Lesweek 10 – HC 8 : Booglengte + Volume/massa van 3D-objecten en uitrekenen onbepaalde integralen

Cursustekst HOOFDSTUK 5, §5.2.3 tot §5.3

FORMULARIUM WISKUNDE

EXTRA voorbeelden in lesvideo op Toledo:
oefening 1b, 5 en 6 uit de oefenbundel

	CARTESISCH	PARAMETERVORM	POOLKROMME
OPPERVLAKTE	$dA = y\,dx$ of $dA = x\,dy$		$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$
VOLUME	Algemeen: $dV = A(h)\,dh$ $dV = \pi\, y^2\, dx$ of $dV = \pi\, x^2 dy$		
BOOGLENGTE	$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$		$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$

TO DO : VERVOLG BOOGLENGTE + (MOTIVATIE) VOLUME-AANPAK !

EXTRA voorbeelden in lesvideo op Toledo:
oefening 15, 20a en 24 uit de oefenbundel

Toepassing: booglengte cartesisch

Booglengteformule in cartesische coördinaten

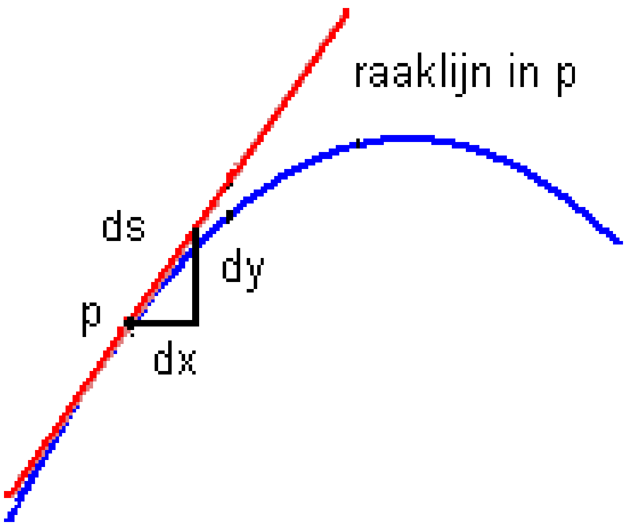
De *booglengte* van de kromme $y = f(x)$ tussen de punten p en q is gelijk aan

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [y']^2}\, dx}$$

met $p(a, f(a))$ en $q(b, f(b))$ en $a < b$.

