Hoofdstuk 5 – Kinematica van een star lichaam in een plat vlak

Eric Demeester

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

Overzicht H1 t.e.m. H8

H1 – H2 – H3 – H4 → Puntmassa's, waarvoor oriëntatie niet van belang is

H5 – H6 – H7 – H8 → Starre lichamen, waarvoor oriëntatie van belang is

H1 / H5: Kinematica

$v = ds/dt$

$a = dv/dt$

$a \cdot ds = v \cdot dv$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

H2 / H6: Tweede wet van Newton

$\Sigma F = m \cdot a$

- momentopname

H3 / H7: Arbeid en energie

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **plaats**:

$\Sigma \int F \cdot ds = m \cdot v_2^2 / 2 - m \cdot v_1^2 / 2$

- 2 discrete plaatsen
- Enkel conservatieve krachten => behoud van mechanische energie: $T1 + V1 = T2 + V2$

H4 / H8: Stoot en hoeveelheid van beweging

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **tijd** en gebruik $a = dv/dt$:

$\Sigma \int F \cdot dt = m \cdot v_2 - m \cdot v_1$

- 2 discrete tijdstippen
- Behoud van hoev. v. beweging:
  - Geen externe stoten
  - Botsingen en explosies

Overzicht H1 t.e.m. H8

Basisformules voor de dynamica

KINEMATICA

H1

Rechtlijnige beweging van een puntmassa

variabele a	constante $a = a_c$
$a = \dfrac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a\, ds = v\, dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Kromlijnige beweging van een puntmassa

x-, y-, z-coördinaten		r-, θ-, z-coördinaten	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

n-, t-, b-coördinaten

$v = \dot{s}$ $\qquad a_t = \dot{v} = v\dfrac{dv}{ds}$

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \qquad \rho = \dfrac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

Relatieve beweging

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

H5

Beweging van een star lichaam om een vaste as

variabele α	constante $\alpha = \alpha_c$
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

Voor punt P

$s = \theta r \qquad v = \omega r \qquad a_t = \alpha r \qquad a_n = \omega^2 r$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{scharnier})} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{scharnier})}$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende en roterende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \times (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

KINETICA

H6

Massatraagheidsmoment $\quad I = \displaystyle\int r^2\, dm$

Evenwijdige-assenstelling $\quad I = I_G + md^2$

Gyrostraal $\quad k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$

H2

Bewegingsvergelijkingen

Puntmassa	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

H6

Principe van arbeid en energie

$T_1 + U_{1-2} = T_2$

Kinetische energie

Puntmassa	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

H7

Arbeid

Variabele kracht	$U_F = \displaystyle\int F\cos\theta\, ds$
Constante kracht	$U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$
Gewicht	$U_W = -W\,\Delta y$
Veer	$U_s = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$
Koppelmoment	$U_M = M\,\Delta\theta$

H3

Vermogen en rendement

$P = \dfrac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad \epsilon = \dfrac{P_{\text{uit}}}{P_{\text{in}}} = \dfrac{U_{\text{uit}}}{U_{\text{in}}}$

Wet van behoud van energie

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potentiële energie

$V = V_g + V_e$, waarbij $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

H4

Principe van stoot en impuls

Puntmassa	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\displaystyle\int \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2$
Star lichaam	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\displaystyle\int \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Behoud van impuls

$\Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_2$

Restitutiecoëfficiënt $\quad e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

H8

Principe van stootmoment en impulsmoment

Puntmassa	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\displaystyle\int \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = (d)(mv)$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\displaystyle\int \mathbf{M}_G\, dt = (\mathbf{H}_G)_2$ waarbij $H_G = I_G\omega$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\displaystyle\int \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = I_O\omega$

Behoud van impulsmoment

$\Sigma(\text{st. }\mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{st. }\mathbf{H})_2$

5.1 Beweging van een star lichaam

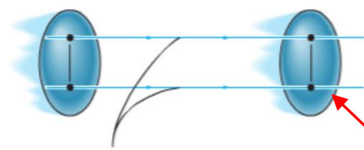
- Kinematica: beschrijving van de beweging zonder verband met krachten of momenten
  - Ontwerp van machines begint vaak vanuit de kinematica: de beweging van een onderdeel moet verlopen zoals gewenst → daaruit berekent men versnellingen → daaruit krachten/momenten

- Star lichaam: niet vervormbaar lichaam (~~vloeistoffen~~, ~~gassen~~)

- Beweging in plat vlak
  - Toepassingen: overbrengingen (nokken, vlakke stangenmechanismen, riemen, kettingen, tandwielen)

5.1 Beweging van een star lichaam

- Drie soorten beweging in plat vlak:
  1. Zuivere translatie
     - Rechtlijnige translatie:
     - Kromlijnige translatie:

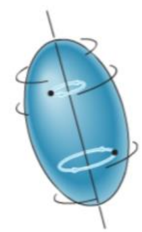


Baan bij rechtlijnige translatie

Baan bij kromlijnige translatie

lijnsegment op lichaam blijft evenwijdig met zichzelf tijdens beweging

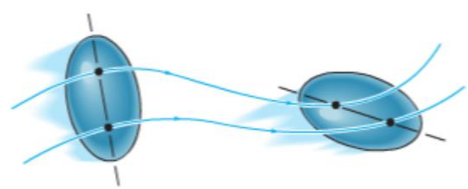
  2. Zuivere rotatie
     - = rotatie om een vaste as, loodrecht op het vlak van bewegin



