Hoofdstuk 1 – Kinematica van een puntmassa

K. Henrioulle, E. Demeester

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

Overzicht H1 t.e.m. H8

H1 – H2 – H3 – H4 → Puntmassa's, waarvoor oriëntatie niet van belang is

H5 – H6 – H7 – H8 → Starre lichamen, waarvoor oriëntatie van belang is

H1 / H5: Kinematica

$v = ds/dt$

$a = dv/dt$

$a \cdot ds = v \cdot dv$

H2 / H6: Tweede wet van Newton

$\Sigma F = m \cdot a$

- momentopname

H3 / H7: Arbeid en energie

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **plaats**:

$\Sigma \int F \cdot ds = m \cdot v_2^2 / 2 - m \cdot v_1^2 / 2$

- 2 discrete plaatsen
- Enkel conservatieve krachten => behoud van mechanische energie: $T1 + V1 = T2 + V2$

H4 / H8: Stoot en hoeveelheid van beweging

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **tijd** en gebruik $a = dv/dt$:

$\Sigma \int F \cdot dt = m \cdot v_2 - m \cdot v_1$

- 2 discrete tijdstippen
- Behoud van hoev. v. beweging:
  - Geen externe stoten
  - Botsingen en explosies

Overzicht H1 t.e.m. H8

Basisformules voor de dynamica

KINEMATICA

H1

Rechtlijnige beweging van een puntmassa

variabele a	*constante* $a = a_c$
$a = \dfrac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a\,ds = v\,dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Kromlijnige beweging van een puntmassa

x-, y-, z-coördinaten		*r-, θ-, z-coördinaten*	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

n-, t-, b-coördinaten

$v = \dot{s}$ $\quad a_t = \dot{v} = v\dfrac{dv}{ds}$

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \quad \rho = \dfrac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

Relatieve beweging

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

H5

Beweging van een star lichaam om een vaste as

variabele α	*constante* $\alpha = \alpha_c$
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

Voor punt P

$s = \theta r \quad v = \omega r \quad a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{scharnier})} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{scharnier})}$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende en roterende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \times (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

KINETICA

H6

Massatraagheidsmoment $I = \int r^2\,dm$

Evenwijdige-assenstelling $I = I_G + md^2$

Gyrostraal $k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$

H2

Bewegingsvergelijkingen

Puntmassa	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

H6

Principe van arbeid en energie

$T_1 + U_{1-2} = T_2$

Kinetische energie

Puntmassa	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

H7

Arbeid

Variabele kracht	$U_F = \int F\cos\theta\,ds$
Constante kracht	$U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$
Gewicht	$U_W = -W\,\Delta y$
Veer	$U_s = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$
Koppelmoment	$U_M = M\,\Delta\theta$

H3

Vermogen en rendement

$P = \dfrac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \quad \epsilon = \dfrac{P_{\text{uit}}}{P_{\text{in}}} = \dfrac{U_{\text{uit}}}{U_{\text{in}}}$

Wet van behoud van energie

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potentiële energie

$V = V_g + V_e$, waarbij $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

H4

Principe van stoot en impuls

Puntmassa	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$
Star lichaam	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Behoud van impuls

$\Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_2$

Restitutiecoëfficiënt $e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

H8

Principe van stootmoment en impulsmoment

Puntmassa	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = (d)(mv)$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$ waarbij $H_G = I_G\omega$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = I_O\omega$

Behoud van impulsmoment

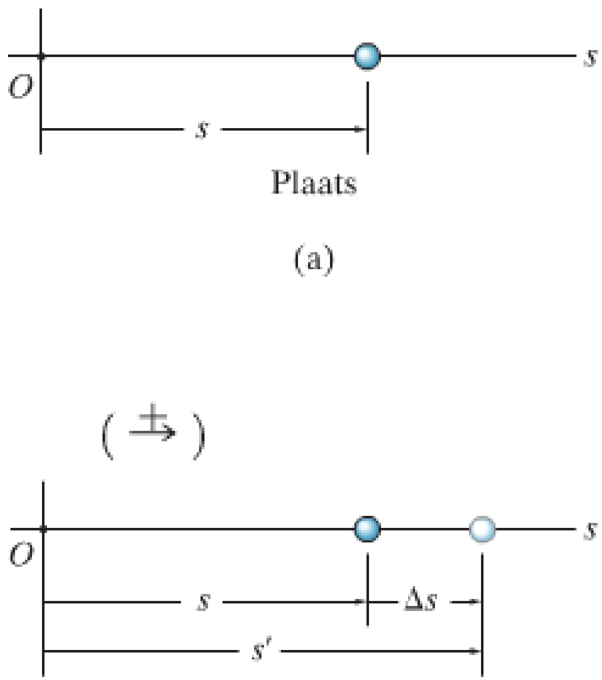
$\Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_2$