ALGEMEEN

$$s = \int_{\dots}^{\dots} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$



Booglengte (deel) parameterkromme

Booglengteformule voor parameterkrommen

De booglengte langs de parameterkromme

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad t \in [t_a, t_b]$$

is

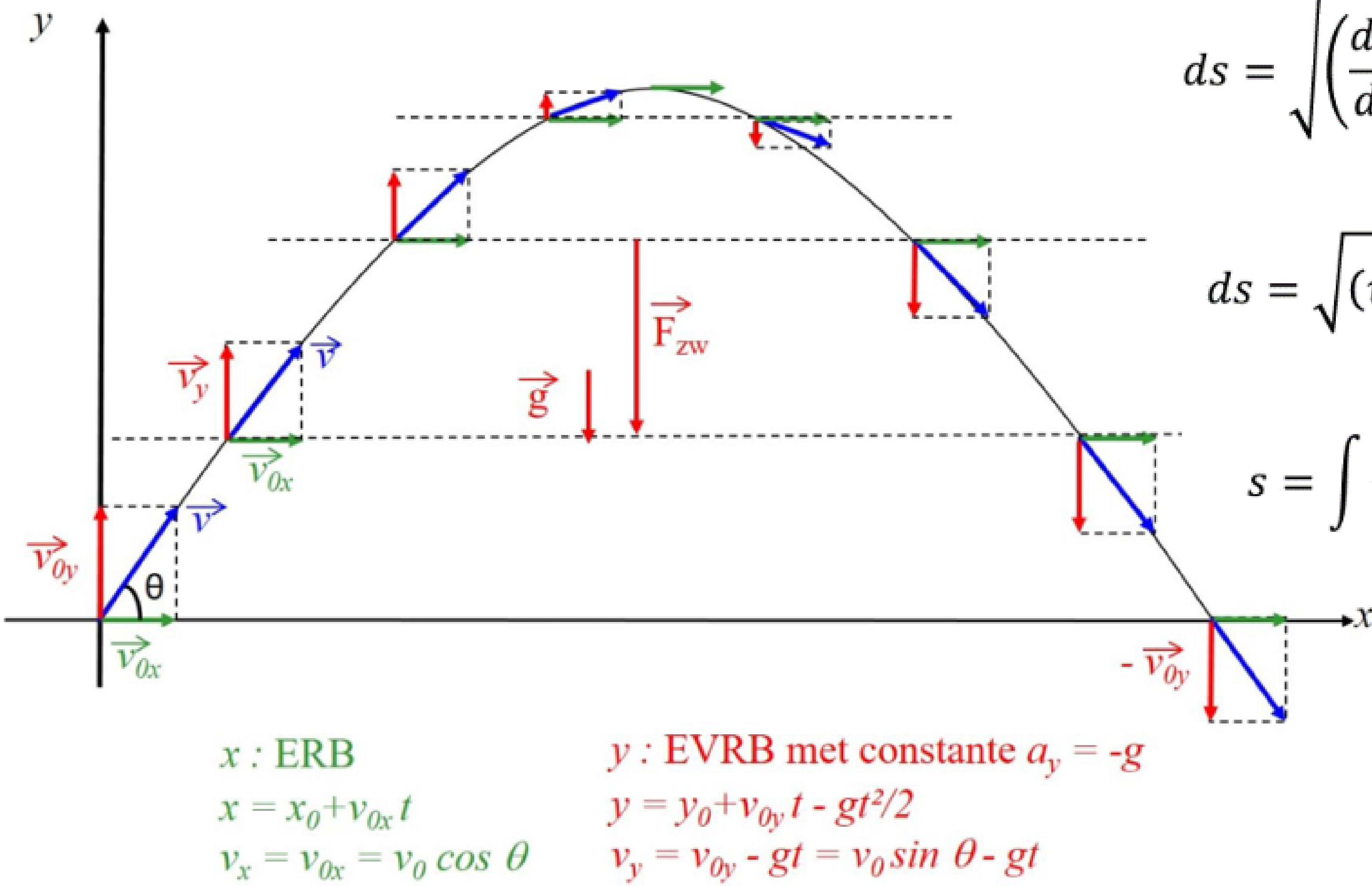
$$s = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

met $t_a < t_b$.

= LENGTE VAN SNELHEIDSVECTOR !!
die in elk punt raakt aan de baan van
het deeltje (beschreven in parametervorm)

mooie “mechanica-technische” interpretatie
s = afgelegde weg !!

Booglengte (deel) parameterkromme



$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

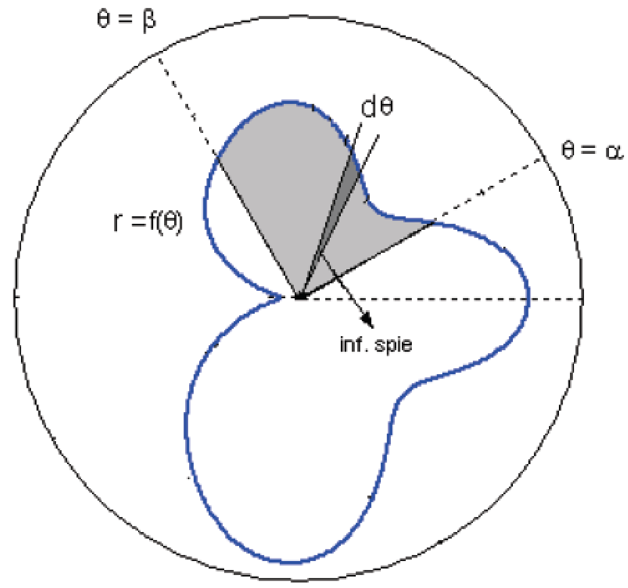
$$ds = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}\ dt$$

$$s = \int ds = \int \|\vec{v}\|\ dt$$

Bron figuur: Cursus Introductieweek Fysica (FABER, KU Leuven)

Oppervlakte + booglengte polair gebied

In tegenstelling tot bij afleiden, is nu een rechtstreekse “polaire aanpak” mogelijk !!