Rotatie om een vaste as

Punten op het lichaam beschrijven een cirkelbeweging om de as

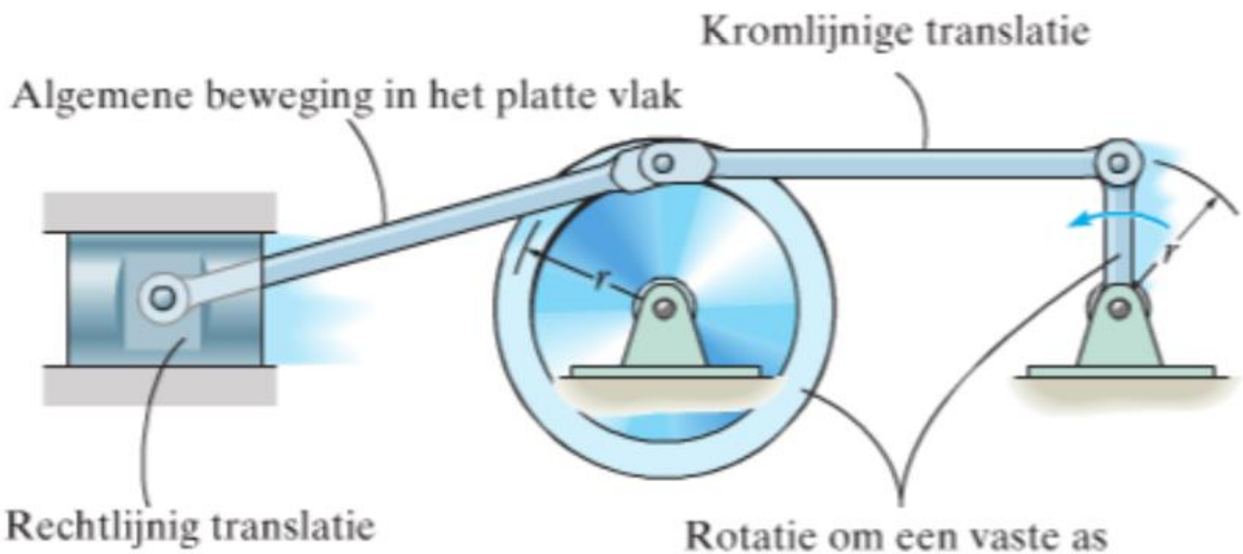
  3. Algemene beweging: combinatie van translatie en rotatie



Algemene beweging in het platte vlak

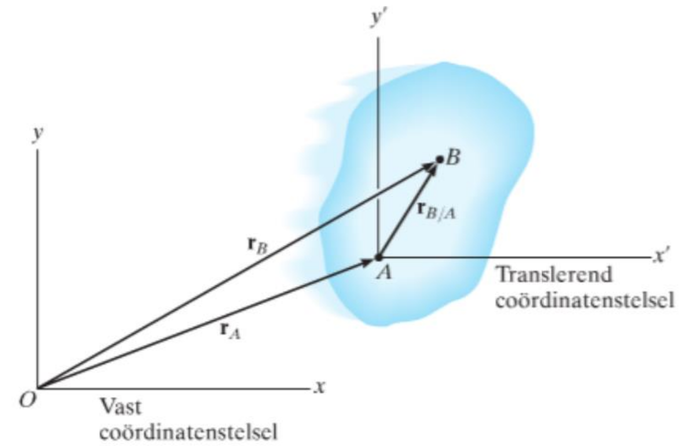
5.1 Beweging van een star lichaam

- Voorbeeld: kruk-drijfstang mechanisme



5.2 Translatie

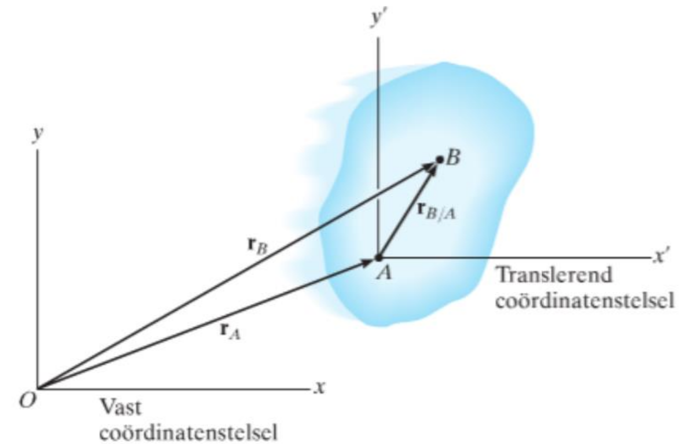
- Stel: het blauwe, onvervormbare lichaam transleert (rechtlijnig of kromlijnig)



- Geg.: we kiezen een referentiepunt A waaraan we een assenstelsel *x'y'* vastmaken (A is typisch een punt waarvan we de positie/snelheid/versnelling kennen)
- Gevr.: we willen de beweging (= positie/snelheid/versnelling) van B bepalen;
  - $\boldsymbol{r_A}$ en $\boldsymbol{r_B}$: absolute positie van A/B t.o.v. vast assenstelsel *xy*
  - $\boldsymbol{r_{B|A}}$: relatieve plaatsvector van B t.o.v. bewegend assenstelsel *x'y'* aan A; "**r** van B t.o.v. A" (merk op: $\boldsymbol{r_{B|A}}$ wijst van A naar B)

5.2 Translatie

- Stel: het blauwe, onvervormbare lichaam transleert (rechtlijnig of kromlijnig)



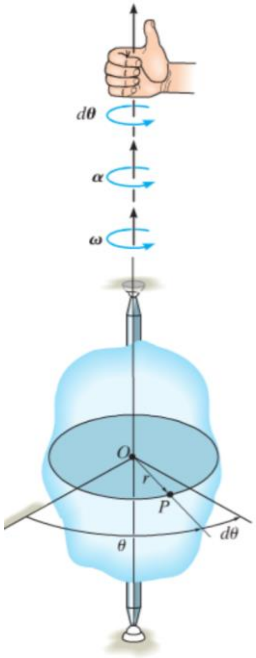
- Opl.: voor een onvervormbaar lichaam dat transleert: $\boldsymbol{r_{B|A}}$ is constant in grootte, richting en zin => $\frac{d\boldsymbol{r_{B|A}}}{dt} = \boldsymbol{v_{B|A}} = 0$
- Plaats: $\boldsymbol{r_B} = \boldsymbol{r_A} + \boldsymbol{r_{B|A}}$
- Snelheid: $\boldsymbol{v_B} = \boldsymbol{v_A} + \boldsymbol{v_{B|A}} = \boldsymbol{v_A}$
- Versnelling: $\boldsymbol{a_B} = \boldsymbol{a_A}$
- Bij zuivere translatie hebben alle punten dezelfde snelheid en versnelling; → kinematica van puntmassa's is bruikbaar

