Hoofdstuk 7 – Kinetica van een star lichaam in een plat vlak: arbeid en energie

Eric Demeester

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een
initiatief van UHasselt en KU Leuven.

Overzicht H1 t.e.m. H8

H1	–	H2	–	H3	–	H4
H5	–	H6	–	H7	–	H8

Puntmassa's, waarvoor oriëntatie niet van belang is (H1 – H4)

Starre lichamen, waarvoor oriëntatie van belang is (H5 – H8)

Kinematica

$v = ds/dt$

$a = dv/dt$

$a \cdot ds = v \cdot dv$

Tweede wet van Newton

$\Sigma F = m \cdot a$

- momentopname

Arbeid en energie

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **plaats**:

$\Sigma \int F \cdot ds = m \cdot v_2^2 / 2 - m \cdot v_1^2 / 2$

- 2 discrete plaatsen
- Enkel conservatieve krachten => behoud van mechanische energie: $T1 + V1 = T2 + V2$

Stoot en hoeveelheid van beweging

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **tijd** en gebruik $a = dv/dt$:

$\Sigma \int F \cdot dt = m \cdot v_2 - m \cdot v_1$

- 2 discrete tijdstippen
- Behoud van hoev. v. beweging:
  - Geen externe stoten
  - Botsingen en explosies

$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta}/dt$

$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$

$\alpha \cdot d\theta = \omega \cdot d\omega$

$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{B|A}$

$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{B|A} - \omega^2 \boldsymbol{r}_{B|A}$

Overzicht H1 t.e.m. H8

Basisformules voor de dynamica

KINEMATICA

H1

Rechtlijnige beweging van een puntmassa

variabele a	constante $a = a_c$
$a = \frac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \frac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a\,ds = v\,dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Kromlijnige beweging van een puntmassa

x-, y-, z-coördinaten		r-, θ-, z-coördinaten	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

n-, t-, b-coördinaten

$v = \dot{s}$ $\quad a_t = \dot{v} = v\frac{dv}{ds}$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

Relatieve beweging

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

H5

Beweging van een star lichaam om een vaste as

variabele α	constante $\alpha = \alpha_c$
$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

Voor punt P

$s = \theta r \quad v = \omega r \quad a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{scharnier})} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{scharnier})}$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende en roterende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \times (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

KINETICA

H6

Massatraagheidsmoment $I = \int r^2\,dm$

Evenwijdige-assenstelling $I = I_G + md^2$

Gyrostraal $k = \sqrt{\frac{I}{m}}$

H2

Bewegingsvergelijkingen

Puntmassa	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

H6

H3

Principe van arbeid en energie

$T_1 + U_{1-2} = T_2$

Kinetische energie

Puntmassa	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

H7

Arbeid

Variabele kracht	$U_F = \int F\cos\theta\,ds$
Constante kracht	$U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$
Gewicht	$U_W = -W\,\Delta y$
Veer	$U_s = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$
Koppelmoment	$U_M = M\,\Delta\theta$

Vermogen en rendement

$P = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \quad \epsilon = \frac{P_{\text{uit}}}{P_{\text{in}}} = \frac{U_{\text{uit}}}{U_{\text{in}}}$

Wet van behoud van energie

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potentiële energie

$V = V_g + V_e$, waarbij $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

H4

Principe van stoot en impuls

Puntmassa	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$
Star lichaam	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Behoud van impuls

$\Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_2$

Restitutiecoëfficiënt $e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

H8

Principe van stootmoment en impulsmoment

Puntmassa	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = (d)(mv)$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$ waarbij $H_G = I_G\omega$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = I_O\omega$

Behoud van impulsmoment

$\Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_2$

Arbeid en energie voor starre lichamen

- Het principe van arbeid en energie gebruiken we voor vraagstukken waarbij kracht, snelheid en (hoek)verplaatsing een rol spelen;
  - Er zijn gegevens/vragen over 2 discrete plaatsen of hoekstanden

- T.o.v. puntmassa's moeten we 2 bijkomende aspecten uitklaren:
  1. Wat is de kinetische energie voor de algemene beweging van starre lichamen in het platte vlak?
  2. Wat is de arbeid van een moment? De arbeid van krachten hadden we reeds in H3 besproken maar zullen we kort herhalen;

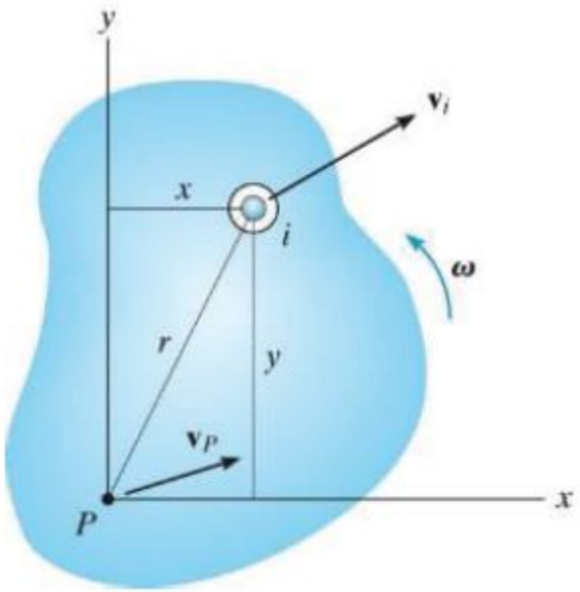
7.1 Kinetische energie

- Afleiding:
  - Het starre lichaam beweegt in een vlak;
  - We splitsen het lichaam op in een stelsel van elementaire puntmassa dm, elk met een ogenblikkelijke snelheid $\boldsymbol{v_i}$
    - Merk op: $\boldsymbol{v_i}$ varieert afhankelijk van de plaats in het lichaam
  - De kinetische energie van massa dm is dan:

$$T_i = \frac{1}{2} \cdot v_i^2 \cdot dm$$

  - De kinetische energie van het volledige lichaam bekomen we door alle kinetische energieën op te tellen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \int v_i^2 \cdot dm$$



