Hoofdstuk 8 – Kinetica van een star lichaam in een plat vlak: stoot en hoeveelheid van beweging

Eric Demeester

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

Overzicht H1 t.e.m. H8

H1	–	H2	–	H3	–	H4	Puntmassa's, waarvoor oriëntatie niet van belang is
H5	–	H6	–	H7	–	H8	Starre lichamen, waarvoor oriëntatie van belang is

Kinematica

$v = ds/dt$

$a = dv/dt$

$a \cdot ds = v \cdot dv$

$$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta}/dt$$
$$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$$
$$\alpha \cdot d\theta = \omega \cdot d\omega$$
$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{B|A}$$
$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{B|A} - \omega^2 \boldsymbol{r}_{B|A}$$

Tweede wet van Newton

$\Sigma F = m \cdot a$

- momentopname

Arbeid en energie

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **plaats**:

$\Sigma \int F \cdot ds = m \cdot v_2^2 / 2 - m \cdot v_1^2 / 2$

- 2 discrete plaatsen
- Enkel conservatieve krachten => behoud van mechanische energie: $T1 + V1 = T2 + V2$

Stoot en hoeveelheid van beweging

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **tijd** en gebruik $a = dv/dt$:

$\Sigma \int F \cdot dt = m \cdot v_2 - m \cdot v_1$

- 2 discrete tijdstippen
- Behoud van hoev. v. beweging:
  - Geen externe stoten
  - Botsingen en explosies

Overzicht H1 t.e.m. H8

Basisformules voor de dynamica

KINEMATICA

H1

Rechtlijnige beweging van een puntmassa

variabele a	*constante* $a = a_c$
$a = \frac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \frac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a\,ds = v\,dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Kromlijnige beweging van een puntmassa

x-, y-, z-coördinaten		*r-, θ-, z-coördinaten*	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

n-, t-, b-coördinaten

$v = \dot{s}$ $\quad a_t = \dot{v} = v\frac{dv}{ds}$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

Relatieve beweging

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

H5

Beweging van een star lichaam om een vaste as

variabele α	*constante* $\alpha = \alpha_c$
$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

Voor punt P

$s = \theta r \quad v = \omega r \quad a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{scharnier})} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{scharnier})}$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende en roterende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \times (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

KINETICA

H6

Massatraagheidsmoment $I = \int r^2\,dm$

Evenwijdige-assenstelling $I = I_G + md^2$

Gyrostraal $k = \sqrt{\frac{I}{m}}$

H2

Bewegingsvergelijkingen

Puntmassa $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

H6

Star lichaam (beweging in het platte vlak) $\Sigma F_x = m(a_G)_x$, $\Sigma F_y = m(a_G)_y$, $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

H3

Principe van arbeid en energie

$T_1 + U_{1-2} = T_2$

Kinetische energie

Puntmassa $T = \frac{1}{2}mv^2$

H7

Star lichaam (beweging in het platte vlak) $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

Arbeid

Variabele kracht $U_F = \int F\cos\theta\,ds$

Constante kracht $U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$

Gewicht $U_W = -W\,\Delta y$

Veer $U = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$

Koppelmoment $U_M = M\,\Delta\theta$

Vermogen en rendement

$P = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \quad \epsilon = \frac{P_{\text{uit}}}{P_{\text{in}}} = \frac{U_{\text{uit}}}{U_{\text{in}}}$

Wet van behoud van energie

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potentiële energie

$V = V_g + V_e$, waarbij $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

H4

Principe van stoot en impuls

Puntmassa $m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$

Star lichaam $m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Behoud van impuls

$\Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_2$

Restitutiecoëfficiënt $e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

H8

Principe van stootmoment en impulsmoment

Puntmassa $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$, waarbij $H_O = (d)(mv)$

Star lichaam (beweging in het platte vlak) $(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$, waarbij $H_G = I_G\omega$; $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$, waarbij $H_O = I_O\omega$

Behoud van impulsmoment

$\Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_2$

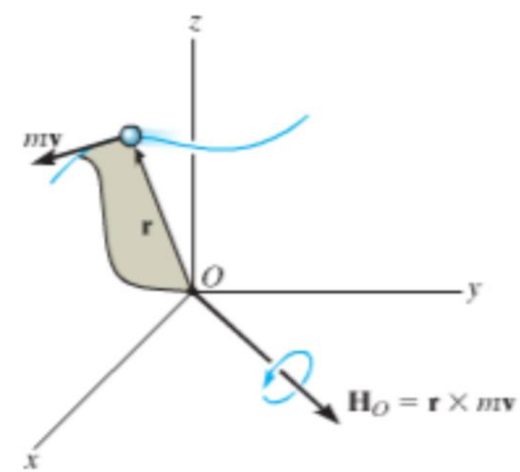
Even recapituleren (H4) …

- Het principe van stoot(moment) en (Mv)HvB gebruiken we voor vraagstukken waarbij kracht, snelheid en tijd een rol spelen;

- => wat is MvHvB van een puntmassa? MvHvB ($\boldsymbol{H_O}$) van een puntmassa om punt *O* = vectoriële grootheid verkregen door het moment ($\boldsymbol{r}\times$) t.o.v. punt *O* te berekenen van de hoeveelheid van beweging ($m\boldsymbol{v}$): $\boldsymbol{H_O} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$
- We hebben vorige les afgeleid:

$$(H_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_O \, dt = (H_O)_2$$

"stootmoment"



Deze les (H8) …

- We leiden formules af voor de hoeveelheid van beweging (HvB) en het moment van de hoeveelheid van beweging (MvHvB) van een star lichaam in een plat vlak

- Principes van stoot & HvB, en stootmoment & MvHvB toepassen voor vraagstukken op te lossen waarbij kracht, snelheid en <u>tijd</u> een rol spelen;