5.3 Rotatie om een vaste as

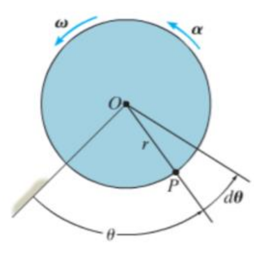
- Elk punt van het lichaam beschrijft een cirkelvormige beweging => eerst deze hoekbeweging beschrijven om de as
- Bekijk hoekbeweging van radiale lijn r
- Hoekstand θ op tijdstip t, gemeten t.o.v. referentie
- Hoekverplaatsing $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$:
  - Verandering van hoekstand θ gedurende tijd *dt*
  - Dit is een vector met grootte (dθ), richting (volgens rotatieas) en zin (rechterhandregel)
- Hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta}/dt$
  - Opmerking: *n* omw/min = *n* tr/min = $n \cdot 2\pi/60$ rad/s
- Hoekversnelling $\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2}$

dt elimineren

$$\boxed{\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega}$$



(a)



(b)

5.3 Rotatie om een vaste as

- Dus, algemene beschrijving van hoekbeweging:

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \qquad \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}} \qquad \boxed{\alpha \, d\theta = \omega \, d\omega}$$

  - Merk overeenkomst op met beweging puntmassa:

$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$v = \frac{ds}{dt}$$
$$a \, ds = v \, dv$$

- Indien constante hoekversnelling α_c:
  - Bovenstaande formules kunnen worden geïntegreerd:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

Constante hoekversnelling

  - Merk overeenkomst op met beweging puntmassa

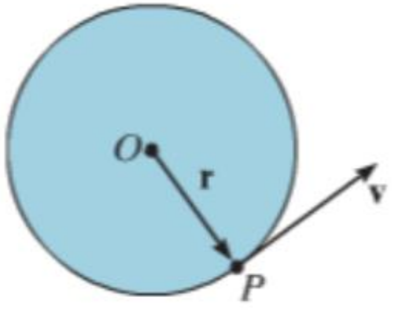
5.3 Rotatie om een vaste as

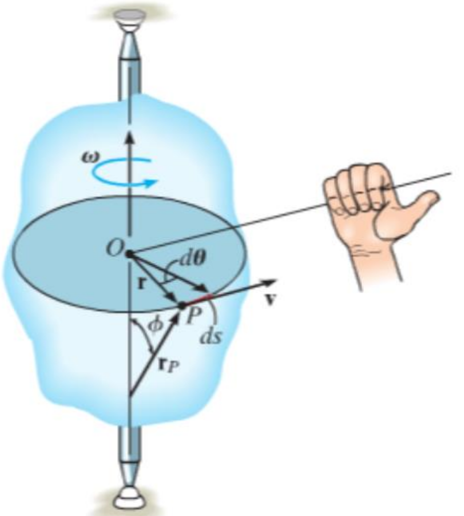
- Beweging van punt P:
  - Op cirkelvormige baan met straal *r* en middelpunt O;
  - Plaats van P: wordt gedefinieerd door plaatsvector ***r***;
  - Verplaatsing: als het lichaam roteert over $d\theta$ verplaatst P zich over $ds = r \cdot d\theta$
  - Snelheid:
    - te bepalen door $ds = r \cdot d\theta$ te delen door *dt*:

$$\boxed{v = \omega r}$$

    - Richting: rakend aan de cirkelvormige baan
    - Ook te schrijven als een vectorieel product:

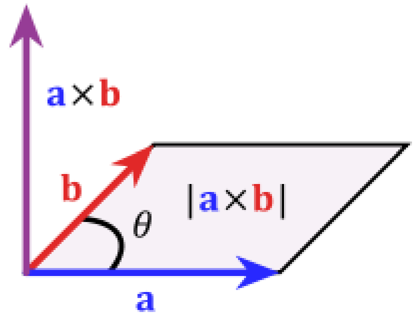
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$





5.3 Rotatie om een vaste as

- Intermezzo: vectorieel product (of: uitwendig product)

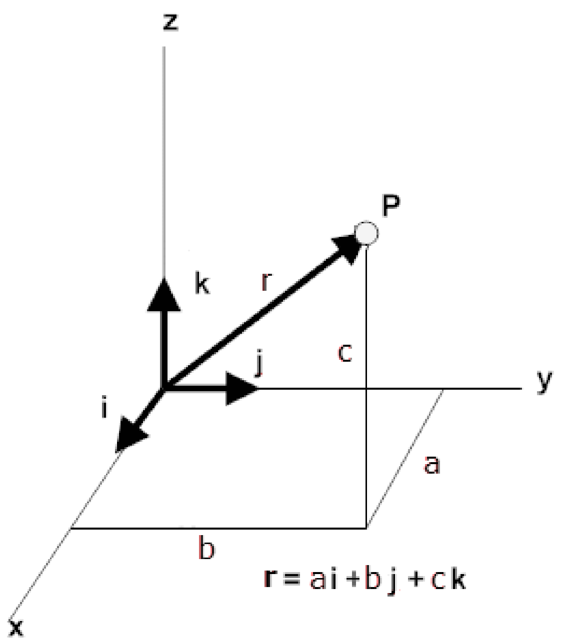


  - Aangeduid met symbool ×:
  - $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$
  - Het resultaat ***c*** is een vector met een
    - Grootte = oppervlakte van parallellogram gevormd door ***a*** en ***b***
    - Richting: loodrecht op het vlak gevormd door ***a*** en ***b***
    - Zin: als je vanuit c naar het vlak a – b kijkt, dan moet de eerste vector a in tegenwijzerzin naar de tweede vector b draaien over de kortste hoek; oftewel plaats je de rechterduim volgens c, dan moeten de vingers van a naar b draaien.