UHASSELT KU LEUVEN

7.1 Kinetische energie

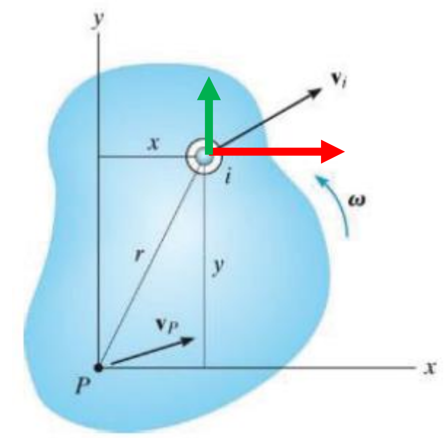
- Afleiding:
  - Voor het volledige lichaam:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \int v_i^2 \cdot dm$$

Hier maken we de veronderstelling: het is een star lichaam

  - Laat ons dit uitdrukken in functie van de snelheid van een referentiepunt P en de hoeksnelheid ω:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_i} &= \boldsymbol{v_P} + \boldsymbol{v_{i|P}} \\ &= v_{P,x}\boldsymbol{i} + v_{P,y}\boldsymbol{j} + \omega\boldsymbol{k} \times (x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j}) \\ &= \boxed{(v_{P,x} - \omega\, y)}\boldsymbol{i} + \boxed{(v_{P,y} + \omega\, x)}\boldsymbol{j} \end{aligned}$$



  - We zoeken v_i^2 => Pythagoras toepassen:

$$\begin{aligned} v_i^2 &= (v_{P,x} - \omega\, y)^2 + (v_{P,y} + \omega\, x)^2 \\ &= v_{P,x}^2 - 2\, v_{P,x}\, \omega\, y + \omega^2 y^2 + v_{P,y}^2 + 2\, v_{P,y}\, \omega\, x + \omega^2 x^2 \\ &= v_P^2 - 2\, v_{P,x}\, \omega\, y + 2\, v_{P,y}\, \omega\, x + \omega^2 r^2 \end{aligned}$$

  - We kunnen nu v_i^2 invullen in: $T = \frac{1}{2} \cdot \int v_i^2 \cdot dm$

7.1 Kinetische energie

- Afleiding:
  - Dus: $v_P^2 - 2\, v_{P,x}\, \omega\, y + 2\, v_{P,y}\, \omega\, x + \omega^2 r^2$ invullen in $T = \frac{1}{2} \cdot \int v_i^2 \cdot dm$:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \int v_i^2 \cdot dm$$

$$= \frac{1}{2} \cdot v_P^2 \cdot \int dm - v_{P,x}\, \omega \int \mathrm{y}\, dm + v_{P,y}\, \omega \int x\, dm + \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \int r^2\, dm$$

De totale massa *m* van het lichaam

= *m* · ligging van het massamiddelpunt G t.o.v. P:
$m\, y_G = m\, \bar{y} = \int \mathrm{y}\, dm$ en
$m\, x_G = m\, \bar{x} = \int \mathrm{x}\, dm$

Massatraagheidsmoment I_P t.o.v. as door P

  - Bijgevolg:

$$T = \frac{1}{2}\, \mathrm{m}\, v_P^2 - v_{P,x}\, \omega\, m\, \bar{y} + v_{P,y}\, \omega\, m\, \bar{x} + \frac{1}{2}\, I_P\, \omega^2$$

7.1 Kinetische energie

- Conclusie:

$$T = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_P^2 - \,v_{P,x}\,\omega\,m\,\bar{y} + \,v_{P,y}\,\omega\,m\,\bar{x} + \frac{1}{2}\,I_P\,\omega^2$$

  - Indien G als referentiepunt P wordt gekozen, geldt: $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_G^2 + \frac{1}{2}\,I_G\,\omega^2}$$

  - Merk op:
    - Som van translatie kinetische energie + rotatie kinetische energie
    - Altijd positief (of nul), scalair getal;
    - Let op subscripts G: als je deze formule toepast, weet dan dat het gaat om de snelheid van het massamiddelpunt, en het massatraagheidsmoment rondom het massamiddelpunt;

7.1 Kinetische energie: zuivere translatie

- Zuivere translatie (rechtlijnig of kromlijnig) => $\omega = 0$

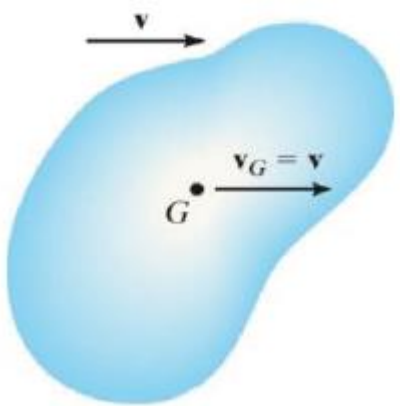
  - Bijgevolg vereenvoudigt de formule:

$$T = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_{\boldsymbol{G}}^{2} + \cancel{\frac{1}{2}\,I_{\boldsymbol{G}}\,\omega^{2}}$$

  - zich tot:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_{\boldsymbol{G}}^{2}}$$

(zuivere translatie)



Translatie

  - M.a.w.: er is geen rotatie kinetische energie.