- Speciaal geval: behoud van HvB en behoud van MvHvB

8.1 Hoeveelheid van beweging (HvB) en moment van hoeveelheid van beweging (MvHvB)

Hoeveelheid van beweging $\boldsymbol{L}$ (HvB): dit bekomen we door de hoeveelheden van beweging van alle puntmassa's van het lichaam vectorieel op te tellen:

$$\boldsymbol{L} = \sum m_i \boldsymbol{v_i}$$

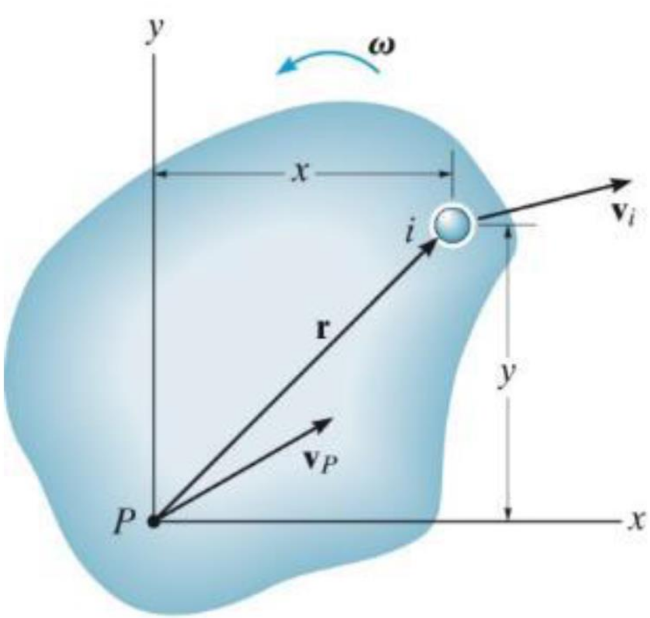
- Uit de definitie van zwaartepunt volgt: $\sum m_i \boldsymbol{v_i} = m\boldsymbol{v_G}$
- Dus:

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{v_G}$$

→ Dit is een vectoriële grootheid met een grootte (mv_G), richting (zelfde als $\boldsymbol{v_G}$) en zin (zelfde als $\boldsymbol{v_G}$)

8.1 HvB en MvHvB

Moment van hoeveelheid van beweging $\boldsymbol{H}$ (MvHvB):



Het lichaam in de tekening ondervindt een algemene beweging in een plat vlak.

Van punt *P* kennen we de snelheid $\boldsymbol{v_P}$, en het lichaam heeft een gekende hoeksnelheid ω.

We leiden het MvHvB van het lichaam af door eerst naar het MvHvB van puntmassa *i* te kijken, en dit dan te integreren over het hele lichaam: het MvHvB van de *i*-de puntmassa is:

$$(\boldsymbol{H_P})_i = r_i \times m_i \boldsymbol{v_i}$$

Snelheid $\boldsymbol{v_i}$ kunnen we uitdrukken in functie van $\boldsymbol{v_P}$ en ω: $\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{v_P} + \omega \times \boldsymbol{r_i}$

8.1 HvB en MvHvB

Moment van hoeveelheid van beweging $\boldsymbol{H}$ (MvHvB):

$$(\boldsymbol{H_P})_i = r_i \times m_i \boldsymbol{v_i}$$

Linkerlid en rechterlid ontbinden we in hun x- en y-componenten ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ en $\boldsymbol{k}$ zijn eenheidsvectoren volgens x-, y- en z-as respectievelijk), en we werken de vectoriële producten uit:

$$(H_P)_i\boldsymbol{k} = m_i(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) \times \left[(v_P)_x\boldsymbol{i} + (v_P)_y\boldsymbol{j} + \omega\boldsymbol{k} \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})\right]$$
$$(H_P)_i = -m_i y(v_P)_x + m_i x(v_P)_y + m_i\omega r_i^2$$

Als we deze formule integreren over het hele lichaam *m* (en m_i vervangen door *dm*):

$$H_P = -\left(\int ydm\right)(v_P)_x + \left(\int xdm\right)(v_P)_y + \left(\int r^2dm\right)\omega$$

8.1 HvB en MvHvB

$$H_P = -\left(\int y dm\right)(v_P)_x + \left(\int x dm\right)(v_P)_y + \left(\int r^2 dm\right)\omega$$

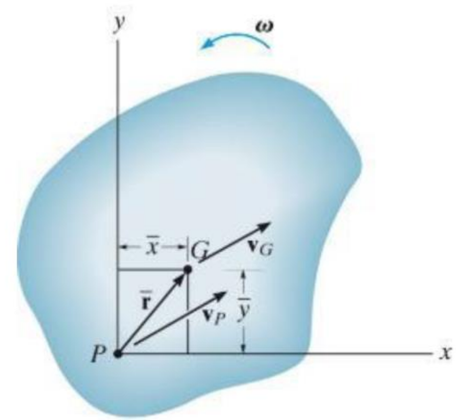
- Volgens definitie massamiddelpunt: $\int y dm = m\bar{y} = m y_G$ met $\bar{y}$ de y-coördinaat van *G* t.o.v. *P* (idem: $\int x dm = m\bar{x} = m x_G$);
- $\int r^2 dm$ is het massatraagheidsmoment I_P t.o.v. *P*;

Dus:

$$H_P = -m\bar{y}(v_P)_x + m\bar{x}(v_P)_y + I_P\omega$$

Als *G* samenvalt met *P*, dan is $\bar{x} = \bar{y} = 0$ en dus:

$$\boxed{H_G = I_G\omega}$$



8.1 HvB en MvHvB

$\boldsymbol{H_G}$: een vectoriële grootheid met grootte $I_G\omega$ $[kg \cdot m^2/s]$ en richting en zin bepaald door $\boldsymbol{\omega}$

Vergelijking: $H_P = -m\bar{y}(v_P)_x + m\bar{x}(v_P)_y + I_P\omega$ kunnen we ook schrijven in functie van het massamiddelpunt *G*, gebruik makend van:

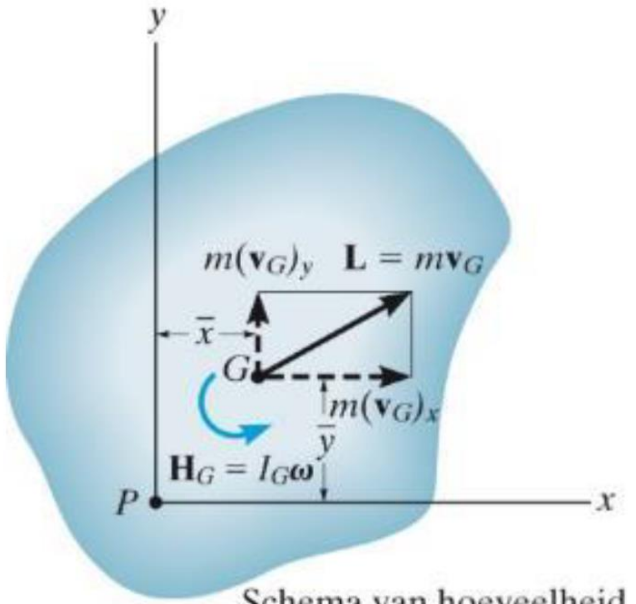
- $I_P = I_G + m\left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)$
- $\boldsymbol{v_G} = \boldsymbol{v_P} + \omega \times \boldsymbol{r_G}$

