Hoofdstuk 6 – Kinetica van een star lichaam in een plat vlak: kracht en versnelling

Eric Demeester

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

Overzicht H1 t.e.m. H8

H1 – H2 – H3 – H4 → Puntmassa's, waarvoor oriëntatie niet van belang is

H5 – H6 – H7 – H8 → Starre lichamen, waarvoor oriëntatie van belang is

H1 / H5: Kinematica

$v = ds/dt$

$a = dv/dt$

$a \cdot ds = v \cdot dv$

$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta}/dt$

$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$

$\alpha \cdot d\theta = \omega \cdot d\omega$

$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{B|A}$

$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{B|A} - \omega^2 \boldsymbol{r}_{B|A}$

H2 / H6: Tweede wet van Newton

$\Sigma F = m \cdot a$

- momentopname

H3 / H7: Arbeid en energie

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **plaats**:

$\Sigma \int F \cdot ds = m \cdot v_2^2 / 2 - m \cdot v_1^2 / 2$

- 2 discrete plaatsen
- Enkel conservatieve krachten => behoud van mechanische energie: $T1 + V1 = T2 + V2$

H4 / H8: Stoot en hoeveelheid van beweging

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **tijd** en gebruik $a = dv/dt$:

$\Sigma \int F \cdot dt = m \cdot v_2 - m \cdot v_1$

- 2 discrete tijdstippen
- Behoud van hoev. v. beweging:
  - Geen externe stoten
  - Botsingen en explosies

Overzicht H1 t.e.m. H8

Basisformules voor de dynamica

KINEMATICA

H1

Rechtlijnige beweging van een puntmassa

variabele a	constante $a = a_c$
$a = \dfrac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a\,ds = v\,dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Kromlijnige beweging van een puntmassa

x-, y-, z-coördinaten		r-, θ-, z-coördinaten	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

n-, t-, b-coördinaten

$v = \dot{s}$ $\quad a_t = \dot{v} = v\dfrac{dv}{ds}$

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \quad \rho = \dfrac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

Relatieve beweging

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

H5

Beweging van een star lichaam om een vaste as

variabele α	constante $\alpha = \alpha_c$
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

Voor punt P

$s = \theta r \quad v = \omega r \quad a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak— translerende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{scharnier})} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{scharnier})}$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak— translerende en roterende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \times (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

KINETICA

H6

Massatraagheidsmoment $\quad I = \int r^2\,dm$

Evenwijdige-assenstelling $\quad I = I_G + md^2$

Gyrostraal $\quad k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$

H2

Bewegingsvergelijkingen

Puntmassa	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

H6

Principe van arbeid en energie

$T_1 + U_{1-2} = T_2$

Kinetische energie

Puntmassa	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

H7

Arbeid

Variabele kracht	$U_F = \int F\cos\theta\,ds$
Constante kracht	$U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$
Gewicht	$U_W = -W\,\Delta y$
Veer	$U_s = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$
Koppelmoment	$U_M = M\,\Delta\theta$

H3

Vermogen en rendement

$P = \dfrac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \quad \epsilon = \dfrac{P_{\text{uit}}}{P_{\text{in}}} = \dfrac{U_{\text{uit}}}{U_{\text{in}}}$

Wet van behoud van energie

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potentiële energie

$V = V_g + V_e$, waarbij $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

H4

Principe van stoot en impuls

Puntmassa	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$
Star lichaam	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Behoud van impuls

$\Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_2$

Restitutiecoëfficiënt $\quad e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

H8

Principe van stootmoment en impulsmoment

Puntmassa	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = (d)(mv)$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$ waarbij $H_G = I_G\omega$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = I_O\omega$

Behoud van impulsmoment

$\Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_2$

UHASSELT KU LEUVEN

6.1 Massatraagheidsmoment

- Ter opfrissing: in H2 zagen we dat voor een stelsel van puntmassa's geldt: $\sum \boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a_G}$
  - Let op! hierin is $\boldsymbol{a_G}$ de versnelling van het massamiddelpunt of zwaartepunt G, en niet de versnelling van eender welk punt van het stelsel! In H5 zagen we immers dat die versnelling verschillend kan zijn voor verschillende punten op het lichaam (tenzij het lichaam zuiver transleert).

