Lesweek 7 (HC 6) : Raakvlak, totale differentiaal, richtingsafgeleide en gradiënt

Cursustekst HOOFDSTUK 4, §4.5 tot en met §4.6

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

HOE FUNCTIE in 2 variabelen AFLEIDEN ?

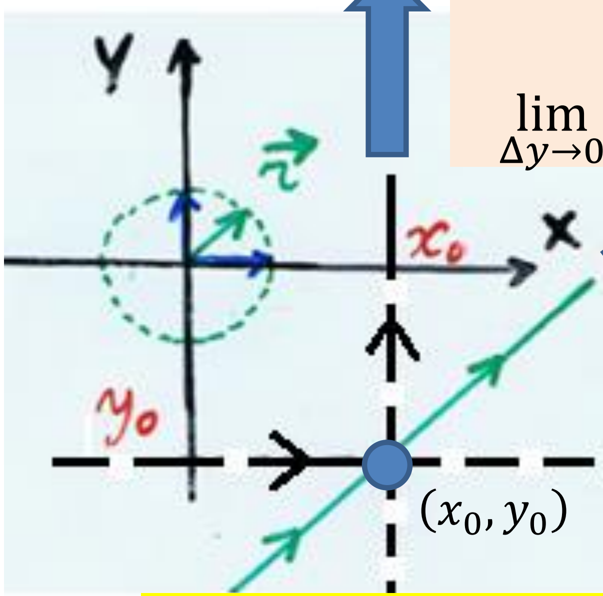
Afhankelijk van de richting !!

Er zijn 2 hoofdrichtingen: // met x-as of // met y-as

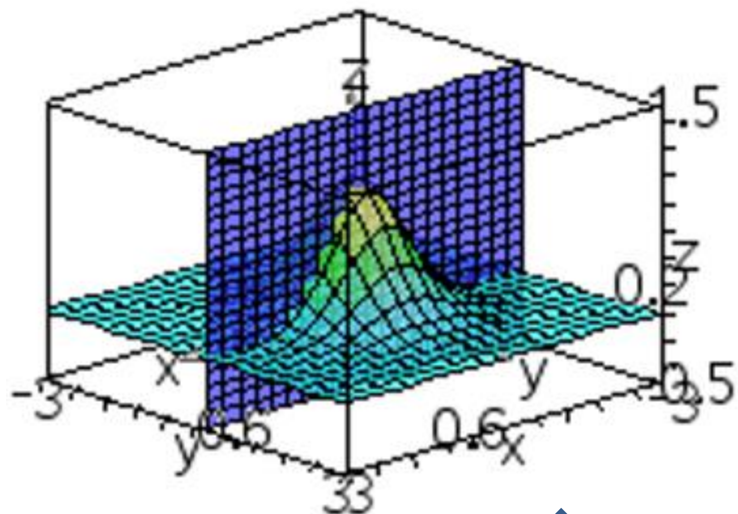
PARTIEEL AFLEIDEN naar x of naar y

Partiële functie: $z = f(x_0, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$



?! willekeurige richting (§ 4.5)



Partiële functie: $z = f(x, y_0)$

= doorsnede van 3D-opp

met verticaal vlak $y = y_0$!!

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Opfrissing raaklijn en 1D-differentiaalbegrip

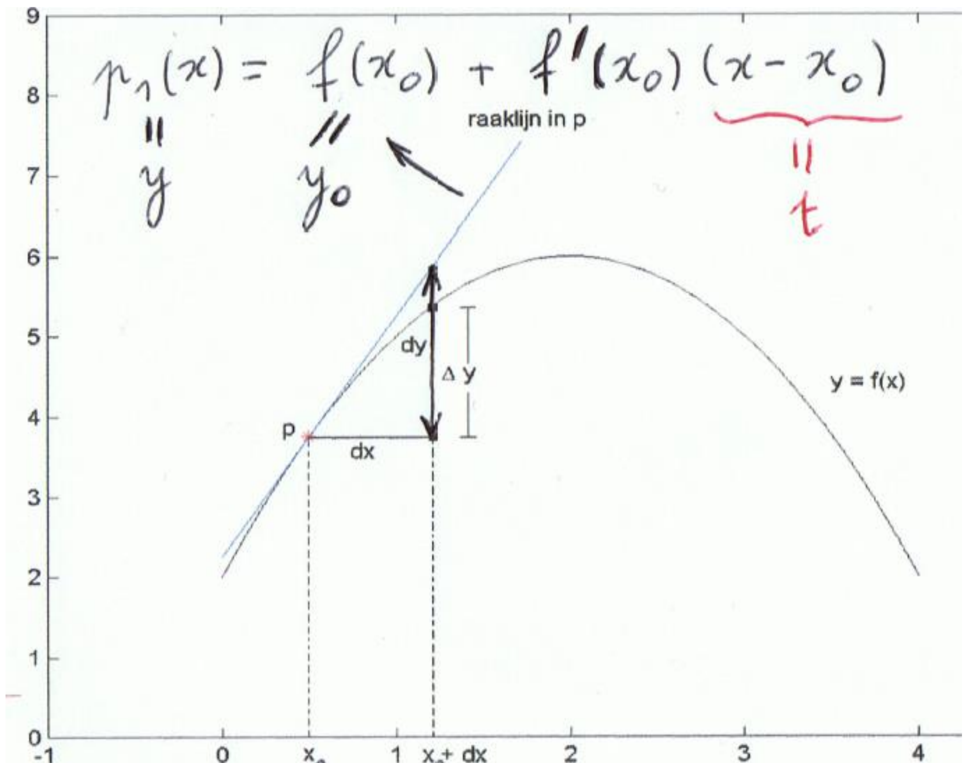
Leibniz-notatie:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{notatie}{=} \frac{dy}{dx}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

"punt" "richtingsvector"

$$\underset{\substack{\| \\ y}}{p_1(x)} = \underset{\substack{\| \\ y_0}}{f(x_0)} + f'(x_0)\underbrace{(x - x_0)}_{\substack{\| \\ t}}$$



Raakvlakvergelijking (§ 4.4.1)

START: **parameter**vergelijking raakvlak in punt P(x_0, y_0, z_0) van $z = f(x,y)$.

