Hoofdstuk 7 – Kinetica van een star lichaam in een plat vlak: arbeid en energie

Eric Demeester

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

Overzicht H1 t.e.m. H8

H1	–	H2	–	H3	–	H4	→ Puntmassa's, waarvoor oriëntatie niet van belang is
H5	–	H6	–	H7	–	H8	→ Starre lichamen, waarvoor oriëntatie van belang is

Kinematica

$v = ds/dt$

$a = dv/dt$

$a \cdot ds = v \cdot dv$

Tweede wet van Newton

$\Sigma F = m \cdot a$

- momentopname

Arbeid en energie

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **plaats**:

$\Sigma \int F \cdot ds = m \cdot v_2^2 / 2 - m \cdot v_1^2 / 2$

- 2 discrete plaatsen
- Enkel conservatieve krachten => behoud van mechanische energie: $T1 + V1 = T2 + V2$

Stoot en hoeveelheid van beweging

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **tijd** en gebruik $a = dv/dt$:

$\Sigma \int F \cdot dt = m \cdot v_2 - m \cdot v_1$

- 2 discrete tijdstippen
- Behoud van hoev. v. beweging:
  - Geen externe stoten
  - Botsingen en explosies

$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta}/dt$

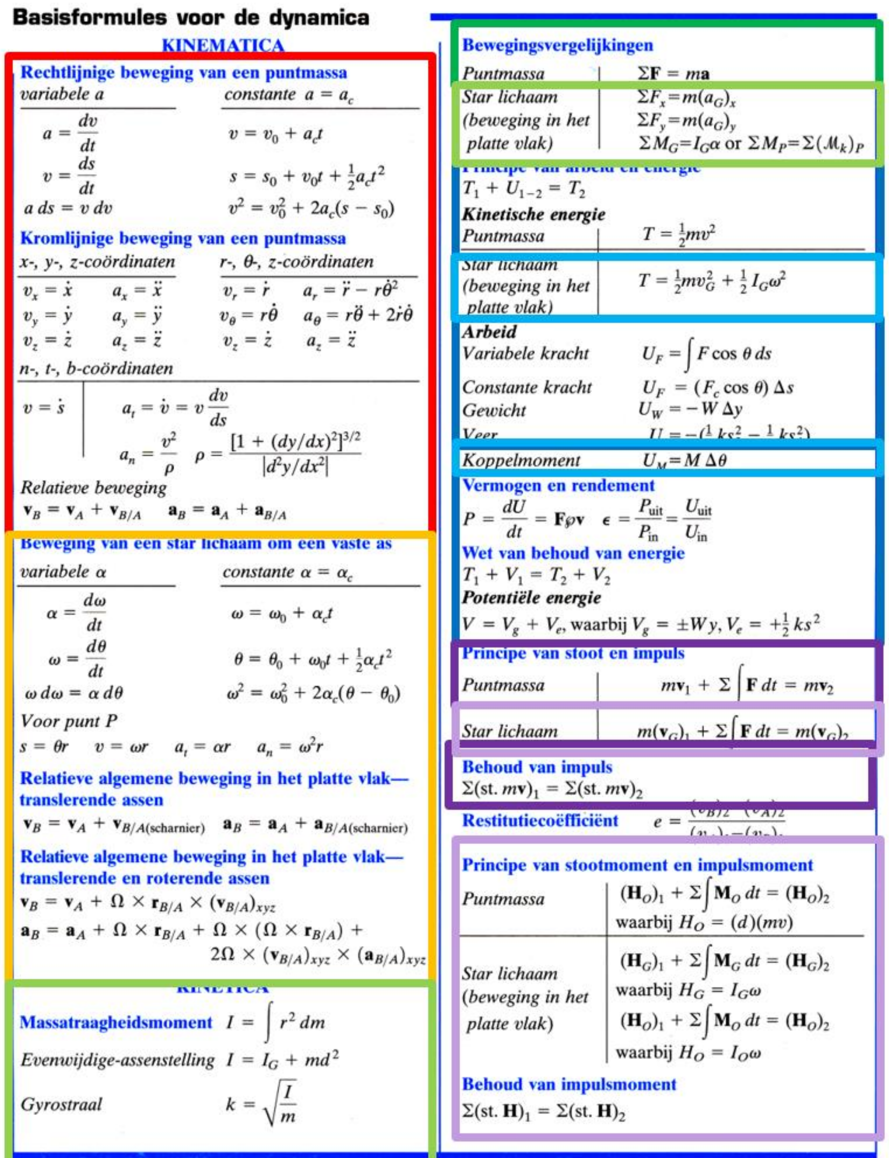
$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$

$\alpha \cdot d\theta = \omega \cdot d\omega$

$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{B|A}$

$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{B|A} - \omega^2 \boldsymbol{r}_{B|A}$