- In 6.2 zullen we zien dat voor rotaties t.g.v. een moment ***M*** geldt: $\sum \boldsymbol{M_G} = I_G \cdot \boldsymbol{\alpha}$

- We gaan eerst in op de betekenis en berekening van het massatraagheidsmoment I_G

6.1 Massatraagheidsmoment

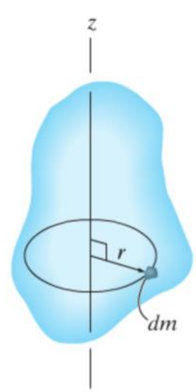
- <u>Het massatraagheidsmoment I</u>:

  - Is een maat voor de weerstand van een lichaam tegen een hoekversnelling ($\sum \boldsymbol{M_G} = I_G \cdot \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow$ hoe groter I, hoe kleiner $\boldsymbol{\alpha}$ voor een gegeven moment $\sum \boldsymbol{M_G}$)

  - Vergelijkbaar met hoe massa m een maat is voor de weerstand tegen versnelling; maar: m is een eigenschap van het voorwerp, terwijl I_A afhankelijk is van de as A waarrond de rotatiebeweging wordt beschreven;

  - Definitie:

$$I = \int_m r^2 \, dm$$



Eenheid: $[kg \cdot m^2]$

I is steeds positief

6.1 Massatraagheidsmoment

- <u>Berekening van I door integratie (toep. v. d. definitie)</u>:

  - Indien het lichaam bestaat uit materiaal met veranderlijke soortelijke massa $\rho(x, y, z)$, dan: $dm = \rho \cdot dV$ met *dV* het volume ingenomen door *dm*;

  - Berekening I met volume-elementen: $I = \int_V r^2 \rho \, dV$

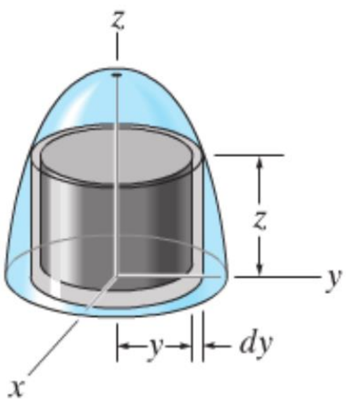
  - of indien ρ constant is: $I = \rho \int_V r^2 \, dV$

  - *dV* kan je op verschillende manieren modelleren:
    - *dV = dx dy dz* => dit wordt een drievoudige integraal
    - Indien *dV* oneindig klein is in één richting, is dit een enkelvoudige integraal; hiervoor worden vaak schaal- of schijfelementen gebruikt;

6.1 Massatraagheidsmoment

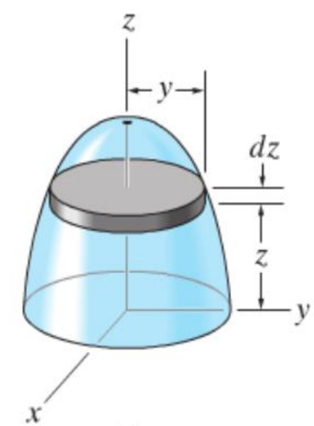
- Berekening van I door integratie (toep. v. d. definitie):

  - Stel: symmetrisch lichaam bekomen door een kromme te roteren om een as:



Schaalelement (holle cylinder met elementaire wanddikte) met hoogte z, straal $r = y$ en dikte dy:

$$dV = 2\pi y \cdot z \cdot dy$$



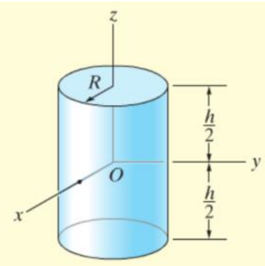
Schijfelement (volle cylinder met elementaire hoogte) met straal y en dikte dz:

$$dV = \pi y^2 \cdot dz$$

6.1 Massatraagheidsmoment

- Berekening van I door integratie (toep. v. d. definitie):
  - Oefening: voorbeeld 6.1

Bepaal het massatraagheidsmoment om de z-as van de cilinder die in fig. 6.3*a* is afgebeeld. De soortelijke massa van het materiaal, ρ, is constant.



(a)

OPLOSSING

Schaalelement Dit vraagstuk kan worden opgelost met behulp van het *schaalelement* in fig. 6.3*b* en een enkelvoudige integraal. De inhoud van het element is $dV = (2\pi r)(h)\,dr$ en daaruit volgt dat zijn massa $dm = \rho\,dV = \rho(2\pi hr\,dr)$ is. Aangezien het *gehele element* op dezelfde afstand r van de z-as ligt, is het *massatraagheidsmoment* van het element:

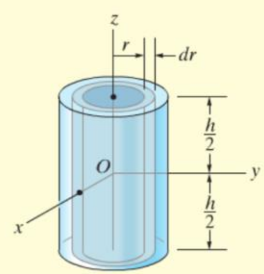
$$dI_z = r^2 dm = \rho 2\pi h r^3\,dr$$

Integratie over het hele gebied van de cilinder levert:

$$I_z = \int_m r^2\,dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3\,dr = \frac{\rho\pi}{2} R^4 h$$

