8 Conclusion, Limites et extension de l'étude

L'objectif de mon exploration était de savoir quel modèle serait le plus adapté et fiable afin d'estimer l'année où le Cameroun atteindra sa population limite. A travers mon exploration, j'ai pu atteindre mon objectif en utilisant mes compétences en résolution d'équation différentiel et statistique. Des méthodes nouvelles et des technologies ont été utilisé me permettant d'appuyer mon raisonnement notamment par l'utilisation de la notion d'erreur absolue moyenne en pourcentage et la computation graphique de différentes fonctions, notamment la population actuelle du Cameroun, la population prédite selon le modèle logistique et la population prédite selon le modèle de Malthus entre 2007 et 2022 (voir figure 1) à l'aide d'un programme python. L'une des limites de mon exploration était d'une part la recherche de données précises notamment celles qui concernent la taille démographie de la population du Cameroun. D'autre part, mes modèles auraient pu être plus précis dans le cas si j'avais utilisé un intervalle plus long pour obtenir une plus grande quantité de données de la taille de la population du Cameroun. Avec la connaissance que j'ai obtenue à partir de mes recherches, je peux effectuer des prévisions de la taille de la population du n'importe quel pays, comme la Cameroun étudié dans cette exploration. Elle confirme mes intérêts initialement énoncés dans l'introduction, à savoir en statistique et analyse mathématique. Mon sujet aurait pu être étendu à comparer les modèles de Malthus et logistique en examinant les prévisions de la population du Cameroun en considérant des facteurs tels que la taux de natalité, de mortalité, etc. en les comptabilisant comme des indices.

## 9 Références


[1] Dieudonné. *Urbanisation et développement durable au Cameroun*. 2018. URL: https://calenda.org/435568#:~:text=Comme%20faits%20majeurs%20et%20r%C3%A9currents,cr%C3%A9e%20d%E2%80%99%C3%A9normes%20probl%C3%A8mes%20sanitaires. Accédé le 26-09-2023.

[2] DonnéesMondiales. *Croissance de la population du Cameroun*. https://www.donneesmondiales.com/afrique/cameroun/croissance-population.php. Accédé le 27-09-2023.

[3] StudySmarter. *Malthusian Theory: Population; Examples*. https://www.studysmarter.co.uk/explanations/human-geography/population-geography/malthusian-theory/. Accédé le 26-09-2023.