FIIW
Faculteit Industriële Ingenieurswetenschappen

universiteit hasselt KU LEUVEN

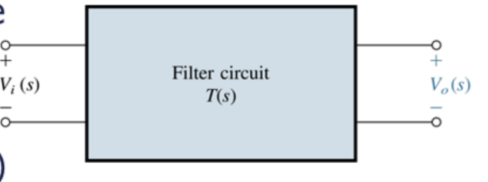
Jan Genoe
jan.genoe@kuleuven.be

Ontwerp van filters

•1

Inleiding actieve filters

- In dit hoofdstuk bespreken we hoe we een elektronisch circuit kunnen opbouwen (synthetiseren) met een gevraagde transferfunctie T(s)
- Dit is het omgekeerde van een analyse:
  - Een analyse vertrekt van een circuit en bepaalt hieruit het gedrag
- We gaan de werkwijze die we gebruikten voor de analyse dan ook omkeren.

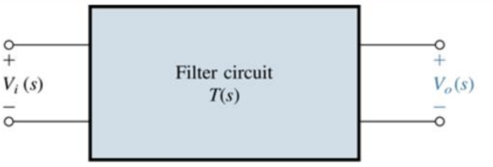


$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

Eigenschappen transfer functie

Transfer Function

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$



The Filter Transmisson found by evaluating T(s) for physical frequencies

$$s = j\cdot\omega \qquad T(j\omega) = |T(j\omega)|\cdot e^{j\phi(\omega)}$$

Gain Function

$$G(\omega) = 20\cdot\log(|T(j\omega)|) \qquad \text{dB}$$

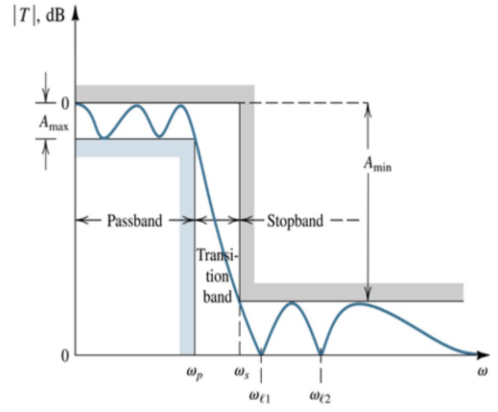
Attenuation Function

$$A(\omega) = -20\cdot\log(|T(j\omega)|) \qquad \text{dB}$$

universiteit hasselt | KU LEUVEN 3

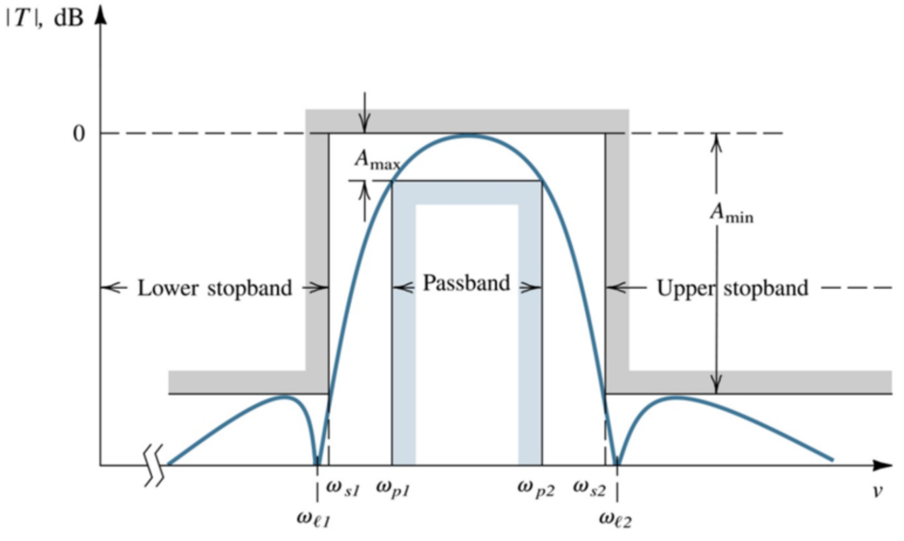
Filter specificities (1)

Frequency-Selection function
Passing
Stopping
Pass-Band
Low-Pass
High-Pass
Band-Pass
Band-Stop
Band-Reject



Passband ripple
Ripple bandwidth

Filter specificities (2)



universiteit hasselt | KU LEUVEN 5

Analyse van een willekeurig circuit

- Het kleinsignaalgedrag van een willekeurig circuit kunnen we uitrekenen aan de hand van de MNA matrix.
- Wanneer we een enkel ingangsignaal hebben (V_{in}) kunnen we de spanningen van alle knopen uitdrukken in functie van de spanningsbron die staat aan V_{in}. Dus ook V_{uit}.