Overzicht H1 t.e.m. H8



Basisformules voor de dynamica

KINEMATICA

H1

Rechtlijnige beweging van een puntmassa

variabele a	constante $a = a_c$
$a = \dfrac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a\,ds = v\,dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Kromlijnige beweging van een puntmassa

x-, y-, z-coördinaten		r-, θ-, z-coördinaten	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

n-, t-, b-coördinaten

$v = \dot{s}$ $\quad a_t = \dot{v} = v\dfrac{dv}{ds}$

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \quad \rho = \dfrac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

Relatieve beweging

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

H5

Beweging van een star lichaam om een vaste as

variabele α	constante $\alpha = \alpha_c$
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

Voor punt P

$s = \theta r \quad v = \omega r \quad a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{scharnier})} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{scharnier})}$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende en roterende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \times (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

KINETICA

H6

Massatraagheidsmoment $I = \int r^2\,dm$

Evenwijdige-assenstelling $I = I_G + md^2$

Gyrostraal $k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$

H2

Bewegingsvergelijkingen

Puntmassa	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

H6

Principe van arbeid en energie

$T_1 + U_{1-2} = T_2$

Kinetische energie

Puntmassa	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

H7

Arbeid

Variabele kracht	$U_F = \int F\cos\theta\,ds$
Constante kracht	$U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$
Gewicht	$U_W = -W\,\Delta y$
Veer	$U = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$
Koppelmoment	$U_M = M\,\Delta\theta$

H3

Vermogen en rendement

$P = \dfrac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \quad \epsilon = \dfrac{P_{\text{uit}}}{P_{\text{in}}} = \dfrac{U_{\text{uit}}}{U_{\text{in}}}$

Wet van behoud van energie

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potentiële energie

$V = V_g + V_e$, waarbij $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

H4

Principe van stoot en impuls

Puntmassa	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$
Star lichaam	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Behoud van impuls

$\Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_2$

Restitutiecoëfficiënt $e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

H8

Principe van stootmoment en impulsmoment

Puntmassa	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = (d)(mv)$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$ waarbij $H_G = I_G\omega$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = I_O\omega$

Behoud van impulsmoment

$\Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_2$

UHASSELT KU LEUVEN

Even recapituleren …

- Het principe van arbeid en energie gebruiken we voor vraagstukken waarbij kracht, snelheid en (hoek)verplaatsing een rol spelen;

- => wat is kinetische energie voor de beweging van starre lichamen in het platte vlak?

$$T = \frac{m \cdot v_G^2}{2} + \frac{I_G \cdot \omega^2}{2}$$

- => wat is de arbeid van een moment? De arbeid van krachten hadden we reeds in H3 besproken (let op tekens!);

$$U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M(\theta) \cdot d\theta$$

7.5 Behoud van energie

- Eenvoudiger dan het principe van arbeid en energie; maar enkel toepasbaar indien het krachtenstelsel uitsluitend bestaat uit conservatieve krachten

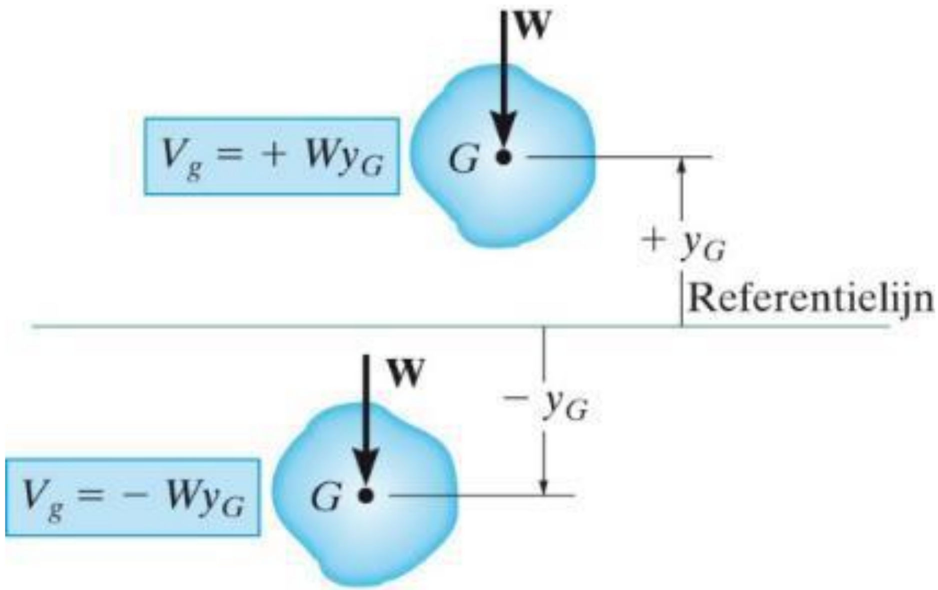
- Conservatieve krachten? = krachten waarvan de arbeid enkel afhangt van de begin- en eindpositie van het lichaam, en onafhankelijk is van de bewegingsbaan

