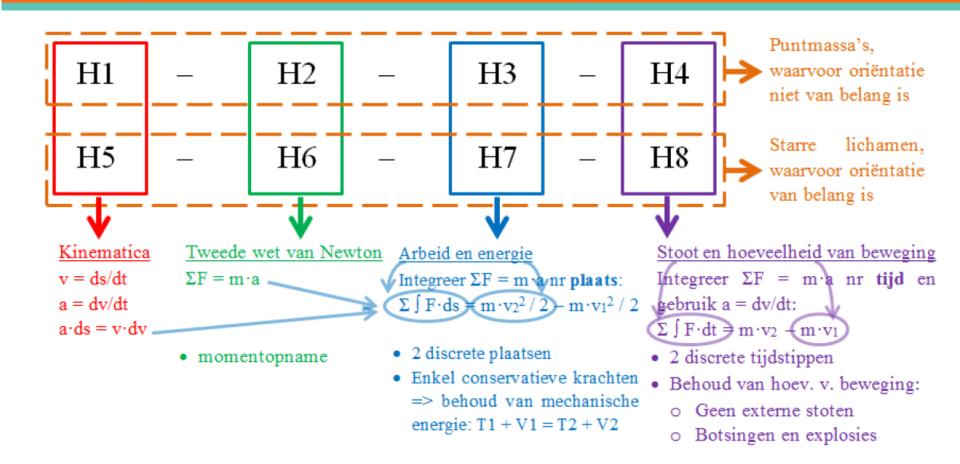
# Hoofdstuk 4 – Kinetica van een puntmassa: stoot en hoeveelheid van beweging

Eric Demeester en Kris Henrioulle





## Overzicht H1 t.e.m. H8





## Overzicht H1 t.e.m. H8

#### Basisformules voor de dynamica

Rechtlijnige beweging van een puntmassa

#### KINEMATICA

	oördinaten		coördinaten
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_{v} = \dot{y}$	$a_{y} = \ddot{y}$	$v_{\theta} = r\dot{\theta}$	$a_{\theta} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_r = \dot{z}$	$a_r = \ddot{z}$	$v_r = \dot{z}$	$a_r = \ddot{z}$
n-, t-, b-c	oördinaten	87.0	
$v = \dot{s}$	$a_t = \dot{v} =$	$v \frac{dv}{ds}$	
		= [1 + (d)]	$(y/dx)^2$
	$u_n$	$\rho - \frac{1}{12}$	$v/dx^2$

#### Beweging van een star lichaam om een vaste as

100 CO. C.	
$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2$
$\omega d\omega = \alpha d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$
/ n	

constante  $\alpha = \alpha$ 

### Voor punt P

variabele a

$$s = \theta r$$
  $v = \omega r$   $a_t = \alpha r$   $a_n = \omega^2 r$ 

Relatieve algemene beweging in het platte vlaktranslerende assen

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{scharnier})}$$
  $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{scharnier})}$ 

Relatieve algemene beweging in het platte vlak translerende en roterende assen

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_{B} = \mathbf{a}_{A} + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \times (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

#### RESERVE

Massatraagheidsmoment  $I = \int r^2 dm$ 

Evenwijdige-assenstelling  $I = I_G + md^2$ 

Gyrostraal

 $k = \sqrt{\frac{I}{m}}$ 

### Bewegingsvergelijkingen

Puntmassa	$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Star lichaam	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$
(beweging in het	$\Sigma F_{y} = m(a_{G})_{y}$
platte vlak)	$\Sigma M_G = I_G \alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma (M_k)_P$

r imeipe van arbeid en energie

 $T_1 + U_{1-2} = T_2$ Kinetische energie

Puntmassa	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Star tichaam (beweging in het platte vlak)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

#### Arbeid

Variabele kracht	$U_F = \int F \cos \theta  ds$
Constante kracht	$U_F = (F_c \cos \theta) \Delta s$
Gewicht	$U_{w} = -W \Delta v$

Veer  $II = -(\frac{1}{2}ks^2 - \frac{1}{2}ks^2)$ 

### Koppelmoment $U_M = M \Delta \theta$

### Vermogen en rendement $P = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{p} \mathbf{v} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{P_{\text{uit}}}{T} = \frac{U_{\text{uit}}}{T}$