7.1 Kinetische energie: zuivere rotatie

- Zuivere rotatie rondom een as door scharnierpunt *O*:
  - De snelheid van massamiddelpunt G is niet noodzakelijk 0!
  - Maar voor een cirkelbeweging geldt wel: $\boxed{v_G = r_G\,\omega}$
  - En dus vereenvoudigt de formule:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_{\boldsymbol{G}}^2 + \frac{1}{2}\,I_{\boldsymbol{G}}\,\omega^2}$$

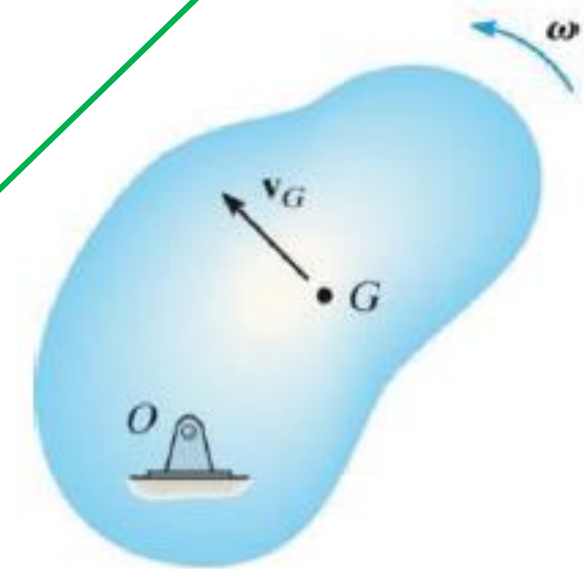
(zuivere rotatie om *O*)

  - zich tot (pas ook Steiner toe):

$$T = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,r_{\boldsymbol{G}}^2\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,I_{\boldsymbol{G}}\,\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{m}\,r_{\boldsymbol{G}}^2 + I_{\boldsymbol{G}}\right)\omega^2 = \boxed{\frac{1}{2}\,I_{\boldsymbol{O}}\,\omega^2}$$

(zuivere rotatie om *O*)



Rotatie om een vaste as

7.1 Kinetische energie: algemeen

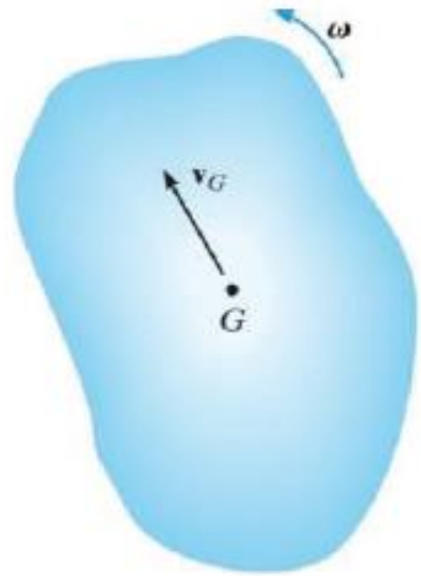
- Algemene beweging:
  - Altijd geldig:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\, v_{\boldsymbol{G}}^2 + \frac{1}{2}\, I_{\boldsymbol{G}}\, \omega^2}$$

  - Of, ten opzichte van het ogenblikkelijk rotatiecentrum ($v_G = r_{G|OR}\,\omega$):

$$T = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\, r_{\boldsymbol{G|OR}}^2 \omega^2 + \frac{1}{2}\, I_{\boldsymbol{G}}\, \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{m}\, r_{\boldsymbol{G|OR}}^2 + I_{\boldsymbol{G}}\right)\omega^2 = \boxed{\frac{1}{2}\, I_{\boldsymbol{OR}}\, \omega^2}$$



Algemene beweging in een plat vlak

7.1 Kinetische energie: stelsel van lichamen

- Energie is een scalaire grootheid, en dus:
  - totale kinetische energie van een stelsel = de som van de kinetische energie van al zijn bewegende onderdelen

Totale kinetische energie grondverdichter

=

Translatie kinetische energie van het frame

+

Translatie en rotatie kinetische energie van de wals en van de wielen

7.1 Kinetische energie: stelsel van lichamen

De dubbele katrolschijf bestaat uit twee delen die aan elkaar bevestigd zijn. De haspel heeft een massa van 25 kg en een gyrostraal om k_O= 0,24 m. De katrollen draaien rechtsom (met de wijzers van de klok mee) met een hoeksnelheid van 20 rad/s. Bepaal de kinetische energie van het stelsel. Veronderstel dat geen van de kabels over de katrolschijf slipt.