Basisformule poolkrommen

De oppervlakte van het gebied bepaald door $r = f(\theta)$ met $\alpha < \theta < \beta$ is gelijk aan

$$\text{Opp} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

Booglengteformule voor poolkrommen

De booglengte langs de kromme $r = f(\theta)$ met $\alpha < \theta < \beta$ is gelijk aan

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta$$

Booglengte poolkromme

Bewijs: Bij de polaire kromme $r = f(\theta)$ is

$$\left\{ \begin{array}{lll} x & = & r\cos(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) \\ y & = & r\sin(\theta) = f(\theta)\sin(\theta) \end{array} \right. \quad \boxed{\begin{array}{ll} \leftarrow & x(\theta) \\ \leftarrow & y(\theta) \end{array}}$$

Dit is de parametervergelijking van de kromme, waarbij de parameter nu gelijk is aan θ. De infinitesimale booglengte kunnen we dus bepalen aan de hand van de formule voor parameterkrommen:

$$\boxed{ds = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\; d\theta}$$

Nu is

$$x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$$

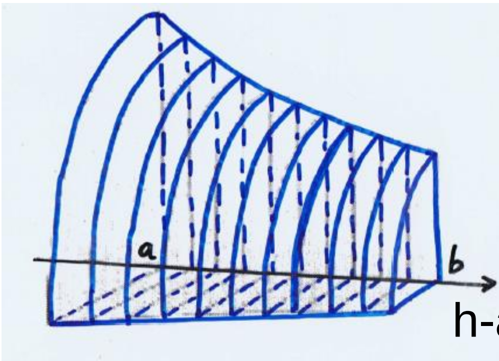
en

$$y'(\theta) = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

Daaruit volgt

$$\boxed{\begin{array}{lll} ds & = & \sqrt{(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)^2 + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)^2}\; d\theta \\ & = & \ldots \\ & = & \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\; d\theta \end{array}}$$

VOLUME-INTEGRAALFORMULES



h-as

$n \to \infty$

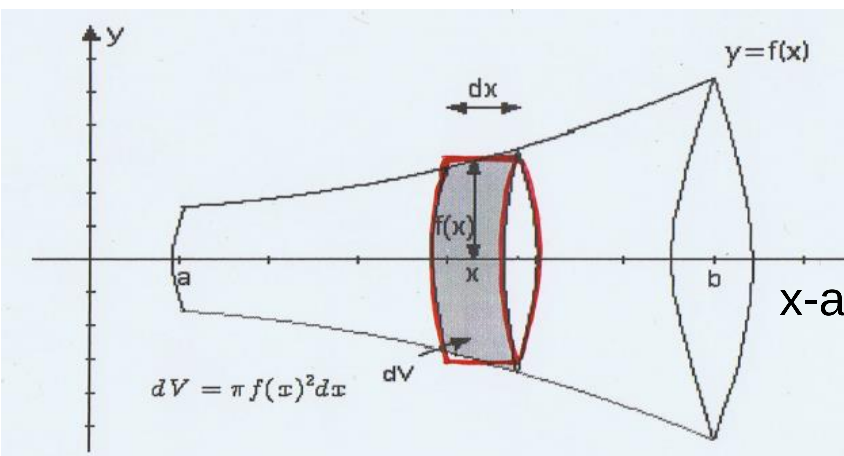
VOLUME = oneindige som van de volumes van flinterdunne schijven dV (aangesneden volgens asrichting !)

Integraalformule :