De massa van de cilinder is:

$$m = \int_m dm = \rho 2\pi h \int_0^R r\,dr = \rho\pi h R^2$$



(b)

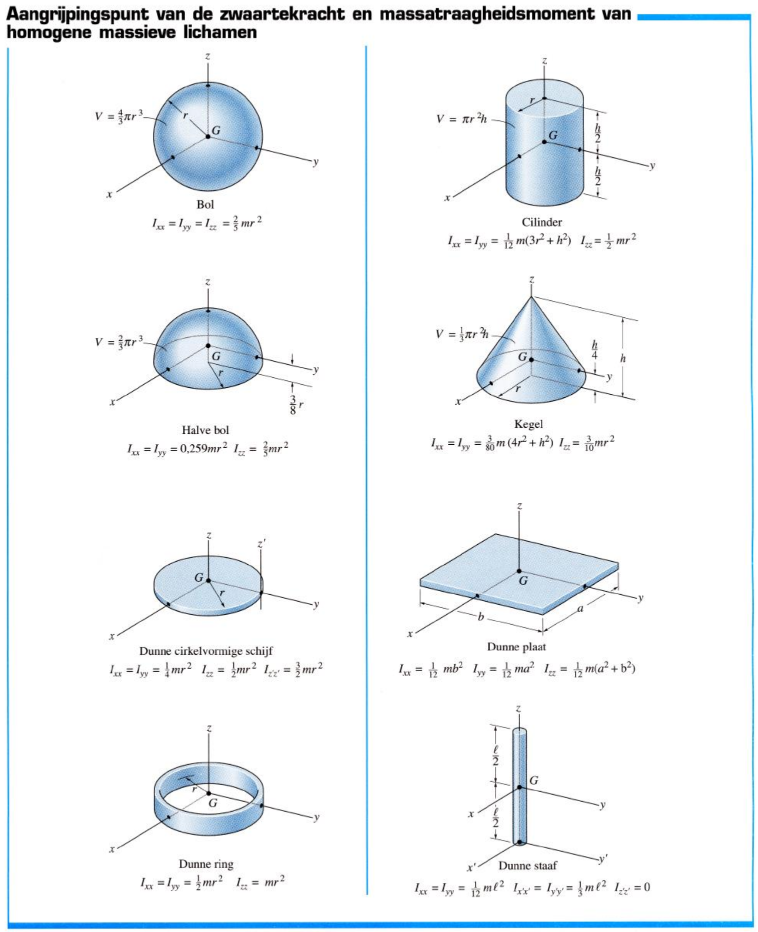
Fig. 6.3

zodat

$$I_z = \tfrac{1}{2} m R^2 \qquad \textit{Antw.}$$

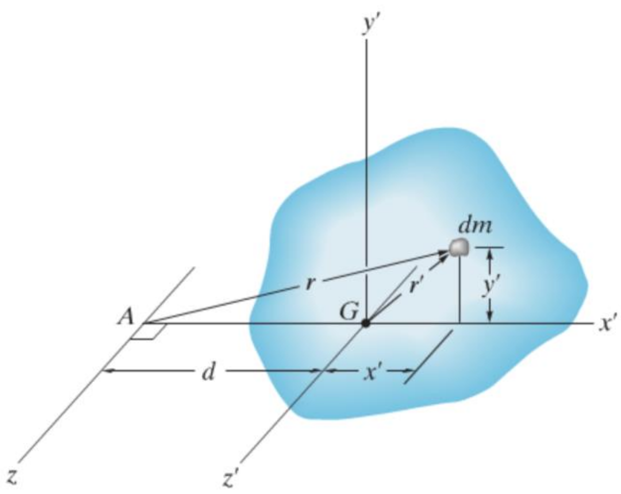
6.1 Massatraagheidsmoment

- Berekening van I met formularium:



6.1 Massatraagheidsmoment

- Berekening van I met stelling van Steiner:
  - Ook wel "evenwijdige-assen"stelling genoemd;
  - Gevraagd: als we het massatraagheidsmoment I_G rond een as door zwaartepunt G kennen, hoe berekenen we dan massatraagheidsmoment I_A rond een evenwijdige as op afstand d door punt A?