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega_O{}^2 + \frac{1}{2} m_A v_A{}^2 + \frac{1}{2} m_B v_B{}^2$$

$$I_O = m\, k_O{}^2 = 25(0.24^2) = 1.44 \text{ kg m}^2$$

$$v_A = \omega\, r_A = 20\ (0.4) = 8\ m/s$$

$$v_B = \omega\, r_B = 20\ (0.2) = 4\ m/s$$

$$T = \frac{1}{2}\ (1.44)\ 20^2 + \frac{1}{2}(10)\ 8^2 + \frac{1}{2}(15)\ \ 4^2 = 728 \text{ J}$$

UHASSELT KU LEUVEN

7.2 Arbeid van een kracht

- Zie hoofdstuk 3; recapitulatie:
  - Definitie: elementaire arbeid *dU*:

$$dU = F\,ds\cos\theta$$

  - Alternatieve schrijfwijze:

$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

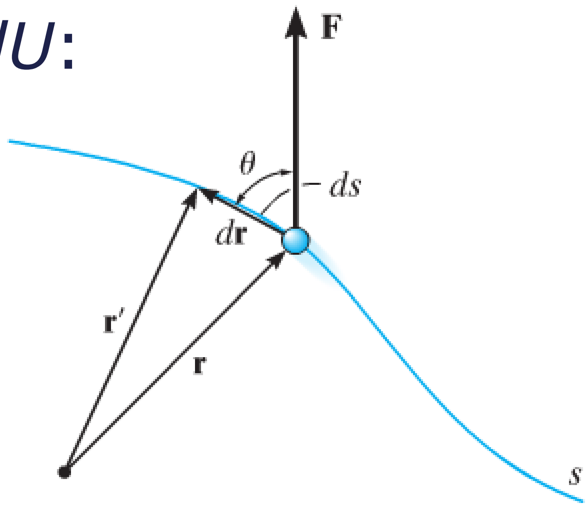


Fig. 3.1

  - Arbeid *U* t.g.v. een veranderlijke kracht:

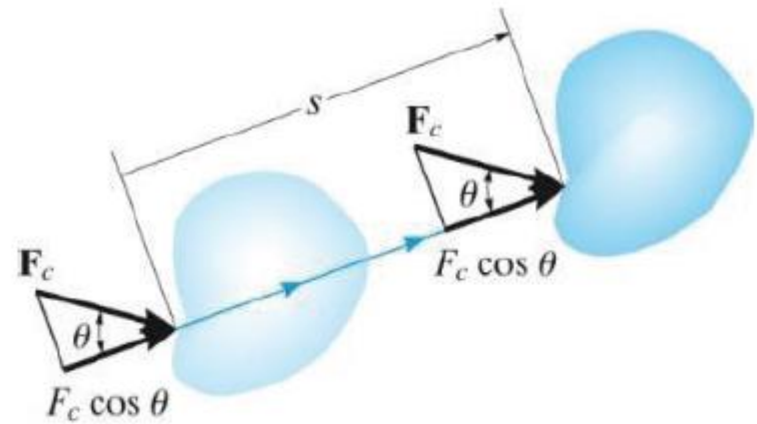
$$\boxed{U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\theta\,ds} \qquad (3.1)$$

7.2 Arbeid van een kracht

- Zie hoofdstuk 3; recapitulatie:
  - Arbeid van een constante kracht:

$$U_{1-2} = F_c \cos\theta \int_{s_1}^{s_2} ds$$

$$\boxed{U_{1-2} = F_c \cos\theta (s_2 - s_1)}$$



7.2 Arbeid van een kracht

- Zie hoofdstuk 3; recapitulatie:
  - Arbeid van een gewicht:

$$U_{1-2} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} -W\, dy = -W(y_2 - y_1)$$

$$\boxed{U_{1-2} = -W\,\Delta y}$$

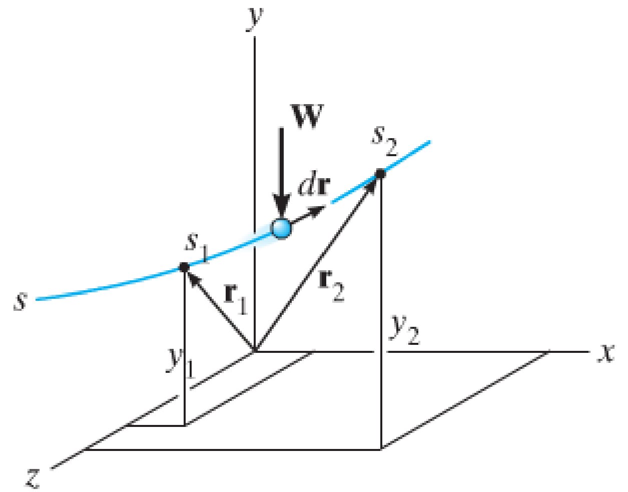


Fig. 3.4

Achterliggende veronderstelling?

Y-as positief naar boven gericht!

