Lesweek 11 – HC 9 : Eerste orde differentiaalvergelijkingen

Cursustekst HOOFDSTUK 6, §6.1 tot §6.5

INLEIDING

Wat is een DV ??

= een vergelijking die één of meerdere afgeleiden van een functie y = f(x) bevat, eventueel y zelf en functies in x.

Notatie: $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

ORDE van de DV = hoogste orde afgeleide van y die voorkomt !

Voorbeelden:

- $y' = \sin x + 5x^3$ is een DV van de eerste orde.
- $y' + xy = x^3 y^{(4)}$ is een DV van de vierde orde.
- $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \sin x = 0$ is een DV van de tweede orde.
- $e^y\, dy + 2x dx = x dx$ is een DV van de eerste orde .

We zullen ons beperken tot het oplossen van **eerste** en **tweede** orde DV !!

Twee startvoorbeelden eerste orde DV

DV zijn alomtegenwoordig in wetenschap en techniek!

Thermisch voorbeeld: *afkoeling van een lichaam / vloeistof /…*

De **snelheid** waarmee de temperatuur T afneemt,
is op elk tijdstip t recht evenredig met het *verschil tussen de ogenblikkelijke temperatuur en (gekende) omgevingstemperatuur*.

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_{omg}), \qquad k > 0 \text{ en } T(0) = T_0$$

Mechanisch voorbeeld: "*optrekken*" *van racewagen*

De **versnelling** van de wagen (bij plankgas)
is op elk tijdstip t recht evenredig met het *verschil tussen de (gekende) topsnelheid en ogenblikkelijke snelheid van de wagen*.

$$\frac{dv}{dt} = k \cdot (v_{top} - v) = -k \cdot (v - v_{top}), \qquad k > 0 \text{ en } v(0) = 0$$

Oplossing startvoorbeelden

Wiskundig gaat dit om DEZELFDE eerste orde DV !!

$$y' = \frac{dy}{dx} = -k \cdot (y - y_\infty), \qquad k > 0 \text{ en } y(0) = y_0$$

Oplossen lukt door scheiding van veranderlijken!

$$\frac{1}{(y - y_\infty)} \cdot dy = -k \cdot dx \iff \ln|y - y_\infty| = -k \cdot x + c$$

Links en rechts integreren

impliciete algemene oplossing ($c \in \mathbb{R}$)

Indien doenbaar, maak oplossing expliciet!

HERNOEM !

$$|y - y_\infty| = e^{-k \cdot x + c} \iff y - y_\infty = \boxed{\pm e^{c}}\, e^{-k \cdot x}$$

expliciete algemene oplossing : $y = y_\infty + C \cdot e^{-k \cdot x}$

Gebruik tot slot de beginvoorwaarde!

(om C vast te leggen)

$$y_0 = y_\infty + C \cdot e^{-k \cdot 0}$$

$$C = y_0 - y_\infty$$

Scheiden van veranderlijken (§ 6.2)

BESLUIT $\boldsymbol{y} = y_\infty + (y_0 - y_\infty) \cdot \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{k}\cdot x}$

Expliciete bijzondere (particuliere) oplossing

Hoe k vinden? **Extra info nodig !!** Bijvoorbeeld: *y'(0)* of *y(1)* of …

ALGEMENE METHODE

$$f(y)\, y' = g(x)$$

$$\left(y' = \frac{dy}{dx} \right)$$

STANDAARDVORM

$$\boxed{f(y)\, dy = g(x)\, dx}$$

$$\int f(y)\, dy = \int g(x)\, dx \rightarrow \boxed{F(y) = G(x) + c}$$

"IMPLICIETE" OPLOSSING

(indien mogelijk: maak oplossing expliciet !)

Exacte differentiaalvergelijkingen

Voorbeeld: $\boxed{(y+\mathbf{2x})\,dx + x\,dy = 0, \text{ met } y(1) = 2}$ → *randvoorwaarde*

Scheiden van veranderlijken is onmogelijk ! DV is wel nog "exact" !