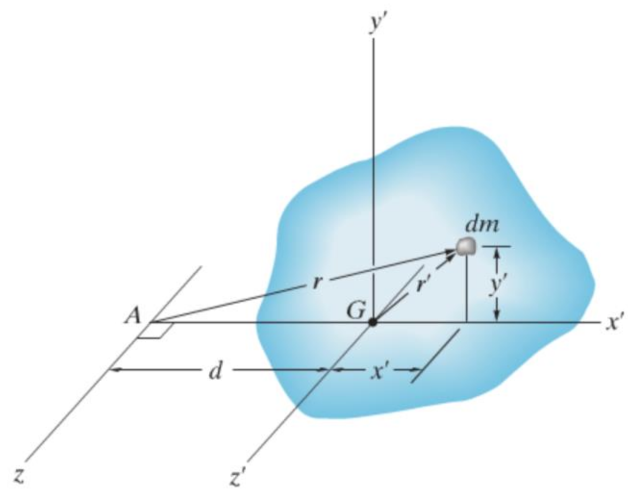
$$I_A = \int_m r^2\,dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2]\,dm$$

$$= \underbrace{\int_m (x'^2 + y'^2)\,dm}_{= I_G} + 2d \underbrace{\int_m x'\,dm}_{= 0} + d^2 \underbrace{\int_m dm}_{= m}$$

$$\boxed{I = I_G + md^2}$$

6.1 Massatraagheidsmoment

- Berekening van I met stelling van Steiner:
  - Ook wel "evenwijdige-assen"stelling genoemd;
  - Gevraagd: als we het massatraagheidsmoment I_G rond een as door zwaartepunt G kennen, hoe berekenen we dan massatraagheidsmoment I_z rond een evenwijdige as z op afstand d van de as door G?
  - Stel: z′ as gaat door G; we berekenen I_z:



$$I_A = \int_m r^2\,dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2]\,dm$$

$$= \underbrace{\int_m (x'^2 + y'^2)\,dm}_{= I_G} + 2d\underbrace{\int_m x'\,dm}_{= 0} + d^2\underbrace{\int_m dm}_{= m}$$

$$\boxed{I = I_G + md^2}$$

In het rechterlid moet I_G staan!!

6.1 Massatraagheidsmoment

- Berekening van I met gyrostraal:
  - Gyrostraal k is een geometrische eigenschap uitgedrukt in [m]: $I = mk^2 \quad \text{of} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}}$

- Berekening van I voor samengestelde lichamen:
  - Sommige lichamen zijn samengesteld met eenvoudige lichamen (schijf, bol, cylinder, etc.) met gekend massatraagheidsmoment
  - Berekening van I in dat geval: $I_{totaal} = \sum_{lichaam\ i}(I_{G,i} + m_i \cdot d_i^2)$
  - Pas stelling van Steiner toe waar nodig!
  - Maak een algebraïsche som: soms moet je I als negatieve grootheid in rekening brengen (bijv. holtes aftrekken van massieve platen);

6.1 Massatraagheidsmoment

- Voorbeeld 6.3

De plaat die in fig. 6.6*a* is afgebeeld, heeft een soortelijke massa van 8000 kg/m^3 en een dikte van 10 mm. Bereken het massatraagheidsmoment van de plaat om een as die loodrecht op de bladzijde staat en door punt O gaat.

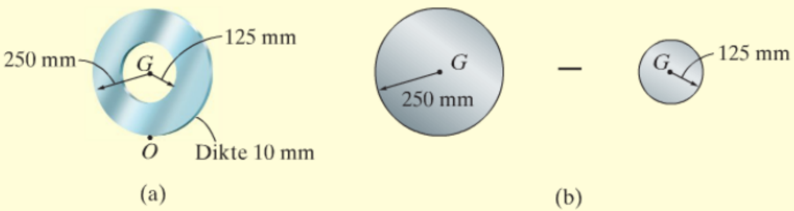


Fig. 6.6

OPLOSSING

De plaat bestaat uit twee samengestelde onderdelen: een schijf met een straal van 250 mm *minus* een schijf van 125 mm, zie fig. 6.6*b*. Het massatraagheidsmoment om O kan worden berekend door het massatraagheidsmoment van elk van deze onderdelen om O te berekenen en vervolgens de uitkomsten *algebraïsch* op te tellen. De berekeningen worden gedaan door toepassing van de evenwijdige-assenstelling, in combinatie met de gegevens die in de tabel achter in het boek staan.