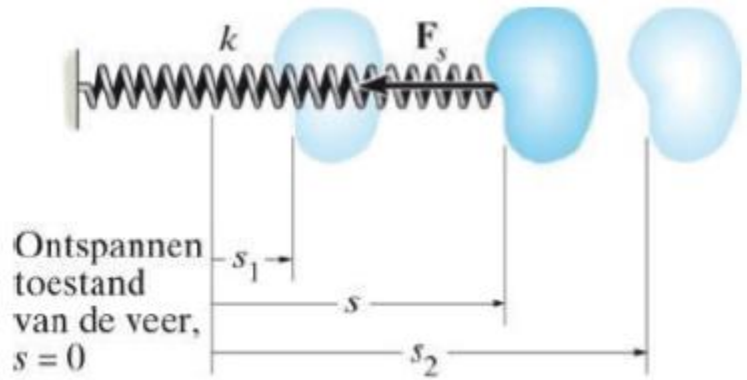
  - Merk op: Δy is de vertikale verplaatsing van het massamiddelpunt;
  - Verplaatsing naar boven => arbeid is negatief

7.2 Arbeid van een kracht

- Zie hoofdstuk 3; recapitulatie:
  - Arbeid van een veerkracht:

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F_v \, ds = \int_{s_1}^{s_2} -ks \, ds$$

$$\boxed{U_{1-2} = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)}$$



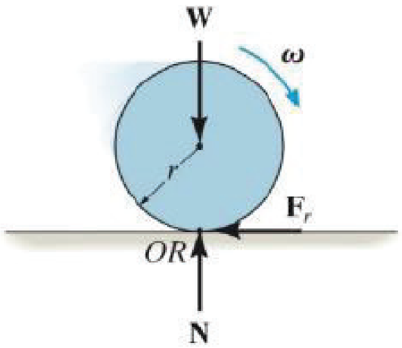
  - Fout in het boek:
    - ~~|s2| > |s1|~~

7.2 Arbeid van een kracht

- Zie hoofdstuk 3; recapitulatie:
  - Krachten die geen arbeid leveren:
    - Krachten die aangrijpen op punten die niet bewegen (m.a.w. verplaatsing gelijk aan nul);
    - Krachten die loodrecht staan op de verplaatsing ($\cos\theta = 0$);

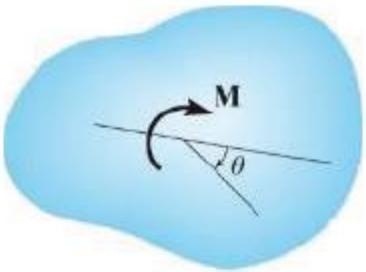
Voorbeelden:

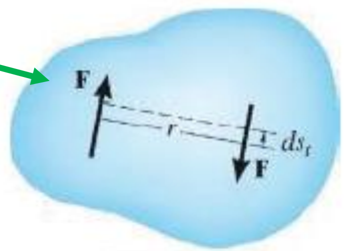
- Reactiekrachten in een scharnieroplegging
- Normale reactie op een voorwerp dat over een vast oppervlak beweegt
- Gewicht van een lichaam waarvan het zwaartepunt horizontaal verplaatst



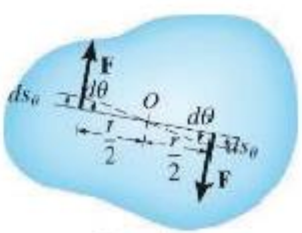
7.3 Arbeid van een koppel

- Veronderstel een lichaam waarop een koppel $M = F.r$ werkt.
    - We kunnen een moment steeds benaderen als een equivalent krachtenpaar.
- Stel: het lichaam rondergaat een kleine verplaatsing bestaande uit:
    - Een <u>translatie ds_t</u>: de arbeid van elke kracht is alleen afkomstig van de component in de richting van de verplaatsing. De positieve arbeid van de ene kracht wordt gecompenseerd door de negatieve arbeid van de andere kracht.
    - Een <u>rotatie $d\theta$</u> om het willekeurig gekozen punt O: elke kracht ondergaat een verplaatsing ds_θ in de richting van de kracht
- Van een koppel dat op een lichaam werkt, verrichten de twee koppelkrachten alleen arbeid wanneer het lichaam een rotatie ondergaat.





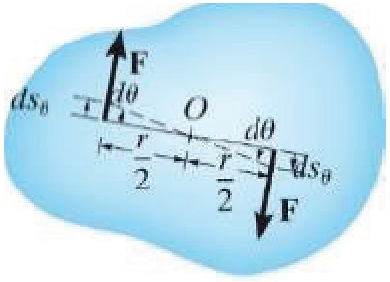
Translatie



Rotatie

7.3 Arbeid van een koppel

Wanneer het lichaam een kleine rotatie om het willekeurig gekozen punt O ondergaat, ondergaat elke kracht een verplaatsing in de richting van de kracht



Rotatie

$$dU_M = F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) + F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) = (Fr)d\theta = M\,d\theta$$

Wanneer het lichaam in het vlak roteert over een eindige hoek θ, gemeten in radialen, van θ_1 naar θ_2, is de arbeid van een koppel:

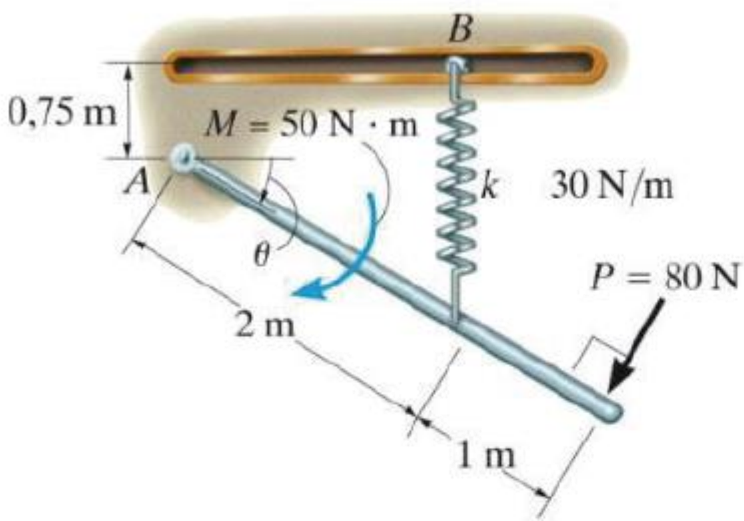
$$U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta$$

Wanneer het koppel **M** een *constante grootte* heeft, geldt:

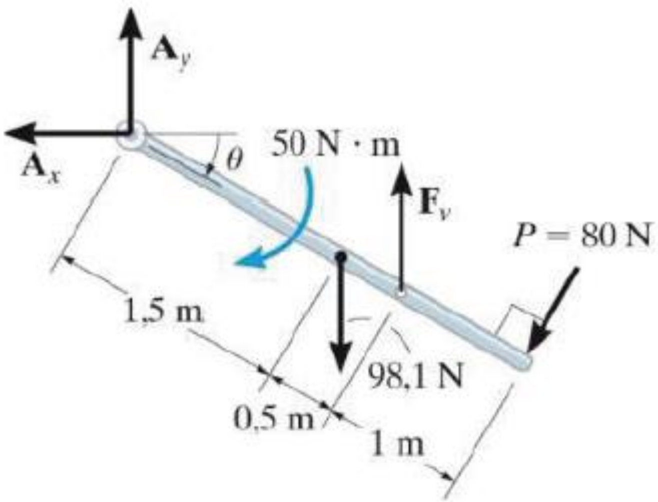
$$\boxed{U_M = M(\theta_2 - \theta_1)}$$

Voorbeeld 7.1

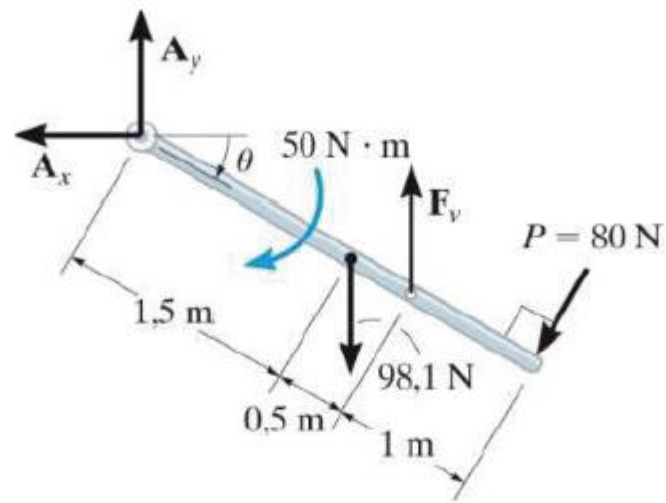
De stang heeft een massa van 10kg en ondergaat een koppel M van 50Nm en een kracht P van 80N die altijd loodrecht op het uiteinde van de stang wordt uitgeoefend. De veer heeft een rustlengte van 0.5m en blijft verticaal dankzij de rolgeleider in B. Bepaal de totale arbeid die wordt uitgeoefend als de stang naar beneden draait van 0 naar 90° .



Vrijlichaamsschema:



Voorbeeld 7.1



Gewicht W

$$U_W = -W\,\Delta y = -\,m\,g\,\Delta y$$

$$U_W = -10\,(9.81)\,(-1.5) = 147.2\,J$$

Koppel M

$$U_M = M\,d\theta \qquad U_M = 50\left(\frac{\pi}{2}\right) = 78.5\,J$$

Veerkracht F_v

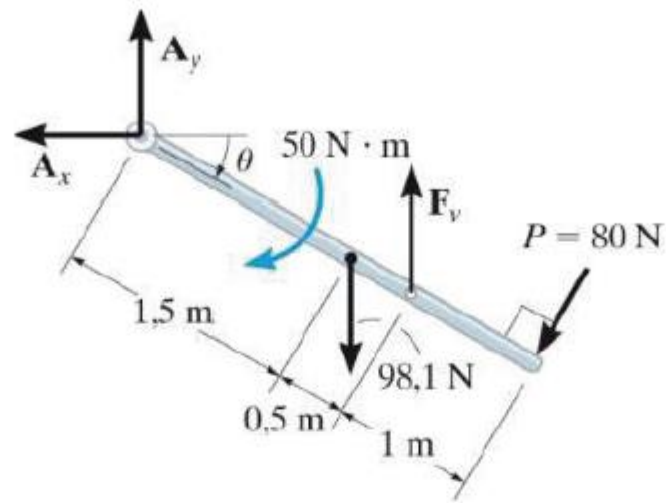
$$U_V = -\left(\frac{1}{2}k{s_2}^2 - \frac{1}{2}k{s_1}^2\right)$$

$$s_1 = 0.75 - 0.5 = 0.25\text{m}$$

$$s_2 = 2 + 0.75 - 0.5 = 2.25\text{m}$$

$$U_V = -\left[\frac{1}{2}30(2.25^2) - \frac{1}{2}30(0.25^2)\right] = -75.0\,J$$

Voorbeeld 7.1



Kracht P

$U_P = Pds \qquad U_P = 80\,(4.712) = 377.0\,J$

$$ds = \theta r = \frac{\pi}{2}(1.5 + 0.5 + 1) = 4.712m$$

Reactiekrachten in de scharnieren

Reactiekrachten A_x *en* A_y verplaatsen niet en leveren dus geen arbeid.