(raak)punt P

2 richtingsvectoren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \qquad (k, \ell \in \mathrm{IR})$$

Vervolgens kan je k en ℓ elimineren om cartesische vergelijking te bekomen!

$$k = x - x_0 \ \text{ EN} \qquad \ell = y - y_0$$

CARTESISCHE vergelijking

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Concreet voorbeeld oefenbundel

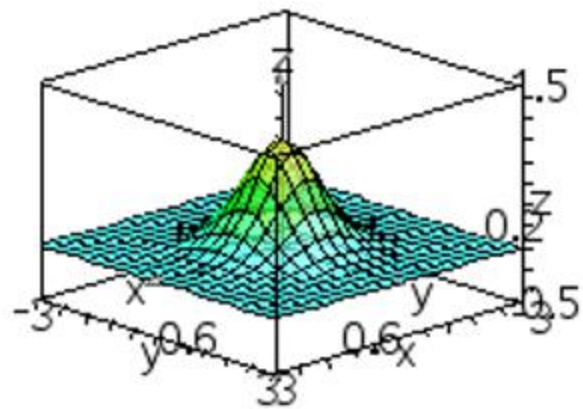
Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan het gegeven oppervlak in het gegeven punt.

a) $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ en $p(1,2,f(1,2))$.

$(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, e^{-5})$

$z1(x,y)$	$\mathbf{e}^{-x^2-y^2}$
$\frac{d}{dx}(z1(x,y))\vert x=1 \text{ and } y=2$	$-2\cdot \mathbf{e}^{-5}$
$\frac{d}{dy}(z1(x,y))\vert x=1 \text{ and } y=2$	$-4\cdot \mathbf{e}^{-5}$

REKENTOESTEL



RAAKVLAK-vergelijking is: $z = e^{-5} + (-2e^{-5})\cdot(x-1) + (-4e^{-5})\cdot(y-2)$

$\Rightarrow$ $e^5 \cdot z = 1 + (-2)\cdot(x-1) + (-4)\cdot(y-2)$

$\Rightarrow$ $e^5 \cdot z = -2x + 4y + 11$ $\Rightarrow$ $2x - 4y + e^5 \cdot z - 11 = 0$

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Opfrissing raaklijn en 1D-differentiaalbegrip

Leibniz-notatie:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{notatie}{=} \frac{dy}{dx}$$

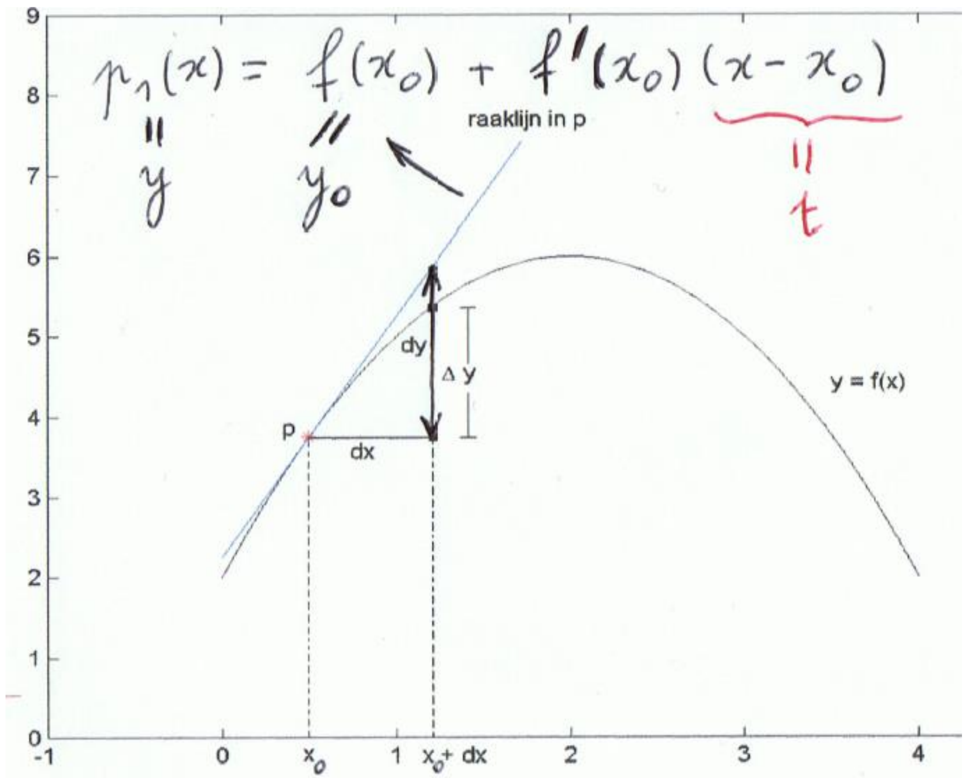
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