  - De volgorde van de vectoren in deze formule is belangrijk omdat het uitwendig product niet commutatief is

5.3 Rotatie om een vaste as

- Intermezzo: vectorieel product (of: uitwendig product)
  - Toegepast op rechtsdraaiend assenkruis met eenheidsvectoren ***i***, ***j*** en ***k***:



$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}$$

Let op de volgorde! (hulpmiddel: ijkijk)

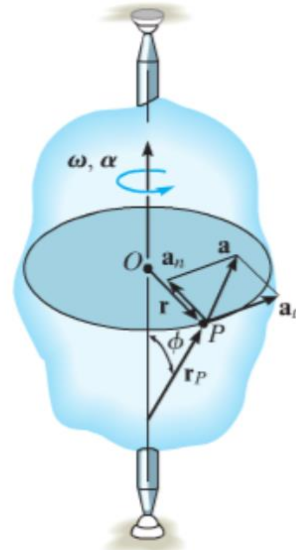
5.3 Rotatie om een vaste as

- Beweging van punt P:
  - Versnelling:
    - Uitgedrukt met normale en tangentiële componenten
    - Tangentiële component: $a_t = \frac{dv}{dt}$
    - Normale component: $a_n = \frac{v^2}{\rho}$
    - Vermits $\rho = r$ en $v = \omega\, r$ en $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, vinden we:

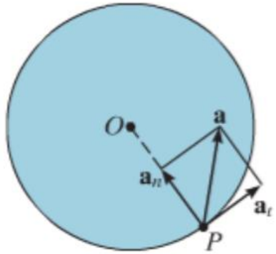
$$\boxed{a_t = \alpha r}$$

$$\boxed{a_n = \omega^2 r}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}\end{aligned}}$$



(e)



    - Grootte (Pythagoras): $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

5.3 Rotatie om een vaste as

- Beweging van punt P:
  - Bemerkingen:
    - De normale versnelling zorgt voor een verandering van richting van de snelheid, de tangentiële versnelling zorgt voor een verandering van de grootte van de snelheid.
    - De normaalcomponent van de versnelling staat naar het krommingsmiddelpunt toegericht
    - Verschillende plaatsen van het lichaam kunnen een verschillende snelheid en versnelling hebben ($\boldsymbol{v_P}$ en $\boldsymbol{a_P}$ worden o.a. bepaald door $\boldsymbol{r_P}$), maar de hoeksnelheid en hoekversnelling zijn wel overal in het lichaam dezelfde!
      - $\boldsymbol{v_P} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_P}$
      - $\boldsymbol{a_P} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r_P} - \omega^2\, \boldsymbol{r_P}$
    - We moeten eerst ω en α bepalen alvorens we ***v*** en ***a*** kunnen bepalen

Algemene beweging

- Algemene beweging van een star lichaam = gelijktijdige rotatie + translatie
- In dit vak: drie methodes om de algemene beweging te beschrijven:

  1. "Kringloopvergelijkingen" → sectie 5.4
  2. Relatieve beweging → sectie 5.5
  3. Ogenblikkelijk rotatiecentrum → sectie 5.6

- In 5.5 en 5.6: focus op snelheid; versnelling komt aan bod in 5.7

5.4 Analyse van de absolute beweging

- Beweging van een star lichaam is gekend als we:
  - De hoekverdraaiing kennen van een vaste lijn van het voorwerp, via hoek θ
  - De baan van een punt op het voorwerp kennen, via plaatscoördinaat s

- Bepaal het meetkundig verband tussen de twee coördinaten: $s = f(\theta)$
- Door toepassing van:

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

kan het verband tussen de beweging van het punt en de beweging van de lijn bepaald worden;

5.4 Analyse van de absolute beweging

- Voorbeeld ter illustratie van de analyseprocedure:

Gegeven:

- laadbak draait om vast punt A, door hydraulische cylinder BC uit te schuiven
- Lengtes a en b zijn constant

Gevraagd: bepaal de hoekstand θ van de laadback in functie van de lengte *s* van de hydraulische cylinder BC

Oplossing:

- Inzicht: enkele stangen vormen steeds (onafhankelijk van de stand van de cylinder) een gesloten lus of kringloop! In dit geval: stangen a, b en BC
- Hierin kunnen we driehoeksmeetkunde toepassen:
  - $s = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos\theta}$
- Dit afleiden (kettingregel!) naar de tijd geeft een verband tussen *v* en ω
- Dit 2x afleiden (kettingregel!) naar de tijd geeft een verband tussen *a* en α

5.4 Analyse van de absolute beweging

- Voorbeeld 5.3

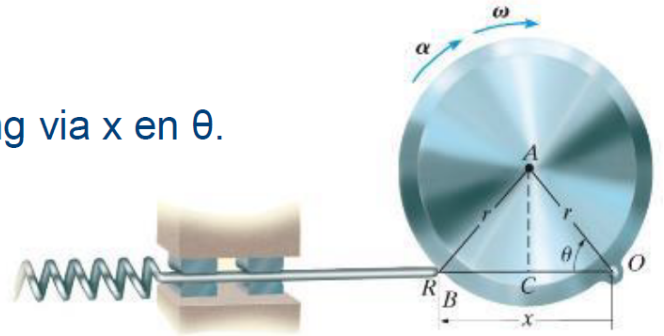
Het uiteinde van staaf R blijft door middel van een veer contact maken met de nok die draait om een as door punt O. De nok heeft een hoekversnelling α en een hoeksnelheid ω. Bereken de snelheid en versnelling van de staaf als de nok zich onder een willekeurige hoek θ bevindt.

