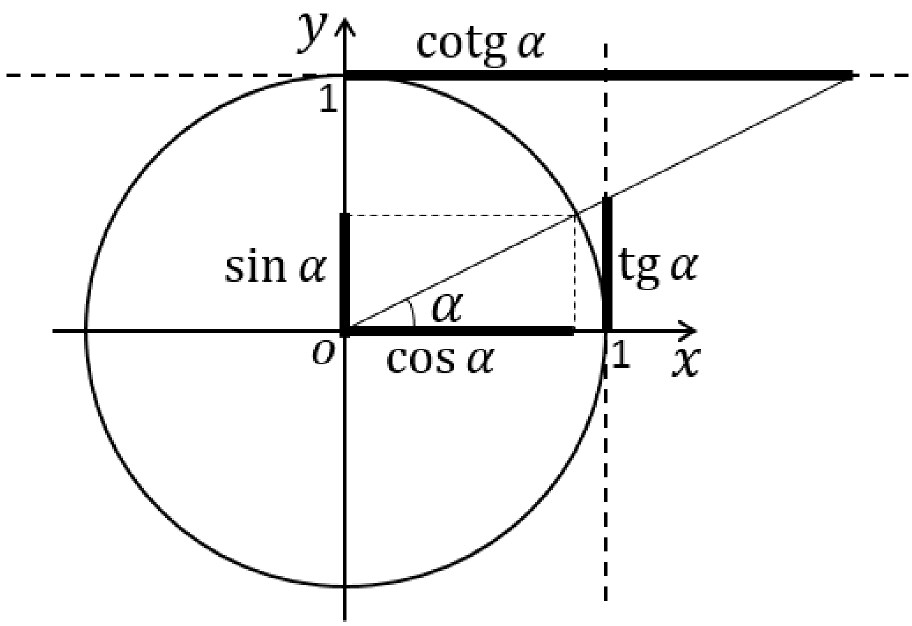
Formularium Wiskunde 1e bachelor en schakelprogramma IIW

1 Goniometrische en hyperbolische functies

1.1 Goniometrische cirkel



1.2 Goniometrische formules omvormen m.b.v. de TI-Nspire

- Aanverwante hoeken:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$$

- Som- en verschilformules:

$$\text{tExpand}(\sin(a+b)) = \cos(a)\cdot\sin(b) + \sin(a)\cdot\cos(b)$$

- Dubbele hoek:

$$\text{tExpand}(\sin(2a)) = 2\cdot\sin(a)\cdot\cos(a)$$

- Formules van Simpson:

$$\text{tCollect}(\sin(a)\cdot\cos(b)) = \frac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}$$

- Machten van goniometrische functies:

$$\text{tCollect}\big((\sin(a))^2\big) = \frac{-(\cos(2\cdot a)-1)}{2}$$

1.3 Hyperbolische formules omvormen m.b.v. de TI-Nspire

$$\text{expand}(\cosh(2x)) = \frac{(\mathrm{e}^x)^2}{2} + \frac{1}{2 \cdot (\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2}$$

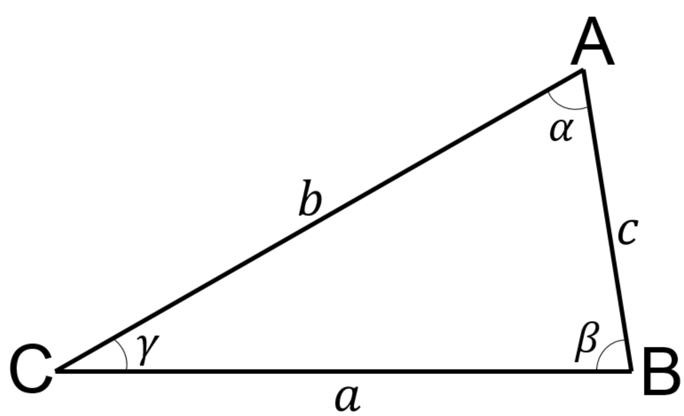
1.4 Grondformules

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow 1 + \mathrm{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Leftrightarrow 1 + \mathrm{cotg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

---

2 Driehoeksmeting



- Sinusregel: $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$
- Cosinusregel:
  - $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$
  - $b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos(\beta)$
  - $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$
  - Merk op dat wanneer bvb. $\alpha = 90°$ dit de stelling van Pythagoras oplevert!