Totale arbeid

$$U = U_W + U_M + U_V + U_P$$

$$U = 147.2 + 78.5 - 75.0 + 377.0 = 528\,J$$

7.4 Principe van arbeid en energie

Omdat energie een scalaire grootheid is, wordt het principe van arbeid en energie voor een star lichaam:

$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

Oorspronkelijke kinetische translatie- en rotatie-energie + arbeid verricht door alle uitwendige krachten en/of koppels tussen begin- en eindpositie = uiteindelijke kinetische translatie- en rotatie-energie.

Omdat het lichaam star is, is er geen relatieve beweging tussen de inwendige krachten, zodat er ook geen inwendige arbeid verricht wordt.

Wanneer verschillende starre lichamen scharnierend aan elkaar zijn bevestigd, door middel van niet uitrekbare kabels zijn verbonden of star met elkaar zijn verbonden kan de vergelijking worden toegepast op het totale stelsel van met elkaar verbonden lichamen.

7.4 Analyseprocedure (1/3)

Het principe van arbeid en energie wordt gebruikt om kineticavraagstukken op te lossen waarin snelheid, kracht en verplaatsing een rol spelen.

Kinetische energie (kinematische schema's)

- De kinetische energie van een lichaam bestaat uit twee delen:
  - Kinetische translatie-energie wordt gekoppeld aan de snelheid van het massamiddelpunt: $$T = \frac{1}{2} m {v_G}^2$$
  - Kinetische rotatie-energie wordt berekend met behulp van het traagheidsmoment om het massamiddelpunt: $$T = \frac{1}{2} I_G \omega^2$$
- Kinematische schema's voor snelheid zijn een handig hulpmiddel om v_G en ω te bepalen of om een relatie tussen v_G en ω te vinden.

7.4 Analyseprocedure (2/3)

Arbeid (vrijelichaamsschema)

- Teken een vrijlichaamsschema om alle krachten en koppels in kaart te brengen die arbeid verrichten op het lichaam terwijl het beweegt langs de baan.
- Een kracht verricht arbeid wanneer deze verplaatst wordt in de werkrichting van de kracht.
- De arbeid van krachten waarvan de grootte afhankelijk is van de verplaatsing, kan alleen berekend worden door te integreren.
- De arbeid van een gewicht: $U_W = -W\,\Delta y$
- De arbeid van een veer: $U_V = -\left(\frac{1}{2}k{s_2}^2 - \frac{1}{2}k{s_1}^2\right)$

  waarbij *k* de veerstijfheid en *s* de uitrekking of indrukking van de veer
- De arbeid van een koppel is het product van het koppel en de hoek in radialen waarover het verdraait $U_M = M\,d\theta$
- Omdat de termen van de arbeid algebraïsch opgeteld worden, is het van groot belang dat elke term het juiste teken krijgt.

7.4 Analyseprocedure (3/3)

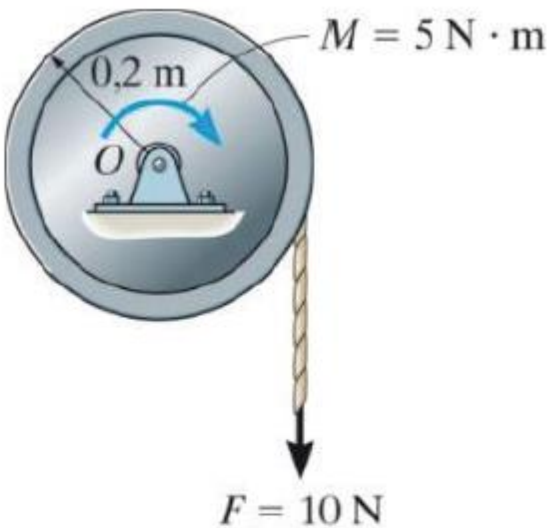
Principe van arbeid en energie

- Pas het principe van arbeid en energie toe: $$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

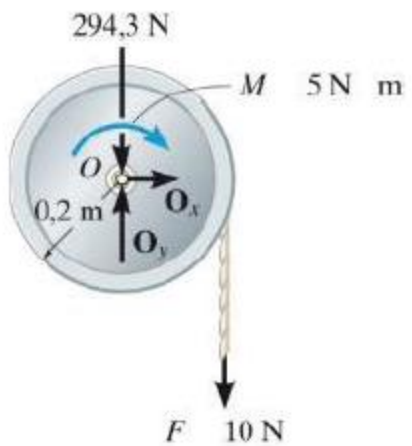
- Omdat dit een scalaire vergelijking is, kan er hooguit één onbekende mee worden opgelost als de vergelijking wordt toegepast op één enkel star lichaam.