- Arbeid van een conservatieve kracht = verschil in potentiële energie van het lichaam

7.5 Behoud van energie

- Potentiële energie V_G van de zwaartekracht:

$$\boxed{V_G = W \cdot y_G} = m \cdot g \cdot y_G$$

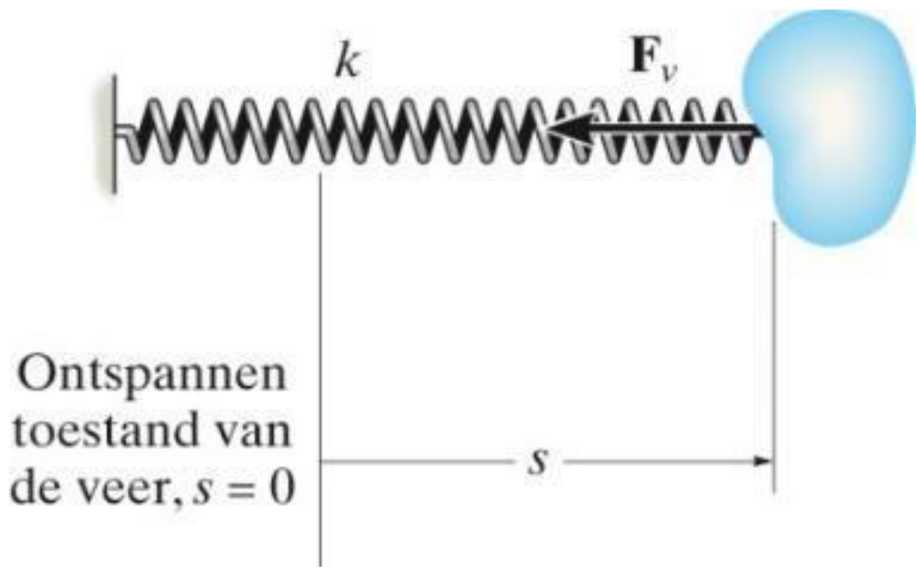


Potentiële energie van de zwaartekracht

7.5 Behoud van energie

- Potentiële energie V_e bij elastische vervorming van een veer:

$$\boxed{V_e = +\frac{1}{2}ks^2}$$



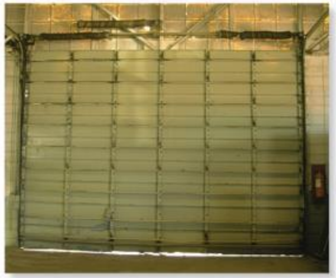
7.5 Behoud van energie

- Indien er zowel een zwaartekracht als een veerkracht wordt uitgeoefend:

$$\boxed{V = V_G + V_e}$$

$$T_1 + V_1 + \left(\sum U_{1-2}\right)_{niet\ conservatieve\ krachten} = T_2 + V_2$$

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$$



7.5 Behoud van energie – analyseprocedure (1/2)

- De vergelijking van behoud van energie wordt gebruikt om vraagstukken op te lossen waarin snelheid, verplaatsing en conservatieve krachtensystemen voorkomen. Aangeraden analyseprocedure:

Potentiële energie

- Teken 2 schema's met het voorwerp in zijn begin- en eindpositie
- Bepaal een vaste horizontale referentielijn voor wanneer het zwaartepunt G een verticale verplaatsing ondergaat
- Bepaal geometrisch de verplaatsing y_G van het zwaartepunt G alsook de uitrekking/indrukking *s* van de aanwezige veren.
- Bereken de potentiële energie

$$V_G = W \cdot y_G \qquad V_e = +\frac{1}{2}ks^2 \qquad V = V_G + V_e$$

7.5 Behoud van energie – analyseprocedure (2/2)

Kinetische energie

- De kinetische energie van het lichaam bestaat uit 2 delen:
  - Kinetische translatie-energie: $T = \dfrac{m \cdot v_G^2}{2}$
  - Kinetische rotatie-energie: $T = \dfrac{I_G \cdot \omega^2}{2}$
- Kinematische schema’s voor snelheid kunnen handig zijn voor het bepalen van het verband tussen v_G en ω.