Uitwerking hiervan (zie handboek) geeft:

$$H_P = -m\bar{y}(v_G)_x + m\bar{x}(v_G)_y + I_G\omega$$

of:

$$\boldsymbol{H_P} = \boldsymbol{r_G} \times m\boldsymbol{v_G} + I_G\boldsymbol{\omega}$$

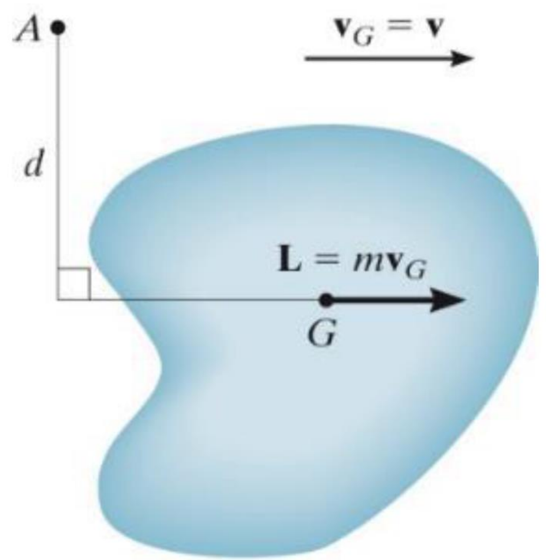


Schema van hoeveelheid van beweging van het lichaam

8.1 HvB en MvHvB: translatie

Bij een zuivere (rechtlijnige of kromlijnige) translatie, geldt $\omega = 0$. Bijgevolg:

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{v_G}$$
$$\boldsymbol{H_G} = I_G\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$$



Translatie

MvHvB ten opzichte van een willekeurig ander punt $A \neq G$ (momentarm *d*):

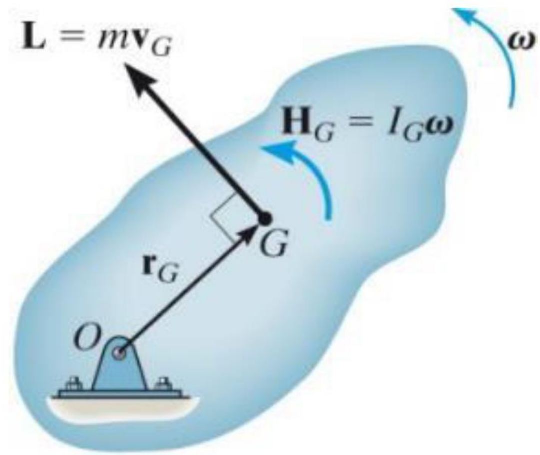
$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{v_G}$$
$$H_A = d \cdot mv_G$$

(positief in tegenwijzerzin)

8.1 HvB en MvHvB: rotatie om een vaste as

Bij een rotatie om een vaste as, geldt:

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{v_G}$$
$$\boldsymbol{H_G} = I_G\boldsymbol{\omega}$$



Rotatie om een vaste as

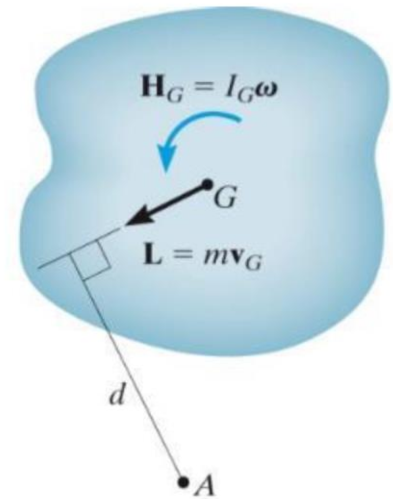
Soms is het beter om het MvHvB rond scharnierpunt O te nemen. Vermits $\boldsymbol{v_G}$ loodrecht staat op $\boldsymbol{r_G}$ en $v_G = r_G\omega$ geldt:

$$H_O = r_G(mv_G) + I_G\omega = r_G(m\, r_G\, \omega) + I_G\omega = \left(I_G + mr_G^2\right)\omega = I_O\omega$$

8.1 HvB en MvHvB: algemene beweging

Bij een algemene beweging in een plat vlak geldt:

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{G}}$$
$$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{G}} = I_G\boldsymbol{\omega}$$



Algemene beweging in een plat vlak

MvHvB ten opzichte van een willekeurig ander punt $A \neq G$ (momentarm *d*):

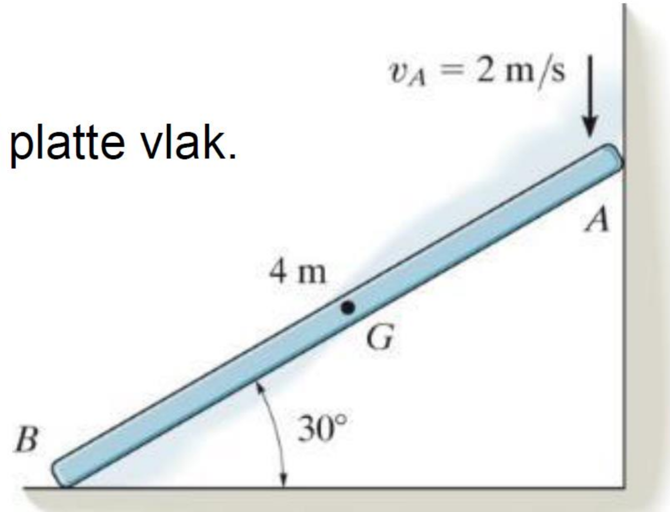
$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{G}}$$
$$H_A = I_G\omega + d \cdot mv_G$$