Plaatsvergelijking

Verband draaibeweging en rechtlijnige beweging via x en θ.

Driehoeksmeetkunde => $\mathrm{OC} = \mathrm{CB} = r\cos\theta$

$$x = 2r\cos\theta$$



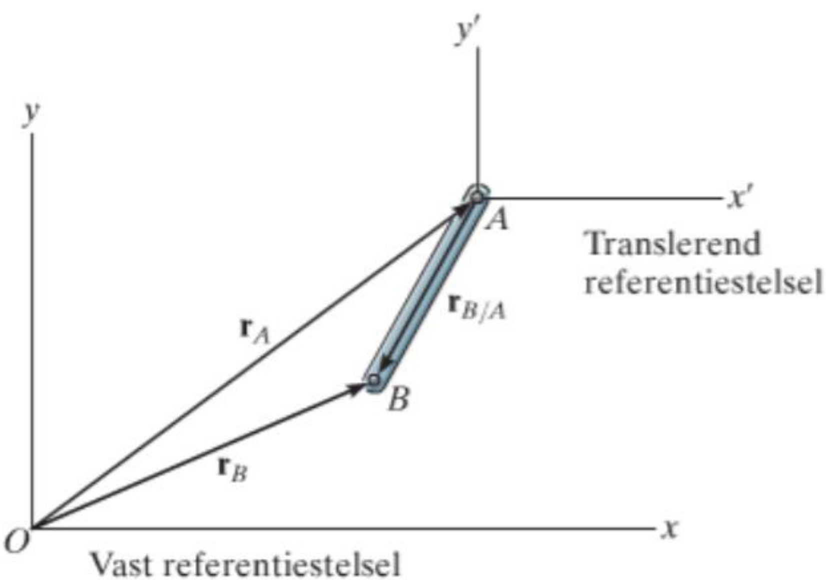
Tijdsafgeleiden *(kettingregel)*

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = -2r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad v = -2r\omega\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = -2r\frac{d\omega}{dt}\sin\theta - 2r\omega\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad a = -2r(\alpha\sin\theta + \omega^2\cos\theta)$$

5.5 Analyse van de relatieve beweging: snelheid

- Algemene beweging = rotatie + translatie
- Beschouw die twee componenten nu <u>afzonderlijk</u> door een <u>translerend</u> assenstelsel x'y' in punt A van het lichaam vast te maken

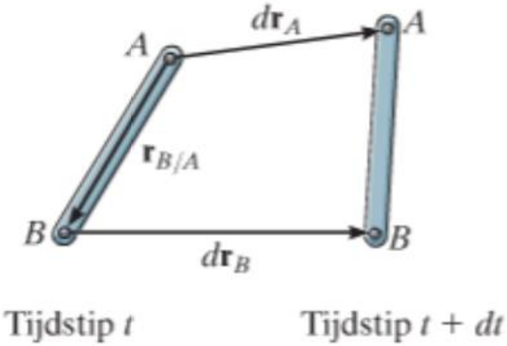


- A is een basispunt met gekende beweging
- Lichaam hier voorgesteld als een staaf
- **Plaats** van B:

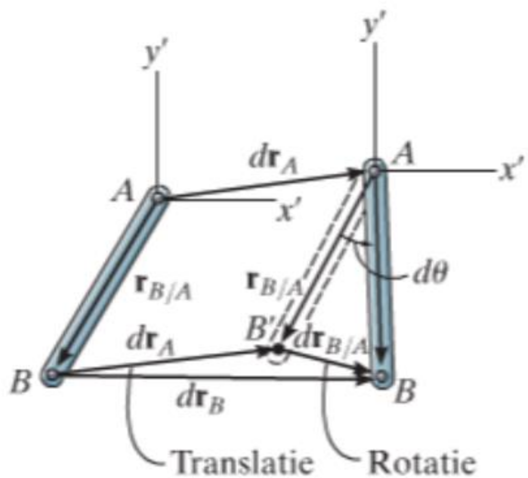
$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

5.5 Analyse van de relatieve beweging: snelheid

- **Verplaatsing** gedurende tijdsinterval *dt*:
  - A verplaatst zich over $d\boldsymbol{r_A}$, B over $d\boldsymbol{r_B}$
  - Beweging van de staaf kunnen we benaderen als een translatie over $d\boldsymbol{r_A}$ (B transleert naar B') gevolgd door een rotatie rond A over $d\theta$ (B' roteert tot eindstand B):



Algemene beweging in het platte vlak



$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}_{B/A}$$

ten gevolge van rotatie om A

ten gevolge van translatie van A

ten gevolge van translatie en rotatie

$$dr_{B/A} = r_{B/A}\, d\theta$$

5.5 Analyse van de relatieve beweging: snelheid

- **Snelheid**:

$$\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{dr_{B/A}}{dt}$$

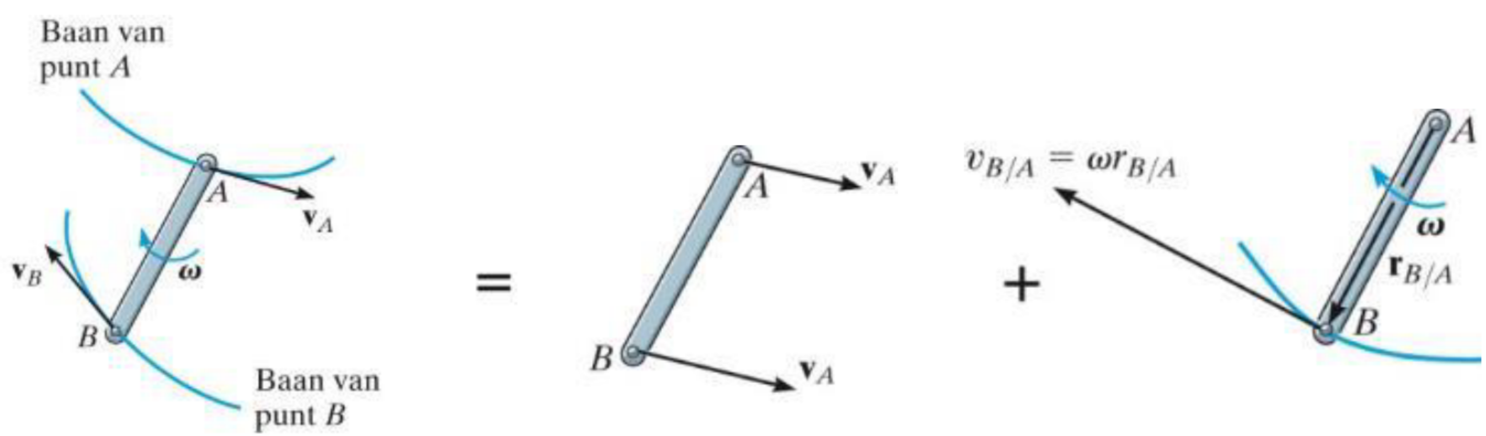
$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$v_{B/A} = \frac{dr_{B/A}}{dt} = r_{B/A}\frac{d\theta}{dt} = \omega\, r_{B/A}$$

Richting $v_{B/A}$ loodrecht op $r_{B/A}$

Relatieve snelheid $v_{B/A}$ t.o.v. translerende X'Y' - coördinatenstelsel

Absolute snelheid t.o.v. XY-coördinatenstelsel



5.5 Analyse van de relatieve beweging: snelheid

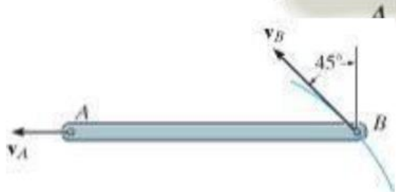
- **Snelheid**:

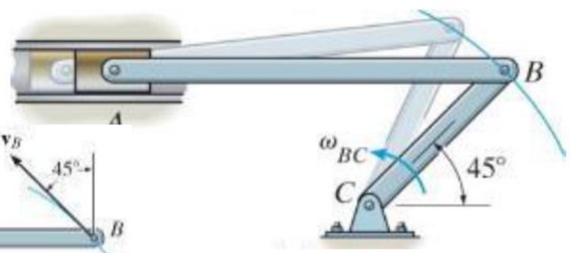
Vermits $r_{B/A}$ een cirkelvormige beweging maakt kunnen we deze uitdrukken als het uitwendig product $v_{B/A} = \omega \times r_{B/A}$

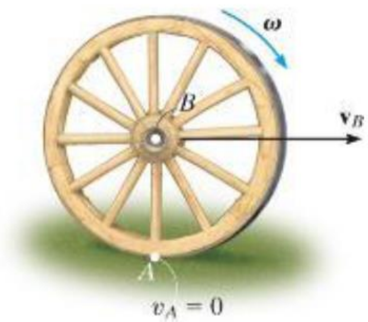
$$v_B = v_A + \omega \times r_{B/A}$$

v_A en v_B = snelheid punten A (basispunt) en B
ω = hoeksnelheid van het lichaam
$r_{B/A}$ = plaatsvector van A naar B

Toepassen voor starre lichamen die scharnierend zijn bevestigd aan andere starre lichamen of ermee contact maken => 2 punten kiezen waarvan beweging bekend is.







5.5 Analyse van de relatieve beweging: snelheid

De relatieve snelheidsvergelijking kan toegepast worden met behulp van ofwel een cartesische vectoranalyse, ofwel door de scalaire x- en y- componenten rechtstreeks uit te schrijven.

Vectoranalyse

Kinematisch schema

- Bepaal de richtingen van de vaste x- en y- coördinaatassen en teken het kinematisch schema van het lichaam. Teken v_A, v_B , ω en $r_{A/B}$.
- Wanneer de grootte van v_A, v_B of ω onbekend is mag de zin gekozen worden.

Snelheidsvergelijking

- Druk de vectoren uit in cartesische vectoren, werk het uitwending product uit en tel de respectievelijke i- en j-componenten op om twee scalaire vergelijkingen te krijgen.

$$v_B = v_A + \omega \times r_{B/A}$$

- Indien de uitkomst negatief is de zin van de vector verkeerd gekozen.

5.5 Analyse van de relatieve beweging: snelheid

De relatieve snelheidsvergelijking kan toegepast worden met behulp van ofwel een cartesische vectoranalyse, ofwel door de scalaire x- en y- componenten rechtstreeks uit te schrijven.

Scalaire Analyse

Kinematisch schema

- Bepaal de grootte en richting van de relatieve snelheid $v_{B/A}$. De grootte van $v_{B/A} = \omega\, r_{B/A}$. De zin is loodrecht op $r_{A/B}$.

Snelheidsvergelijking

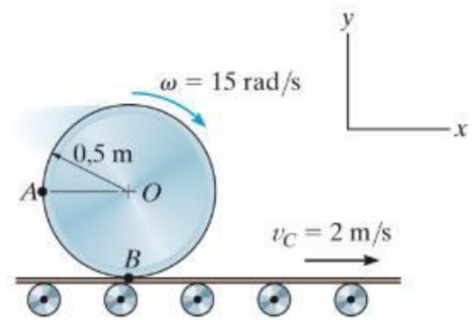
- Schrijf $v_B = v_A + v_{B/A}$ in symbolische vorm en noteer onder elke term de grootte en richting van de vector. De scalaire vergelijkingen kunnen worden bepaald uit de x- en y-componenten van deze vectoren.