Behoud van energie

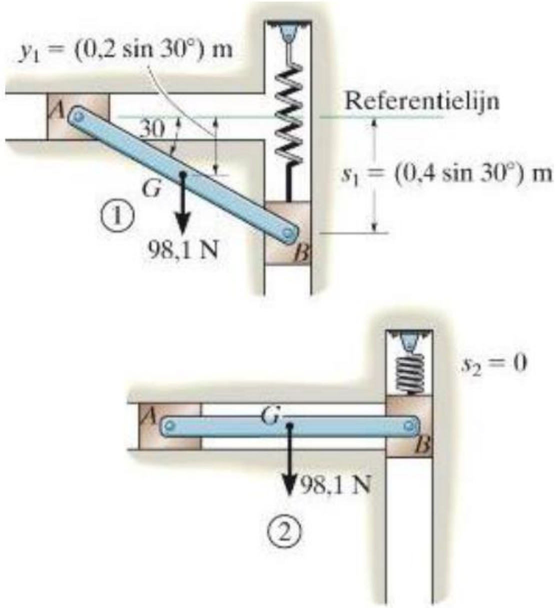
- Pas de vergelijking van het behoud van energie toe:

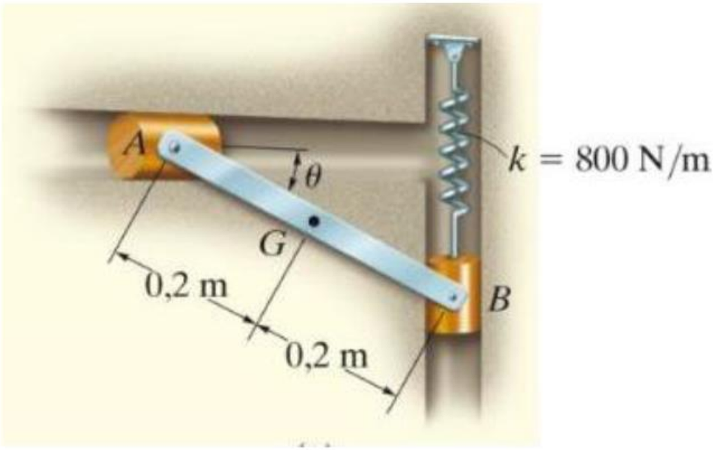
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Voorbeeld 7.6

De stang AB heeft een massa van 10 kg en kan beperkt bewegen, omdat de uiteinden in een horizontale en verticale gleuf schuiven. De veer heeft een stijfheid k = 800 N/m en is in rust als θ = 0° . Bereken de hoeksnelheid van AB bij θ = 0° , als de stang vanuit rust wordt losgelaten bij θ = 30° . Verwaarloos de massas van de schuifblokjes.

Begin-, eindtoestand en referentielijn



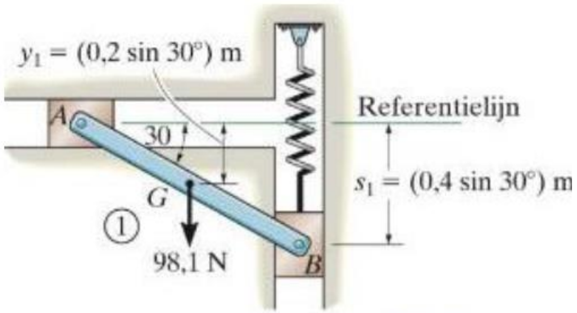


Voorbeeld 7.6

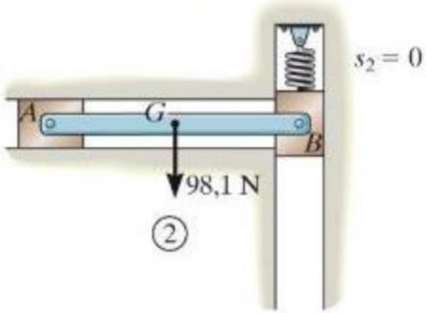
Kinetische energie

Beginpunt:
De stang wordt uit rust losgelaten => v_G en $\omega_1 = 0$

$$T_1 = 0$$

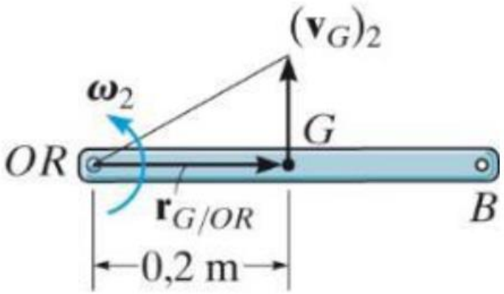


Eindpunt:
Translatie- en rotatie-energie $T_2 = \frac{1}{2} m (v_G)^2 + \frac{1}{2} I_G {\omega_2}^2$



$$T_2 = \frac{1}{2} 10 (v_G)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} 10\ 0.4^2\right) {\omega_2}^2$$