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(h)\,dh$$

oppervlakte dwarsdoorsnede op positie *h*

“dikte” van flinterdunne schijf



x-as

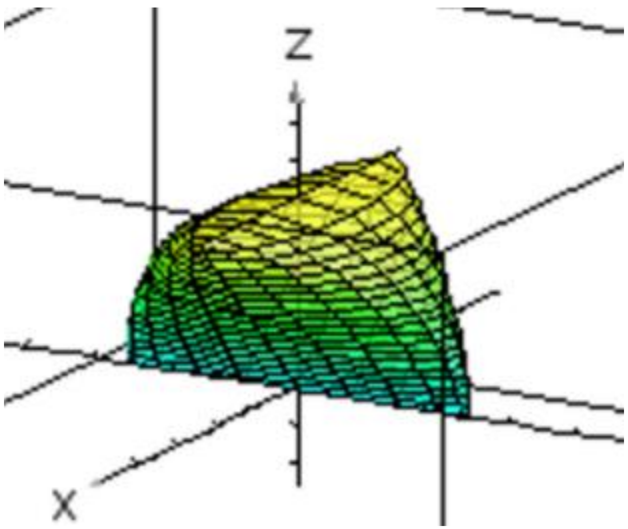
wenteling rond x-as

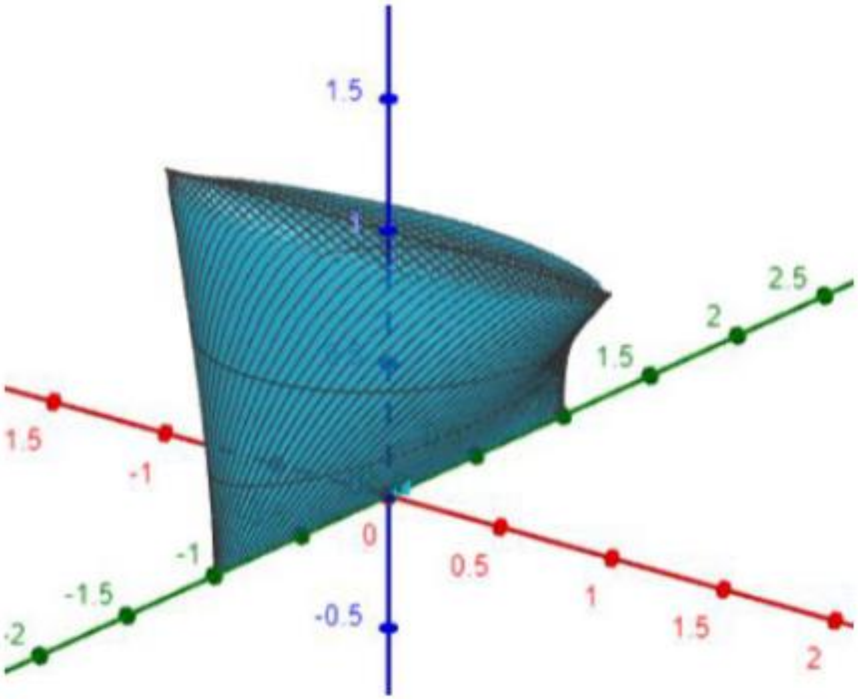
Speciaal geval: omwentelingslichamen ⇨ $A(x) = \pi \cdot y^2$

Oefeningen Volume

14. Bepaal het volume van een lichaam met een hoogte van 1m waarvan de dwarsdoorsnede op hoogte z een ellips is met halve assen z en $\sqrt{1-z^2}$.

(oplossing: 1,0472 m³)

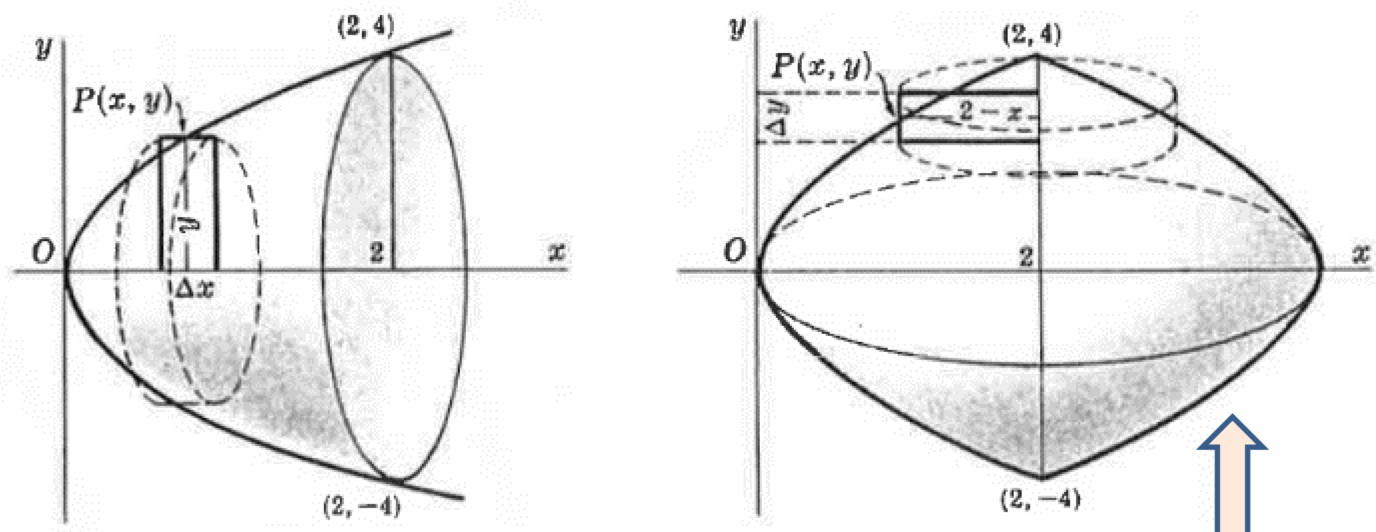




VOLUME-VOORBEELDEN

Bepaal de inhoud van het lichaam dat ontstaat door de oppervlakte tussen de parabool $y^2 = 8x$ en de rechte $x = 2$ in het eerste kwadrant, te laten wentelen om de x- as.