"punt" "richtingsvector"

Differentiaal van een functie:

$$dy = \underbrace{f'(x_0)\, dx}_{\substack{\| \\ p_1(x_0 + dx) - p_1(x_0)}}$$

TOENAME VOLGENS RAAKLIJN



UHASSELT KU LEUVEN

Van raakvlak naar totale differentiaal (§ 4.4.2)

Cartesische vergelijking raakvlak

$$z = p_1(x,y) = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Definitie totale differentiaal

$$\boxed{\begin{aligned} dz &:= p_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - \overset{z_0}{\overset{\shortparallel}{p_1(x_0,y_0)}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta y \end{aligned}}$$

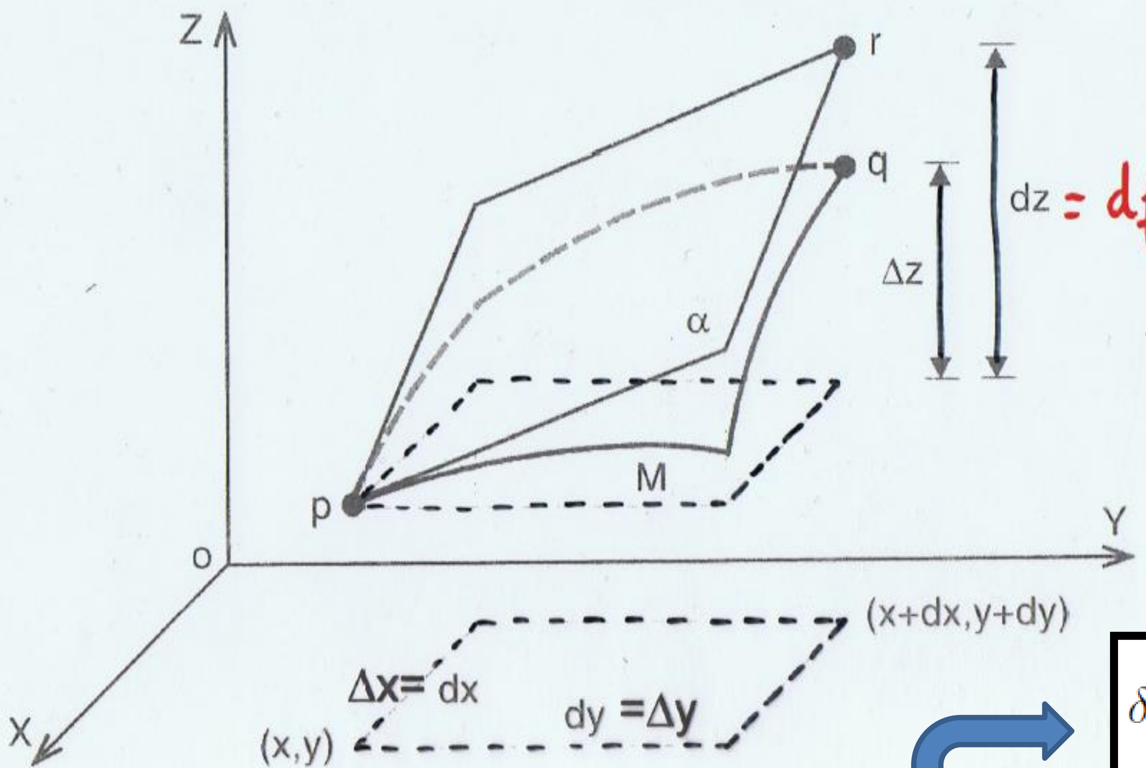
Speciaal geval: z = f(x,y) = x → dz = dx = Δx

en z = f(x,y) = y → dz = dy = Δy

Meetkundige betekenis dz

Als dx en dy klein zijn, dan is dz een goede benadering voor Δz, de toename in z-waarde langs het oppervlak bij eenzelfde toename $(\Delta x, \Delta y)$=(dx,dy)

$$dz \approx \Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$



$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

TOTALE DIFFERENTIAAL FORMULE IS PERFECT UITBREIDBAAR NAAR MEER ONBEKENDEN !

$$\boxed{\delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \delta y}$$

OPMERKING: Verwar je nooit met **onzekerheidsanalyse-formule (BES)** !

Voorbeeld totale differentiaal

Smelten balkvormig ijsblok

b = 10 cm, db = - 0,03 cm $(= -0{,}3\%)$
ℓ = 15 cm, dℓ = - 0,03 cm $(= -0{,}2\%)$
h = 20 cm, dh = - 0,05 cm $(= -0{,}25\%)$

V = b·ℓ·h

$$V = 10 \cdot 15 \cdot 20 = 3000\ cm^3,\ \ \Delta V = 9{,}97 \cdot 14{,}97 \cdot 19{,}95 - 3000 = -22{,}4445\ cm^3$$