Kinematica: $(v_G)_2 = (r_{G/OR})\ \omega_2 = 0.2\ \omega_2$



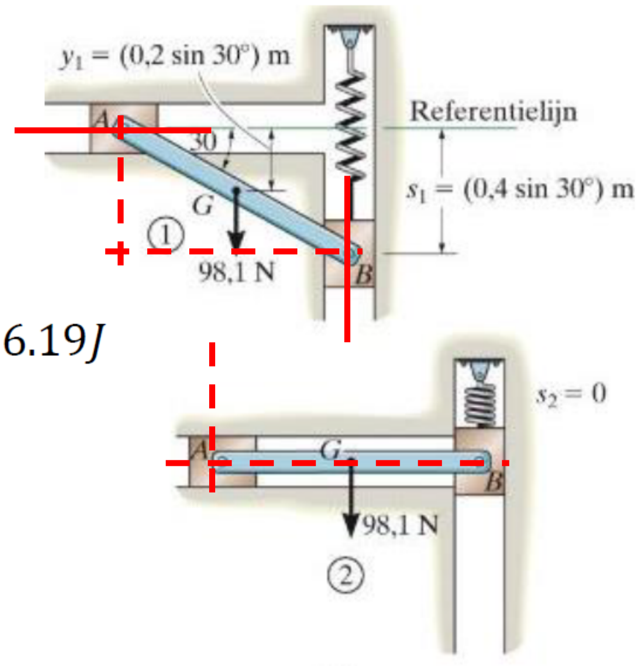
$$T_2 = 0.2667\ {\omega_2}^2$$

Voorbeeld 7.6

Potentiële energie

$$V_1 = -Wy_1 + \frac{1}{2}ks_1{}^2$$

$$V_1 = -10(9.81)(0.2\sin 30°) + \frac{1}{2}800(0.4\sin 30°)^2 = 6.19J$$



Behoud van energie

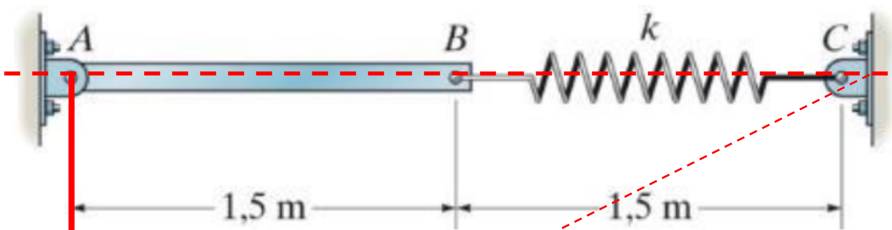
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 6.19 = 0.2667\ \omega_2{}^2 + 0$$

$$\omega_2 = 4.82\ \text{rad/s}$$

Oefening 7.59

De dunne stang AB van 10 kg is in rust als hij horizontaal hangt. Op dat ogenblik is de veer in ontspannen toestand. Bepaal de stijfheid van de veer, zodanig dat de beweging van de stang even tot stilstand komt als hij 90° met de klok mee gedraaid is.



$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 = 0 - 10(9.81)\frac{1.5}{2} + \frac{1}{2}\,k\,(3{,}3541 - 1.5)^2$$

k = 42.8 N/m

4.5 Moment van de hoeveelheid van beweging (MvHvB)

- MvHvB ($\boldsymbol{H_O}$) van een puntmassa om punt (as) *O* = vectoriële grootheid verkregen door het moment t.o.v. *O* van de hoeveelheid van beweging (m***v***) te berekenen

- Scalaire formulering
  - Grootte (*d* is de loodrechte afstand van mv tot *O*):

