Lesweek 12 – HC 10: Tweede orde differentiaalvergelijkingen

Cursustekst HOOFDSTUK 6, §6.6 tot §6.7

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

Vorige week: eerste orde DV

FORMULARIUM

1. Scheiden van veranderlijken: $f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$

2. Exacte DV: $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \quad$ met $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

   Oplossing: $F(x,y) = c$, waarbij $\mathrm{d}F = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

3. Lineaire DV: $y' + P(x)y = Q(x).$

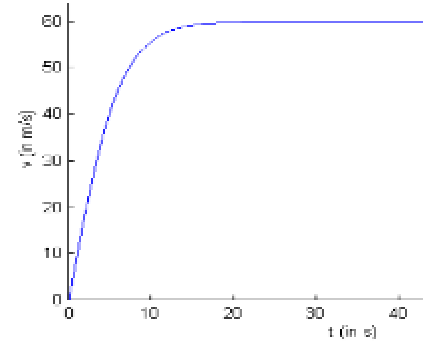
   Oplossing: $y = \dfrac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)\,\mathrm{d}x + c\right) \quad$ met $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}.$

Toepassingen in cursustekst (§ 6.5)

6.5.1 Vrije val en de invloed van de luchtweerstand

Volgens de wet van Newton uit de mechanica geldt nu:

$$\boxed{m \times a = F_1 + F_2 = mg - kv^2 \text{ of}} \quad m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$



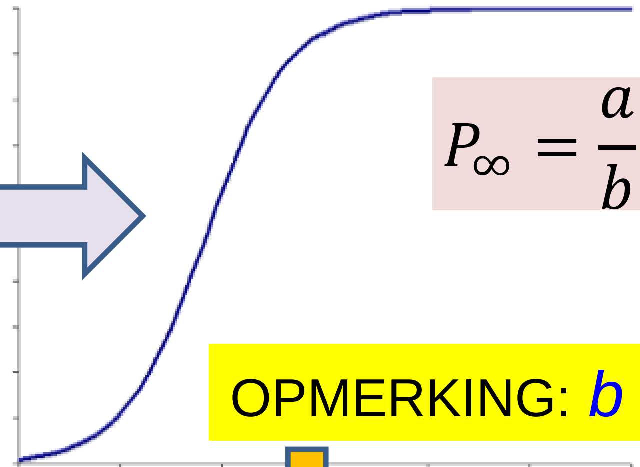
6.5.2 Logistische groei

Pierre-François Verhulst

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = a\ P - b\ P^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dP}{dt} = b \cdot P \cdot (P_\infty - P)$$