(oplossing: 16 π)



Bepaal de inhoud van het lichaam dat ontstaat door de oppervlakte tussen de parabool $y^2 = 8x$ en de rechte $x = 2$ te laten wentelen om deze rechte.

(oplossing: 256 π / 15)

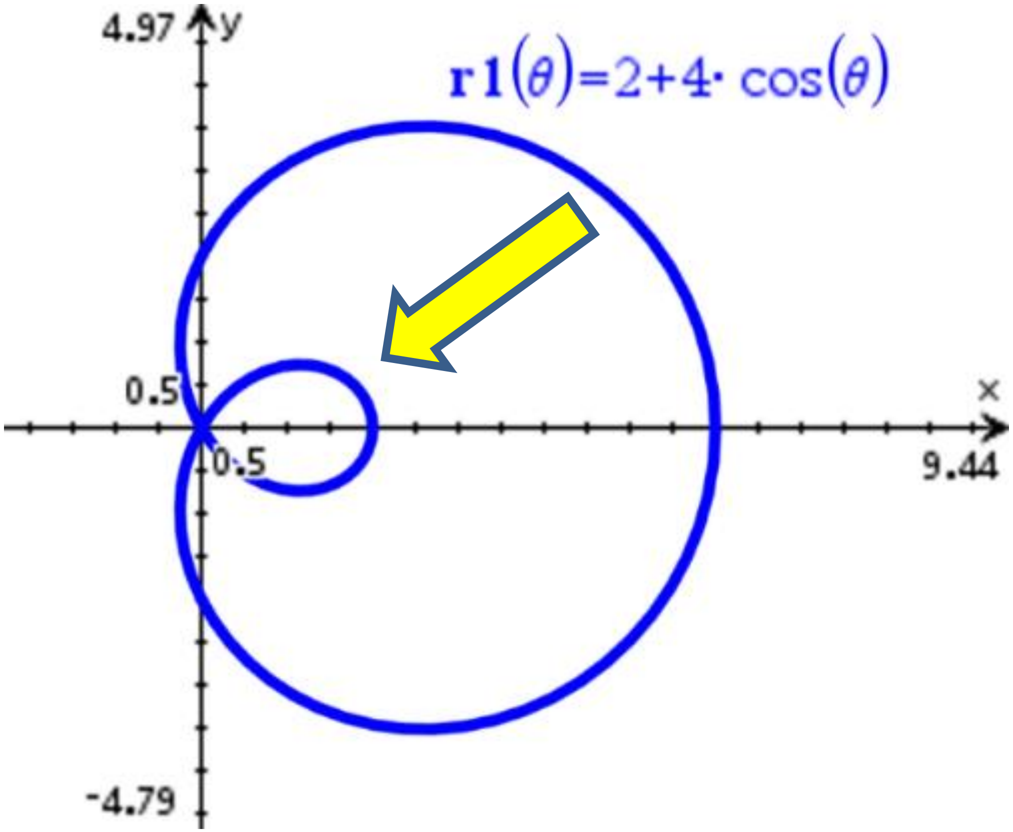
UHASSELT KU LEUVEN

VOLUME-VOORBEELDEN

Bereken het volume dat je bekomt door het kleine lusje

van de poolkromme r = 2 + 4 cos(θ) te laten wentelen om de x-as.

(oplossing: 2 π / 3)



REKENTECHNIEKEN: KERN VAN DE ZAAK

Vlot kunnen integreren = vlot kunnen omgaan met differentialen !!

Substitutiemethode (integralen) ←→ Kettingregel (bij afleiden)

Als $u = g(x)$ dan

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

$$= \int f\big(g(x)\big)\, d g(x)$$

UITREKENEN VAN ONBEPAALDE INTEGRALEN MOET JE BLIJVEN KUNNEN OM EERSTE ORDE DV OP TE LOSSEN (= HOOFDSTUK 6)

Partiële integratie ←→ Productregel (bij afleiden)

$$\int f \cdot dg = f \cdot g - \int g \cdot df$$