5.5 Analyse van de relatieve beweging: snelheid

- Voorbeeld 5.7

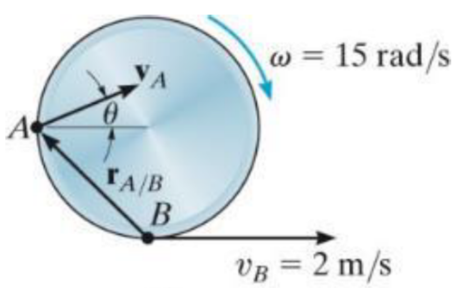
Een cilinder rolt vrij over een transportband die met een snelheid van 2m/s beweegt. Bepaal de snelheid van punt A. De cilinder heeft op het ogenblik dat wordt afgebeeld een met de klok mee draaiende hoeksnelheid van 15 rad/s.

Vectoranalyse



Cilinder glijdt niet over band => $v_B = v_C$

ω = gekend => $v_A = v_B + \omega \times r_{A/B}$



$$v_A = v_B + \omega \times r_{A/B}$$

$$(v_A)_x\, i + (v_A)_y\, j = 2i + (-15k) \times (-0.5i + 0.5j))$$

$$(v_A)_x\, i + (v_A)_y\, j = 2i + 7.5j + 7.5i = 9.5i + 7.5j$$

$$v_A = \sqrt{9.5^2 + 7.5^2} = 12.1\ m/s$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{7.5}{9.5} = 38.3°$$

UHASSELT KU LEUVEN

5.5 Analyse van de relatieve beweging: snelheid

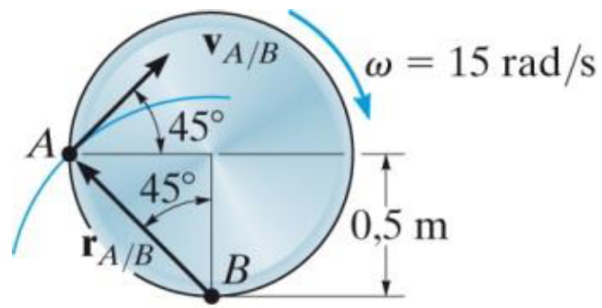
- Voorbeeld 5.7

Een cilinder rolt vrij over een transportband die met een snelheid van 2m/s beweegt. Bepaal de snelheid van punt A. De cilinder heeft op het ogenblik dat wordt afgebeeld een met de klok mee draaiende hoeksnelheid van 15 rad/s.

Scalaire Analyse $v_A = v_B + v_{A/B}$

Cilinder glijdt niet over band => $v_B = v_C$

$$v_{A/B} = \omega\, r_{A/B} = (15)\left(\frac{0{,}5}{\cos 45°}\right) = 10.6\ m/s$$



$$v_A = v_B + v_{A/B}$$

$$(v_A)_x + (v_A)_y = 2 + 10.6$$

$\rightarrow$ $\uparrow$ $\rightarrow$ $\nearrow$ 45°

$$(v_A)_x = 2 + 10.6\ \cos 45 = 9.5\ m/s$$

$$(v_A)_y = 0 + 10.6\ \sin 45 = 7.5\ m/s$$

$$v_A = \sqrt{9.5^2 + 7.5^2} = 12.1\ m/s \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{7.5}{9.5} = 38.3°$$

5.6 Ogenblikkelijk rotatiecentrum

De snelheid van een punt B kan direct bepaald worden wanneer men een basispunt A kiest welk snelheid 0 heeft.

$$v_B = v_A + \omega \times r_{B/A} = \omega \times r_{B/A}$$

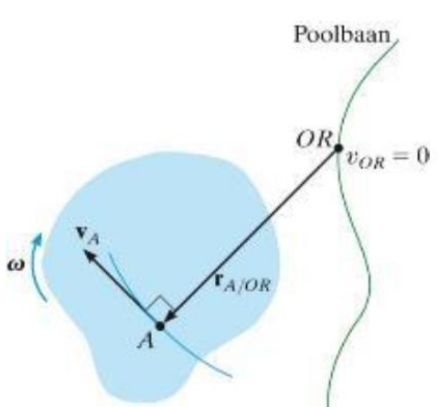
Ogenblikkelijk rotatiecentrum (OR)

$$v_B = \omega \times r_{B/OR}$$

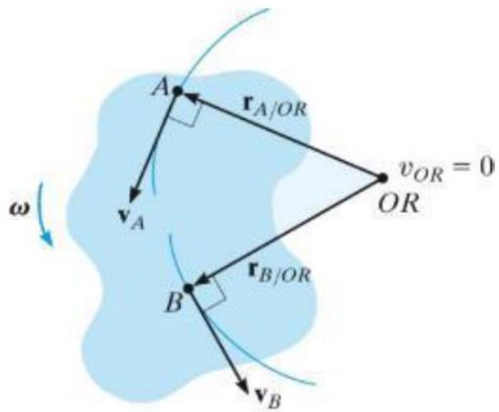
5.6 Ogenblikkelijk rotatiecentrum

Plaats van het OR

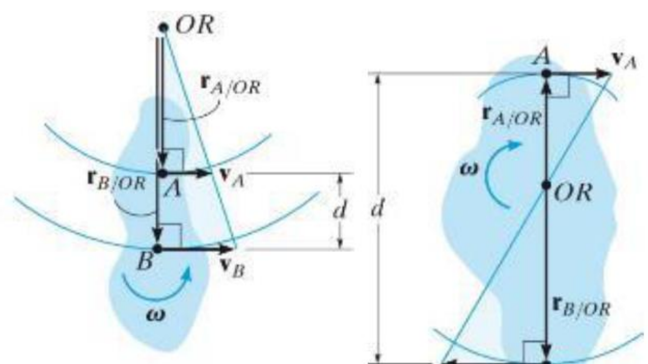
- De snelheid van een punt A staat altijd loodrecht op $r_{A/OR}$
- Het OR ligt dus altijd op de loodlijn van v_A
- De afstand tussen A en het OR => $r_{A/OR} = \frac{v_A}{\omega}$



Plaatsbepaling van het OR als $\mathbf{v}_A$ en ω bekend zijn



Plaatsbepaling van het OR als de richtingen van $\mathbf{v}_A$ en $\mathbf{v}_B$ bekend zijn