Schijf Het massatraagheidsmoment van een schijf om een zwaartepuntsas die loodrecht op het vlak van de schijf staat, is $I_G = \frac{1}{2}mr^2$. Het massamiddelpunt G van de schijf ligt op een afstand van 0,25 m van punt O. Hieruit volgt:

$$m_s = \rho_s V_s = 8000 \text{ kg/m}^3\ [\pi(0{,}25 \text{ m})^2(0{,}01 \text{ m})] = 15{,}71 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned}(I_s)_O &= \tfrac{1}{2}m_s r_s^2 + m_s d^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(15{,}71 \text{ kg})(0{,}25 \text{ m})^2 + (15{,}71 \text{ kg})(0{,}25 \text{ m})^2 \\ &= 1{,}473 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\end{aligned}$$

6.1 Massatraagheidsmoment

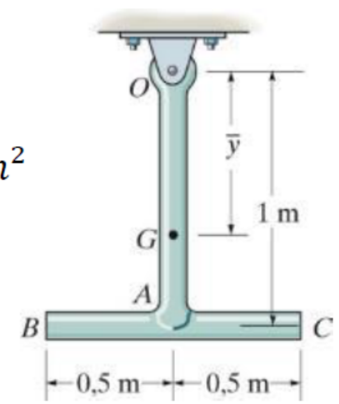
- Voorbeeld 6.4

Beide dunne stangen van de slinger hebben een gewicht van 50N. De slinger is scharnierend opgehangen bij punt O. Bepaal het massatraagheidsmoment van de slinger om de as door O en door het massamiddelpunt G van de slinger.

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{50}{9.81}\right)1^2 = 1.699\ kg\ m^2$$

$$(I_{BC})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{50}{9.81}\right)1^2 + \left(\frac{50}{9.81}\right)1^2 = 5.522\ kg\ m^2$$

$$I_O = (I_{OA})_O + (I_{BC})_O = 7.22\ kg\ m^2$$



$$\bar{y} = \frac{0.5\left(\frac{50}{9.81}\right) + 1\left(\frac{50}{9.81}\right)}{\left(\frac{50}{9.81}\right) + \left(\frac{50}{9.81}\right)} = 0.75m$$

$$I_O = I_G + md^2 \Rightarrow I_G = I_O - md^2 = 7.22 - \left(\frac{100}{9.81}\right)0.75^2 = 1.486\ kg\ m^2$$

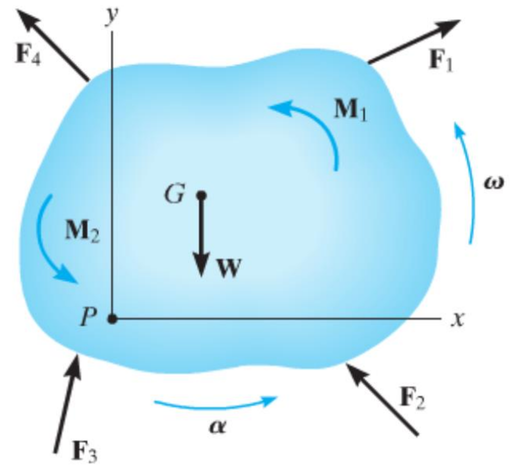
6.1 Massatraagheidsmoment

- Samengevat: verschillende manieren voor het berekenen van het massatraagheidsmoment I:

    1. Toepassing van de definitie, d.m.v. integratie (vaak met schaal- of schijfelementen);
    2. Formularium;
    3. Stelling van Steiner;
    4. Gyrostraal;
    5. Samengestelde lichamen: algebraïsche som van de massatraagheidsmomenten (aangepast met Steiner)

6.2 Bewegingsvergelijkingen voor de vlakke beweging

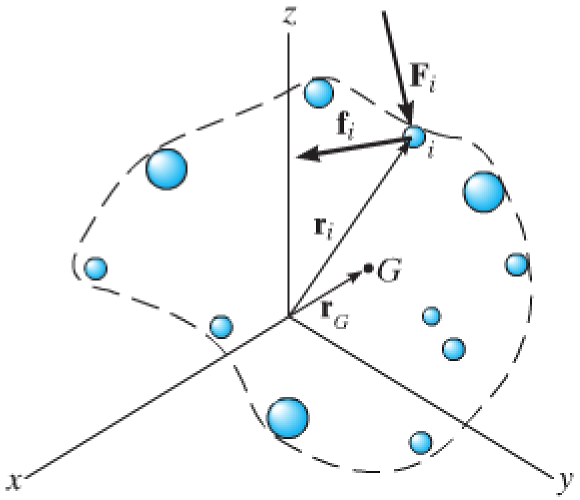
- In dit vak beperken we ons tot de kinetica van onvervormbare lichamen in het vlak
- Alle krachten en momenten worden in dit vlak geprojecteerd
- Voorwerp en belastingen zijn symmetrisch t.o.v. een vast referentievlak