Ingang- en uitgangssignalen in een Nodale Matrix

$$\boxed{M \cdot V = G}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\hphantom{\cdots\ \cdots\ \ddots\ \cdots\ \vdots\ \cdots\ \cdots}}^{n}\ \overbrace{\hphantom{1\ \cdots\ \cdots}}^{p} \\
\begin{array}{c} n \\ \\ \\ \\ p \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 & \ddots & \vdots & & \vdots & & & & & \\
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & -1 & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & \ddots & & & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \\
\hline
 & & 1 & & -1 & & & \ddots & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \ddots & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\\ v_{uit} \\ v_i \\ \\ v_j \\ \\ \\ \hline I \\ \\ \\
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
\\ \\ 0 \\ \\ 0 \\ \\ \\ \hline v_{in} \\ \\ \\
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Uitdrukking voor de transferfunctie

- De transferfunctie kan bepaald worden als een element uit de inverse van de nodale matrix.
- Een element van de inverse van een matrix kan uitgedrukt worden als een breuk van 2 determinanten.
- Deze determinanten kunnen uitgeschreven worden als veeltermen
- Hieruit kunnen we besluiten dat de transferfunctie kan geschreven worden als een breuk van 2 veeltermen in $j\omega$
  - De orde van de veeltermen is maximaal het dubbele van het aantal elementen uit de matrix
  - Deze veeltermen hebben reële coëfficiënten

$$\boxed{V = M^{-1}G}$$

$$\boxed{\frac{v_{uit}}{v_{in}} = M^{-1}_{p,q}}$$

$$\boxed{\frac{v_{uit}}{v_{in}} = \frac{\sum_{i=0}^{2n} a_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{2n} b_i (j\omega)^i}}$$

universiteit hasselt | KU LEUVEN 8

Opsplitsing van transferfuncties

- Door het zoeken van de nulpunten van deze veeltermen kunnen we deze veeltermen ontbinden in factoren.
  - De nulpunten van de teller noemen we nullen
  - De nulpunten van de noemer noemen we polen

$$\frac{v_{uit}}{v_{in}} = \frac{\sum_{i=0}^{2n} a_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{2n} b_i (j\omega)^i} = \frac{\prod_{i=1}^{m} (j\omega - n_i)}{\prod_{i=1}^{k} (j\omega - p_i)}$$

Bekomen van 2de orde veeltermen

$$(j\omega - n_i)\cdot\left(j\omega - \overline{n_i}\right) = (j\omega)^2 - 2\Re(n_i)j\omega - |n_i|^2$$
$$= s^2 - 2\Re(n_i)s - |n_i|^2$$

- Wanneer er een nul of een pool complex is , hebben we ook steeds zijn complex toegevoegde, zodat we deze 2 factoren kunnen samennemen in een tweede orde veelterm.
- Deze tweede orde veelterm heeft reële coëfficiënten

universiteit hasselt | KU LEUVEN

Realisatie in cascadeerbare actieve circuits

$$H(j\omega)=\frac{v_{uit}}{v_{in}}=\frac{\prod_{i=1}^{m}(j\omega-n_i)}{\prod_{i=1}^{k}(j\omega-p_i)}=H_1(j\omega)\cdot H_2(j\omega)\cdot H_3(j\omega)\cdot\ldots$$

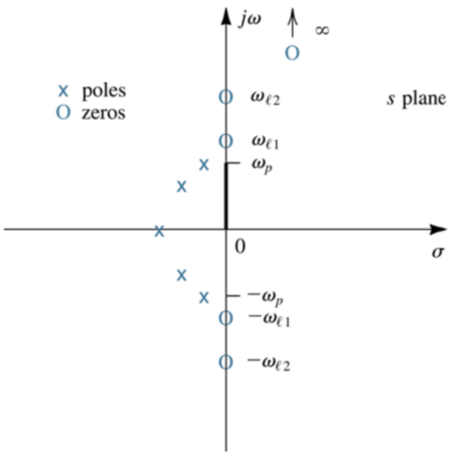
- Om een gevraagde transferfunctie te realiseren gaan we deze opsplitsen in een product van eentermen en tweetermen met reële coëfficiënten.
- We realiseren elk van deze circuits op zich en plaatsen ze gewoon achter elkaar.
  - Het volgende circuit mag wel het vorige niet belasten, anders verandert de transferfunctie.