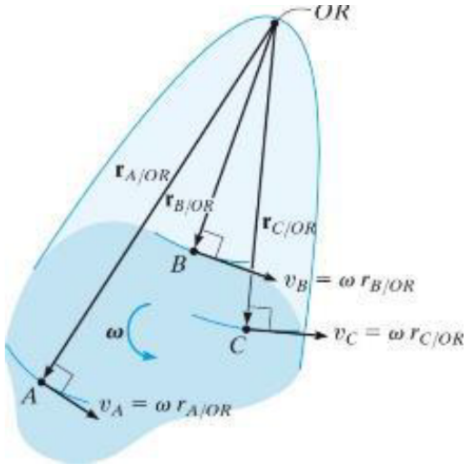
Plaatsbepaling van het OR als $\mathbf{v}_A$ en $\mathbf{v}_B$ bekend zijn

OR is tijdelijk en verandert in de tijd. => Poolbaan

5.6 Ogenblikkelijk rotatiecentrum

- Analyseprocedure

  De snelheid van een punt op een lichaam dat een algemene beweging maakt in het platte vlak kan worden bepaald a.d.h.v. zijn OR, waarvan de plaats eerst bepaald moet worden. (zie vorige slide)



  - Het lichaam wordt voorgesteld alsof het is uitgebreid en scharnierend is bevestigd aan het OR, zodanig dat het om dit scharnierpunt roteert met een hoeksnelheid ω.

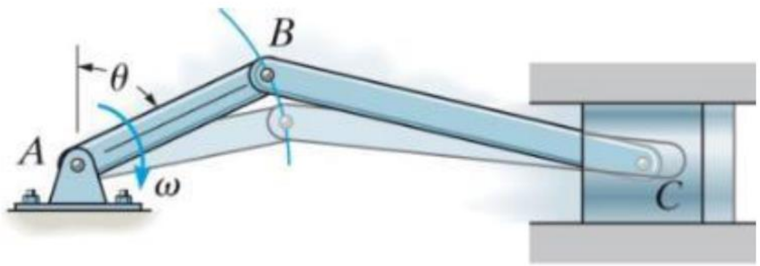
  - De grootte van de snelheid kan worden bepaald door $v = \omega\, r$ waarbij r de afstand is tussen het punt en het OR.

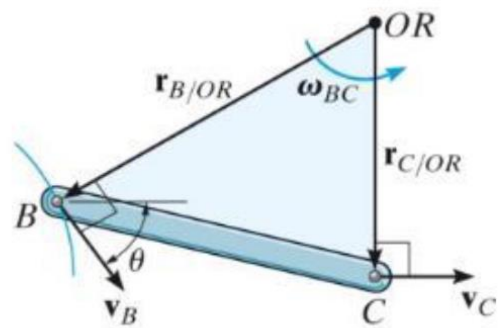
  - De werklijn van iedere snelheidsvector staat loodrecht op de bijhorende straal r en heeft een zin die het punt doet bewegen overeenkomstig aan de rotatie ω van de straal.

5.6 Ogenblikkelijk rotatiecentrum

- Voorbeeld 5.10

Laat zien hoe de plaats van een OR bepaald kan worden voor drijfstang BC.





Punt B draait rond A met straal AB =>v_B staat loodrecht op AB onder een hoek θ

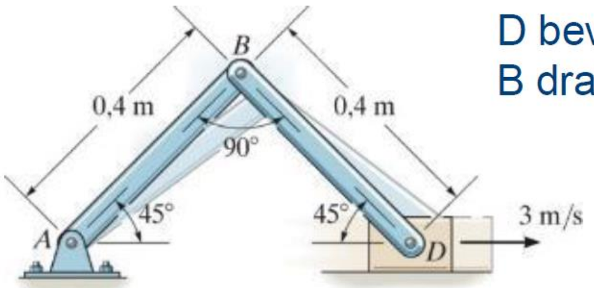
Punt C op de zuiger beweegt horizontaal naar rechts.

=> Kruising van loodlijnen op v_B en v_C levert OR op.

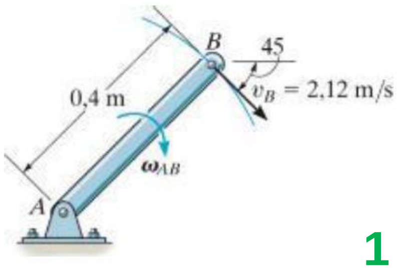
5.6 Ogenblikkelijk rotatiecentrum

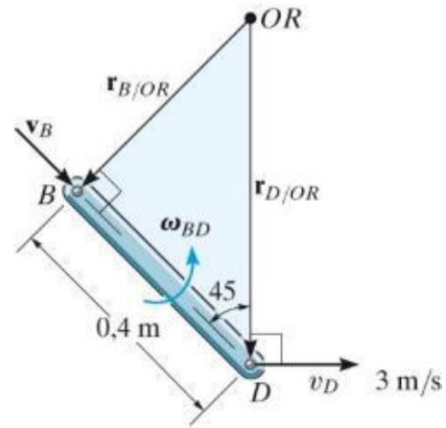
- Voorbeeld 5.11

Blok D beweegt met een snelheid van 3 m/s. Bepaal de hoeksnelheid van de stangen BD en AB op het getoonde moment.



D beweegt naar rechts.
B draait in wijzerszin rond A.





1

$$r_{D/OR} = \frac{0.4}{\cos 45°} = 0.5657\ m$$

$$r_{B/OR} = 0.4\ \tan 45° = 0.4\ m$$

2

$$v_D = \omega_{BD}\, r_{D/OR} \Rightarrow \omega_{BD} = \frac{3}{0.5657} = 5.30\ rad/s$$

3

$$v_B = \omega_{BD}\, r_{B/OR} = 5.30\ (0.4) = 2.12\ m/s$$

4

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{r_{B/A}} = \frac{2.12}{0.4} = 5.30\ rad/s$$