$$\boxed{(H_O)_z = d \cdot mv}$$

  - Richting: loodrecht op het vlak van de beweging
  - Zin: rechterhandregel

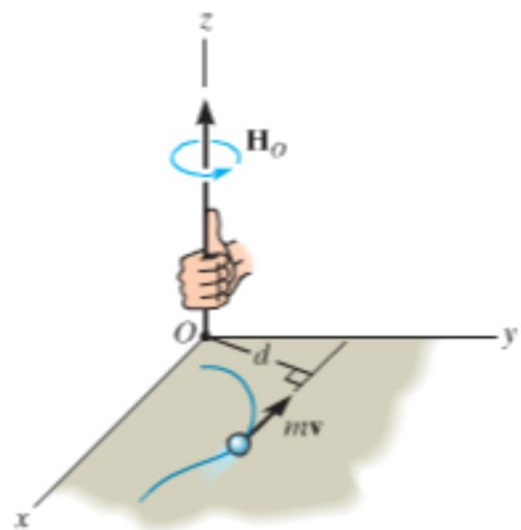


Fig. 4.19

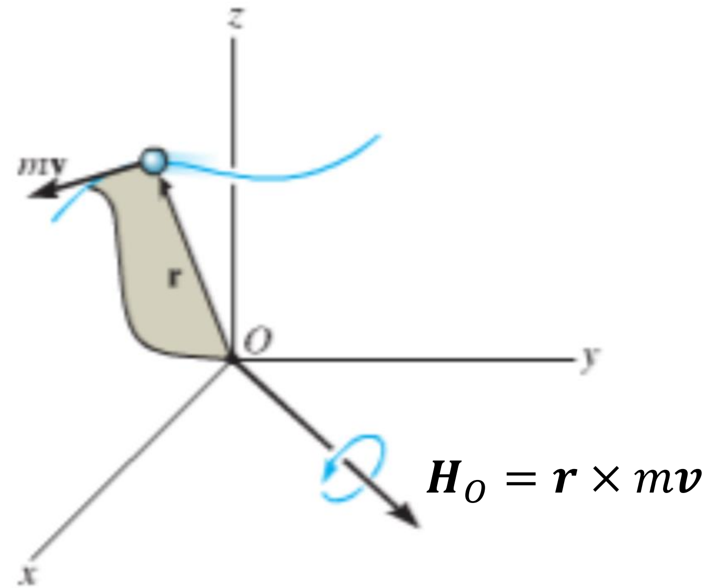
4.5 Moment van de hoeveelheid van beweging (MvHvB)

- Vectorformulering

“moment van hoeveelheid van beweging”

$$\boxed{\boldsymbol{H}_O} = \boldsymbol{r} \times \boxed{m\boldsymbol{v}}$$

“hoeveelheid van beweging”



- Afgeleide naar de tijd:

$$\dot{\boldsymbol{H}}_O = \frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_O = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \boxed{\dot{\boldsymbol{r}} \times m\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{v}}$$

De eerste term hierin is gelijk aan nul, en dus: $\dot{\boldsymbol{H}}_O = \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{v}}$

4.6 Verband tussen krachtmoment en MvHvB

- Indien de massa van een puntmassa constant is, kunnen we schrijven:

$$\sum \boldsymbol{F} = m\dot{\boldsymbol{v}}$$

- Beide zijden vermenigvuldigen met de plaatsvector ***r***:

$$\boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{O}}$$

$$\boxed{\sum \boldsymbol{M_O} = \dot{\boldsymbol{H}}_O}$$

Dit geeft het verband tussen krachtmoment en MvHvB

4.6 Verband tussen krachtmoment en MvHvB

$$\boxed{\sum \boldsymbol{M}_O = \dot{\boldsymbol{H}}_O}$$

- Dit kunnen we ook toepassen op stelsels van puntmassa's, waarbij enkel de momenten van uitwendige krachten in rekening gebracht moeten worden;

4.7 Principe van stootmoment en MvHvB

$$\boxed{\sum \boldsymbol{M_O} = \dot{\boldsymbol{H}}_O}$$

of:

$$\sum \boldsymbol{M_O}\, dt = d\boldsymbol{H}_O$$

Als we dit integreren van tijdstip t_1 (waar geldt: $\boldsymbol{H}_O = (\boldsymbol{H}_O)_1$) tot tijdstip t_2 (waar geldt: $\boldsymbol{H}_O = (\boldsymbol{H}_O)_2$), krijgen we:

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M_O} dt = (\boldsymbol{H}_O)_2 - (\boldsymbol{H}_O)_1$$

$$\boxed{(\boldsymbol{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M_O} dt = (\boldsymbol{H}_O)_2}$$

Dit is het principe van “stootmoment en MvHvB”

4.7 Principe van stootmoment en MvHvB

$$(\boldsymbol{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M_O} dt = (\boldsymbol{H}_O)_2$$

- Stootmoment (= moment van de stootkracht):

$$\text{Stootmoment} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M_O} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) dt$$

- Ook toepasbaar op een stelsel van puntmassa's (sommeren over alle puntmassa's in het stelsel):

$$\sum (\boldsymbol{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M_O} dt = \sum (\boldsymbol{H}_O)_2$$

4.7 Principe van stootmoment en MvHvB

- Vectorformulering:

$$m\boldsymbol{v_1} + \sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt = m\boldsymbol{v_2}$$

$$(\boldsymbol{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M_O} dt = (\boldsymbol{H}_O)_2$$

- Scalaire formulering:

$$m v_{x,1} + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m v_{x,2}$$

$$m v_{y,1} + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m v_{y,2}$$

$$(H_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_O dt = (H_O)_2$$

4.7 Principe van stootmoment en MvHvB

$$(\boldsymbol{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}} dt = (\boldsymbol{H}_O)_2$$