Voorbeeld 7.2

De schijf van 30 kg is in het middelpunt scharnierend bevestigd. Bereken het aantal omwentelingen dat de schijf moet maken om vanuit rust een hoeksnelheid van 20 rad/s te bereiken. Op het touw wordt een constante kracht *F* = 10 N uitgeoefend en op de schijf een constant koppel *M* = 5 Nm.



Vrijlichaamsschema:

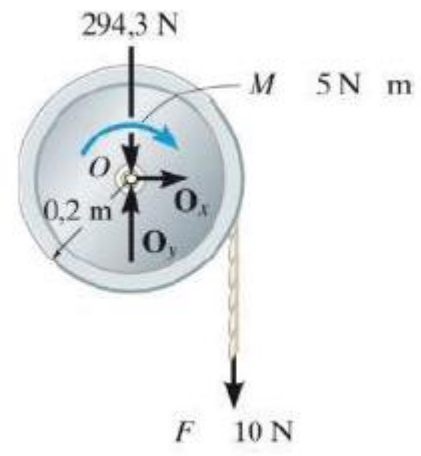


Voorbeeld 7.2

Kinetische energie

$T_1 = 0$ (rust)

$$T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \qquad T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ 30\ 0.2^2\right) 20^2 = 120\mathrm{J}$$



Principe arbeid en energie

$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

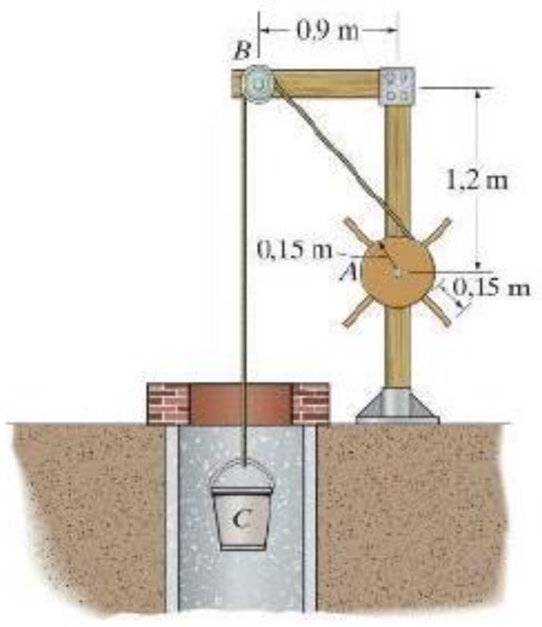
O_x, O_y *en* W *leveren geen arbeid omdat ze niet verplaatsen*

$$T_1 + (M\theta + Fs) = T_2$$

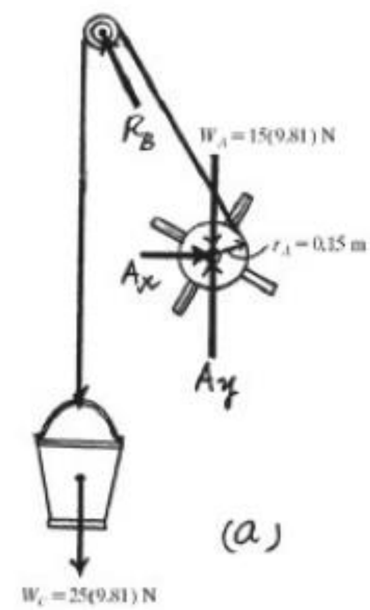
$$0 + (5\ \theta + 10\ \theta\ 0.2) = 120 \qquad \theta = 17.14\ rad = 2.73\ omwentelingen$$

Voorbeeld

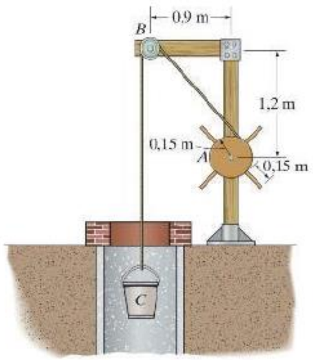
De emmer die 25 kg weegt, wordt vanuit stilstand losgelaten. Bepaal de snelheid van de emmer wanneer hij 3 meter is gevallen. De opwikkeltrommel A kan beschouwd worden als een cilinder van 15 kg en de spaken als dunne stangen die elk een massa hebben van 1kg. Laat het gewicht van de katrol buiten beschouwing.



Vrijlichaamsschema:



Voorbeeld



Kinetische energie en arbeid

$$\omega_A = \frac{v_C}{R_A} = \frac{v_C}{0.15}$$

$$I_A = \frac{1}{2}15(0.15)^2 + 4\left[\frac{1}{12}1(0.15)^2 + 1(0.225)^2\right] = 0.37875\ kg\ m^2$$

$$T = T_A + T_C = \frac{1}{2}I_A{\omega_A}^2 + \frac{1}{2}m_C{v_C}^2 = \frac{1}{2}(0.37875)\left(\frac{v_C}{0.15}\right)^2 + \frac{1}{2}\ 25\ {v_C}^2 = 20.9167\ {v_C}^2$$

$$U_{W_C} = W_C y_C = 25\ (9.81)\ 3 = 735.75\text{J} \qquad (W_A, A_x, A_y\ en\ R_B\ leveren\ geen\ arbeid)$$

$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2 \qquad 0 + 735.75 = 20.9167\ {v_C}^2$$

$$v_c = 5.93\ m/s$$