$$P_\infty = \frac{a}{b}$$

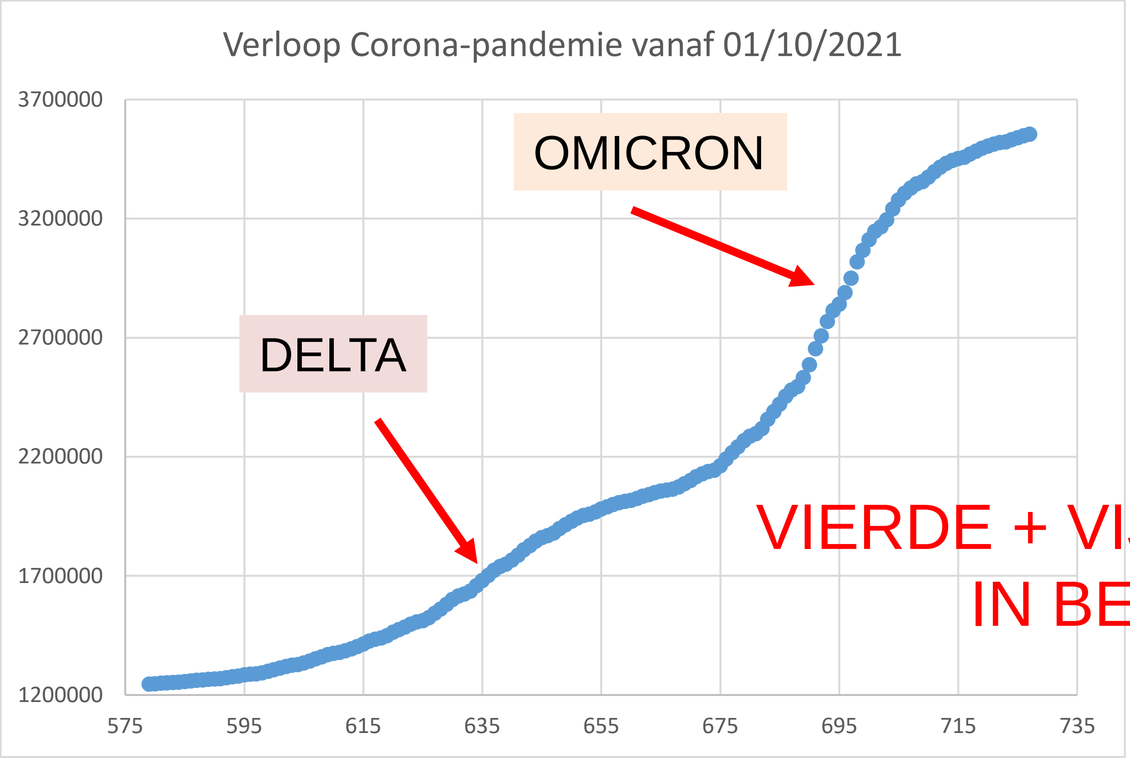
OPMERKING: *b = 0*

$$P(t) = P_0\,\mathrm{e}^{at}$$

ZUIVER EXPONENTIELE GROEI

Concrete voorbeelden van logistische groei

- Groei van een populatie,
- Gewichtstoename van een pompoen,
- Verspreiding van een gerucht,
- Aantal besmette mensen bij corona-pandemie,
- …