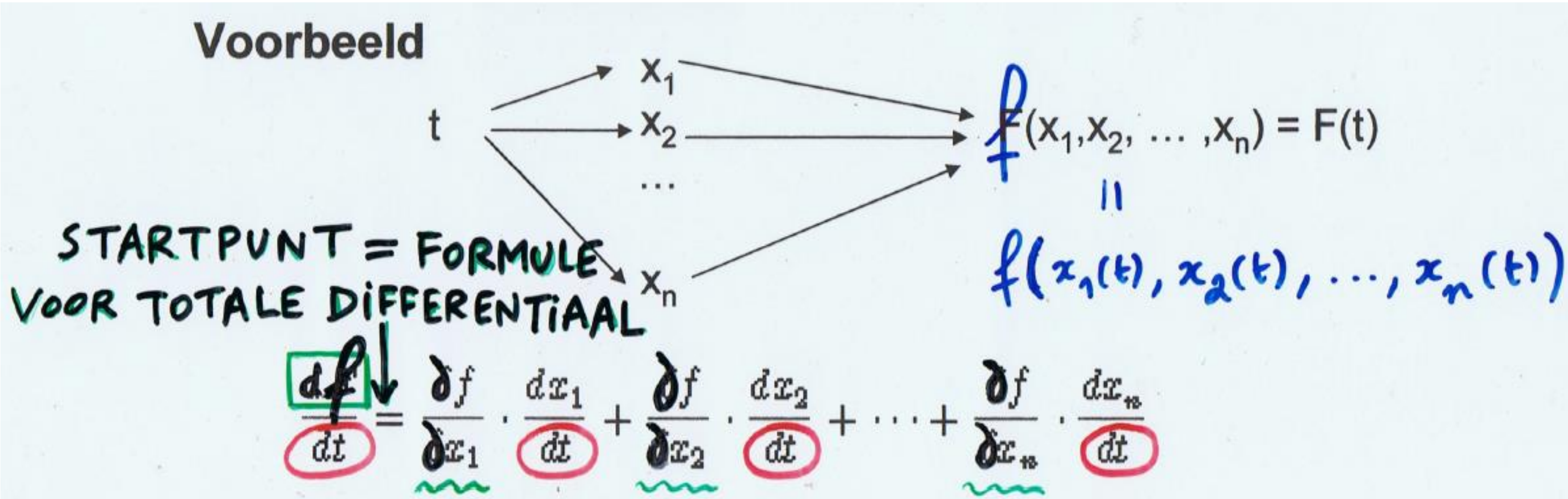
Benadering met behulp van totale differentiaal

$$dV = \frac{\partial V}{\partial b} db + \frac{\partial V}{\partial \ell} d\ell + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \ell h \cdot db + bh \cdot d\ell + b\ell \cdot dh = -22{,}5$$

RELATIEF BEKEKEN !

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = -0{,}3\% + (-0{,}2\%) + (-0{,}25\%) = -0{,}75\%$$

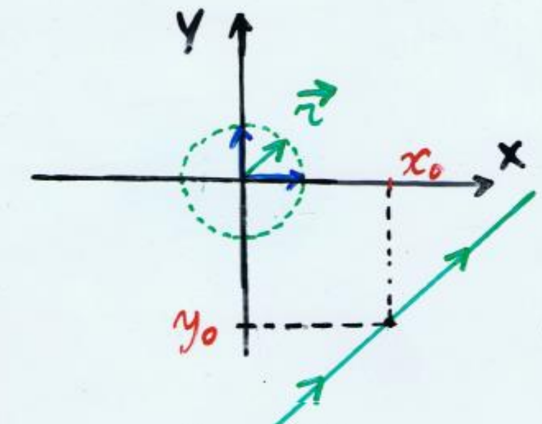
Van totale differentiaal naar kettingregel



denk opnieuw aan het ijsblok-voorbeeld
waarbij nu F(t) = V(t) = b(t) · ℓ(t) · h(t)

$$\frac{dV}{dt} = \ell(t)h(t) \cdot \frac{db}{dt} + b(t)h(t) \cdot \frac{d\ell}{dt} + b(t)\ell(t) \cdot \frac{dh}{dt}$$

§ 4.5.1 Richtingsafgeleide concept



$\vec{i} = \vec{e}_x = (1,0)$

$\vec{j} = \vec{e}_y = (0,1)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{r} = (r_1, r_2) \\ |\vec{r}| = 1 \quad !!!! \end{array}}$$

Je kan ook andere richting uitlopen dan enkel in een hoofdrichting (d.w.z. // X-as of // Y-as) !!

$$|\vec{r}| = \|\vec{r}\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 1$$

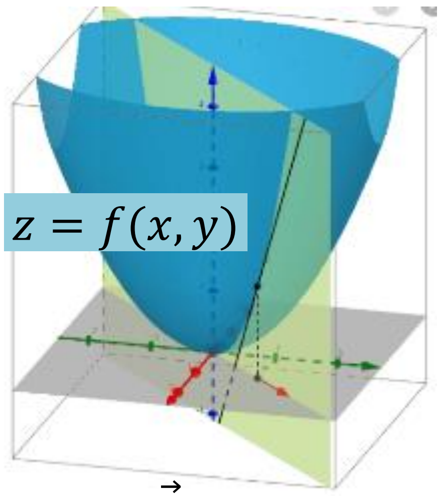
CRUCIAAL!

parametrisatie van rechte: $\begin{cases} x = x_0 + t\, r_1 \\ y = y_0 + t\, r_2 \end{cases}$
$(t \in \mathbb{R})$

BEPERK OPPERVLAK NU TOT DEZE RECHTE

$$F(t) = f(x_0 + t\, r_1,\, y_0 + t\, r_2)$$

DAN $\boxed{F'(0) \overset{\text{DEF.}}{=} D_{\vec{r}} f(x_0, y_0)}$



richtingsafgeleide van z = f(x,y) in het punt (x_0, y_0) in de richting van $\vec{r}$