1.1 Inleiding

- Mechanica
  - Beweging van lichamen onderworpen aan krachten
  - Statica ($\boldsymbol{a}=0$) – dynamica ($\boldsymbol{a}\neq 0$)
- Dynamica
  - Kinematica: beweging
  - Kinetica: krachten die de beweging veroorzaken
- Puntmassa:
  - Een model, geïdealiseerde voorstelling van een lichaam waarbij de ruimte, vorm, afmetingen, oriëntatie van het lichaam geen rol speelt, maar wel de massa

1.2 Kinematica van de rechtlijnige beweging : continue beweging

- Verplaatsing - Snelheid



Plaats

(a)

Verplaatsing

(b)

Fig. 1.1

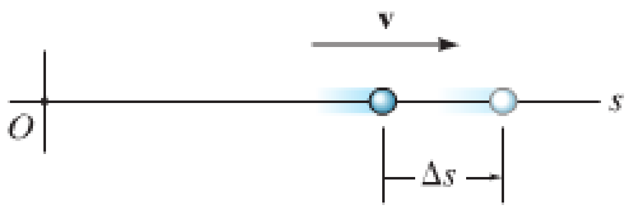
$$\Delta s = s' - s$$

$$v_{gem} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}} \qquad (1.1)$$

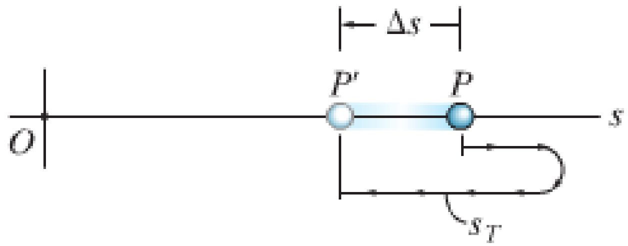
UHASSELT KU LEUVEN

1.2 Kinematica van de rechtlijnige beweging : continue beweging



Snelheid

(c)



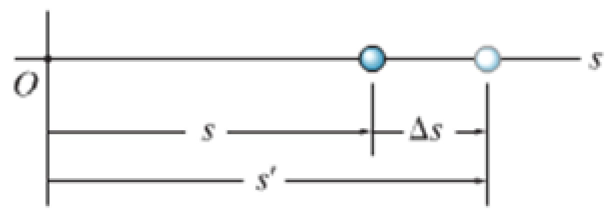
Gemiddelde snelheid en
gemiddelde snelheidsgrootte

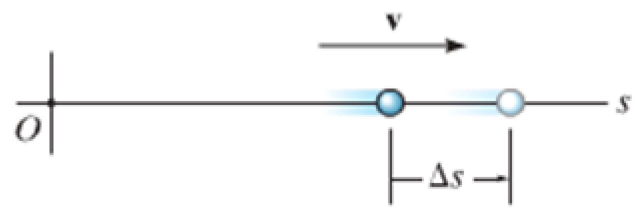
(d)

$$(v_{sg})_{gem} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

1.2 Kinematica van de rechtlijnige beweging : continue beweging

- ***s***, Δ***s***, ***v***, Δ***v*** zijn **vectoriële grootheden**
  in handboek in vet gedrukt
  in handgeschreven nota's met pijl erboven: $\Delta\vec{s}, \vec{v}\ enz.$
- Vector Δ***s*** *(stel s=7,5m s'=10m)*
  - Grootte (Δ*s*=2,5m)
  - Aangrijpingspunt
  - Richting: volgens rechte *s*
  - Zin: naar rechts
    zelfde zin als s: positief (+2,5m)