Wet van behoud van energie

#### $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ Potentiële energie

$$V = V_g + V_e$$
, waarbij  $V_g = \pm Wy$ ,  $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$ 

### Principe van stoot en impuls

rincipe van sto	ot en impuls	
Puntmassa	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma$	$\mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2$

1 unimussu	m+1 + 2   1 at - m+2
Star lichaam	$m(v) + \sum_{i} E_{i} dt = m(v)$

### Behoud van impuls

 $\Sigma(\operatorname{st.} m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\operatorname{st.} m\mathbf{v})_2$ 

### Restitutiecoëfficiënt $e = \frac{(8)/2}{(2)} \cdot \frac{(8)/2}{(2)}$

### Principe van stootmoment en impulsmoment

Puntmassa	waarbij $H_O = (d)(mv)$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$ \begin{aligned} &(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma \int \mathbf{M}_G  dt = (\mathbf{H}_G)_2 \\ &\text{waarbij } H_G = I_G \omega \\ &(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int \mathbf{M}_O  dt = (\mathbf{H}_O)_2 \\ &\text{waarbij } H_O = I_O \omega \end{aligned} $

 $(\mathbf{H}_{o})_{c} + \sum \mathbf{M}_{o} dt = (\mathbf{H}_{o})_{c}$ 

### Behoud van impulsmoment

$$\Sigma(\mathsf{st}.\,\mathbf{H})_1 = \Sigma(\mathsf{st}.\,\mathbf{H})_2$$

H<sub>2</sub>

H<sub>6</sub>

**H7** 

**H3** 

**H4** 

**H8** 





**H1** 

H<sub>5</sub>

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

 $\vec{a}$  en  $\vec{v}$  gemeten t.o.v. een inertiaal referentiestelsel

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} d\mathbf{v}$$

$$\mathbf{m}\mathbf{v} = \mathbf{m}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

= hoeveelheid van beweging  $= \underbrace{\text{(=impuls)}}_{t_1}$   $= \vec{L}$ 

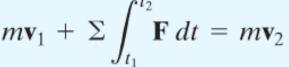
$$\int_{t1}^{t2} \mathbf{F} \, dt = \int_{t1}^{t2} \vec{F} \, dt =$$
stoot  $= \vec{I}$ 

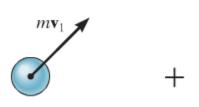
- Toepasbaar in vraagstukken waar krachten, snelheden en discrete tijdstippen een rol spelen
- Dit is een vectorvergelijking





 $m\mathbf{v}_1 + \sum_{t} \int_{t}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2$ 





Schema van de beginhoeveelheid van beweging



Schema van de stoten





Schema van de eindhoeveelheid van beweging





### Vectorvergelijking!!

$$m\mathbf{v}_1 + \sum_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2$$

$$m(v_x)_1 + \sum_{t_1}^{t_2} F_x dt = m(v_x)_2$$

$$m(v_y)_1 + \sum_{t_1}^{t_2} F_y dt = m(v_y)_2$$

$$m(v_z)_1 + \sum_{t_1}^{t_2} F_z dt = m(v_z)_2$$

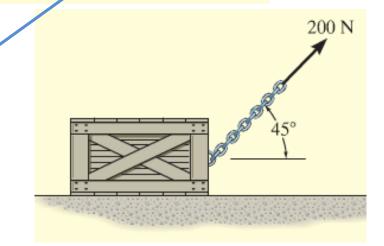




### Voorbeeld 4.1

De krat van 100 kg in fig. 4.4*a* ligt aanvankelijk stil op een glad horizontaal vlak. Op de krat wordt gedurende 10 s een kracht van 200 N uitgeoefend, onder een hoek van 45° Bepaal de eindsnelheid van de krat en de normaalkracht die het oppervlak op de krat uitoefent gedurende dit tijdsinterval.