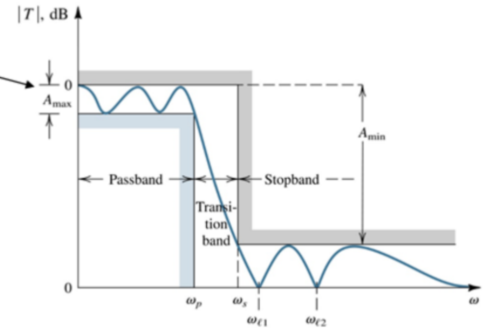
universiteit hasselt | KU LEUVEN 11

De Filter Transfer Funktie

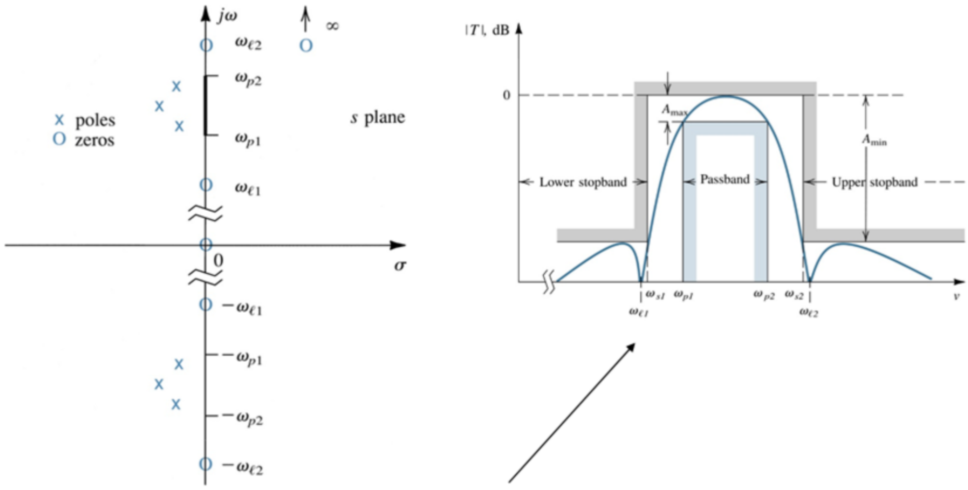
Polen en nullen voor de filter met de transferfunctie die je hiernaast kan zien

Dit is een 5de orde filter ($N = 5$.)





De Filter Transfer Funktie



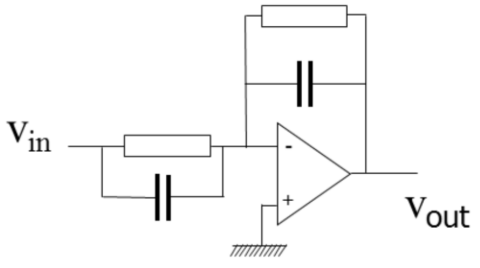
Polen en nullen voor de banddoorlaat filter met de transferfunctie die je hiernaast kan zien

Dit is een 6de orde filter ($N = 6$.)

Eerste en tweede orde Filters

Algemeen circuit voor een eerste orde filter

- Dit is het algemeen circuit voor een eerste orde filter



universiteit hasselt | KU LEUVEN 15

Door de juiste waardes voor de condensatoren en de weerstanden te kiezen kunnen we hiermee eender welk eerste orde filter mee bekomen. Natuurlijk werken we altijd met positieve elementen (weerstanden en condensatoren) zodat de polen die we bekomen steeds negatief zullen zijn.

We kunnen wel, indien we dit wensen, een circuit maken met positieve nullen. Dit kan steeds door het ingangsignaal en het uitgangsignaal nog eens te sommeren in een inverterende somversterker.