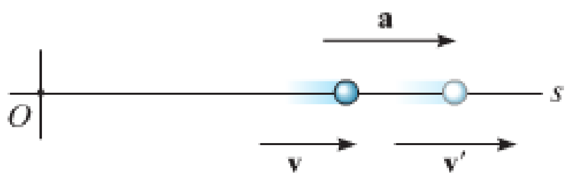
$$\Delta s = s' - s$$

1.2 Kinematica van de rechtlijnige beweging : continue beweging

- Vector $\Delta \boldsymbol{s}$ *(stel s=10m s'=7,5m)*
  - Grootte (Δs=2,5m)
  - Aangrijpingspunt
  - Richting: volgens rechte *s*
  - Zin: naar links
    tegengestelde zin als s: negatief (-2,5m)

$$\Delta s = s' - s$$

1.2 Kinematica van de rechtlijnige beweging : continue beweging



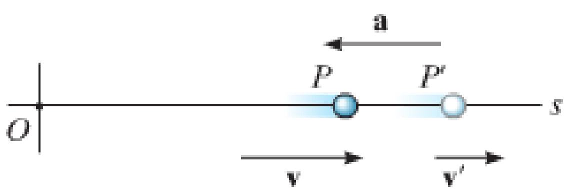
Versnelling

(e)

$$a_{gem} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$(\xrightarrow{+})$ $$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

$(\xrightarrow{+})$ $$a = \frac{d^2s}{dt^2}$$



Vertraging

(f)

Fig. 1.1 (vervolg)

$(\xrightarrow{+})$ $$\boxed{a\,ds = v\,dv}$$

1.2 Kinematica van de rechtlijnige beweging : continue beweging

- Constante versnelling

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_c\, dt$$

$$\boxed{\begin{array}{c} v = v_0 + a_c t \\ \text{Constante versnelling} \end{array}} \qquad (1.4)$$

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + a_c t)\, dt$$

$$\boxed{\begin{array}{c} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \\ \text{Constante versnelling} \end{array}} \qquad (1.5)$$

$$\int_{v_0}^{v} v\, dv = \int_{s_0}^{s} a_c\, ds$$

$$\boxed{\begin{array}{c} v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0) \\ \text{Constante versnelling} \end{array}} \qquad (1.6)$$

1.3 Kinematica van de rechtlijnige beweging : veranderlijke beweging

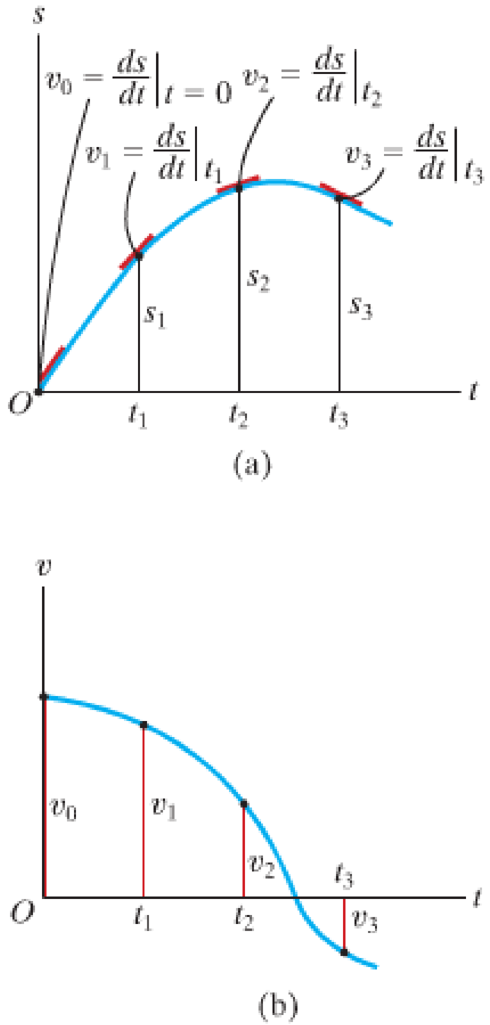
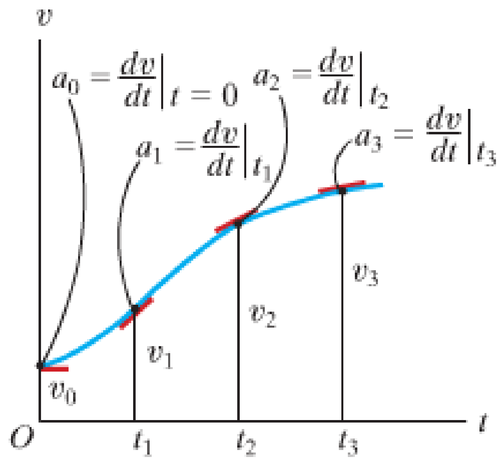