$$m\mathbf{v}_1 + \sum_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2$$





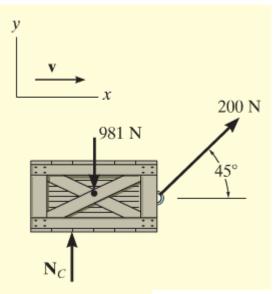


## Voorbeeld 4.1

$$(\stackrel{\pm}{\to}) \qquad m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x \, dt = m(v_x)_2$$

$$0 + 200 \,\text{N} \cos 45^\circ (10 \,\text{s}) = (100 \,\text{kg}) v_2$$

$$v_2 = 14.1 \,\text{m/s}$$



$$(+\uparrow) \qquad m(v_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m(v_y)_2$$

$$0 + N_C(10 \text{ s}) - 981 \text{ N}(10 \text{ s}) + 200 \text{ N} \sin 45^\circ (10 \text{ s}) = 0$$

$$N_C = 840 \text{ N} \qquad Antw.$$



Op de kist in fig. 4.5a met een gewicht van 250 N ( $\approx$  25 kg) werkt een kracht met een veranderlijke grootte P = (100t) N, waarbij t in seconden wordt uitgedrukt. Bepaal de snelheid van de kist, nadat **P** 2 s is uitgeoefend. De kist heeft een beginsnelheid  $v_1 = 1$  m/s en schuift de helling af. De kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen de kist en het vlak is  $\mu_k = 0,3$ .

Geg.:

Gevr.: eindsnelheid

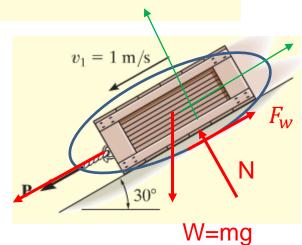
Opl.:

1/ Redenering: 2 discrete tijdstippen => principe van

stoot en HVB

2/VLS

3/ Assenstelsel kiezen en projecteren







P

## 4.2 Principe van stoot en hoeveelheid van beweging – puntmassa's

$$\sum m_i(\mathbf{v}_i)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i dt = \sum m_i(\mathbf{v}_i)_2$$
 (4.6)

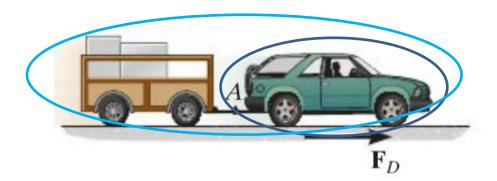
$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \sum_{t_i} \int_{t_i}^{t_2} \mathbf{F}_i dt = m(\mathbf{v}_G)_2$$
 (4.7)



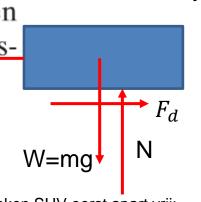


## 4.2 Principe van stoot en hoeveelheid van beweging – puntmassa's

F4.5. De vierwielaangedreven SUV van 2,5 ton trekt de trailer met een massa van 1,5 ton. De tractiekracht bij de wielen is  $F_D = 9$  kN. Bepaal de snelheid van de auto na 20 s aflegt als deze vanuit stilstand wegrijdt. Bepaal ook de trekkracht in de koppeling tussen de SUV en de trailer. Verwaarloos de massa van de wielen.



F4.5



Stel: we maken SUV eerst apart vrij; Opl.:

(x) 
$$0 + (F_d - T) \cdot 20 = m_{SUV} \cdot v_{2,x}$$

(y) ..

→ Teveel onbekenden voor het aantal vergelijkingen

→ Idee: laat ons het stelsel als geheel vrijmaken en daarop stoot en HVB toepassen; dan valt de interne kracht T weg, en hebben we dus 1 onbekende minder



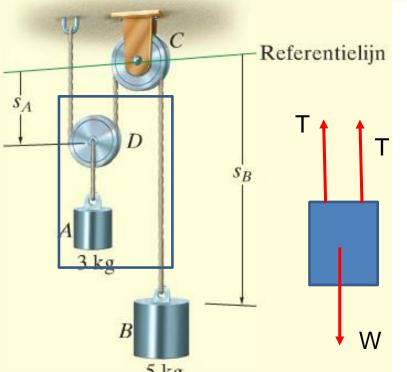


## 4.2 Principe van stoot en hoeveelheid van beweging – puntmassa's

### Voorbeeld 4.3

De blokken A en B in fig. 4.6a hebben een massa van respectievelijk 3 en 5 kg. Het stelsel wordt vanuit stilstand losgelaten. Bepaal de snelheid van blok B na 6 s. Verwaarloos de massa van de katrollen

en het touw.