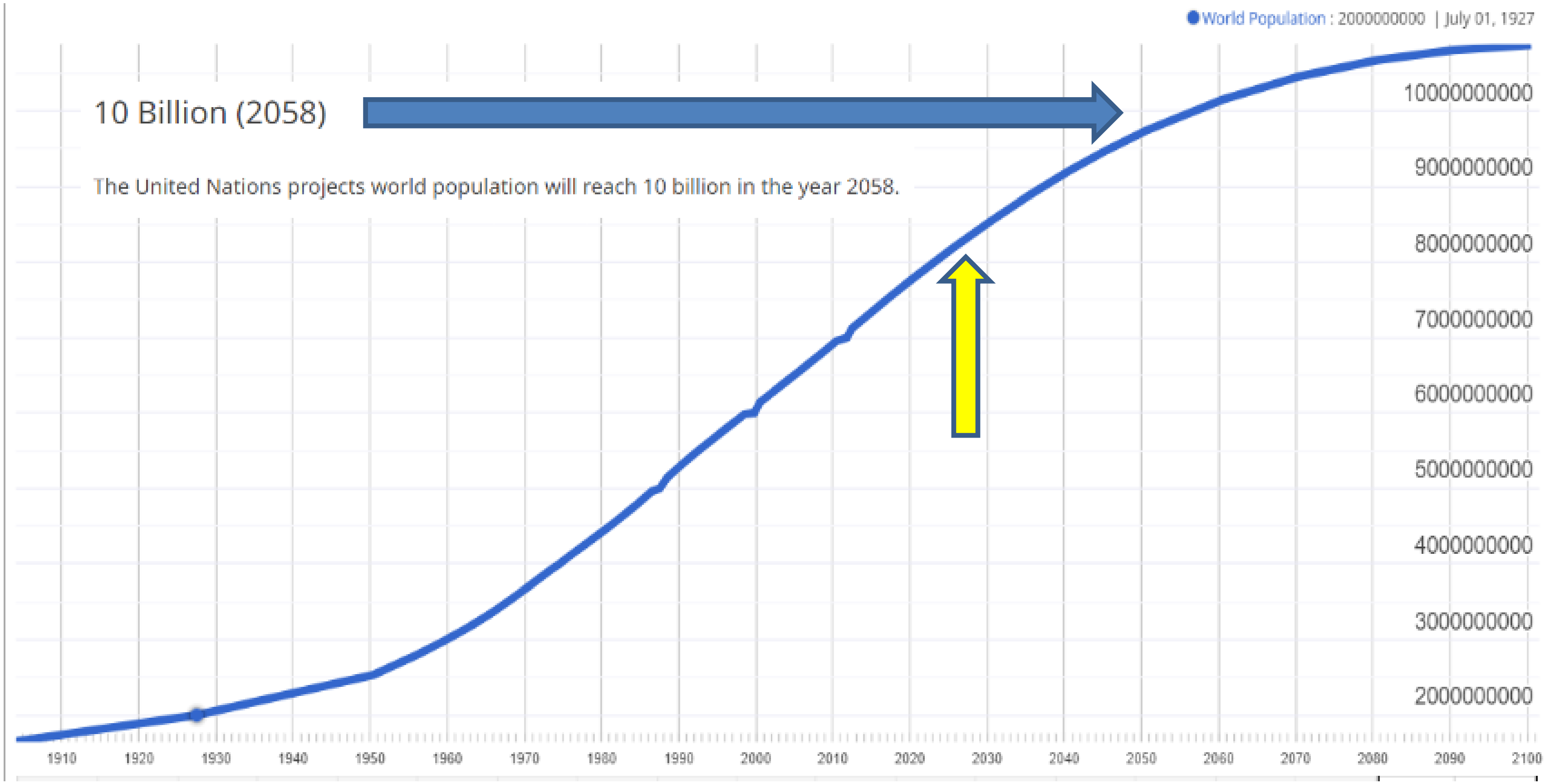
VIERDE + VIJFDE GOLF IN BELGIE

UHASSELT KU LEUVEN

Prognose evolutie wereldbevolking

World Population: Past, Present, and Future

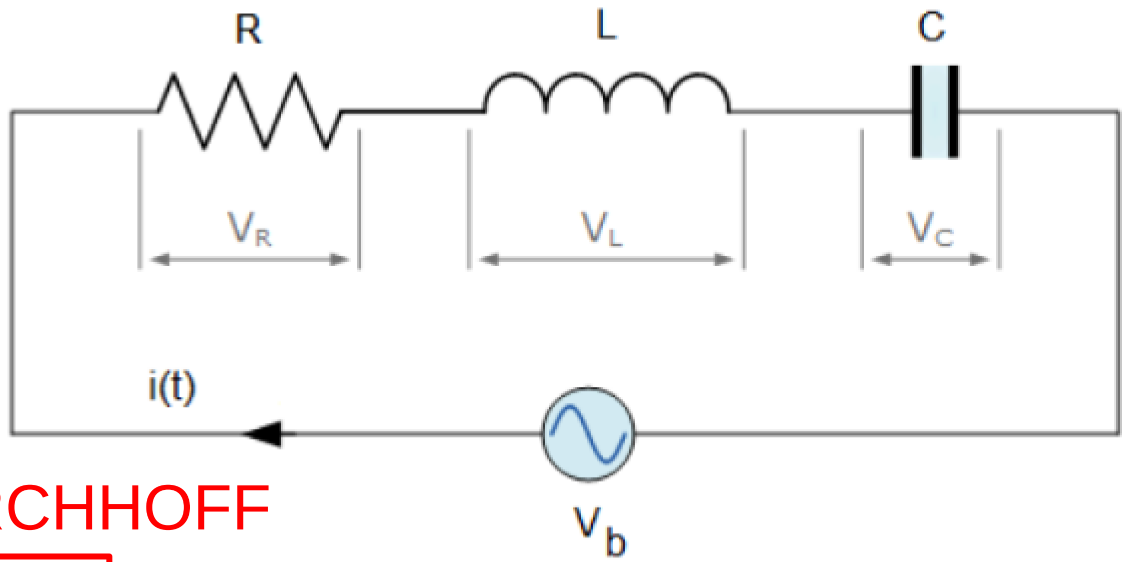
https://www.worldometers.info/world-population/