Richtingsafgeleide praktisch uitrekenen

$$F(t) = f(x_0 + t r_1, y_0 + t r_2)$$

DAN $\boxed{F'(0) \overset{\text{DEF.}}{=} D_{\vec{r}} f(x_0, y_0)}$ $= \frac{df}{dt}|t = 0$

Herinner formule van totale differentiaal / kettingregel :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy \qquad \Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

STEL nu overal t = 0 !

$$\Rightarrow \frac{df}{dt}|t = 0 \quad = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot r_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot r_2$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{r}$$

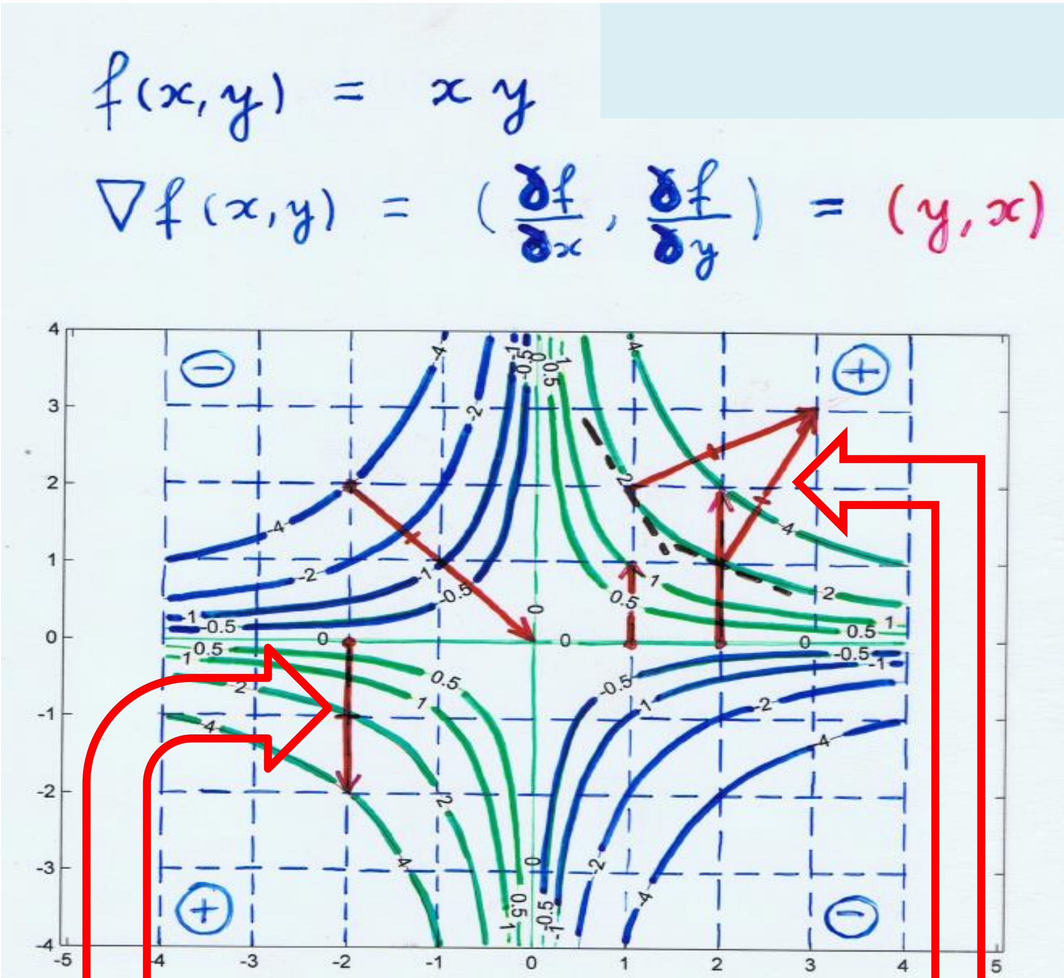
SCALAIR PRODUCT

SUPER INTERESSANTE VECTOR !!

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

van **gradiëntvector**
met **richtingsvector**

Definitie en voorbeeld gradiënt-vectorveld



$\nabla f(-2,0) = (0,-2)$

$\nabla f(2,1) = (1,2)$

BELANGRIJK !

De gradiëntvector van een oppervlak z = f(x,y) is dus een 2D-vector die gelegen is op de niveaulijnenkaart en aangrijpt in het punt waar je de gradiënt wil berekenen !!

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y}$$

(1, 0)

(0, 1)

UHASSELT KU LEUVEN

Eigenschappen gradiëntvector (§ 4.5.2)

1. $\nabla f(x_0,y_0)$ WIJST IN RICHTING WAARIN f HET STERKST TOENEEMT VANUIT (x_0,y_0). $(\theta = 0)$

2. BIJ EEN VERPLAATSING VAN 1 EENHEID IN RICHTING VAN $\nabla f(x_0,y_0)$ ZAL DE TOENAME VAN f (Δf) ONGEVEER GELIJK ZIJN AAN $|\nabla f(x_0,y_0)|$. $(\theta = 0)$