Fig. 1.7

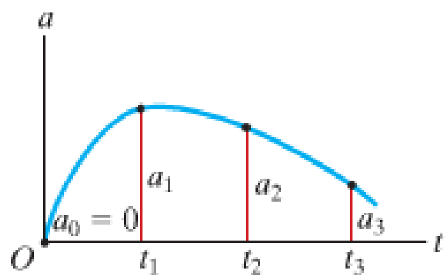
$$\frac{ds}{dt} = v$$

de hellingshoek van de s-t-grafiek = de snelheid

1.3 Kinematica van de rechtlijnige beweging : veranderlijke beweging



(a)



(b)

Fig. 1.8

$$\frac{dv}{dt} = a$$

de hellingshoek van de v-t-grafiek = de versnelling

1.3 Kinematica van de rechtlijnige beweging : veranderlijke beweging

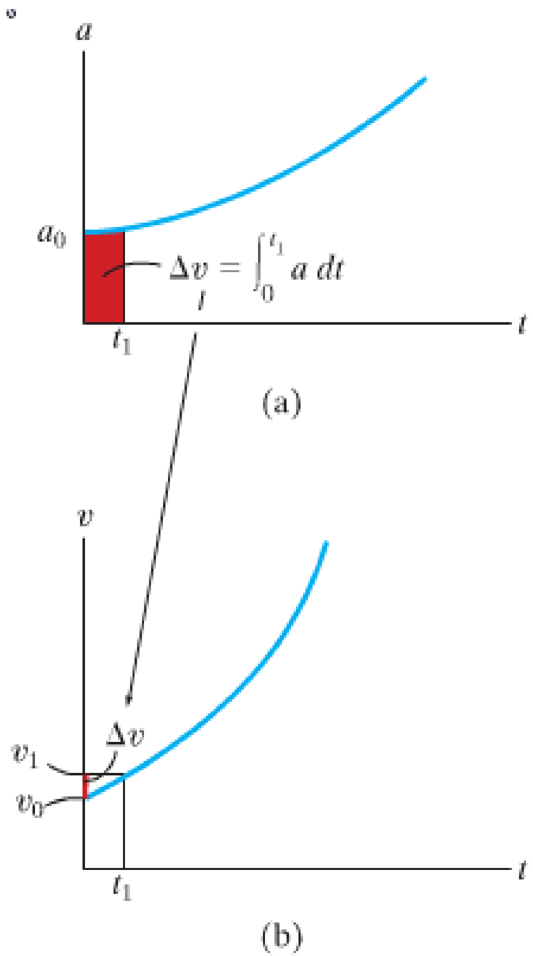


Fig. 1.9

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a\ dt$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv = v_1 - v_0 = \Delta v = \int_{t_0}^{t_1} a\ dt$$

$$\Delta v = \int a\ dt$$

snelheidsverandering = oppervlakte onder de *a*-*t*-grafiek

Maar: $v_1 = \Delta v + v_0$!!!