Indien A het ogenblikkelijke rotatiecentrum is, wordt dit:

$$H_{OR} = I_{OR}\omega$$

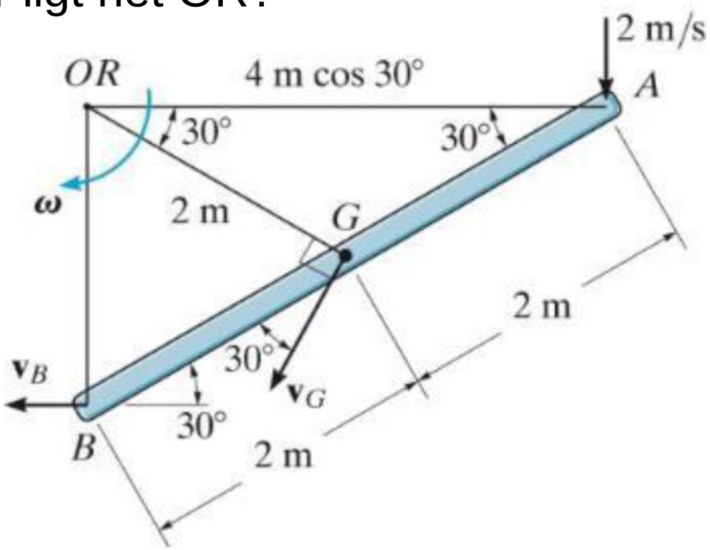
8.1 Voorbeeld 8.1

Op een bepaald ogenblik beweegt de dunne stang van 5 kg op de manier zoals is weergegeven. Bepaal het moment van hoeveelheid van beweging om punt *G* en om het *OR* op dit ogenblik.



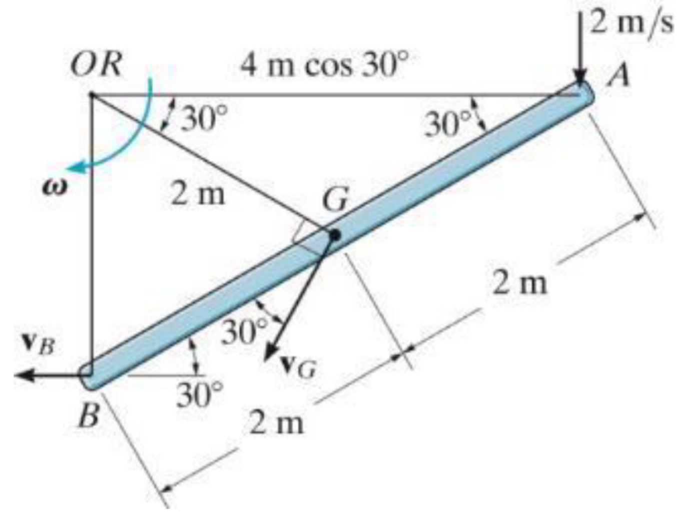
De staaf ondergaat een algemene beweging in het platte vlak.

Waar ligt het OR?



8.1 Voorbeeld 8.1

Op een bepaald ogenblik beweegt de dunne stang van 5 kg op de manier zoals is weergegeven. Bepaal het moment van hoeveelheid van beweging om punt *G* en om het *OR* op dit ogenblik.



$$\omega = \frac{2}{4\ \cos 30} = 0.5774\ rad/s$$

$$v_G = \omega\, r_G = 0.5774\ (2) = 1.155\ \mathrm{m/s}$$

$$H_G = I_G \omega = \left[\frac{1}{12}(5)4^2\right] 0.5774 = 3.85\ kg\ m^2/s$$

$$H_{OR} = I_G \omega + d\ (m v_G) = \left[\frac{1}{12}(5)4^2\right] 0.5774 + 2(5)1.155 = 15.4\ kg\ m^2/s$$

OF

$$H_{OR} = I_{OR}\ \omega = \left[\frac{1}{12}(5)4^2 + (5)2^2\right] 0.5774 = 15.4\ kg\ m^2/s$$

8.2 Principe van stoot en HvB

Het principe van stoot en HvB kan afgeleid worden door de bewegingsvergelijking en kinematica te *combineren*.

De verkregen vergelijking geeft een directe oplossing van vraagstukken waarin kracht, snelheid en tijd een rol spelen.

Stoot en HvB

Translatievergelijking van een star lichaam: $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{G}} = m\frac{d\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{G}}}{dt}$

Vermits de massa *m* constant is, geldt: $\sum \boldsymbol{F} = \frac{d(m\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{G}})}{dt}$

Beide zijden vermenigvuldigen met *dt* en integreren, geeft:

$$\boxed{\sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}dt = m(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{G}})_2 - m(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{G}})_1}$$

Principe van stoot en hoeveelheid van beweging

Soortgelijk aan wat we zagen voor puntmassa's, alleen opletten dat je hier de snelheden van het massamiddelpunt gebruikt!

8.2 Principe van stoot en HvB

Stootmoment en MvHvB

Rotatievergelijking van een star lichaam: $\sum \boldsymbol{M_G} = I_G \boldsymbol{\alpha} = I_G \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$

<u>Indien</u> het massatraagheidsmoment I_G constant is, geldt: $\sum \boldsymbol{M_G} = \frac{d(I_G \boldsymbol{\omega})}{dt}$

Beide zijden vermenigvuldigen met *dt* en integreren, geeft:

$$\boxed{\sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M_G} dt = I_G \boldsymbol{\omega}_2 - I_G \boldsymbol{\omega}_1}$$

Principe van stootmoment en moment van hoeveelheid van beweging

Bij rotatie om een vaste as door punt *O*: $\sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M_O} dt = I_O \boldsymbol{\omega}_2 - I_O \boldsymbol{\omega}_1$

<u>Opmerking</u>: het massatraagheidsmoment I_G is niet steeds constant, ook niet in de oefeningen in dit vak!