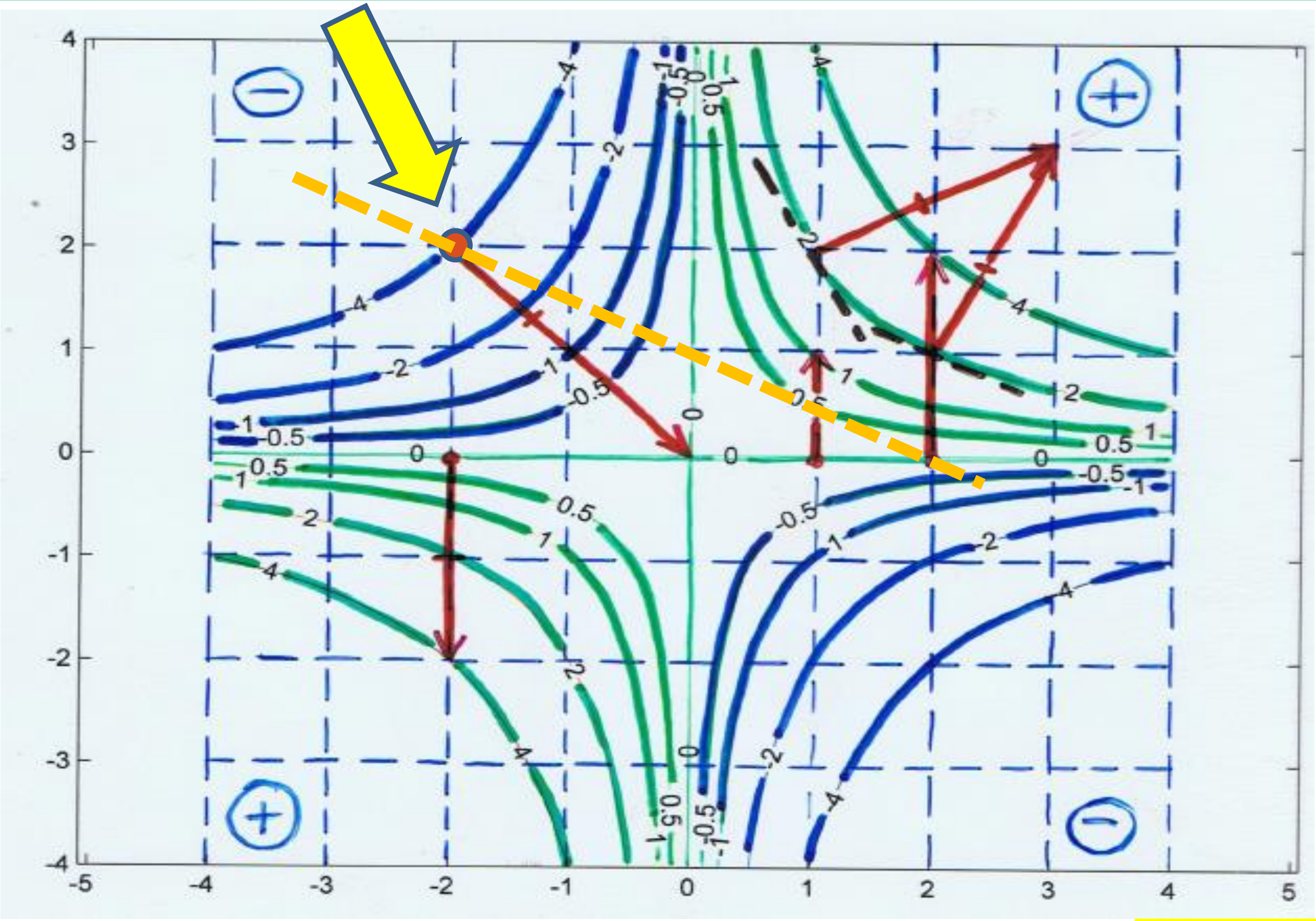
3. $\nabla f(x_0,y_0)$ STAAT LOODRECHT OP DE RAAKLIJN AAN DE NIVEAULIJN DIE DOOR (x_0,y_0) GAAT. $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$

MOTIVATIE
volgt uit scalair product formule van de RICHTINGS-AFGELEIDE maar nu m.b.v. hoek θ tussen gradiënt- en richtingsvector !

$$\begin{aligned} D_{\vec{r}} f(x_0,y_0) &= \nabla f(x_0,y_0) \bullet \vec{r} \\ &= |\nabla f(x_0,y_0)| \cdot \underbrace{|\vec{r}|}_{=1} \cdot \cos(\theta) \end{aligned}$$