Deze week: tweede orde DV

VOORBEELD

2e orde: RLC-kring



TWEEDE WET VAN KIRCHHOFF

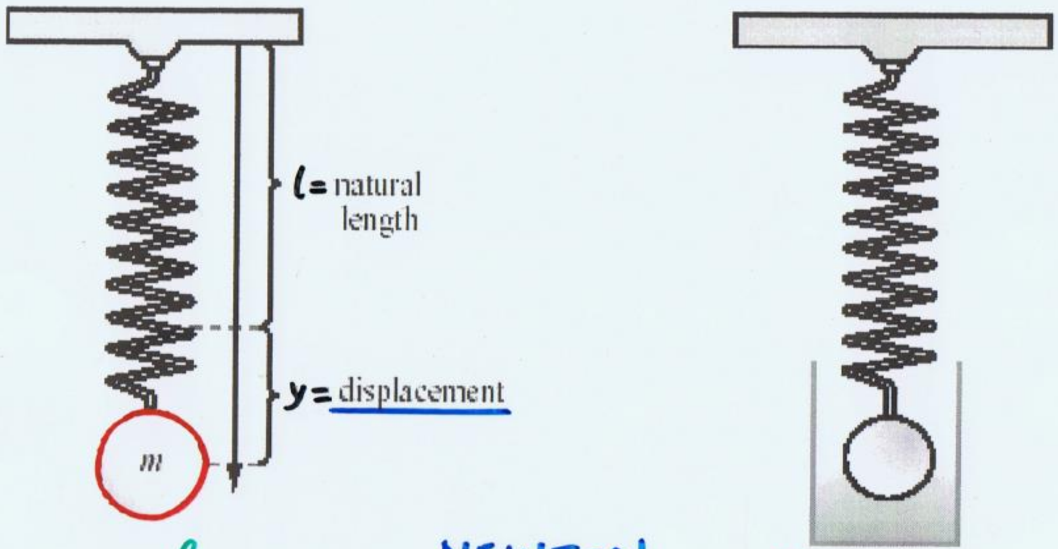
$$\boxed{V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = V_b(t)}$$

$$\begin{aligned}
V_C(t) &= \frac{q(t)}{C} \quad \Rightarrow \quad q(t) = C\ V_C(t) \\
V_R(t) &= R \cdot i(t) = R \cdot C\ V_C'(t) \quad \text{(wet van Ohm)} \\
V_L(t) &= L \cdot i'(t) = L \cdot C\ V_C''(t) \quad \text{(zelfinductie)}
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{LC \cdot V_C''(t) + RC \cdot V_C'(t) + V_C(t) = V_b(t)}$$

Mechanisch voorbeeld (tweede orde DV)



KRACHTEN DIE INWERKEN OP DE MASSA m

$b = 0$ — Ongedempte trilling

NEWTON

$b \neq 0$ — Gedempte trilling

BEWEGINGS-VERGELIJKING : $m\, y''(t) = \boxed{-k\, y(t) - b\, y'(t) + F(t)}$

Voor beide voorbeelden is er zelfde

ACHTERLIGGEND WISKUNDIG MODEL!

$$\boxed{\underset{\neq 0}{a}\, y'' + b\, y' + c\, y = f(x)}$$

Homogene 2de orde DV met const. coëff.

Meest simpele situatie is : $f(x) = 0$ → we noemen dit een homogene DV

$$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$$

deSolve(b· y'+c· y=0,x,y)

Als a = 0, bekom je een lineaire eerste orde DV → oplossing: $y = C_1 \cdot e^{-\frac{c \cdot x}{b}}$

Als $a \neq 0$, lukt dit ook met e-machten?

Voorstel voor oplossing: $y = C_1 \cdot e^{r \cdot x}$

We vullen in en kijken wat er gebeurt! $\left(y' = C_1 \cdot r \cdot e^{r \cdot x}, y'' = C_1 \cdot r^2 \cdot e^{r \cdot x} \right)$

$$C_1 \cdot \boxed{(a \cdot r^2 + b \cdot r + c)} \cdot \underbrace{e^{rx}}_{>0} \overset{\text{MOET}}{=} 0$$

Dit loopt alleen goed af voor die r-waarden die een oplossing zijn van de zogenaamde karakteristieke vergelijking: $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$ ⇒ Noem nulpunten α en β

Er zijn nu 3 situaties mogelijk: D > 0, D < 0 en D = 0 !!

UHASSELT KU LEUVEN

3 situaties homogene 2de orde DV

$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$

Situatie 1: D = b² - 4ac > 0 $\boxed{(\alpha, \beta \in \mathbb{R})}$

$$y = c_1\, e^{\alpha x} + c_2\, e^{\beta x}$$

Denk concreet aan y" – y = 0 ← → y" = y

Situatie 2: D < 0 $\boxed{(\alpha, \beta \in \mathbb{C})}$

Denk concreet aan y" + y = 0 ← → y" = – y

!! FORMULE VAN EULER $\boxed{e^{(\gamma \pm \delta i)x} = e^{\gamma x}(\cos(\delta x) \pm i \cdot \sin(\delta x))}$

***BEWIJS** van deze formule hebben we behandeld in hoofdstuk 3 !!*

Situatie 3: D = 0 $\boxed{\left(\alpha = \beta = -\frac{b}{2a}\right)}$

Denk concreet aan y" = 0

Twee samenvallende oplossingen, maar extra x-factor brengt redding !!