HOE OPLOSSEN? ZOEK F ZODAT

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow dF(x,y) = 0$$ TOTALE DIFFERENTIAAL !

$$\Leftrightarrow F(x,y) = c$$

! De oplossingskrommen van een exacte DV zijn dus de HOOGTELIJNEN van $z = F(x,y)$

In dit voorbeeld: *$F(x,y) = x\,y + x^2 = c$ en $c = 3$ (want $y(1) = 2$)*

expliciete oplossing $\Rightarrow$ $y = \dfrac{3 - x^2}{x}$

Grafische interpretatie exacte DV

OPLOSSINGSkrommen zijn niveaulijnen van $F(x,y) = xy + x^2$!

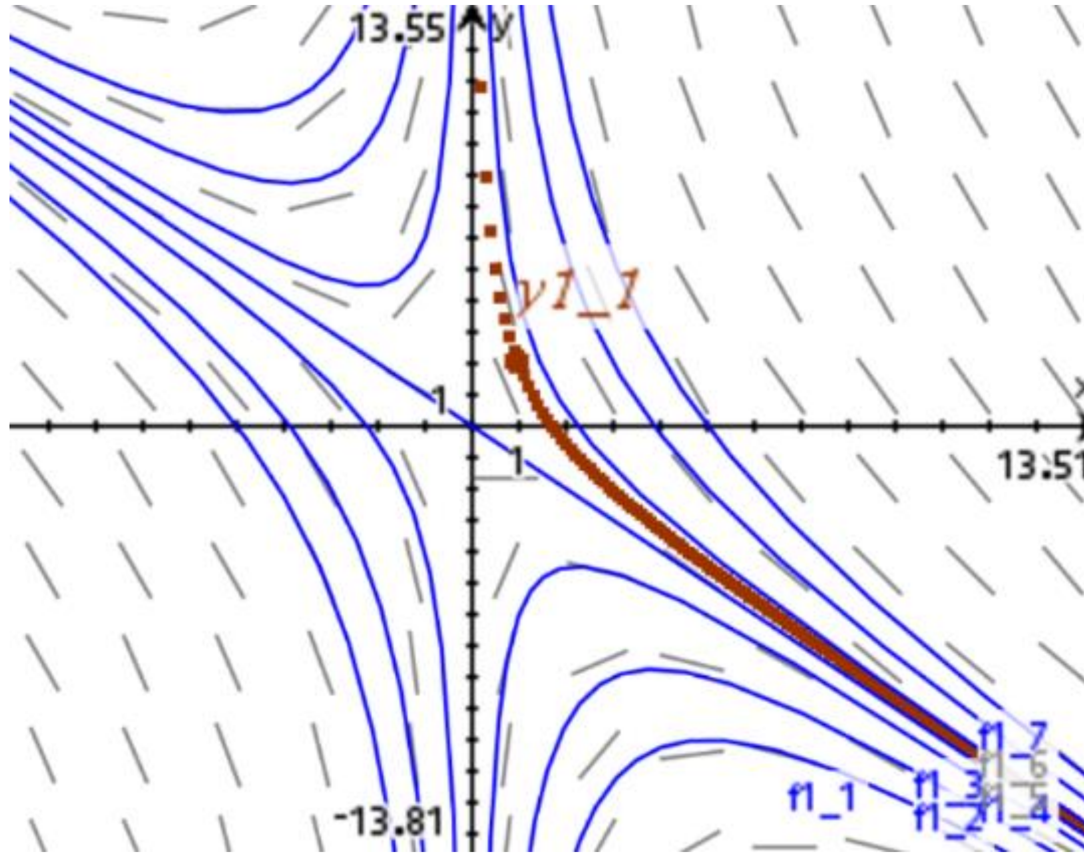
$$f1(x)=\frac{c-x^2}{x}$$

$c:=\{-25,-15,-5,0,5,15,25\}$

REKENTOESTEL

$$y1' = \frac{-(y1+2\cdot x)}{x}$$

$(x_0, y1_0)$: (1 , 2



!! OOK HEEL BELANGRIJK OM TE BESEFFEN: in elk punt (x,y) van IR^2 ken je de rico van de raaklijn en kan je dus een kort stukje hiervan tekenen !!

UHASSELT KU LEUVEN

Oplossen van exacte DV (§ 6.3)

WANNEER KAN JE F VINDEN?