Geg.: ... Gevr.: ...

Opl.:

1/ Redenering:

2 discrete tijdstippen => principe van stoot en HVB toe te passen

$$m\mathbf{v}_1 - \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2$$

VLS opstellen om alle krachten te kennen

Bijv. voor puntmassa A: evt. het ezelsbruggetje ZWEIN gebruiken; Zwaartekracht – wrijvingskracht – externe krachten – interne krachten

- Normaalkracht

Toepassing van principe van stoot en HVB:

(y) 
$$0 + (-2T + m_A g) \cdot 6 = m_A \cdot v_{A,2}$$

Idem voor B:

(y) 
$$0 + (-T + m_B g) \cdot 6 = m_B \cdot v_{B,2}$$

2 vergelijkingen, 3 onbekenden => op zoek naar bijkomende vergelijking Dit is een katrolsysteem => katrolvergelijking geeft een verband tussen  $v_{A,2}$  en

$$v_{B,2}$$
:  $L = 2s_A + s_B = 2v_A = -v_B$ 



(4.3)



$$\sum m_i(\mathbf{v}_i)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i dt = \sum m_i(\mathbf{v}_i)_2$$
 (4.6)

• Indien 
$$\sum_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i dt = \mathbf{0}$$

$$\sum m_i(\mathbf{v}_i)_1 = \sum m_i(\mathbf{v}_i)_2$$

- Het gaat hier over een stelsel, we bekijken het stelsel als geheel;
  - Inwendige stoten heffen mekaar op
  - Uitwendige stoten (gewicht, wrijving) verwaarloosbaar (want vb heel kort)
- Typisch: botsing of explosie; dit principe geldt dan enkel tijdens de duur van de botsing of explosie (heel kort dus)

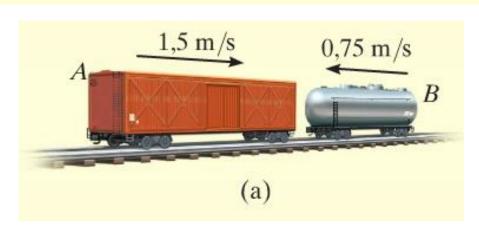






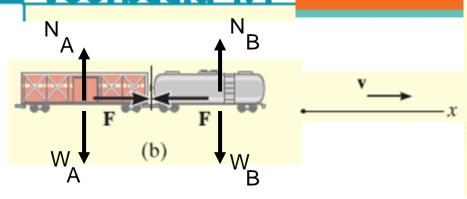
### Voorbeeld 4.4

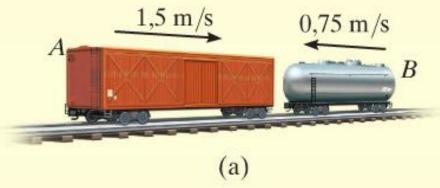
De gesloten goederenwagon van 15000 kg rijdt met een snelheid van 1,5 m/s op een horizontaal spoor als hij tegen een tankwagon B botst die een massa heeft van 12000 kg en met een snelheid van 0,75 m/s in tegengestelde richting rijdt, zie fig. 4.8a. Als beide wagons elkaar raken, worden ze aan elkaar gekoppeld. Bepaal (a) de snelheid van beide wagons net na de koppeling en (b) de gemiddelde kracht tussen beide wagons als de koppeling in 0,8 s plaatsvindt.











$$\sum m_i v_{ix1} + \sum \int_{t1}^{t2} F_x dt = \sum m_i v_{ix2}$$

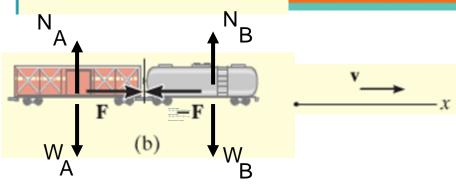
$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}$$
 $v_{A2} = v_{B2} = v_2$ 
 $m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = (m_A + m_B) v_2$ 