Rekentoestel-controle:

$$yh(x) := x \cdot e^{\frac{-b \cdot x}{2 \cdot a}}$$

$$a \cdot \frac{d^2}{dx^2}(yh(x)) + b \cdot \frac{d}{dx}(yh(x)) + c \cdot yh(x)$$

$$\left(c - \frac{b^2}{4 \cdot a}\right) \cdot x \cdot e^{\frac{-b \cdot x}{2 \cdot a}}$$

$\| \ 0$!!!!!

Samengevat: oplossing homogene 2de orde DV

FORMULARIUM

1. <u>Standaardvorm</u>: $ay'' + by' + cy = f(x)$ met $a \neq 0$.

2. <u>Homogene vergelijking</u>: $f(x) = 0$.

Oplossingsmethode: zoek nulpunten (zeg α en β) van de karakteristieke vergelijking: $ar^2 + br + c = 0$.

csolve-commando met het rekentoestel !!

- $(D > 0)$ $\quad \alpha \neq \beta \in \mathbb{R} \;\rightarrow\; y = c_1\, e^{\alpha x} + c_2\, e^{\beta x}$.
- $(D = 0)$ $\quad \alpha = \beta \in \mathbb{R} \;\rightarrow\; y = c_1\, e^{\alpha x} + c_2\, x\, e^{\alpha x}$.
- $(D < 0)$ $\quad \alpha, \beta = \gamma \pm \delta\, i \;\rightarrow\; y = e^{\gamma x}(c_1 \cos(\delta x) + c_2 \sin(\delta x))$.

Concrete voorbeelden / oefeningen

20. Los de volgende homogene DV op van de tweede orde:

a) $y''+8y'+25y=0$.

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-8\dfrac{dy}{dt}+16y=0$.

e) $3\dfrac{d^2y}{dx^2}-14\dfrac{dy}{dx}-5y=0$.

Nulpunten karakteristieke vergelijking zijn :

$$\text{cSolve}\left(r^2+8\cdot r+25=0,r\right)$$

$$r=-4+3\cdot i \text{ or } r=-4-3\cdot i$$

$$y=e^{-4x}(c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x))$$

$$\text{cSolve}\left(r^2-8\cdot r+16=0,r\right)$$

$$r=4$$

$$y=c_1\,e^{4t}+c_2\cdot t\cdot e^{4t}$$

$$\text{cSolve}\left(3\cdot r^2-14\cdot r-5=0,r\right)$$

$$r=\frac{-1}{3} \text{ or } r=5$$

$$y=c_1e^{-x/3}+c_2e^{5x}$$

Startvoorbeelden: niet homogene 2e orde DV

Voorbeeld 1. y'' = x²

$$y' = \frac{x^3}{3} + c_1 \quad \rightarrow y = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

is **NOOIT UNIEK**, vandaar "een" en niet "de" !!!!

bestaat uit twee componenten

$$y = y_H + y_P$$

waarbij y_H de algemene oplossing is van de corresponderende homogene differentiaalvergelijking $ay'' + by' + cy = 0$, en y_P een particuliere oplossing van $ay'' + by' + cy = f(x)$.

Voorbeeld 2. y'' + 4y' = x² met y(0) = 5 en y'(0) = 0

STAP 1. Vind homogene oplossing.

STAP 2. Doe een gepast voorstel voor de particuliere oplossing. In je voorstel bevinden zich één of meerdere "onbepaalde coëfficiënten" (constanten).

STAP 3. Vul voorstel in de DV in en leg daarna "stelselgewijs" deze constanten vast.

STAP 4. Tel homogene en particuliere oplossing bij elkaar op en gebruik tot slot de randvoorwaarden (indien beschikbaar) om c1 en c2 vast te leggen.

Uitwerking voorbeeld 2

STAP 1. Vind homogene oplossing.

Karakteristieke vergelijking is : $r^2 + 4r = 0 \rightarrow r = 0$ en $r = -4$

$$y_H = c_1 e^{0\cdot x} + c_2 e^{-4x} = c_1 + c_2 e^{-4x}$$

STAP 2. Doe een gepast voorstel voor de particuliere oplossing. In je voorstel bevinden zich één of meerdere “onbepaalde coëfficiënten” (constanten).

POGING 1: $y_P = \boldsymbol{a} + b \cdot x + c \cdot x^2$

“nutteloze constante” !!