Transferfuncties van eerste orde filters

- Laagdoorlaat

$$T_{LP} = \frac{\omega_o}{s+\omega_o} = \frac{1}{S+1}$$

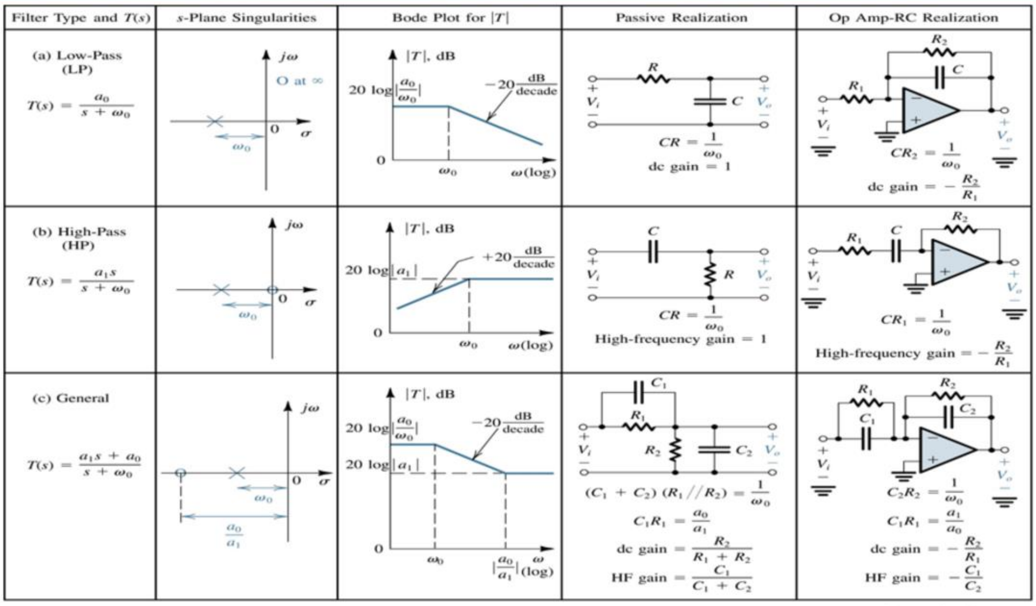
- Hoogdoorlaat

$$T_{HP} = \frac{s}{s+\omega_o} = \frac{S}{S+1}$$

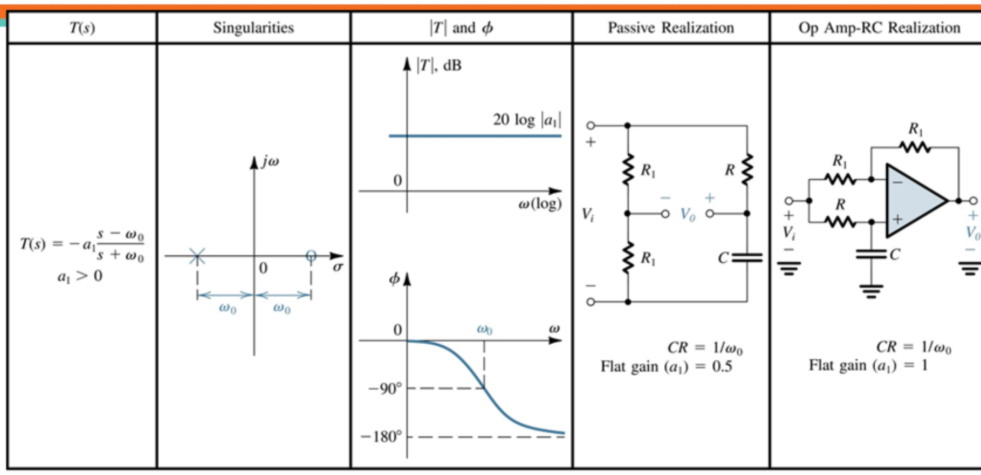
- All Pass

$$T_{AP} = \frac{s-\omega_o}{s+\omega_o} = \frac{S-1}{S+1}$$

Eerste orde filters

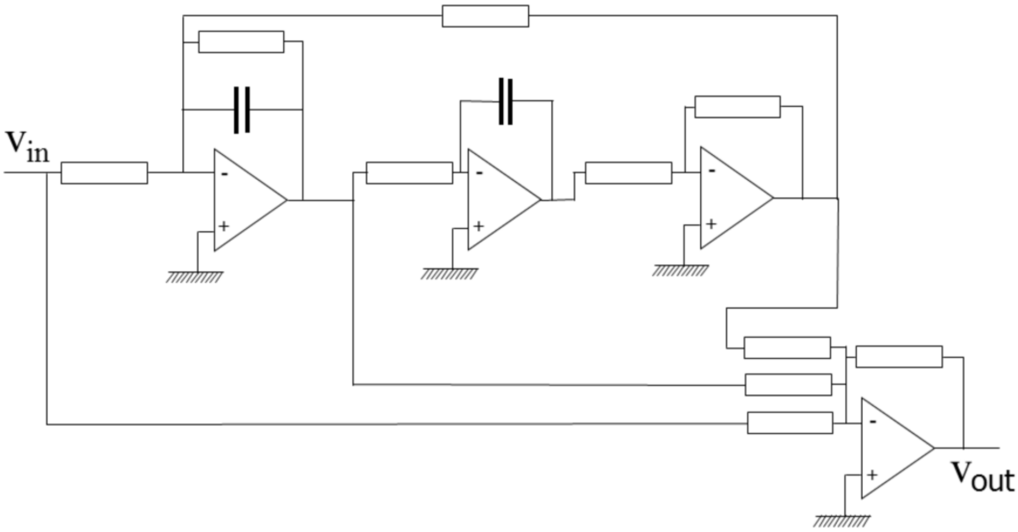


Eerste orde filters



Biquad filter

Dit is het algemeen circuit voor een tweede orde filter



Het biquad circuit laat ons toe van eender welke transferfunctie van de tweede orde te realiseren. Dit is vooral van toepassing wanneer we een paar van complex toegevoegde polen (in het negatief half vlak) of een paar van complex toegevoegde nullen hebben.

De basis van dit circuit bestaat uit een terugkoppellus, waarbij de inverse van de dubbele integraal van het ingangsignaal en eventueel ook een bijdrage van de enkel integraal wordt teruggekoppeld naar de ingang. Dit laat toe van een transferfunctie met twee polen te bekomen.

De uitgang van dit circuit wordt bekomen aan de hand van een (inverterende) somversterker met drie bijdragen. Deze drie bijdragen zijn echter niet noodzakelijk steeds aanwezig. Wanneer enkel maar de uitgang van de lus een bijdrage heeft (bovenste tak) is de orde van de veelterm in de teller 0, dus een constante.