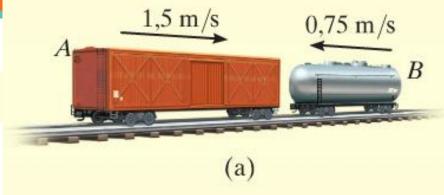
$$15000.(+1,5) + 12000.(-0,75) = (15000 + 12000)v_2$$

$$v_2 = +0.5 \frac{m}{s} (dus \ naar \ rechts)!$$









Merk op: Energie voor de botsing: T1+V1=T2+V2 met V1=V2=0

$$\frac{m_A v_{A1}^2}{2} + \frac{m_B v_{B1}^2}{2} = \frac{15000.1,5^2}{2} + \frac{12000.(-0,75)^2}{2} = 20250J$$

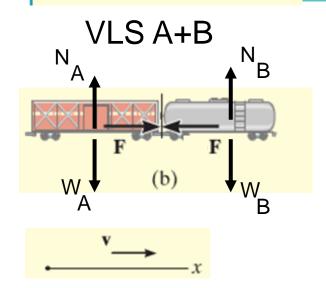
energie na de botsing:

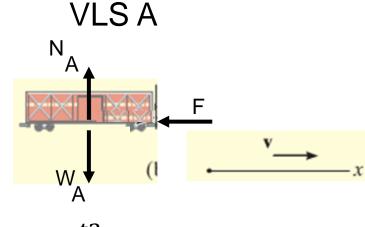
$$\frac{m_A v_{A2}^2}{2} + \frac{m_B v_{B2}^2}{2} = \frac{15000.(0,5)^2}{2} + \frac{12000.(0,5)^2}{2} = 3375J$$

Besluit: bij botsingen geldt niet noodzakelijk behoud van energie!









$$\sum m_i v_{ix1} + \sum \int_{t1}^{t2} F_x dt = \sum m_i v_{ix2}$$

$$m_A v_{A1} - F.\Delta t = m_A v_{A2}$$
  
15000. (+1,5) -  $F$ . 0,8 = 15000. (+0,5)

$$F = +18,8kN$$





F4.7. De goederenwagons A en B hebben een massa van respectievelijk 20 en 15 ton. Bepaal de snelheid van A na de botsing als de wagons botsen en terugstuiteren zodat B naar rechts beweegt met een snelheid van 2 m/s. A en B maken gedurende 0,5 s contact. Bepaal de gemiddelde stootkracht tussen de wagons.

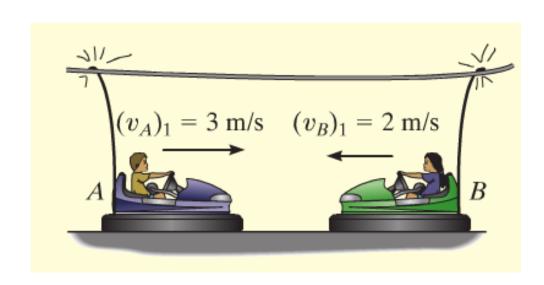


F4.7



## Voorbeeld 4.5

De botsauto's A en B in fig. 4.9a hebben elk een massa van 150 kg en rijden met de snelheden die in de figuur zijn aangegeven, net voor ze frontaal tegen elkaar botsen. Bepaal hun snelheden na de botsing als er tijdens de botsing geen energie verloren gaat.