3 Afgeleiden

3.1 Impliciet afleiden met de TI-Nspire

Voorbeeld: we zoeken y'' voor de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$

$$\operatorname{impDif}(x^2 + y^2 = a^2, x, y, 2) = \frac{-x^2}{y^3} - \frac{1}{y}$$

3.2 Kromming

Ogenblikkelijke kromming in een punt (x, y) van een kromme: $\kappa = \dfrac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}$

---

4 Reeksen en methode van Newton-Raphson

4.1 Reeksontwikkeling volgens Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n + \ldots$$

4.2 Reeksontwikkeling volgens Maclaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \ldots$$

4.3 Reeksontwikkeling met de TI-Nspire

Voorbeeld: 3$^{\text{e}}$ orde Taylorontwikkeling van $\dfrac{1}{x}$ rond $x = 1$:

$$\operatorname{taylor}\left(\frac{1}{x}, x, 3, 1\right) = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3$$

Voorbeeld: 7$^{\text{e}}$ orde Maclaurinontwikkeling van $\sin(x)$:

$$\operatorname{taylor}(\sin(x), x, 7) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

4.4 Numeriek oplossen van vergelijkingen $f(x) = 0$

Algoritme van Newton-Raphson: $x_{n+1} = g(x_n)$ met $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Stop als $|x_{n+1} - x_n| < 5 \cdot 10^{-(m+1)}$.

5 Functies met meer veranderlijken

- De vergelijking van het **raakvlak** aan het oppervlak $z = f(x, y)$ in een punt $P(x_0, y_0, z_0)$:

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

- De **totale differentiaal** van een functie $z = f(x, y)$ in (x_0, y_0) bij een toename van $(\Delta x, \Delta y)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

- **Gradiëntvector** van f in (x_0, y_0):

$$\nabla f(x_0, y_0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Big)$$

- De **richtingsafgeleide** van f in (x_0, y_0) in de richting van $\vec{r}$:

$$\mathrm{D}_{\vec{r}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \vec{r}$$

- De **Hessiaan** van f in het punt (x_0, y_0):

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

- De **multiplicatorenmethode van Lagrange**
De extrema van $z = f(x, y)$ onder de randvoorwaarde $g(x, y) = C$ moeten oplossingen zijn van het stelsel:

$$\begin{cases} g(x, y) = C \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \end{cases}$$

6 Krommen en oppervlakken

- Een **KROMME** C in $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven door het beeld van een continue vectoriële functie
$$\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$
Indien de raakvector $\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ nergens verdwijnt, is de kromme 'glad'.

- Een **parametrisch oppervlak** S in $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven door het beeld van een continue functie
$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \vec{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

  * OMWENTELINGSOPPERVLAKKEN
  Voorbeeld: wenteling van een kromme $\begin{cases} y = \gamma_1(s) \\ z = \gamma_2(s) \end{cases}$ $(s \in I)$ in het yz-vlak rond de y-as. De coördinaten van de plaatsvector $\vec{r}(s,t)$ zijn dan:
$$\begin{cases} x(s,t) &= \gamma_2(s) \cdot \cos(t) \\ y(s,t) &= \gamma_1(s) \\ z(s,t) &= \gamma_2(s) \cdot \sin(t) \end{cases} \qquad (s \in I, 0 \le t \le 2\pi).$$

  * REGELOPPERVLAKKEN
  Algemene parametervoorstelling: $\vec{r} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : \vec{r}(s,t) = \vec{\gamma}(s) + t \cdot \vec{\delta}(s)$ met $\vec{\gamma}(s)$ de grondcurve en $\vec{\delta}(s)$ de richtingscurve.

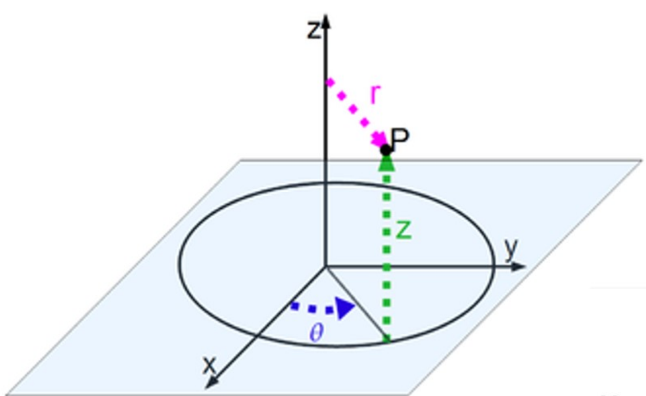
- Een **raakvlak** α aan een oppervlak $\vec{r}(s,t)$ in een punt $P(\vec{r}(s_0,t_0)) = P(x_0, y_0, z_0)$ heeft als vergelijking: $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$, met
$$(a,b,c) = \vec{n}(s_0,t_0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}(s_0,t_0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(s_0,t_0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial s}(s_0,t_0) & \frac{\partial y}{\partial s}(s_0,t_0) & \frac{\partial z}{\partial s}(s_0,t_0) \\ \frac{\partial x}{\partial t}(s_0,t_0) & \frac{\partial y}{\partial t}(s_0,t_0) & \frac{\partial z}{\partial t}(s_0,t_0) \end{vmatrix}$$