Voorbeeld richtingsafgeleide

$z = x \cdot y$

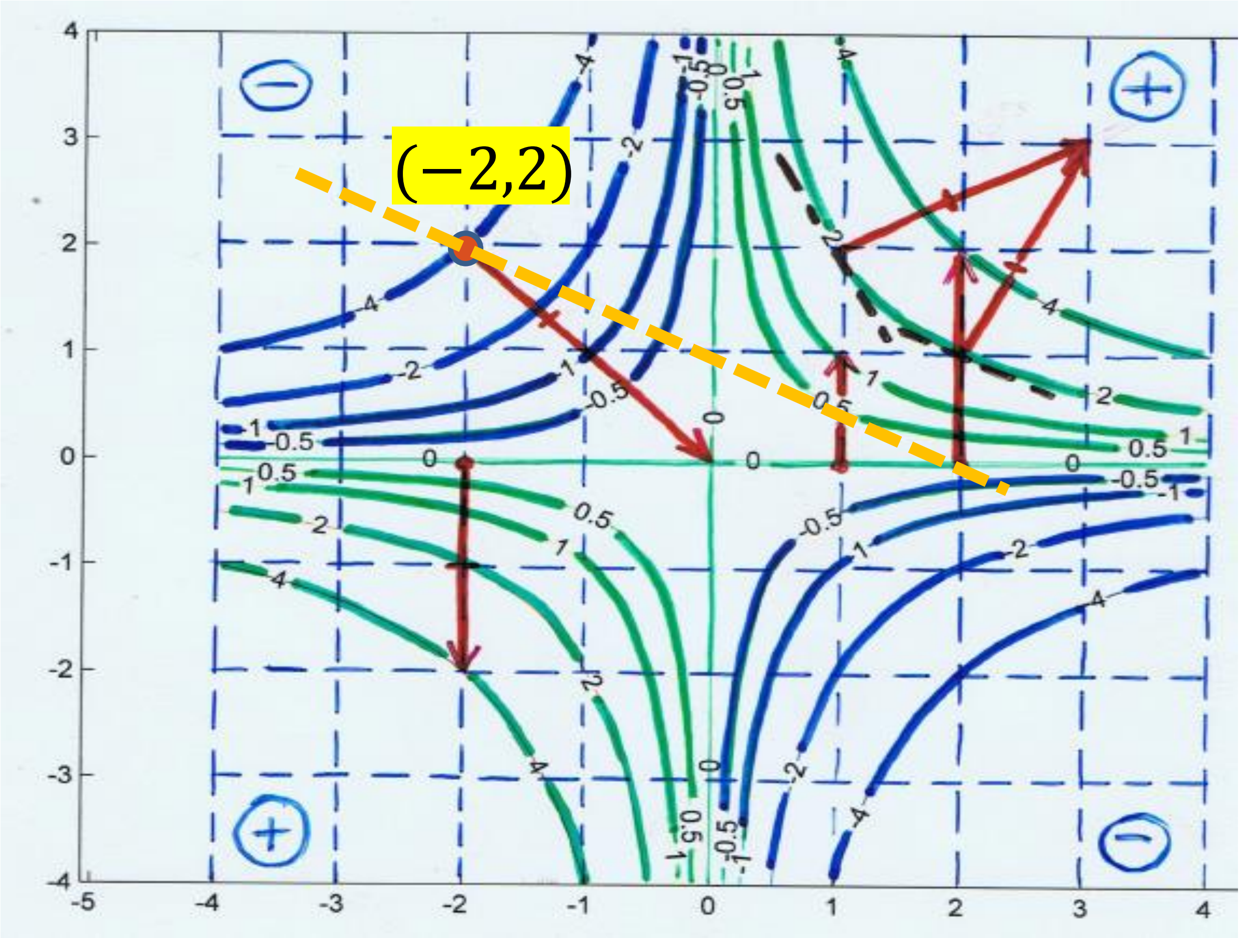


Welke hellingsgraad ondervindt een wandelaar in het punt $(-2{,}2)$

wanneer hij in de richting van de y-as loopt volgens de rechte $y = -\frac{1}{2}x + 1$?

UHASSELT KU LEUVEN

Voorbeeld richtingsafgeleide



$$\alpha = \text{Bgtg}\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)$$
$$= 1{,}21406\, rad$$
$$= 69°33'38.46''$$

$$\tan(\alpha) = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

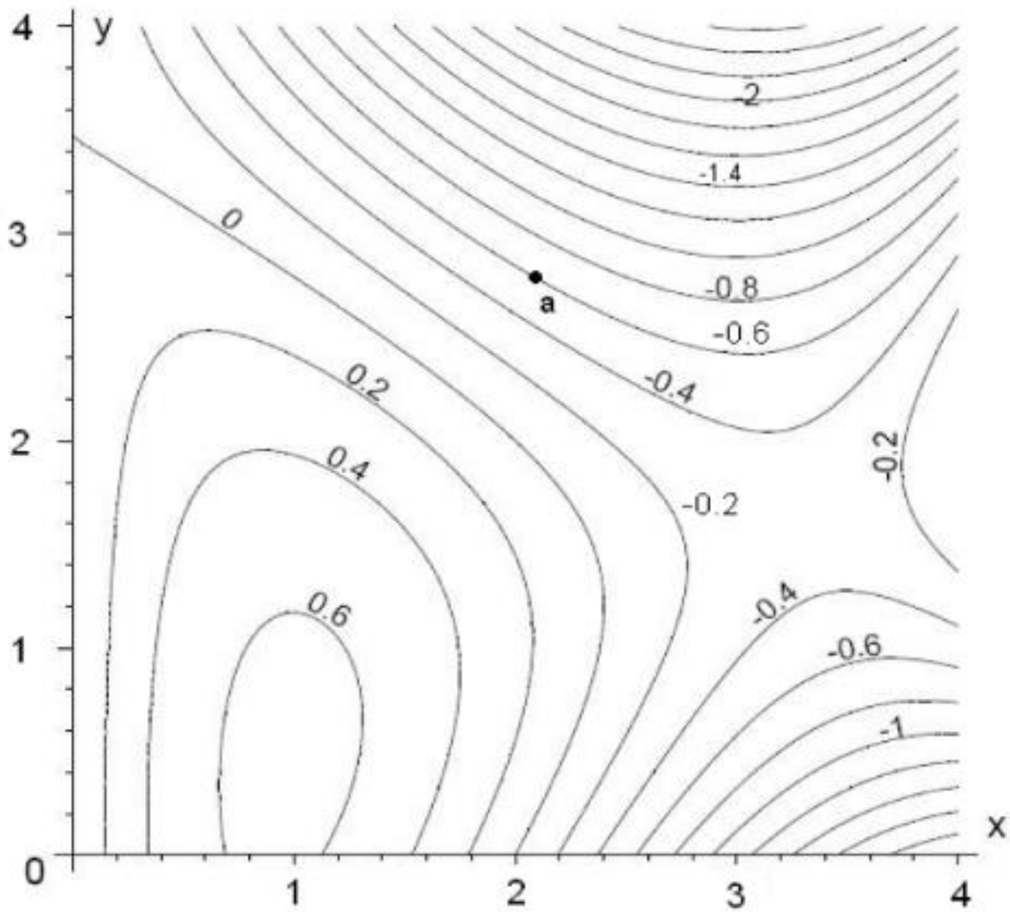
Steilte van de helling in graden ??