$$\Sigma m v_{x1} + \sum_{t1}^{t2} F_x dt = \Sigma m v_{x2}$$

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}$$

$$150. (+3) + 150(-2) = 150. v_A + 150. v_B (1)$$

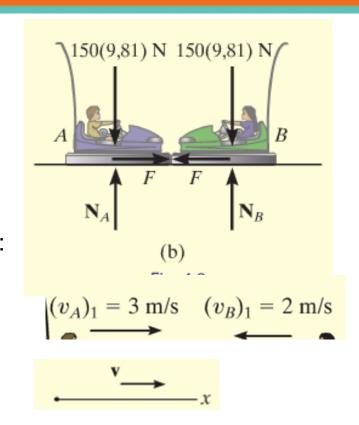
Behoud van energie (bijkomende vergelijking nodig):

$$\frac{m_A v_{A1}^2}{2} + \frac{m_B v_{B1}^2}{2} = \frac{m_A v_{A2}^2}{2} + \frac{m_B v_{B2}^2}{2}$$

$$\frac{150.(+3)^2}{2} + \frac{150.(-2)^2}{2} = \frac{150.v_{A2}^2}{2} + \frac{150.v_{B2}^2}{2}$$
(2)

**Uitkomst:** 

$$v_{A2} = -2\frac{m}{s}en \ v_{B2} = +3\frac{m}{s}$$
  
of  $v_{A2} = +3\frac{m}{s}en \ v_{B2} = -2\frac{m}{s}$  (??)

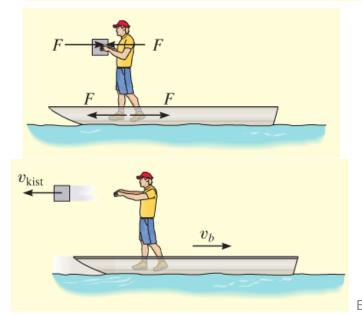






### Voorbeeld 4.7

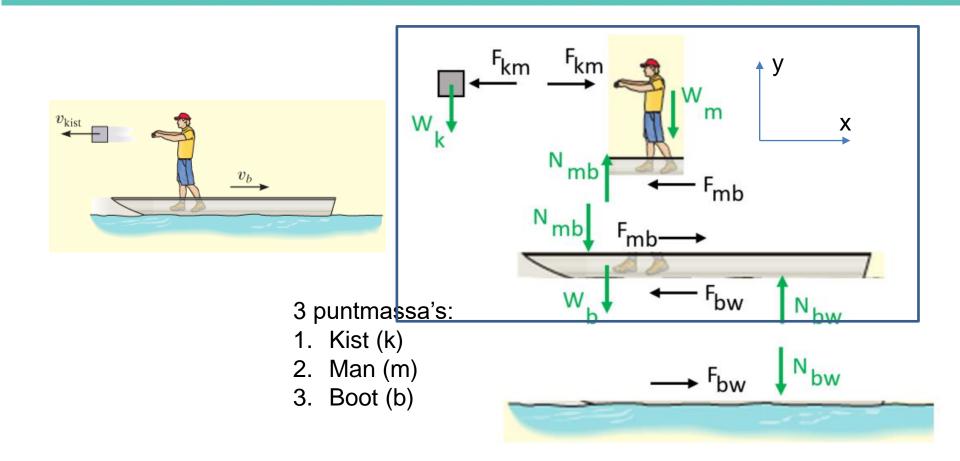
De 80 kg zware man kan, staande op de grond, de 20 kg zware kist horizontaal gooien met 4 m/s. Als hij daarentegen stevig in de boot van 120 kg staat en de kist gooit, zoals aangegeven op de foto, bepaal dan hoe ver de boot zich in drie seconden verplaatst. Verwaarloos de waterweerstand.







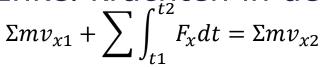


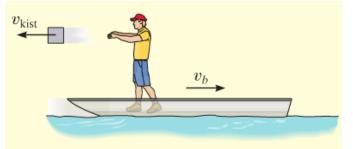


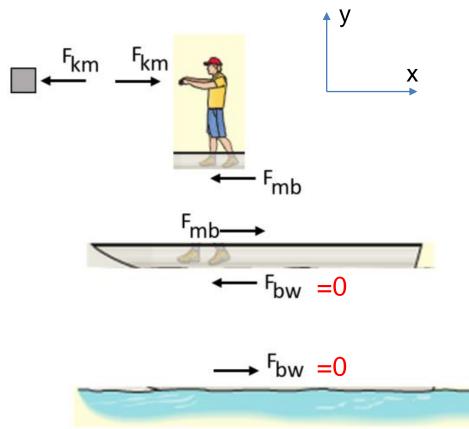




Enkel krachten in de x-richting beschouwen:

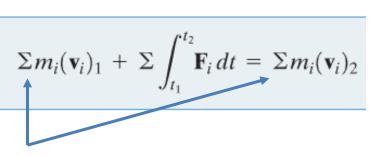






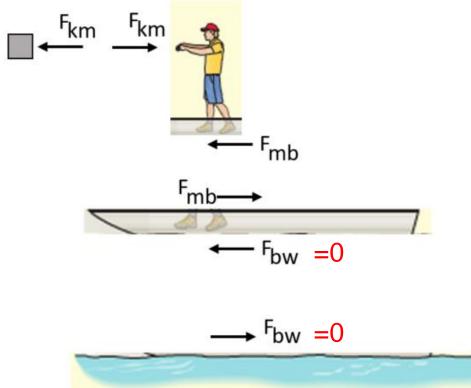






Σ: 3 puntmassa's:

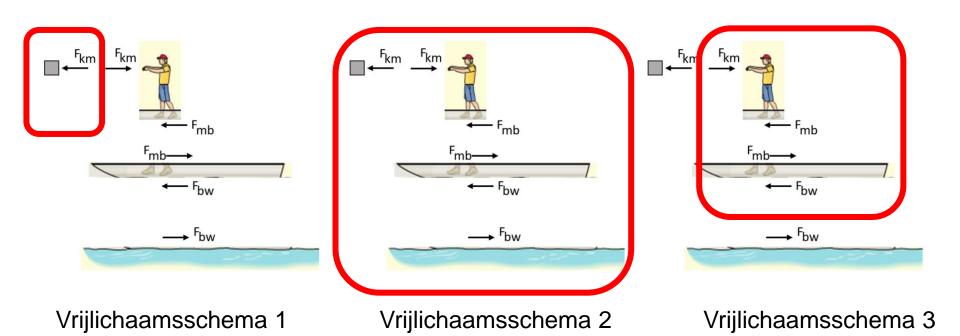
- 1. Kist (k)
- 2. Man (m)
- 3. Boot (b)





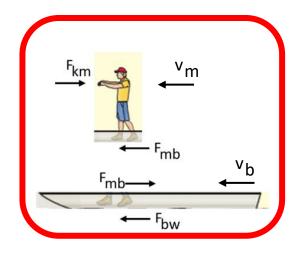


Definieer het gebruikte stelsel
 (= teken een vrijlichaamsschema!!)





 Vb vrijlichaamsschema 3 met man en boot †<sup>y</sup>



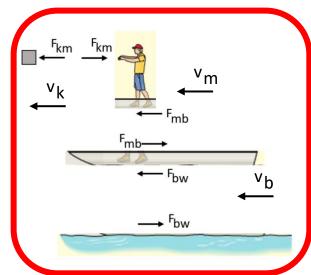
$$\Sigma m v_{x1} + \sum \int_{t1}^{t2} F_x dt = \Sigma m v_{x2}$$
 
$$m_m(-v_{m1}) + m_b(-v_{b1}) + F_{km} \Delta t - F_{mb} \Delta t + F_{mb} \Delta t - F_{bw} \Delta t = m_m(-v_{m2}) + m_b(-v_{b2})$$

Interne krachten vallen weg





 Vb vrijlichaamsschema 2 met kist, man en boot



$$\Sigma m v_{x1} + \sum_{t_1} \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = \Sigma m v_{x2}$$

$$m_k(-v_{k1}) + m_m(-v_{m1}) + m_b(-v_{b1}) + 0. \Delta t = m_k(-v_{k2}) + m_m(-v_{m2}) + m_b(-v_{b2})$$

Enkel interne krachten!