Door de middelste aftakking te nemen hebben we de afgeleide van de bovenste aftakking, zodat de orde van de veelterm in de teller 1 is.

Tenslotte kunnen we ook ingang verbinden met de uitgang. Dit levert een constante transferfunctie op, of als we op gelijke noemer brengen een veelterm van tweede orde in teller en noemer. De termen van de eerste orde en de nulde orde kunnen we er in principe terug aftrekken, zodat we, indien nodig, enkel een teller van de tweede orde bekomen.

Transferfuncties van tweede orde filters

- Laagdoorlaat

$$T_{LP}=\frac{\omega_o^2}{s^2+\frac{\omega_o}{Q}s+\omega_o^2}=\frac{1}{S^2+\frac{S}{Q}+1}$$

- Hoogdoorlaat

$$T_{HP}=\frac{s^2}{s^2+\frac{\omega_o}{Q}s+\omega_o^2}=\frac{S^2}{S^2+\frac{S}{Q}+1}$$

- Banddoorlaat

$$T_{BP}=\frac{\frac{\omega_o}{Q}s}{s^2+\frac{\omega_o}{Q}s+\omega_o^2}=\frac{\frac{S}{Q}}{S^2+\frac{S}{Q}+1}$$

- Bandsper

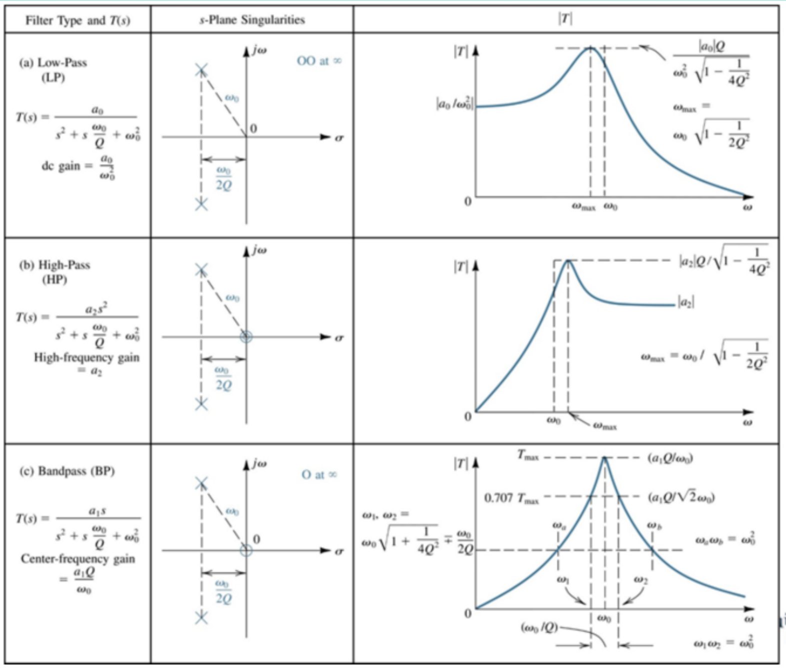
$$T_{BE}=\frac{s^2+\omega_o^2}{s^2+\frac{\omega_o}{Q}s+\omega_o^2}=\frac{S^2+1}{S^2+\frac{S}{Q}+1}$$

- All Pass

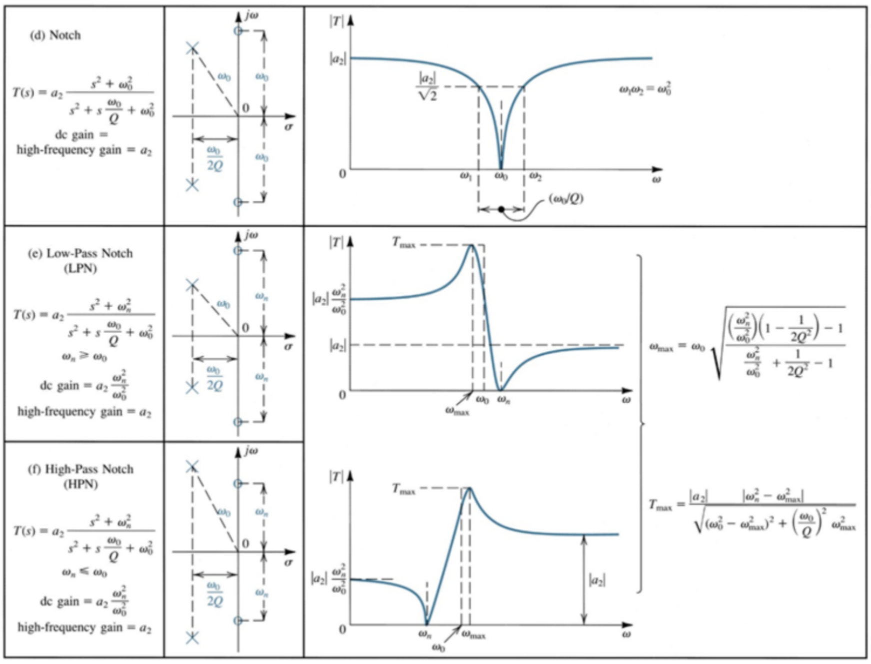
$$T_{AP}=\frac{s^2-\frac{\omega_o}{Q}s+\omega_o^2}{s^2+\frac{\omega_o}{Q}s+\omega_o^2}=\frac{S^2-\frac{S}{Q}+1}{S^2+\frac{S}{Q}+1}$$