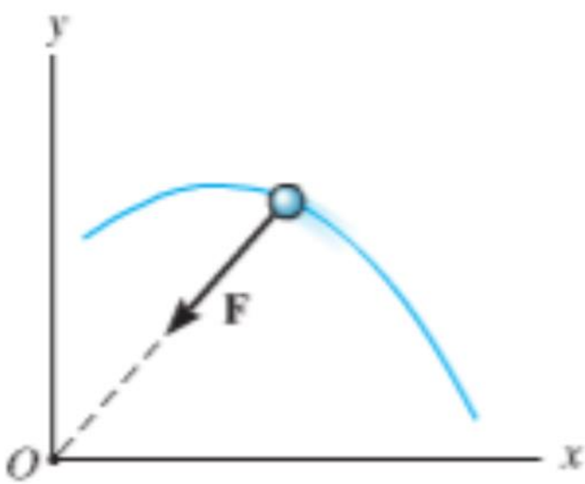
- Behoud van MvHvB:
  - Indien zich geen uitwendige stootmomenten voordoen ($\sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}} dt \approx 0$), kan de bovenstaande vergelijking vereenvoudigd worden tot:

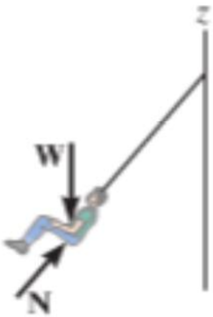
$$(\boldsymbol{H}_O)_1 = (\boldsymbol{H}_O)_2$$

  - M.a.w. het MvHvB blijft behouden;
  - Inzien wanneer dit zich voordoet is niet evident! Dit kan best op basis van het VLS
  - Soms is er behoud van MvHvB maar geen behoud van HvB

4.7 Principe van stootmoment en MvHvB

- Merk op: een kracht F die door punt O gaat of evenwijdig is aan de as door punt O, oefent geen moment uit t.o.v. O





Als de luchtweerstand wordt verwaarloosd, zijn de passagiers van deze zweefmolen onderworpen aan het behoud van moment van de hoeveelheid van beweging om de rotatie-as. Zoals te zien is in het vrijlichaamsschema, snijdt de werklijn van de normaalkracht **N** van het stoeltje op de passagier de rotatie-as en loopt de werklijn van het gewicht van de passagier **W** evenwijdig eraan. Er is dus geen stootmoment om de *z*-as.

4.7 Principe van stootmoment en MvHvB

- Analyseprocedure:

Bij het toepassen van de principes van stootmoment en moment van de hoeveelheid van beweging of de stelling van behoud van moment van de hoeveelheid van beweging, wordt de volgende procedure aangeraden.

Vrijlichaamsschema

- Teken het vrijlichaamsschema van de puntmassa zodat er een geschikte as kan worden gekozen ten opzichte waarvan de stelling van behoud van moment van de hoeveelheid van beweging geldig is. Hiervoor moeten de momenten van de krachten (of stoten) om de as ofwel evenwijdig zijn aan de as, ofwel de as snijden gedurende de tijdsperiode t_1 tot t_2.
- De richting en zin van de begin- en eindsnelheid van de puntmassa moeten worden bepaald.
- Een alternatieve methode is om de stoot- en hoeveelheid-van-bewegingsdiagrammen voor de puntmassa te tekenen.

Hoeveelheid van beweging en moment van de hoeveelheid van bewegingvergelijkingen

- Pas het principe van stootmoment en moment van de hoeveelheid van beweging toe, $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2$ of, indien het van toepassing is, het behoud van moment van de hoeveelheid van beweging, $(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$.

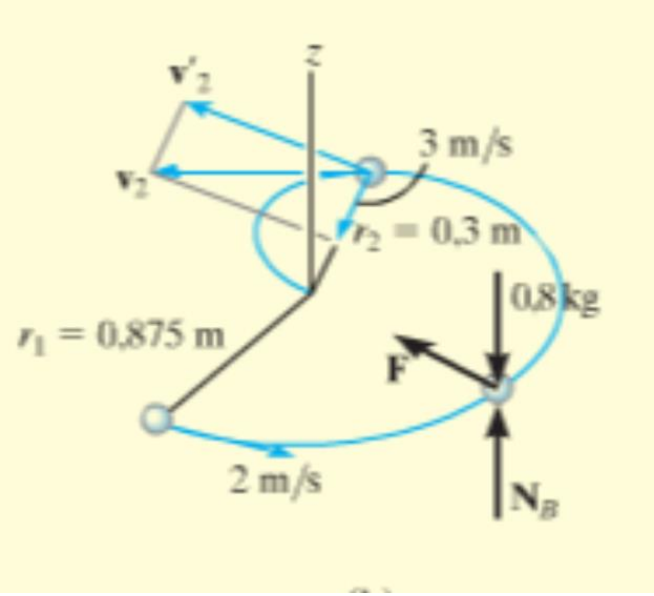
Voorbeeld 4.14

Bal *B*, zie fig. 4.25*a*, heeft een massa van 0,8 kg en is aan een touw bevestigd dat door het gat *A* loopt dat in het centrum van een gladde tafel is gemaakt. Wanneer de bal zich op $r_1 = 0{,}875$ m van het gat bevindt, doorloopt hij een cirkel met een snelheid $v_1 = 2$ m/s. Op het touw wordt een kracht **F** uitgeoefend, die het touw met een constante snelheid van $v_c = 3$ m/s door het gat naar beneden trekt. Bepaal (a) de snelheid van de bal op het ogenblik dat deze zich op $r_2 = 0{,}3$ m van het gat bevindt en (b) de hoeveelheid arbeid die door kracht **F** geleverd moet worden om de radiale afstand te verminderen van r_1 tot r_2. Verwaarloos de afmetingen van de bal.