$yp(x) := a + b \cdot x + c \cdot x^2$ Gereed

$\frac{d^2}{dx^2}(yp(x)) + 4 \cdot \frac{d}{dx}(yp(x))$ $\quad 8 \cdot c \cdot x + 4 \cdot b + 2 \cdot c$

KAN NOOIT GELIJK ZIJN AAN x^2 !!

POGING 2: $y_P = \boldsymbol{x} \cdot (a + b \cdot x + c \cdot x^2)$

OPNIEUW brengt extra x-factor redding !!

$y'' + 4y' = x^2$ met $y(0) = 5$ en $y'(0) = 0$

Uitwerking voorbeeld 2

STAP 3. Vul voorstel in de DV in en leg daarna "stelselgewijs" deze constanten vast.

$yp(x) := x \cdot (a + b \cdot x + c \cdot x^2)$ *Gereed*

$$\frac{d^2}{dx^2}(yp(x)) + 4 \cdot \frac{d}{dx}(yp(x))$$

$$12 \cdot c \cdot x^2 + (8 \cdot b + 6 \cdot c) \cdot x + 4 \cdot a + 2 \cdot b$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 12 \cdot c = 1 \\ 8 \cdot b + 6 \cdot c = 0 \\ 4 \cdot a + 2 \cdot b = 0 \end{cases}, \{a, b, c\}\right)$$

$$a = \frac{1}{32} \text{ and } b = \frac{-1}{16} \text{ and } c = \frac{1}{12}$$

$$y_P = x \cdot \left(\frac{1}{32} - \frac{x}{16} + \frac{x^2}{12}\right)$$

STAP 4. Tel homogene en particuliere oplossing bij elkaar op en gebruik tot slot de randvoorwaarden (indien beschikbaar) om c1 en c2 vast te leggen.

$$y(x) := c1 + c2 \cdot e^{-4 \cdot x} + x \cdot \left(\frac{1}{32} - \frac{x}{16} + \frac{x^2}{12}\right)$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} y(0) = 5 \\ \left(\frac{d}{dx}(y(x))\Big|_{x=0}\right) = 0 \end{cases}, \{c1, c2\}\right)$$

$$c1 = \frac{639}{128} \text{ and } c2 = \frac{1}{128}$$

$y'' + 4y' = x^2$ met $y(0) = 5$ en $y'(0) = 0$

Hoe vind je gepast particulier voorstel ??

$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)$

$m = 0, \theta = 0$	$\theta = 0$	$m = 0$
$\rightarrow f(x) = V_1(x)$	$\rightarrow f(x) = e^{mx} \cdot V_1(x)$	$\rightarrow f(x) = V_1(x)\cos(\theta x) + V_2(x)\sin(\theta x)$

WE BEPERKEN ONS TOT

$$f(x) = e^{mx}(V_1(x)\cos(\theta x) + V_2(x)\sin(\theta x)),$$

met $m, \theta \in \mathbb{R}$, $V_1(x)$ een veelterm van graad p en $V_2(x)$ een veelterm van graad q.

$\Longrightarrow$ Voorstel voor y_P:

er mag **NOOIT** overeenstemming zijn tussen yP en yH !!

Te zoeken veeltermen van graad n = max{ p, q }

$$y_P = x^s e^{mx}(W_1(x)\cos(\theta x) + W_2(x)\sin(\theta x)),$$

$m = 0, \theta = 0$	$\theta = 0$	$m = 0$
$\rightarrow y_p = x^s\, W_1(x)$	$\rightarrow y_p = x^s e^{mx}\, W_1(x)$	$\rightarrow y_p = x^s\,(W_1(x)\cos(\theta x) + W_2(x)\sin(\theta x))$

ALS **s ≠ 0** → WISKUNDIGE "OORZAAK" van **RESONANTIE**-fenomenen in wetenschap / techniek.

Drie belangrijke opmerkingen

$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)$

1) Als de storingsfunctie f(x) een som is van

2 storingstermen (m.a.w. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$) die elk afzonderlijk overeenstemmen met 1 van de gevallen op de vorige dia, dan is het voorstel voor y_P gelijk aan een som van 2 deelvoorstellen: $y_P = y_{P,1} + y_{P,2}$.