8.2 Principe van stoot en HvB

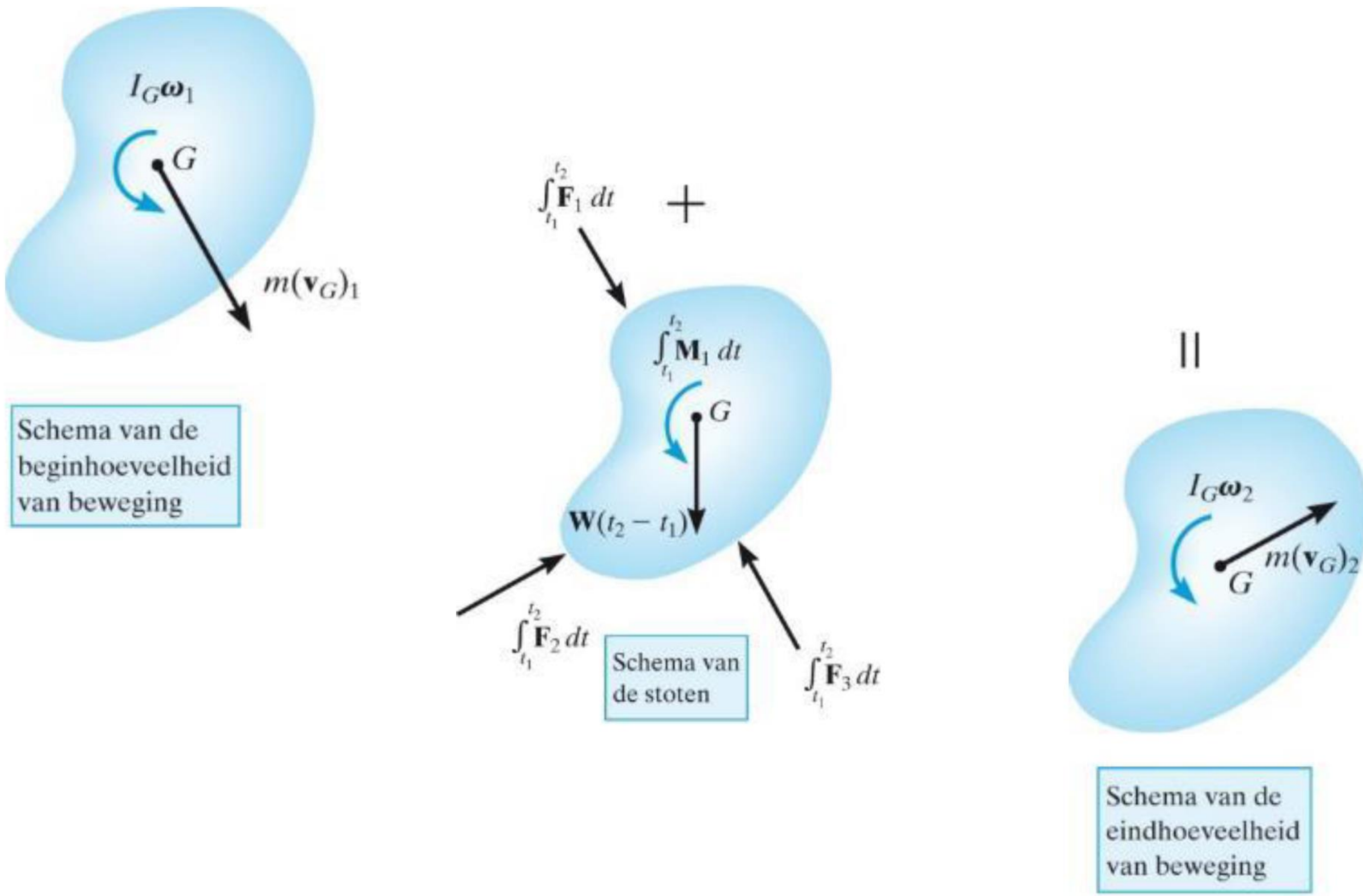
Toepassing van bovenstaande principes levert dus 3 scalaire vergelijkingen op die de beweging van een star lichaam in een plat vlak beschrijven:

$$m\,(v_{Gx})_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m\,(v_{Gx})_2$$

$$m\,(v_{Gy})_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m\,(v_{Gy})_2$$

$$I_G\omega_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_G\,dt = I_G\omega_2$$

8.2 Principe van stoot en HvB



8.2 Principe van stoot en HvB

De vergelijkingen kunnen ook toegepast worden op een stelsel van aan elkaar gebonden lichamen:

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{Hoeveelheid van beweging} \\ \text{van het stelsel}\end{matrix}\right)_{x_1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{Stoot van} \\ \text{het stelsel}\end{matrix}\right)_{x_{(1-2)}} = \left(\sum \begin{matrix}\text{Hoeveelheid van beweging} \\ \text{van het stelsel}\end{matrix}\right)_{x_2}$$

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{Hoeveelheid van beweging} \\ \text{van het stelsel}\end{matrix}\right)_{y_1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{Stoot van} \\ \text{het stelsel}\end{matrix}\right)_{y_{(1-2)}} = \left(\sum \begin{matrix}\text{Hoeveelheid van beweging} \\ \text{van het stelsel}\end{matrix}\right)_{y_2}$$

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{Moment van hoeveelheid} \\ \text{van beweging van het stelsel}\end{matrix}\right)_{O_1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{Stootmoment} \\ \text{van het stelsel}\end{matrix}\right)_{O_{(1-2)}} = \left(\sum \begin{matrix}\text{Moment van hoeveelheid} \\ \text{van beweging van het stelsel}\end{matrix}\right)_{O_2}$$

Gebruik in dat geval wel hetzelfde referentiepunt *O* voor het stootmoment en MvHvB voor <u>alle</u> lichamen van het stelsel.

8.2 Analyseprocedure (1/3)

De principes van stoot en hoeveelheid van beweging worden gebruikt om kinetische vraagstukken op te lossen waarin snelheid, kracht en tijd een rol spelen.

Vrijlichaamsschema (VLS)

- Bepaal het vaste *x*-*y*-*z*-referentievlak en teken het VLS
- Bepaal de richting en zin van de begin- en eindsnelheid van het massamiddelpunt van het lichaam, v_G, en de hoeksnelheid ω van het lichaam
- Veronderstel de richting van de onbekende vectorcomponenten in de richting van de positieve assen van het assenstelsel
- Bereken het massatraagheidsmoment I_G of I_O

8.2 Analyseprocedure (2/3)

Principe van stoot en hoeveelheid van beweging

- Pas de drie scalaire vergelijkingen van stoot en hoeveelheid van beweging toe.
- Het moment van hoeveelheid van beweging van een star lichaam dat om een vaste as roteert, is het moment van $m\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{G}}$ plus $I_G\boldsymbol{\omega}$ om die as; dat is ook gelijk aan $I_O\boldsymbol{\omega}$.
- Alle krachten die op het VLS van het lichaam werken, zullen een stoot opleveren, maar niet noodzakelijk arbeid;
- Krachten die afhankelijk zijn van de tijd, moeten geïntegreerd worden om de stoot te bepalen;
- Het principe van stootmoment en MvHvB wordt vaak gebruikt om onbekende stootkrachten te elimineren die evenwijdig zijn of die een gemeenschappelijke as snijden.