$$m_{k}(-v_{k1}) + m_{m}(-v_{m1}) + m_{b}(-v_{b1}) = m_{k}(-v_{k2}) + m_{m}(-v_{m2}) + m_{b}(-v_{b2})$$

$$en v_{m} = v_{b}$$

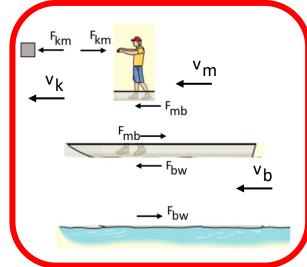
$$m_{k}(0) + m_{m}(0) + m_{m}(0) = m_{k}(-v_{k2}) + (m_{m} + m_{b}) (-v_{b2})$$

$$0 = 20(-v_{k2}) + (80 + 120) (-v_{b2}) (1)$$

 $\vec{a}$  en  $\vec{v}$  gemeten t.o.v. een inertiaal referentiestelsel

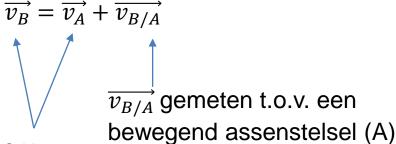
De 80 kg zware man kan, staande op de grond, de 20 kg zware kist horizontaal gooien met 4 m/s.

Dus snelheid van kist t.o.v. bewegende boot is 4m/s









 $\vec{v}$  gemeten t.o.v. een inertiaal referentiestelsel

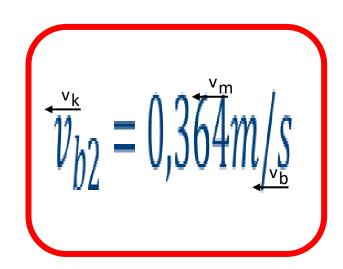
$$\overrightarrow{v_{k2}} = \overrightarrow{v_{b2}} + \overrightarrow{v_{k2/b2}}$$

$$-v_{k2} = -v_{h2} - 4m/s$$
 (2)

### Oplossing:

$$v_{k2} = 3,64 \text{ m/s} \text{ is } 3,64 \text{m/s} \text{ naar links}$$

$$v_{b2} = -0.364 \, m/s$$
 is 0,364m/s naar rechts



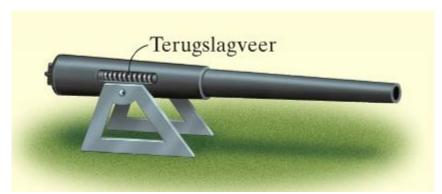
$$v_{k2/b2} = 4m/s$$
 $v_{k2} = 3,64m/s$ 
 $v_{b2} = 0,364m/s$ 

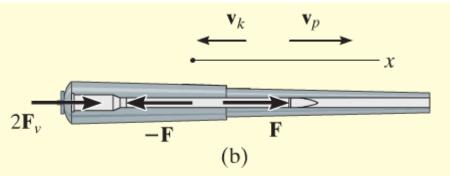




### <u>Voorbeeld 4.8</u>

Uit het kanon met een massa van 600 kg in fig. 4.12a wordt een projectiel van 4 kg afgevuurd die een snelheid van 450 m/s heeft ten opzichte van de grond als hij de loop verlaat. Het afvuren duurt 0,03 s. Bepaal (a) de snelheid van de terugslag van het kanon net na het schot en (b) de gemiddelde stootkracht die op het projectiel wordt uitgeoefend. Het onderstel van het kanon is vast op de grond bevestigd en de terugslag van het kanon wordt opgenomen door twee veren.









### Hoofdstuk 1

$$a_t = \frac{dv}{dt} \ en \ a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a ds = v dv$$

### Katrolvergelijkingen

Relatieve snelheid

### **Hoofdstuk 2**

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

t,n,b - assenstelsel

$$\sum m\overrightarrow{v_1} + \sum \int_{t1}^{t2} \overrightarrow{F} dt = \sum m\overrightarrow{v_2}$$

Behoud hoev. 
$$\sum m\overrightarrow{v_1} = \sum m\overrightarrow{v_2}$$

Hoofdstuk 4

$$\sum \frac{mv_1^2}{2} + \sum \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds = \sum \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\sum T_1 + \sum U_{1-2} = \sum T_2$$

Behoud energie  $\Sigma T_1 + \Sigma V_1 = \Sigma T_2 + \Sigma V_2$ 

Hoofdstuk 3