universiteit hasselt | KU LEUVEN 20

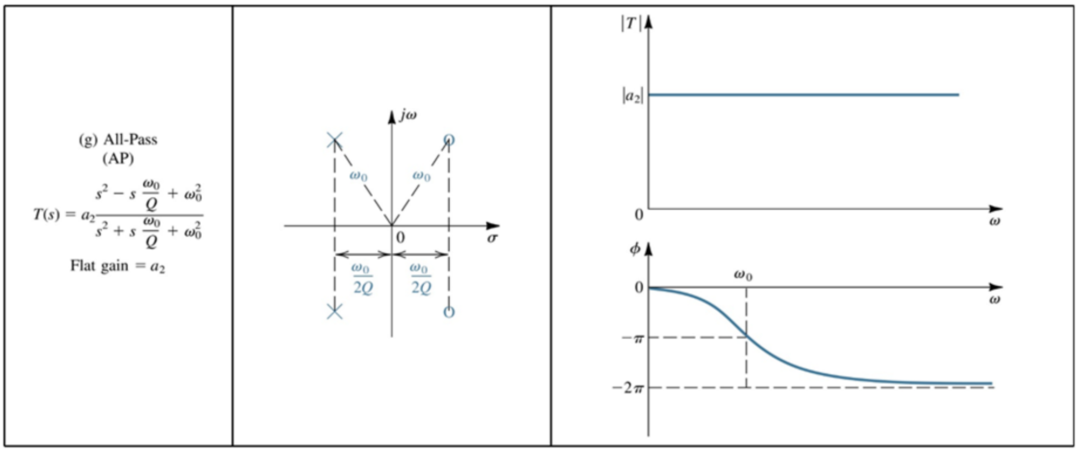
2de orde filters



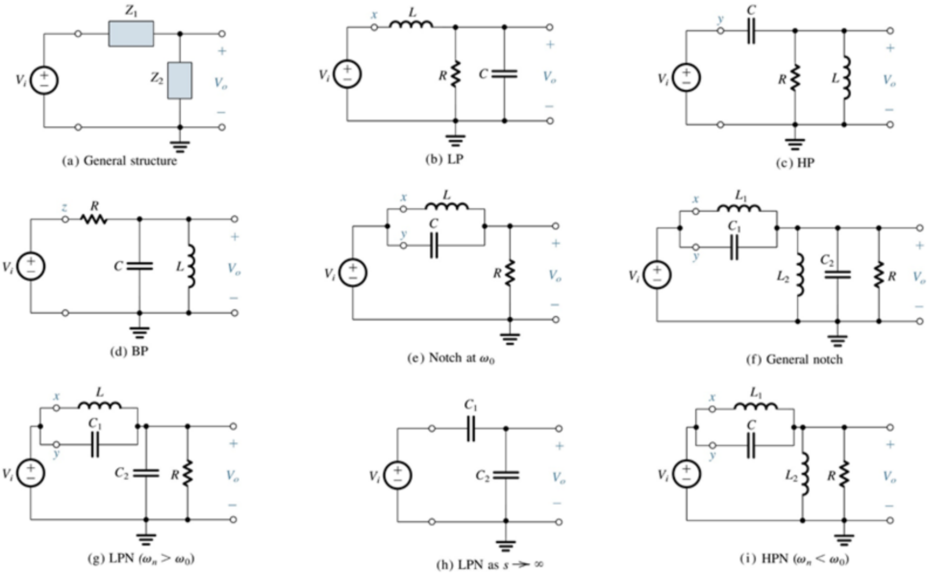
2de orde filters



2de orde filters



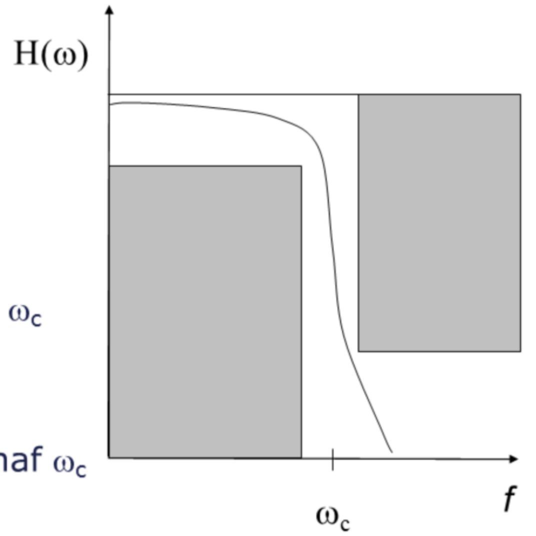
2de orde LCR filters



Specifieke filters

Laagdoorlaatfilters

- Butterworth filter:
  - maximaal vlak rond 0
  - steil dalend vanaf ω_c
- Chebyshev filter
  - een constante rimpel tot ω_c
  - steil dalend vanaf ω_c
- Invers Chebyshev filter
  - een constante rimpel vanaf ω_c
- Bessel-Thomson filter
  - een maximaal vlakke vertragingskarakteristiek rond de frequentie ω_c



1: Butterworth filter: transferfunctie

- De transferfunctie is:
  - alle afgeleiden rond 0 tot 2n-1 van deze functie zijn 0

$$T_n^2 = \frac{1}{1+(jS)^{2n}}$$

- met S voor een laagdoorlaatfilter:

$$S = \frac{s}{\omega_c}$$

- De amplitude voor $s=\omega_c$ is:

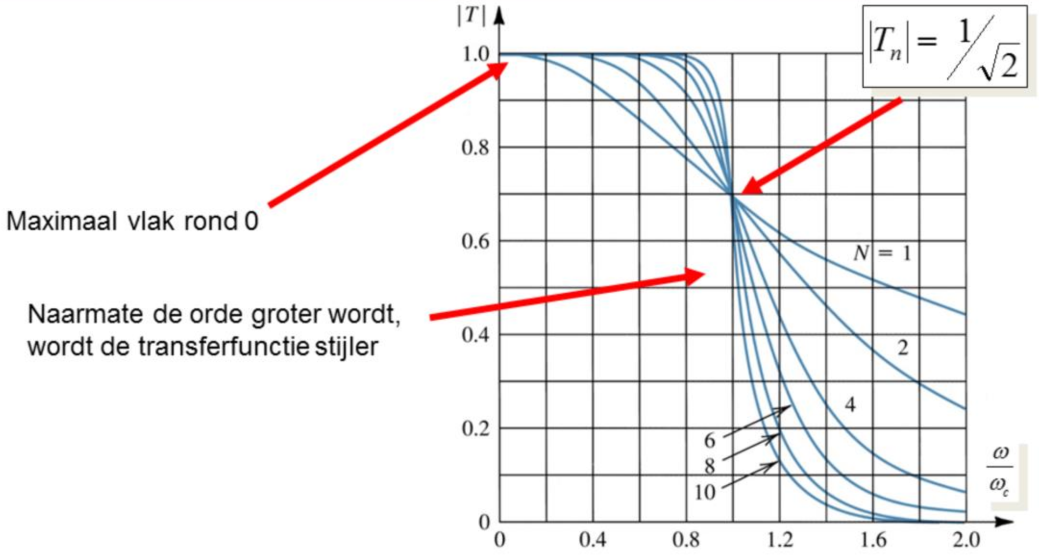
$$|T_n| = 1/\sqrt{2}$$

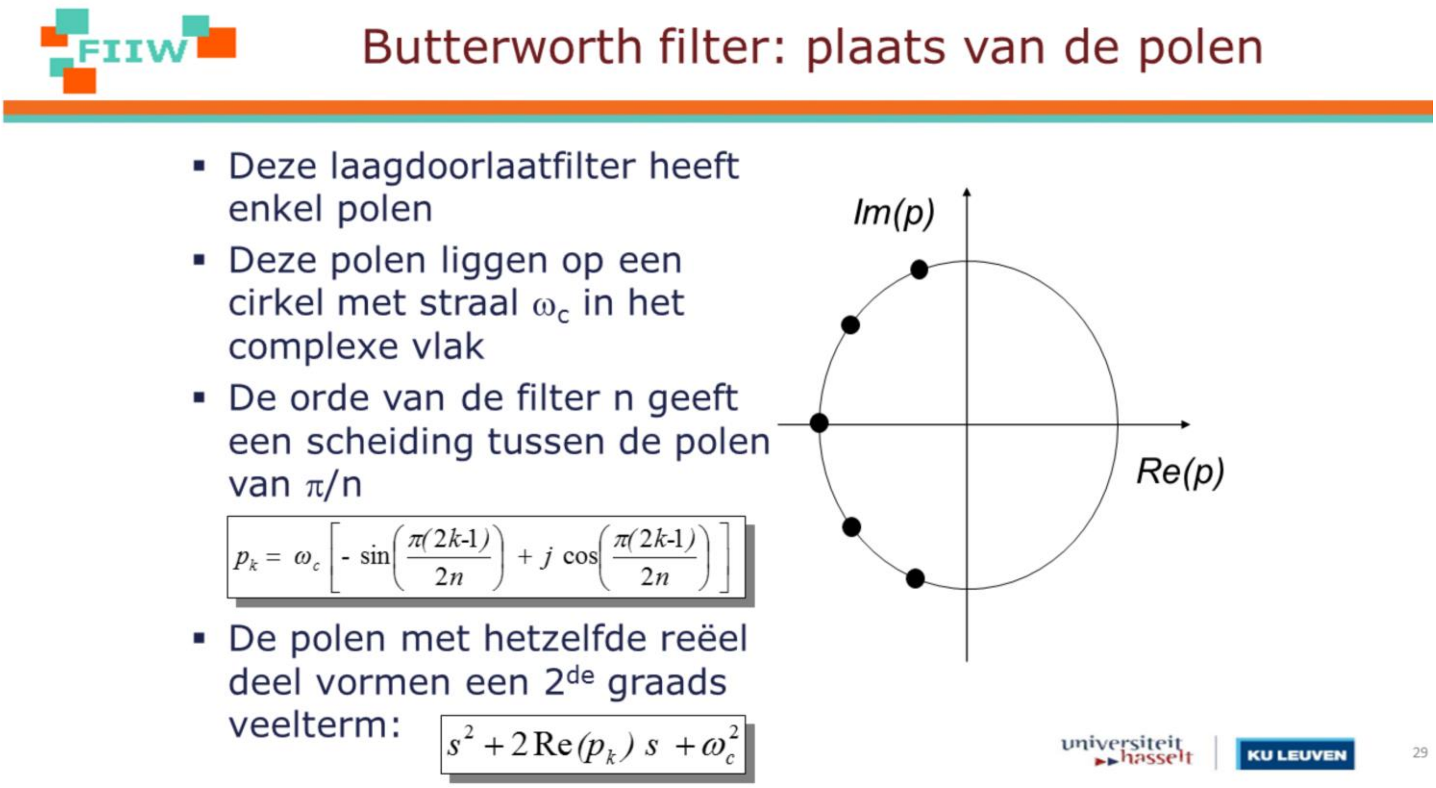
- Boven deze frequentie daalt deze functie als:

$$|T_n| = 1/|S|^n$$

universiteit hasselt | KU LEUVEN 27

Butterworth filter: transferfunctie

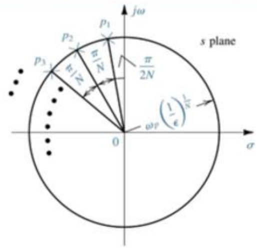


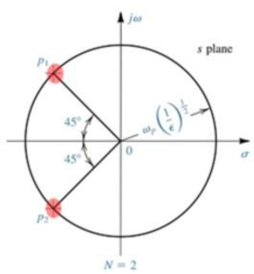


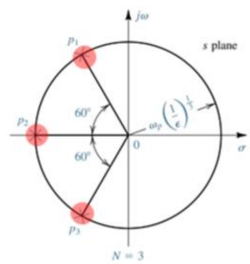
De vergelijking $1+\left(jS\right)^{2n}=0$ heeft in principe 2n nulpunten die allen de norm 1 hebben. We zouden dus 2n polen kunnen hebben. We mogen natuurlijk enkel maar de polen nemen die in het negatieve halve vlak liggen.