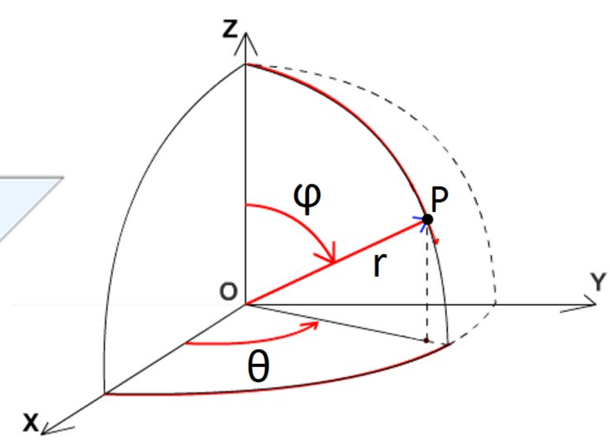
7 Integralen

7.1 Enkelvoudige integralen

	CARTESISCH	PARAMETERVORM	POOLKROMME
OPPERVLAKTE	$dA = y\,dx$ of $dA = x\,dy$		$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$
VOLUME	Algemeen: $dV = A(h)\,dh$ $dV = \pi\, y^2\, dx$ of $dV = \pi\, x^2 dy$		
BOOGLENGTE	$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$		$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$
ZIJDELINGSE OPPERVLAKTE	$dS = 2\pi\, y\, ds$ of $dS = 2\pi\, x\, ds$		

7.2 Cilinder- en bolcoördinaten





7.3 Meervoudige integralen

	DUBBELINTEGRALEN	DRIEVOUDIGE INTEGRALEN
OPPERVLAKTE	$A = \iint 1\, dS$	/
VOLUME	$V = \iint (z_1 - z_2)\, dS$	$V = \iiint 1\, dV$
MASSA	$m = \iint \rho(x,y)\, dS$	$m = \iiint \rho(x,y,z)\, dV$
ZWAARTEPUNT	$x_{zw} = \frac{1}{m} \iint \rho(x,y)\, x\, dS$ $y_{zw} = \frac{1}{m} \iint \rho(x,y)\, y\, dS$	$x_{zw} = \frac{1}{m} \iiint \rho(x,y,z)\, x\, dV$ $y_{zw} = \frac{1}{m} \iiint \rho(x,y,z)\, y\, dV$ $z_{zw} = \frac{1}{m} \iiint \rho(x,y,z)\, z\, dV$
TRAAGHEIDS-MOMENT	/	$I = \iiint r_\perp^2 (x,y,z) \cdot \rho(x,y,z)\, dV$
DRUKKRACHT op vert. wand	$F = \rho \cdot g \cdot \iint h\, dS$	/
OPPERVLAKTE- OF VOLUME-ELEMENT	$dS = dx\, dy$ (cartesisch) $= r\, dr\, d\theta$ (polair)	$dV = dx\, dy\, dz$ (cartesisch) $= r\, dr\, d\theta\, dz$ (cilinder) $= r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$ (bol)

7.4 Lijnintegralen

De **lijnintegraal** van een continue functie f over een continue gladde kromme C met parametrisatie $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(t \in [a,b])$:

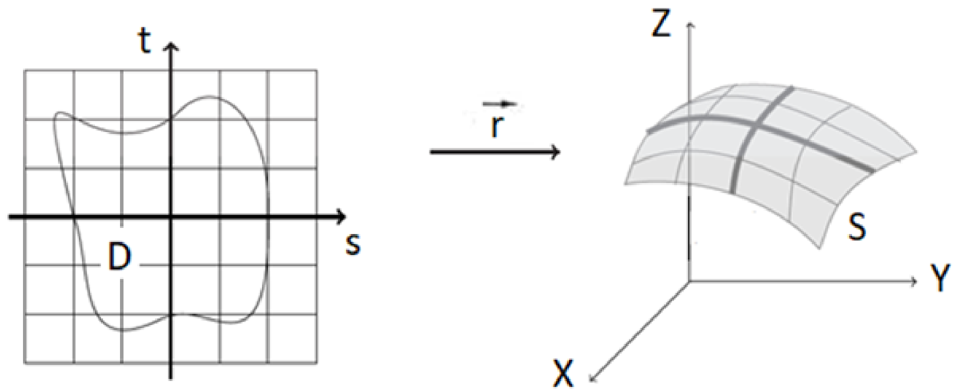
$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, \|\vec{r}\,'(t)\|\, \mathrm{d}t$$

met $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$.

7.5 Oppervlakintegralen

De **oppervlakteintegraal** van een continue functie g m.b.t. een 3D-oppervlak S met parametrisatie $\vec{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ $((s,t) \in D)$:

$$\iint\limits_S g \, \mathrm{d}S = \iint\limits_D g(\vec{r}(s,t)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(s,t) \right\| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t$$



* *Speciaal geval*: $\text{opp}(S) = \iint\limits_S 1 \, \mathrm{d}S$.
* *Speciaal geval*: indien $\vec{r} = (x, y, f(x,y))$ de grafiek van een functie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is, dan

$$\iint\limits_S g \, \mathrm{d}S = \iint\limits_D g(x,y,f(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

---

8 Differentiaalvergelijkingen

8.1 Eerste orde

1. Scheiden van veranderlijken: $f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$

2. Exacte DV: $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ met $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

   Oplossing: $F(x,y) = c$, waarbij $\mathrm{d}F = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

3. Lineaire DV: $y' + P(x)y = Q(x)$.

   Oplossing: $y = \dfrac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) Q(x) \, \mathrm{d}x + c \right)$ met $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$.

8.2 Tweede orde

1. Standaardvorm: $ay'' + by' + cy = f(x)$ met $a \neq 0$.

2. Homogene vergelijking: $f(x) = 0$.

   Oplossingsmethode: zoek nulpunten (zeg α en β) van de karakteristieke vergelijking: $ar^2 + br + c = 0$.

   - $(D > 0)\quad \alpha \neq \beta \in \mathbb{R} \;\rightarrow\; y = c_1\,\mathrm{e}^{\alpha x} + c_2\,\mathrm{e}^{\beta x}$.
   - $(D = 0)\quad \alpha = \beta \in \mathbb{R} \;\rightarrow\; y = c_1\,\mathrm{e}^{\alpha x} + c_2\,x\,\mathrm{e}^{\alpha x}$.
   - $(D < 0)\quad \alpha, \beta = \gamma \pm \delta\, i \;\rightarrow\; y = \mathrm{e}^{\gamma x}(c_1 \cos(\delta x) + c_2 \sin(\delta x))$.

3. Niet homogene vergelijking: $f(x) \neq 0$.

   Oplossingsmethode: $y = y_H + y_P$ met y_H oplossing van de homogene DV en y_P een particuliere oplossing. De bepaling van y_P kan gebeuren via de *methode van de onbepaalde coëfficiënten* indien $f(x)$ van de volgende speciale vorm is:

   $$f(x) = e^{mx}(V_1(x)\cos(\theta x) + V_2(x)\sin(\theta x)),$$

   met $m \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $V_1(x)$ een veelterm van graad p en $V_2(x)$ een veelterm van graad q.

   $\Longrightarrow$ Voorstel voor y_P:

   $$y_P = x^s \mathrm{e}^{mx}(W_1(x)\cos(\theta x) + W_2(x)\sin(\theta x)),$$

   met $W_1(x)$ en $W_2(x)$ concreet te bepalen veeltermfuncties van graad $n = \max\{p, q\}$ en $s = 0, 1$ of 2 om ervoor te zorgen dat er geen enkele term van je voorstel y_P overeenkomt met y_H.

8.3 Hogere orde

Differentiaalvergelijking van de vorm: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$.
Oplossingsmethode: analoog als bij tweede orde DV.