EIGENSCHAP

$$P\,dx + Q\,dy = dF \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

MOTIVATIE

$$P dx + Q dy = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

Bijgevolg moet

$$P = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{en} \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Volgorde van partieel afleiden maakt niet uit !

Voorbeeld oplossen van exacte DV

Voorbeeld : $\underbrace{(y - e^x)}_{P(x,y)}\, dx + \underbrace{(x + 1 + y)}_{Q(x,y)}\, dy = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \qquad\qquad Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

EXACT ! WANT $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Oplosstrategie : combineer 2 integralen op gepaste wijze!

$$\int P(x,y)dx \qquad\qquad \int Q(x,y)dy$$

Enerzijds $F = \int P(x,y)dx = \int (y - e^x)dx = \boxed{y \cdot x} - e^x + c_y$

Anderzijds $F = \int Q(x,y)dy = \int (x + 1 + y)dy = \boxed{x \cdot y} + y + \dfrac{y^2}{2} + c_x$

Besluit : $F(x,y) = \boxed{x \cdot y} - e^x + y + \dfrac{y^2}{2}$ $\Rightarrow$ Impliciete oplossing: *F(x,y)* = *c*

UHASSELT KU LEUVEN

Lineaire differentiaalvergelijkingen (§ 6.4)

Stel vast: 2 startvoorbeelden kan je ook als volgt herschrijven

$$y' + k \cdot y = k \cdot y_\infty \iff y' + a \cdot y = b \quad \text{met } a, b \in \mathbb{R}$$

Nog stap algemener bekom je standaardvorm van een lineaire 1e orde DV

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad \text{met } P(x), Q(x) \text{ reële functies in } x$$

STRAFFE STOOT! Voor dit type van DV kan je een expliciete oplosformule opstellen! Vermenigvuldig beide leden met hulpfunctie μ(x) !

$$\mu(x) \cdot y' + \boxed{\underbrace{\big(\mu(x)P(x)\big)}_{\mu'(x)}} \cdot y = \mu(x) \cdot Q(x)$$

IDEALE VOORWAARDE
om μ vast te leggen !

PRODUCTREGEL

$$\iff \quad \big(\mu(x) \cdot y\big)' = \mu(x) \cdot Q(x)$$

Nu gaat het snel!
Integreer beide leden !

$$y' = \frac{dy}{dx} = -k \cdot (y - y_\infty), \qquad k > 0 \text{ en } y(0) = y_0$$

Oplossen van lineaire DV (§ 6.4)

BESLUIT $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ met $P(x), Q(x)$ reële functies in x

Oplossingsmethode

De algemene oplossing van een lineaire DV van de eerste orde heeft de vorm

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)dx + c\right)$$

met $c \in \mathbb{R}$ en zogenaamde "integrerende factor":

$$\mu' = \mu \cdot P \quad \rightarrow\rightarrow \quad \boxed{\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.}$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu \cdot P \rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = P\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\mu}{\mu} = \int P\,dx$$

scheiden van veranderlijken

$$\ln(\mu(x)) = \int P(x)\,dx$$

Voorbeeld: oplossen van lineaire DV

BESLUIT $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ met $P(x), Q(x)$ reële functies in x

Oplossingsmethode

De algemene oplossing van een lineaire DV van de eerste orde heeft de vorm

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)dx + c\right)$$

met $c \in \mathbb{R}$ en zogenaamde "integrerende factor":

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Voorbeeld :

$$\boxed{x \cdot y' - y = 2x}$$

STAP 1. Herwerk DV naar standaardvorm: $y' + \left(\frac{-1}{x}\right) y = 2$

STAP 2+3. $mu(x) := e^{\int \frac{-1}{x} dx}$ $\left(= \frac{1}{|x|}\right)$

Gereed

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 \text{ als } x > 0 \\ -1 \text{ als } x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{mu(x)} \cdot \left(\int (mu(x) \cdot 2) dx + c\right)$$

"tekenfunctie"

$$|x| \cdot (2 \cdot \text{sign}(x) \cdot \ln(|x|) + c)$$

x > 0

REKENTOESTEL-CONTROLE

$$\text{deSolve}(x \cdot y' - y = 2 \cdot x, x, y) \qquad y = 2 \cdot x \cdot \ln(x) + \boldsymbol{c1} \cdot x$$

Toepassing “mengvraagstuk”

AFSPRAAK. Vraagstukken mag je meteen oplossen met het rekentoestel en desolve-commando! Bij pure rekenoefeningen (zonder verhaal) verwachten we alle tussenstappen!