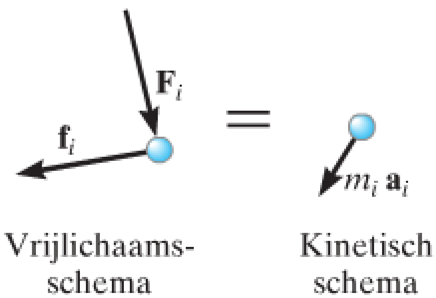
- Assenstelsel *x*, *y*, *z*:
  - een inertiaal assenstelsel (d.w.z. roteert niet, staat stil of transleert aan een constant snelheid)
  - Oorsprong laten we ogenblikkelijk samenvallen met het (willekeurig) referentiepunt P

6.2 Bewegingsvergelijkingen voor de vlakke beweging

- Translatievergelijking: zie H2 (stelsel van puntmassa's), sectie 2.3:



Inertiaal coördinatenstelsel



(b)

Fig. 2.4

$$\sum \boldsymbol{F_i} + \underbrace{\boxed{\sum \boldsymbol{f_i}}}_{=0} = \sum m_i\,\boldsymbol{a_i}$$

Massamiddelpunt: $\boldsymbol{r_g} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r_i}}{m}$

$$\underbrace{\Sigma \mathbf{F}}_{\text{Uitwendige krachten}} = \underbrace{m\mathbf{a}_G}_{\text{Versnelling van massamiddelpunt!}}$$

Uitwendige krachten

Versnelling van massamiddelpunt!

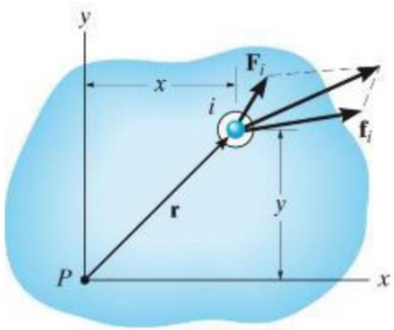
$$\Sigma F_x = m a_x$$
$$\Sigma F_y = m a_y$$

2 onafhankelijke scalaire vergelijkingen

6.2 Bewegingsvergelijkingen voor de vlakke beweging

- Rotatievergelijking: analyse voor een elementaire massa dm

Opm.: We beschouwen 1 tijdstip t en laten de oorsprong met P samenvallen



Vrijlichaamsschema voor een puntmassa

$$F_i = resulterende\ uitwendige\ kracht$$
$$f_i = resulterende\ inwendige\ kracht$$

$$r \times F_i + r \times f_i = r \times m_i a_i$$

$$(M_P)_i = r \times m_i a_i$$

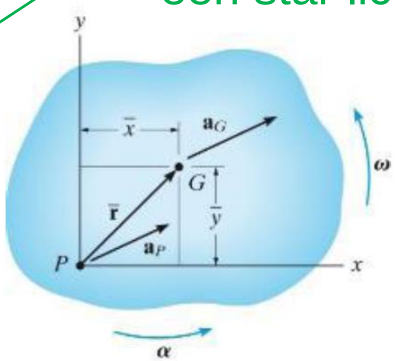
Opm.: hier gebruiken we het feit dat het om een star lichaam gaat

Momenten uitdrukken in functie van versnelling van punt P met hoekversnelling α en hoeksnelheid ω.

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$a_B = a_a + \left(a_{B/A}\right)_t + \left(a_{B/A}\right)_n = a_a + \alpha \times r_{B/A} - \omega^2\ r_{B/A}$$

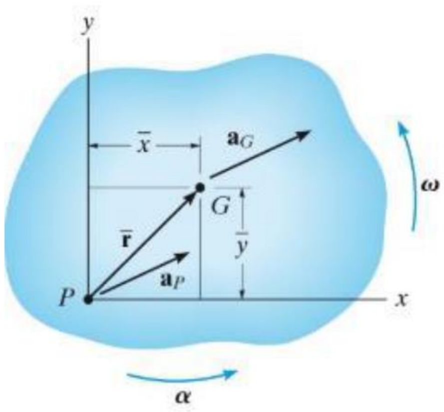
$$(\mathbf{M}_P)_i = m_i \mathbf{r} \times (\mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r})$$
$$= m_i [\mathbf{r} \times \mathbf{a}_P + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) - \omega^2 (\mathbf{r} \times \mathbf{r})]$$