BESLUIT :

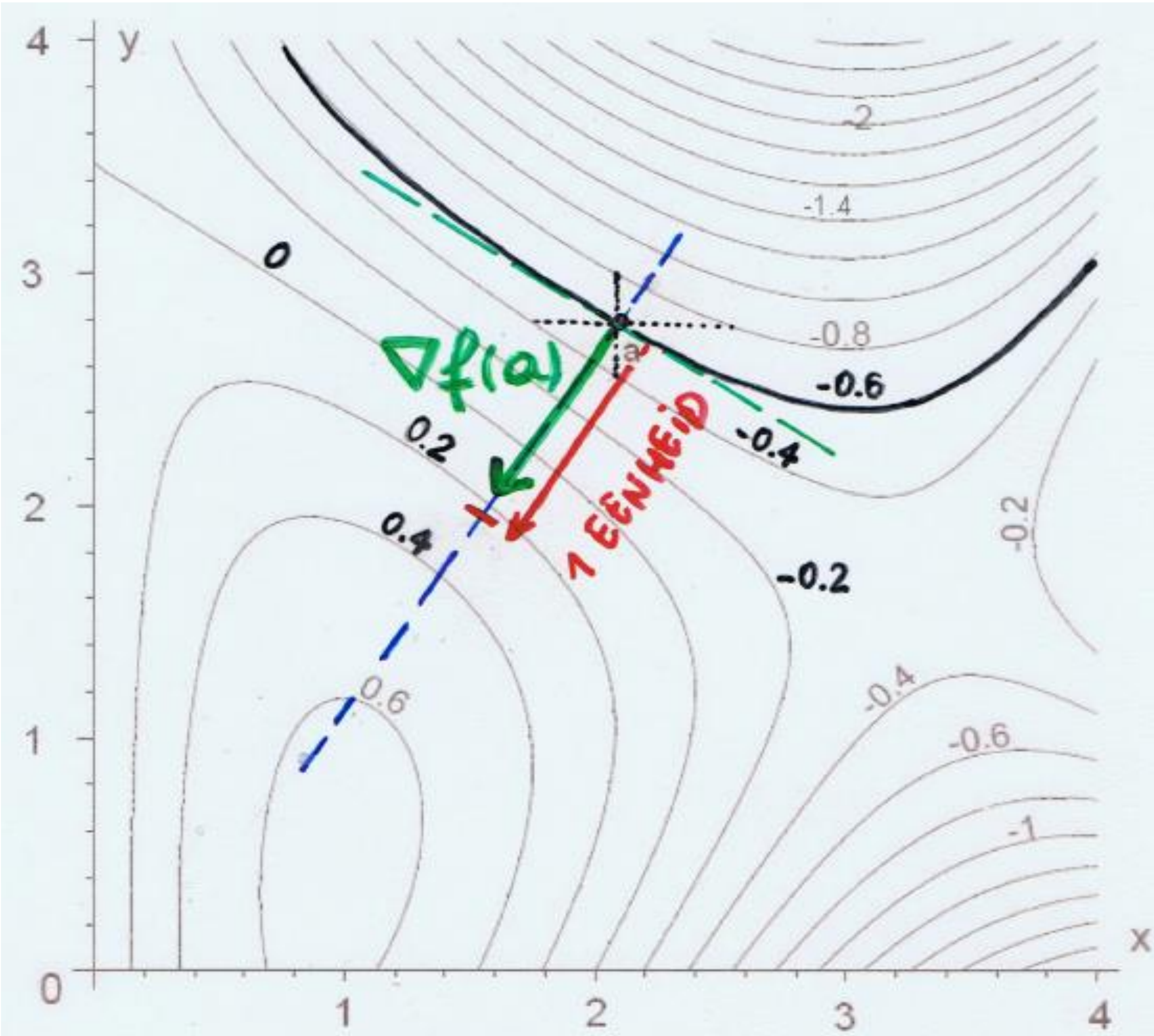
$$D_{\vec{r}}f(-2,2) = \nabla f(-2,2\,) \bullet \vec{r} = (2,-2) \bullet \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{5}} = 2{,}683$$

Toepassing gradiënt (cursus pag. 80)

Ook zonder concreet functievoorschrift is het nu mogelijk om m.b.v. de drie eigenschappen de gradiëntvector op een stafkaart te schetsen !!



Toepassing gradiënt (oplossing)



UITLEG

Wanneer je je vanuit a 1 eenheid verplaatst in de richting van de gradiëntvector, stijg je van niveau **-0,6** naar een niveau iets groter dan **0,2**.

$\nabla f(a)$ is net iets meer dan 0,8 eenheden lang!