VOORBEELD: Oefening 15, oefenbundel hoofdstuk 6

In het lichaam zit 5 liter bloed. Een patiënt krijgt via een infuus per minuut 0,07 liter bloed bij, met daarin opgelost 100 mg per liter geneesmiddel. Het stromen van het bloed zorgt ervoor dat het geneesmiddel homogeen verdeeld wordt in het bloed.

Per minuut gaat er ook 0,07 liter weg door aftapping van bloed.

a) Stel een DV op die de evolutie van de massa $m(t)$ aan geneesmiddel in het bloed beschrijft in functie van de tijd.

b) Vorm deze DV om naar een DV voor de concentratie $c(t)$ aan geneesmiddel in het bloed.

c) Vind de oplossing van deze DV en maak ook een schets van de grafiek van $c(t)$.

d) Naar welke waarde zal de concentratie naderen na lange tijd? Er is een probleem met de veiligheid als de concentratie boven 150 mg/l komt. Zal de veiligheid van de patiënt in het gedrang komen?

Oplossing bloedvraagstuk

In het lichaam zit 5 liter bloed. Een patiënt krijgt via een infuus per minuut 0,07 liter bloed bij, met daarin opgelost 100 mg per liter geneesmiddel. Het stromen van het bloed zorgt ervoor dat het geneesmiddel homogeen verdeeld wordt in het bloed.

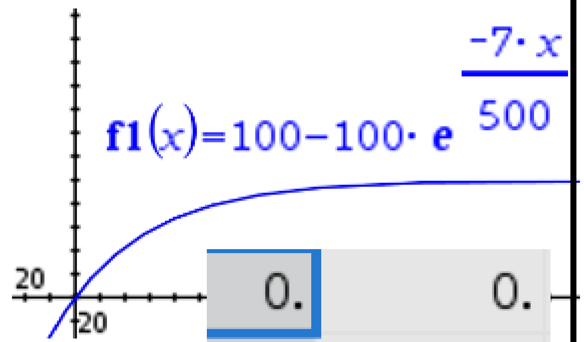
Per minuut gaat er ook 0,07 liter weg door aftapping van bloed.

a) Stel een DV op die de evolutie van de massa $m(t)$ aan geneesmiddel in het bloed beschrijft in functie van de tijd.

b) Vorm deze DV om naar een DV voor de concentratie $c(t)$ aan geneesmiddel in het bloed.

c) Vind de oplossing van deze DV en maak ook een schets van de grafiek van $c(t)$.

d) Naar welke waarde zal de concentratie naderen na lange tijd? Er is een probleem met de veiligheid als de concentratie boven 150 mg/l komt. Zal de veiligheid van de patiënt in het gedrang komen?



0.	0.
60.	56.8289
120.	81.3626
180.	91.954
240.	96.5265

IN : $\dfrac{dm}{dt} = 0{,}07\ \dfrac{\ell}{\text{min}} \times 100\,\dfrac{\text{mg}}{\ell} = 7\,\dfrac{\text{mg}}{\text{min}}$

UIT : $\dfrac{dm}{dt} = 0{,}07\ \dfrac{\ell}{\text{min}} \times c\,\dfrac{\text{mg}}{\ell} = 0{,}07c\,\dfrac{\text{mg}}{\text{min}}$

$$\frac{dm}{dt} = 7 - 0{,}07 \cdot c$$

c(t) = m(t) / V(t) → m = 5 c !!

OPLOSSING: $\text{deSolve}\left(5\cdot c'=7-\dfrac{7\cdot c}{100} \text{ and } c(0)=0,t,c\right) \Rightarrow c=100-100\cdot e^{\frac{-7\cdot t}{500}}$

De concentratie na lange tijd nadert bijgevolg 100 mg per liter.