UHASSELT KU LEUVEN

1.3 Kinematica van de rechtlijnige beweging : veranderlijke beweging

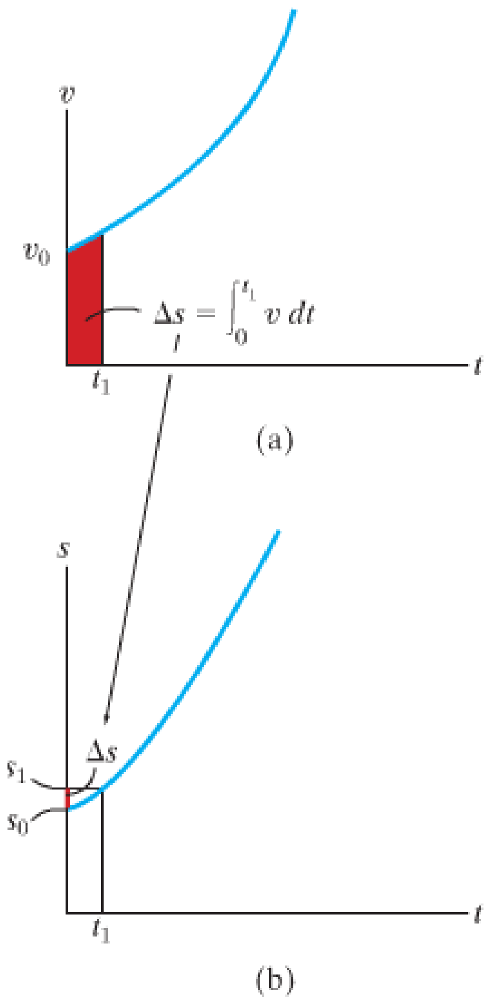


Fig. 1.10

$$\Delta s = \int v\,dt$$

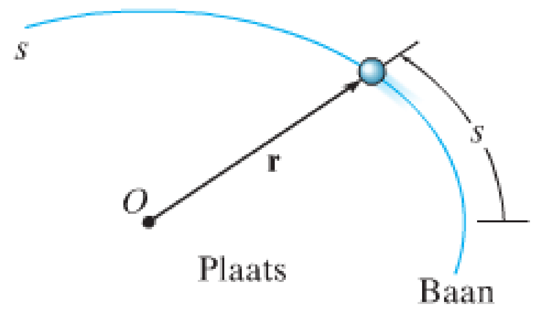
verplaatsing = oppervlakte onder de v-t-grafiek

1.4 Algemene kromlijnige beweging

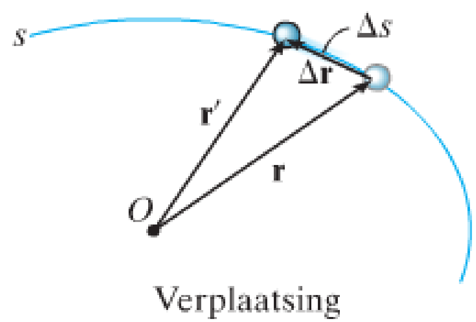
$$\mathbf{v}_{gem} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}}$$

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$



(a)



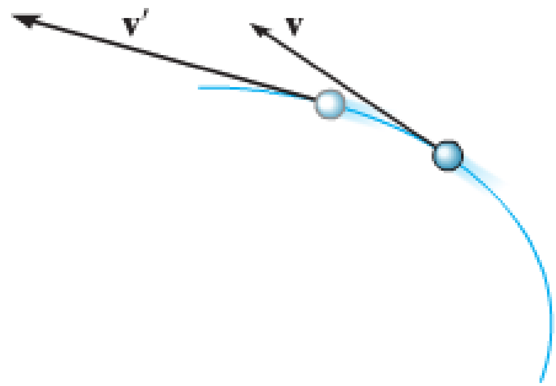
(b)

1.4 Algemene kromlijnige beweging

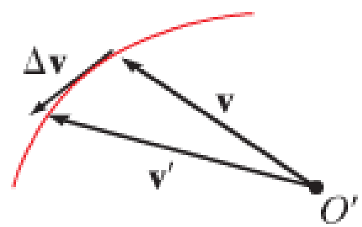
$$\mathbf{a}_{gem} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}}$$

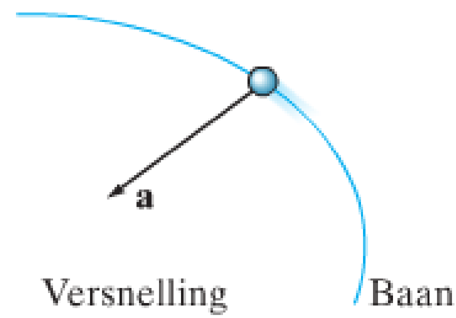
$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$



(d)



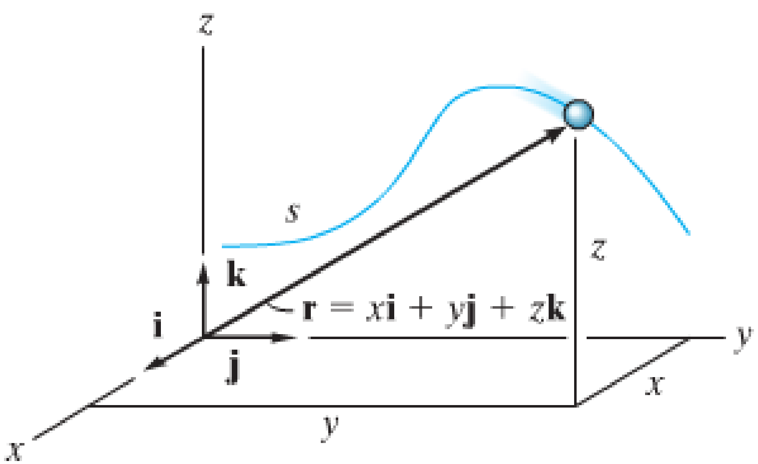
(e)



(g)

Fig. 1.16 (vervolg)

1.5 Kromlijnige beweging – rechthoekig assenstelsel



Plaats

(a)

Fig. 1.17

$$\boxed{\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}}$$

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned}$$