8.2 Analyseprocedure (3/3)

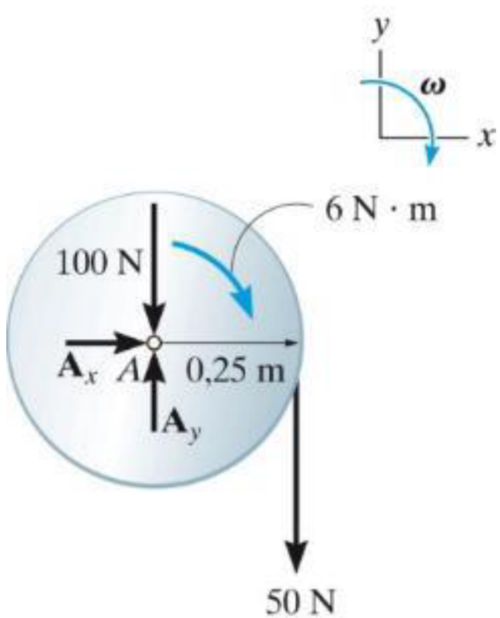
Kinematica

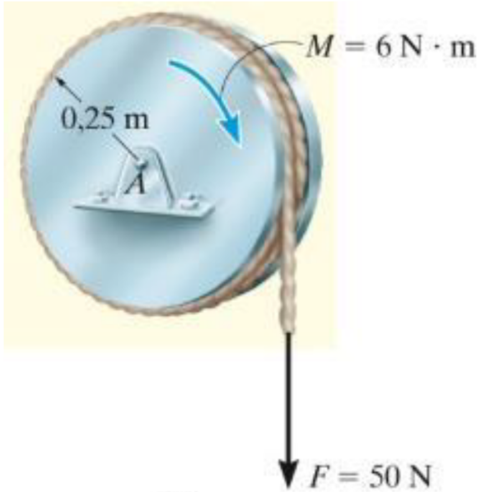
- Wanneer meer dan drie vergelijkingen nodig zijn voor een volledige oplossing, kan met behulp van kinematica de snelheid van het massamiddelpunt bepaald worden als functie van de hoeksnelheid van het lichaam;
- Kinematische (snelheids)schema's kunnen helpen om de relatie te bepalen.

8.2 Voorbeeld 8.2

De schijf van 100 N schijf wordt homogeen verondersteld en is scharnierend ondersteund ten opzichte van het middelpunt. Op de schijf wordt een constant koppel van 6 Nm uitgeoefend en op het touw dat om de rand van de schijf geslagen is, werkt een kracht van 50 N. Bereken de hoeksnelheid van de schijf, twee seconden nadat hij vanuit rust is begonnen te draaien. Wat zijn de componenten van de reactiekracht op het scharnier?

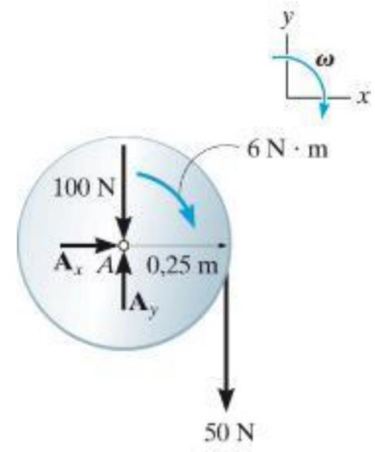
Vrijelichaamsschema:
Het massamiddelpunt van de schijf beweegt niet. Door de krachten gaat de schijf draaien in wijzerszin.





8.2 Voorbeeld 8.2

$$I_A = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{100}{9.81}\right)0.25^2 = 0.31855\ kg\ m^2$$



Principe van stoot en hoeveelheid van beweging

$\xrightarrow{+}$ $$m\,(v_{Gx})_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m\,(v_{Gx})_2 \qquad 0 + A_x(2) = 0$$

$+\uparrow$ $$m\,(v_{Gy})_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m\,(v_{Gy})_2 \qquad 0 + A_y(2) - 100(2) - 50(2) = 0$$

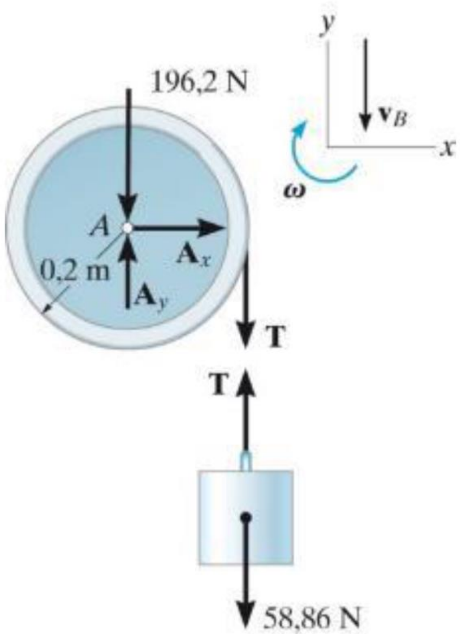
$+$ $$I_A\omega_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_A\,dt = I_A\omega_2 \qquad 0 + 6(2) + 50(0.25)2 = 0.31855\ \omega_2$$

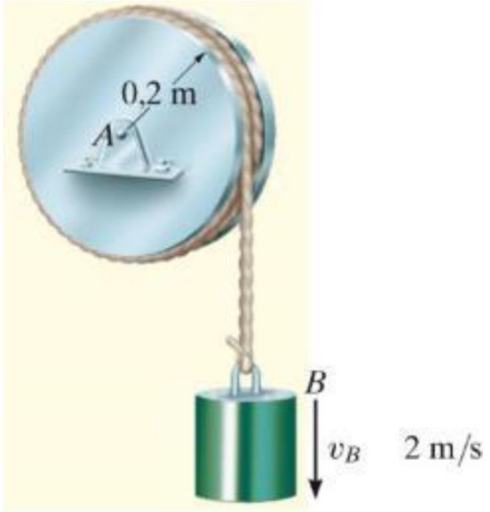
$A_x = 0$ $\quad$ $A_y = 150\text{N}$ $\quad$ $\omega_2 = 116{,}2\ rad/s$

8.2 Voorbeeld 8.4

De cilinder heeft een massa van 6 kg. Hij is bevestigd aan een touw dat om de omtrek van een schijf met een massa van 20 kg is geslagen. De schijf heeft een massatraagheidsmoment I_A = 0.40 kg·m². De cilinder beweegt in het begin naar beneden met een snelheid van 2 m/s. Bereken zijn snelheid na 3 s.