(a)

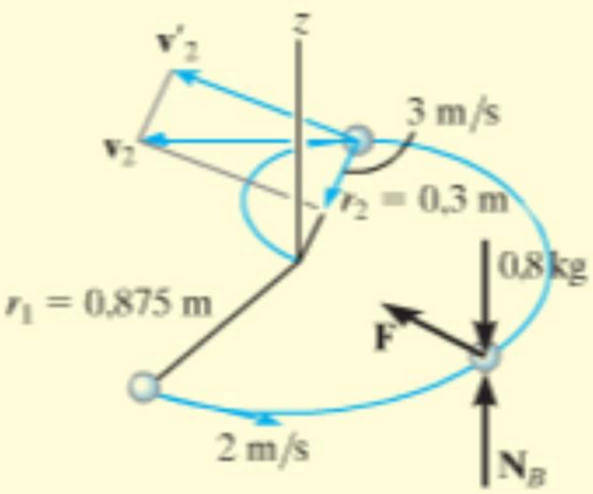
Voorbeeld 4.14

(a)



Deel (a) Vrijlichaamsschema Tijdens de beweging van de bal van r_1 naar r_2, fig. 4.25*b*, is de kracht **F** van het touw op de bal altijd loodrecht op de z-as en het gewicht $\mathbf{N}_B$ evenwijdig daaraan. Daarom zijn de stootmomenten die door deze krachten veroorzaakt worden, om deze as allemaal *nul*. Daaruit volgt dat er behoud van moment van de hoeveelheid van beweging is om de z-as.

Voorbeeld 4.14



Behoud van het moment van de hoeveelheid van beweging Zoals in fig. 4.25*b* is weergegeven, wordt de snelheid van de bal v_2 in twee componenten ontbonden. De radiale component, 2 m/s, is bekend; deze veroorzaakt een moment van de hoeveelheid van beweging gelijk aan nul om de *z*-as. Hieruit volgt:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$$

$$r_1 m_B v_1 = r_2 m_B v'_2$$

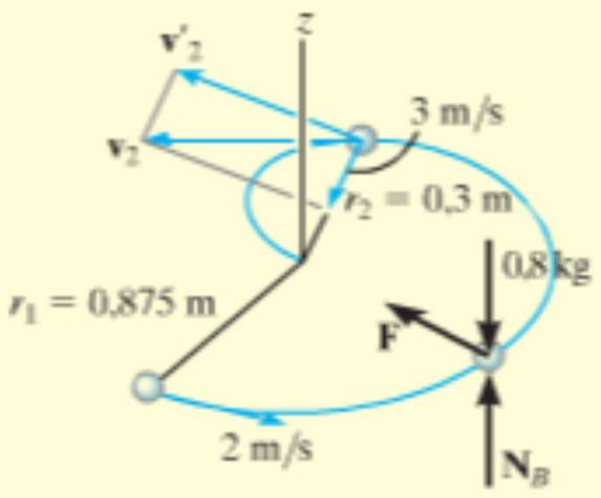
$$0{,}875 \text{ m } (0{,}8 \text{ kg})\ 2 \text{ m/s} = 0{,}3 \text{ m } (0{,}8 \text{ kg})\ v'_2$$

$$v'_2 = 5{,}833 \text{ m/s}$$

De snelheid van de bal is dus:

$$v_2 = \sqrt{(5{,}833 \text{ m/s})^2 + (3 \text{ m/s})^2}$$
$$= 6{,}599 \text{ m/s}$$

Voorbeeld 4.14



Deel (b) De enige kracht die op de bal wordt uitgeoefend is **F**. (De normaalkracht en het gewicht bewegen niet verticaal.) De kinetische begin- en eindenergie van de bal kan worden bepaald, zodat uit het principe van arbeid en energie volgt dat:

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$$

$$1/2(0{,}8\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 + U_F = 1/2(0{,}8\text{ kg})(6{,}559\text{ m/s})^2$$

$$U_F = 15{,}61\text{ J}$$ *Antw.*

OPMERKING: de kracht F is niet constant, omdat de normaalcomponent van de versnelling, $a_n = v^2/r$ verandert wanneer r verandert.