De termen van de *homogene oplossing* worden bepaald door de wortels $r_1, r_2, \ldots, r_k$ van de karakteristieke vergelijking. Voor iedere **reële** wortel r_i met multipliciteit m, correspondeert een term $e^{r_i x}(c_1 + c_2 x + \ldots + c_m x^{m-1})$. Voor een **complexe** wortel $a + bi$ en zijn toegevoegde $a - bi$ met multipliciteit m, wordt een term van de vorm $e^{ax}(P_{m-1}(x)\cos(bx) + Q_{m-1}(x)\sin(bx))$ aan de homogene oplossing toegevoegd. Hierbij zijn $P_{m-1}(x)$ en $Q_{m-1}(x)$ willekeurige veeltermen van graad $m - 1$.

De *particuliere oplossing* vind je opnieuw op basis van een gepast voorstel en de methode van de onbepaalde coëfficiënten.

---

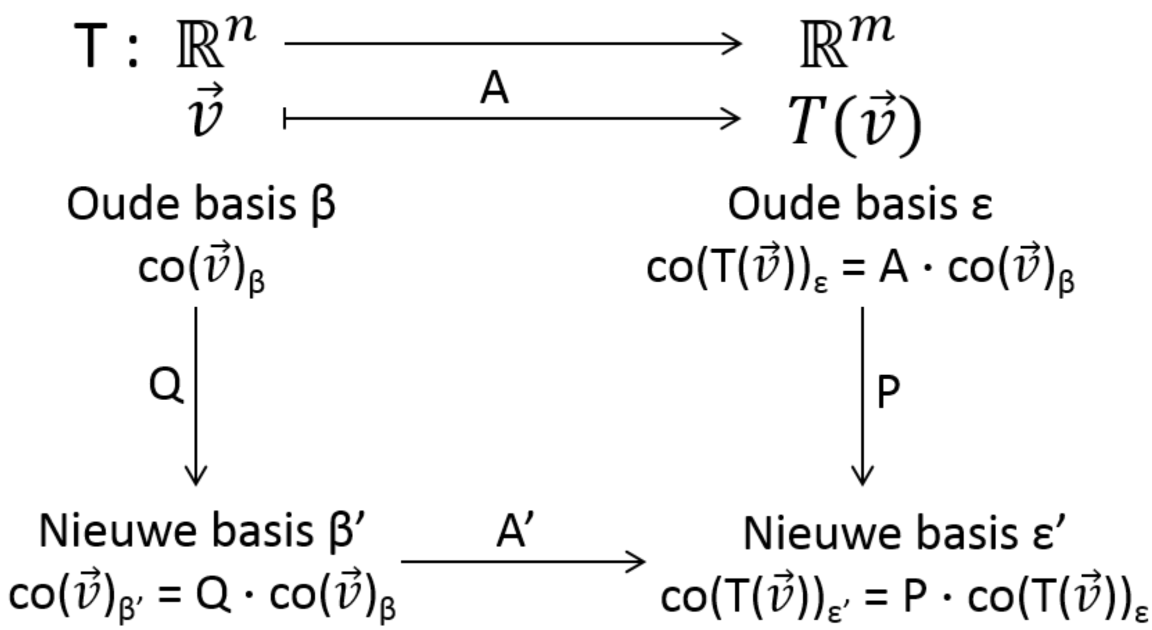
9 Algebra en meetkunde

9.1 Meetkunde met vectoren

- Rechte in $\mathbb{R}^3$:
  - Parametervergelijking: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{punt} + k \cdot \text{richting}$
  - Cartesische vergelijking: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$
- Vlak in $\mathbb{R}^3$:
  - Parametervergelijking: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{punt} + k \cdot \text{richting1} \ + \ell \cdot \text{richting2}$
  - Cartesische vergelijking: $ax + by + cz + d = 0$
- Scalair product van twee vectoren: $\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \cos(\theta)$
- Afstand van een punt $\mathrm{P}(x_p, y_p, z_p)$ tot een vlak $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}, \alpha) = \frac{|ax_p + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

9.2 Lineaire transformaties



Dan is $\mathrm{co}(\mathrm{T}(\vec{v}))_{\varepsilon'} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{Q}^{-1} \cdot \mathrm{co}(\vec{v})_{\beta'}$ ofwel $\mathrm{A}' = \mathrm{P} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{Q}^{-1}$.

9.3 Eigenwaarden en eigenvectoren

- $T(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$
- Eigenwaarden bepalen: $\mathrm{Det}(A - \lambda \cdot I_n) = 0$
- Eigenruimten bepalen: $(A - \lambda \cdot I_n)X = \vec{0}$
- Als A diagonaliseerbaar is, dan is $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$