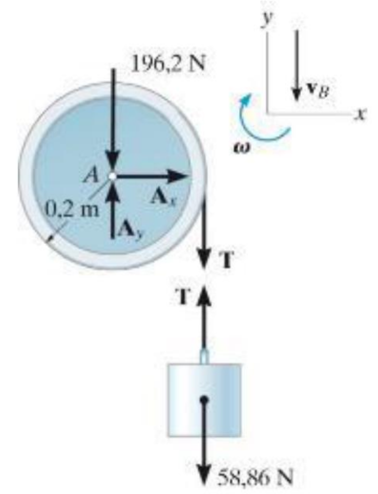
Vrijelichaamsschema:
Alle krachten zijn constant.
De neerwaartse v_B van de cilinder zorgt voor een ω in wijzerszin van de schijf.





8.2 Voorbeeld 8.4

Principe van stoot en hoeveelheid van beweging



Schijf:

$+$ $$I_A\omega_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_A \, dt = I_A\omega_2 \qquad 0.4\,\omega_1 + T(3)0.2 = 0.4\,\omega_2$$

Cilinder:

$+\uparrow$ $$m\,(v_B)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y \, dt = m\,(v_B)_2 \qquad -6(2) + T(3) - 58.86(3) = -6\,(v_B)_2$$

Let op de tekens!

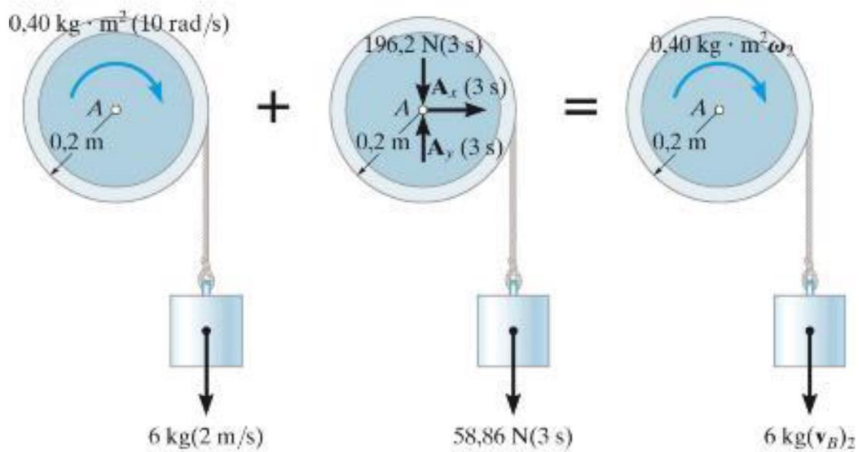
Kinematica:

$$\omega = \frac{v_B}{r} \qquad \omega_1 = \frac{2}{0.2} = 10\,rad/s \qquad \omega_2 = \frac{(v_B)_2}{0.2}$$

$$(v_B)_2 = 13.0\,m/s$$

8.2 Voorbeeld 8.4

Principe van stootmoment en moment van hoeveelheid van beweging



Kinematica:

$$\omega = \frac{v_B}{r}$$

$$\omega_1 = \frac{2}{0.2} = 10\ rad/s$$

$$\omega_2 = \frac{(v_B)_2}{0.2}$$

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{Moment van hoeveelheid}\\ \text{van beweging van het stelsel}\end{matrix}\right)_{A_1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{Stootmoment}\\ \text{van het stelsel}\end{matrix}\right)_{A_{(1-2)}} = \left(\sum \begin{matrix}\text{Moment van hoeveelheid}\\ \text{van beweging van het stelsel}\end{matrix}\right)_{A_2}$$

$$6(2)0.2 + 0.4(10) + 58.86(3)0.2 = 6\,(v_B)_2\,0.2 + 0.4\left[\frac{(v_B)_2}{0.2}\right]$$

$$(v_B)_2 = 13.0\ m/s$$

8.3 Behoud van hoeveelheid van beweging

Als de som van alle stoten op een stelsel van met elkaar verbonden starre lichamen nul is, blijft de hoeveelheid van beweging voor het stelsel in die richting behouden:

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{Hoeveelheid van beweging}\\ \text{van het stelsel}\end{matrix}\right)_1 + \cancel{\left(\sum \begin{matrix}\text{Stoot van}\\ \text{het stelsel}\end{matrix}\right)_{(1-2)}} = \left(\sum \begin{matrix}\text{Hoeveelheid van beweging}\\ \text{van het stelsel}\end{matrix}\right)_2$$

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{Hoeveelheid van beweging}\\ \text{van het stelsel}\end{matrix}\right)_1 = \left(\sum \begin{matrix}\text{Hoeveelheid van beweging}\\ \text{van het stelsel}\end{matrix}\right)_2$$

Dit is “behoud van hoeveelheid van beweging”

8.3 Behoud van hoeveelheid van beweging

Het moment van hoeveelheid van beweging om het massamiddelpunt *G* of vast punt *O* blijft behouden wanneer de som van alle om deze punten berekende stootmomenten nul is:

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{Moment van hoeveelheid} \\ \text{van beweging van het stelsel}\end{matrix}\right)_{O_1} + \cancel{\left(\sum \begin{matrix}\text{Stootmoment} \\ \text{van het stelsel}\end{matrix}\right)_{O_{(1-2)}}} = \left(\sum \begin{matrix}\text{Moment van hoeveelheid} \\ \text{van beweging van het stelsel}\end{matrix}\right)_{O_2}$$