6.2 Bewegingsvergelijkingen voor de vlakke beweging

- Rotatievergelijking: analyse voor een elementaire massa dm

$$(\mathbf{M}_P)_i = m_i \mathbf{r} \times (\mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r})$$
$$= m_i [\mathbf{r} \times \mathbf{a}_P + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) - \omega^2 (\mathbf{r} \times \mathbf{r})]$$



Waarbij

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{M}_P)_i = (M_P)_i \mathbf{k}$$
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \rightarrow r^2 = x^2 + y^2$$
$$\mathbf{a}_p = (a_P)_x \mathbf{i} + (a_P)_y \mathbf{j}$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{k}$$

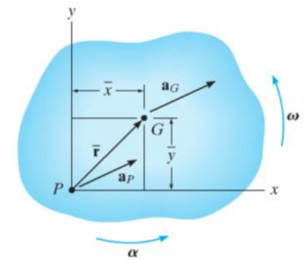
$$(M_P)_i \mathbf{k} = m_i \{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(a_P)_x \mathbf{i} + (a_P)_y \mathbf{j}] + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [\alpha \mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]\}$$

$$(M_P)_i \mathbf{k} = m_i [-y\, (a_P)_x + x\, (a_P)_y + \alpha x^2 + \alpha y^2] \mathbf{k}$$

$$(M_P)_i = m_i [-y\, (a_P)_x + x\, (a_P)_y + \alpha r^2] \quad \text{(linksom)} \qquad (r^2 = x^2 + y^2)$$

6.2 Bewegingsvergelijkingen voor de vlakke beweging

- Rotatievergelijking: analyse voor het star lichaam als geheel



$(M_P)_i = m_i[-y\,(a_P)_x + x\,(a_P)_y + \alpha\, r^2]$

Verzameling puntmassa's: $m_i \rightarrow dm$ + integreren over de gehele massa:

$\sum M_P = -(\int_m y\, dm)(a_P)_x + (\int_m x\, dm)(a_P)_y + (\int_m r^2\, dm)\alpha$

$$I_P = \int r^2 dm \qquad \bar{y}m = \int y\, dm \qquad \bar{x}m = \int x\, dm$$

$\sum M_P = -\bar{y}\, m\, (a_P)_x + \bar{x}\, m\, (a_P)_y + I_P\alpha$ (Enkel totaal uitwendig krachtmoment)

Indien $P = G \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} = 0 \Rightarrow \boxed{\Sigma M_G = I_G\alpha}$

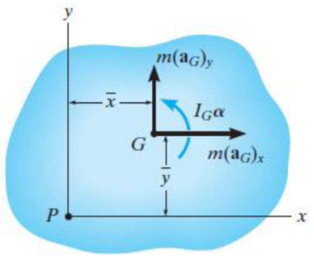
$P \neq G \Rightarrow I_P = I_G + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$ => $\sum M_P = \bar{y}m\,[-(a_P)_x + \bar{y}\,\alpha] + \bar{x}m\,[(a_P)_y + \bar{x}\,\alpha] + I_G\alpha$

6.2 Bewegingsvergelijkingen voor de vlakke beweging

- <u>Rotatievergelijking</u>: analyse voor het star lichaam als geheel

We willen dit uitdrukken in functie van de coördinaten van het massamiddelpunt

$$\sum M_P = \bar{y}m[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] + \bar{x}m[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] + I_G\alpha$$



Kinetic diagram

- Volgens het kinematische schema:

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}$$

$$(a_G)_x\mathbf{i} + (a_G)_y\mathbf{j} = (a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k} \times (\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j}) - \omega^2(\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j})$$

- Bepalen van het uitwendig product en gelijkstellen van de **i**- en **j**-componenten levert:

$$(a_G)_x = (a_P)_x - \bar{y}\alpha - \bar{x}\omega^2 \qquad -(a_P)_x + \bar{y}\alpha = (a_G)_x - \bar{x}\omega^2$$

$$(a_G)_y = (a_P)_y + \bar{x}\alpha - \bar{y}\omega^2 \qquad (a_P)_y + \bar{x}\alpha = (a_G)_y + \bar{y}\omega^2$$