BVB. $f(x) = x \cdot (x + \sin(x)) \Rightarrow f(x) = x^2 + x \cdot \sin(x) = f_1(x) + f_2(x)$

2) Rekentoestel-controle is voor 2de orde DV ook mogelijk :

2 KEER AFGELEIDE-ACCENT NA ELKAAR TYPEN !!

desolve(y’’ + 4y’ = x² and y(0) = 5 and y’(0) = 0, x, y)

AFSPRAAK BLIJFT VAN KRACHT ! EINDcontrole MAG, maar op het examen wel steeds **alle tussenstappen** opschrijven !!

3) Ook eerste orde DV met constante coëfficiënten kan je op deze manier oplossen! ➡ VOORBEELD 3. $2 \cdot y' - 3y = 5 \cdot \sin(x) - 2x \cdot \cos(x)$

Uitwerking voorbeeld 3

STAP 1. Vind homogene oplossing. Karakteristieke vergelijking is : 2r – 3 = 0 → r = 3/2

STAP 2. Doe een gepast voorstel voor de particuliere oplossing.

$$y_H = c_1 \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot x}$$

FORMULARIUM

$$f(x) = e^{mx}(V_1(x)\cos(\theta x) + V_2(x)\sin(\theta x)),$$

$$f(x) = -2x \cdot \cos(x) + 5 \cdot \sin(x)$$

met $m, \theta \in \mathbb{R}$, $V_1(x)$ een veelterm van graad p en $V_2(x)$ een veelterm van graad q.

$\Longrightarrow$ Voorstel voor y_P: $\boxed{m = 0, \theta = 1, V_1(x) = -2x, p = 1, V_2(x) = 5, q = 0}$

$$y_P = x^s e^{mx}(W_1(x)\cos(\theta x) + W_2(x)\sin(\theta x)),$$

$$m = 0, \theta = 1, W_1(x) = a + bx, W_2(x) = c + dx, n = 1, \mathbf{s = 0}$$

met $W_1(x), W_2(x)$ concreet te bepalen veeltermfuncties van graad $n = \max\{p, q\}$ en $s = 0, 1$ of 2 om ervoor te zorgen dat er geen enkele term van je voorstel y_P overeenkomt met y_H.

VOORSTEL : $y_P = (a + bx) \cdot \cos(x) + (c + dx) \cdot \sin(x)$

$$2 \cdot y' - 3y = 5 \cdot \sin(x) - 2x \cdot \cos(x)$$

Uitwerking voorbeeld 3

STAP 3. Vul voorstel in de DV in en leg daarna "stelselgewijs" deze constanten vast.

$$yp(x) := (a + b \cdot x) \cdot \cos(x) + (c + d \cdot x) \cdot \sin(x)$$

$$2 \cdot \frac{d}{dx}(yp(x)) - 3 \cdot yp(x)$$

$$((2 \cdot d - 3 \cdot b) \cdot x - 3 \cdot a + 2 \cdot (b + c)) \cdot \cos(x) + ((-2 \cdot b - 3 \cdot d) \cdot x - 2 \cdot a - 3 \cdot c + 2 \cdot d) \cdot \sin(x)$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 2 \cdot d - 3 \cdot b = -2 \\ -3 \cdot a + 2 \cdot (b + c) = 0 \\ -2 \cdot b - 3 \cdot d = 0 \\ -2 \cdot a - 3 \cdot c + 2 \cdot d = 5 \end{cases}, \{a, b, c, d\}\right)$$

$$a = \frac{-110}{169} \text{ and } b = \frac{6}{13} \text{ and } c = \frac{-243}{169} \text{ and } d = \frac{-4}{13}$$

STAP 4. Tel homogene en particuliere oplossing bij elkaar op.

$$y = c_1 \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot x} + \left(-\frac{110}{169} + \frac{6x}{13}\right)\cos(x) + \left(-\frac{243}{169} - \frac{4x}{13}\right)\sin(x)$$

$$2 \cdot y' - 3y = 5 \cdot \sin(x) - 2x \cdot \cos(x)$$

Wiskunde 1 schakel: EVALUATIE

Eerste examenkans	
15 JANUARI ‘23 (13u): schriftelijk examen (<u>zelfde stramien </u>als in november) Leerstof: Hoofdstuk 3, 4, 5 en 6 (focus: toepassingen / oefeningen !!) Toegelaten hulpmiddelen: formularium en CAS rekentoestel	75%

GEHEUGEN LEEG !!!

VOLGENDE WEEK: VOORBEELD-EXAMEN OP TOLEDO !!

EXAMENLOKAAL B104 in gebouw D !!