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{Moment van hoeveelheid van} \\ \text{beweging van het stelsel}\end{matrix}\right)_{O_1} = \left(\sum \begin{matrix}\text{Moment van hoeveelheid van} \\ \text{beweging van het stelsel}\end{matrix}\right)_{O_2}$$

$$(I_G\omega)_1 = (I_G\omega)_2$$

Dit is "behoud van moment van hoeveelheid van beweging"

8.3 Analyseprocedure (1/2)

Het behoud van HvB of behoud van MvHvB moet worden toegepast met behulp van volgende procedure:

Vrijlichaamsschema

- Bepaal het vaste x-, y- referentievlak en teken het VLS. Geef voor elke kracht aan of het een stootkracht of een niet-stotende kracht betreft.
- Behoud van HvB is van toepassing wanneer er in die richting geen uitwendige stootkrachten op het lichaam of het stelsel worden uitgeoefend.
- Behoud van MvHvB is van toepassing wanneer alle uitwendige stootkrachten die op het lichaam of stelsel worden uitgeoefend een moment van hoeveelheid van beweging om G veroorzaken dat gelijk is aan nul.

8.3 Analyseprocedure (2/2)

Behoud van hoeveelheid van beweging

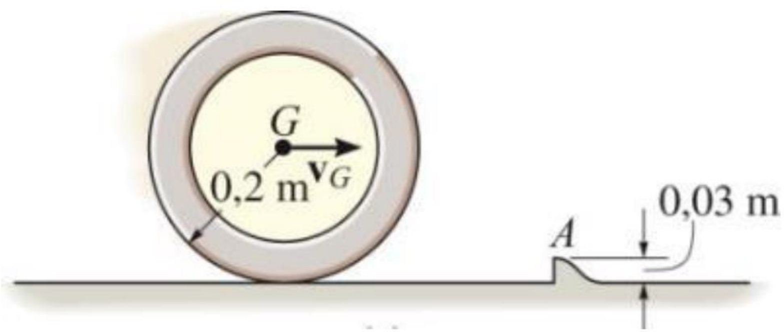
- Pas het behoud van hoeveelheid van beweging of moment van hoeveelheid van beweging toe in de daartoe geëigende richtingen.

Kinematica

- Als de beweging ingewikkeld is, kunnen kinematische (snelheids)schema's helpen om de benodigde kinematische relaties te bepalen.

8.3 Voorbeeld 8.6

Het wiel van 10 kg heeft een massatraagheidsmoment $I_G = 0.156\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Veronderstel dat het wiel niet glijdt of stuitert. Bereken de minimale snelheid $\mathbf{v}_G$ die het moet hebben om over de hindernis in *A* te kunnen rollen.



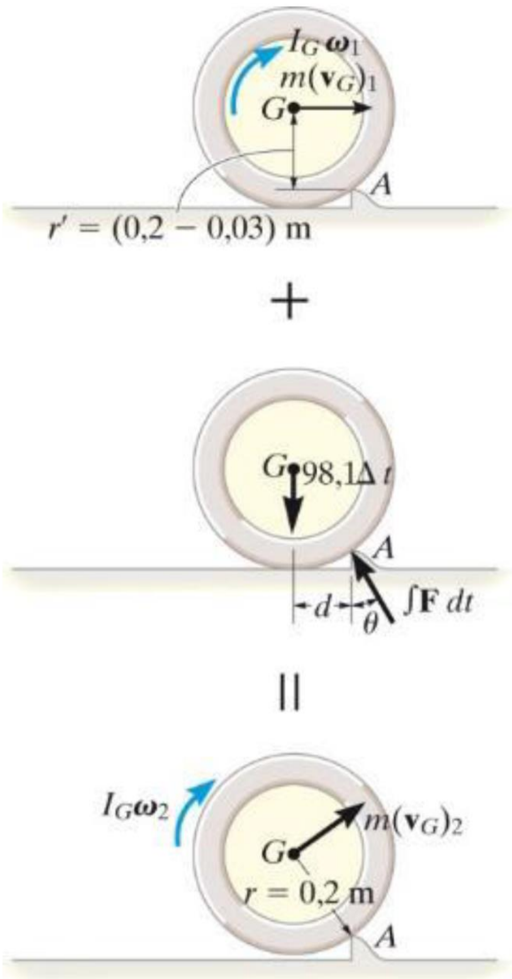
8.3 Voorbeeld 8.6

Schema's van stoot en hoeveelheid van beweging
Er is geen sprake van glijden. We weten de hoeveelheid van beweging van het wiel *vlak voor de botsing*, de stoten die het wiel krijgt *tijdens de botsing*, en de hoeveelheid van beweging van het wiel *vlak na de botsing.*

Het gewicht kan tijdens de botsing als niet-stotend worden beschouwd, want dit is veel veel kleiner dan de botsingskracht

$$(H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$r'm(v_G)_1 + I_G\omega_1 = rm(v_G)_2 + I_G\omega_2$$

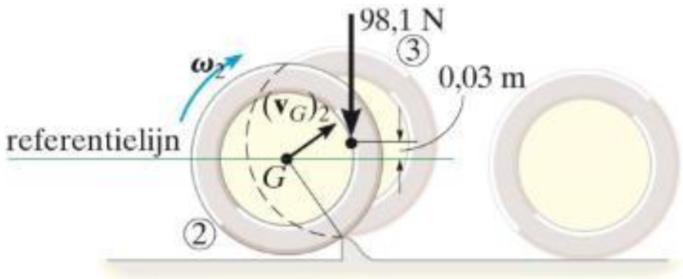


Kinematica

$$\omega = \frac{v_G}{r} = \frac{v_G}{0.2} \quad \Rightarrow \quad (V_G)_2 = 0.8921(v_G)_1$$

8.3 Voorbeeld 8.6

Behoud van energie
Om over de hindernis te kunnen rollen, moet het wiel over positie 3 komen.
Voor een minimale $(v_G)_1$ moet de kinetische energie in positie 2 = potentiele energie in positie 3



$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$

$$\frac{1}{2}(10)(v_G)_2{}^2 + \frac{1}{2}0.156\omega_2{}^2 + 0 = 0 + 98.1(0.03)$$

Substitutie van $\omega_2 = \dfrac{(v_G)_2}{0.2}$ & $(V_G)_2 = 0.8921(v_G)_1$

$$(V_G)_1 = 0.729\ m/s$$