6.2 Bewegingsvergelijkingen voor de vlakke beweging

- Rotatievergelijking: analyse voor het star lichaam als geheel

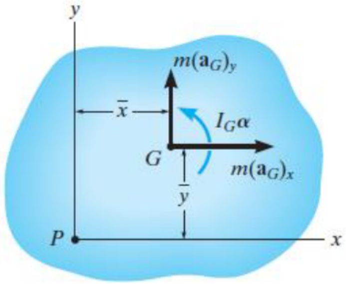
$$\sum M_P = \bar{y}m[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] + \bar{x}m[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] + I_G\alpha$$

$$-(a_p)_x + \bar{y}\alpha = (a_g)_x - \bar{x}\omega^2$$

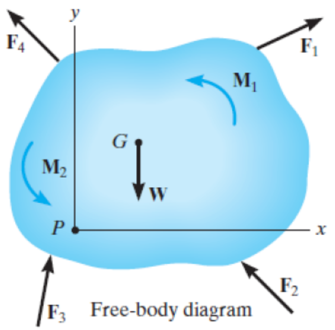
$$(a_P)_y + \bar{x}\alpha = (a_G)_y + \bar{y}\omega^2$$

$$\boxed{\sum M_P = -\bar{y}m(a_G)_x + \bar{x}m(a_G)_y + I_G\alpha}$$

$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \quad \text{(algemenere vorm)}$$



Kinetic diagram



Free-body diagram

Som van de momenten rond P van de uitwendige krachten =
som van de kinetische momenten van de componenten van $m\ a_G$
plus het kinetisch moment van $I_G\ \alpha$

6.2 Bewegingsvergelijkingen voor de vlakke beweging

- <u>Conclusie</u>

3 onafhankelijke scalaire vergelijkingen worden opgesteld om de algemene beweging in het platte vlak van een symmetrisch star lichaam te beschrijven.

$$\sum F_x = m(a_G)_x$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y$$

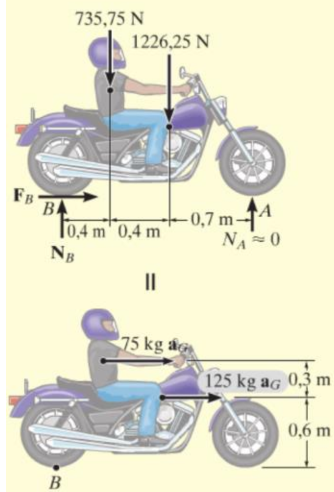
$$\sum M_G = I_G \alpha \qquad \text{of } \sum M_P = \sum (\mathcal{M}_k)_p$$

6.2 Bewegingsvergelijkingen voor de vlakke beweging

- Voorbeeld 6.6

Geg.: De motorfiets heeft een massa van 125 kg en massamiddelpunt in G_1. De motorrijder heeft een massa van 75 kg en massamiddelpunt in G_2. Verwaarloos de massa van de wielen.

Gevr.: (1) Bepaal de minimale statische wrijvingscoëfficiënt tussen de wielen en de straat zodat de motorrijder zijn voorwiel van de grond kan krijgen. (2) Welke versnelling moet hij hiervoor hebben?



(b)

Fig. 6.11 (vervolg)

OPLOSSING

Vrijlichaamsschema en kinetisch schema In dit vraagstuk zullen we de motor en de motorrijder als *één stelsel* beschouwen. Door middel van de vergelijkingen $\bar{x} = \Sigma\tilde{x}m/\Sigma m$ en $\bar{y} = \Sigma\tilde{y}m/\Sigma m$ is het mogelijk de plaats van het massamiddelpunt van dit 'stelsel' te bepalen. We zullen hier echter het afzonderlijke gewicht en de afzonderlijke massa van de motorfiets en de motorrijder in beschouwing nemen, zoals wordt weergegeven in het vrijlichaamsschema en het kinetisch schema, fig. 6.11*b*. Beide delen ondervinden *dezelfde* versnelling. We hebben aangenomen dat het voorwiel *nog net niet* losgekomen is van de grond, zodat de normale reactie $N_A \approx 0$ is. De drie onbekenden in het vraagstuk zijn N_B, F_B en a_G.

Bewegingsvergelijkingen

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \quad F_B = (75 \text{ kg} + 125 \text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \quad N_B - 735{,}75 \text{ N} - 1226{,}25 \text{ N} = 0$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B; -(735{,}75 \text{ N})(0{,}4 \text{ m}) - (1226{,}25 \text{ N})(0{,}8 \text{ m}) = -(75 \text{ kg } a_G)(0{,}9 \text{ m}) - (125 \text{ kg } a_G)(0{,}6 \text{ m}) \qquad (2)$$

Oplossing geeft:

$$a_G = 8{,}95 \text{ m/s}\rightarrow \qquad \textit{Antw.}$$
$$N_B = 1962 \text{ N}$$
$$F_B = 1790 \text{ N}$$

De minimale statische wrijvingscoëfficiënt is dus:

$$(\mu_s)_{\min} = \frac{F_B}{N_B} = \frac{1790 \text{ N}}{1962 \text{ N}} = 0{,}912 \qquad \textit{Antw.}$$