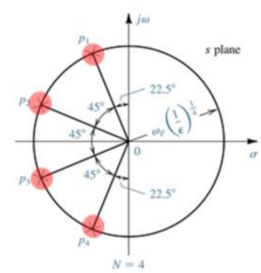
Wanneer we een filter maken rond de frequentie ω_c zullen al deze polen op een cirkel met straal ω_c liggen.

Butterworth filter: plaats van de polen









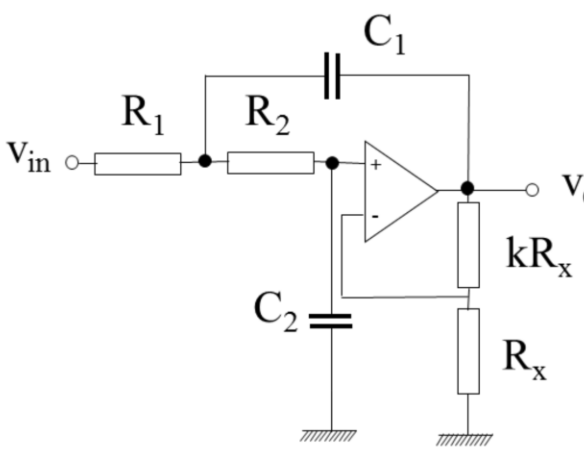
Een paar complex toegevoegde polen

Een paar complex toegevoegde polen
Een reële pool

Twee paar complex toegevoegde polen

Circuit ter realisatie van een Butterworth filter

- Sallen en Key circuit
- Dit circuit heeft maar 1 OPAMP nodig, in tegenstelling met het algemene circuit
- k laat toe de positie op de cirkel te kiezen

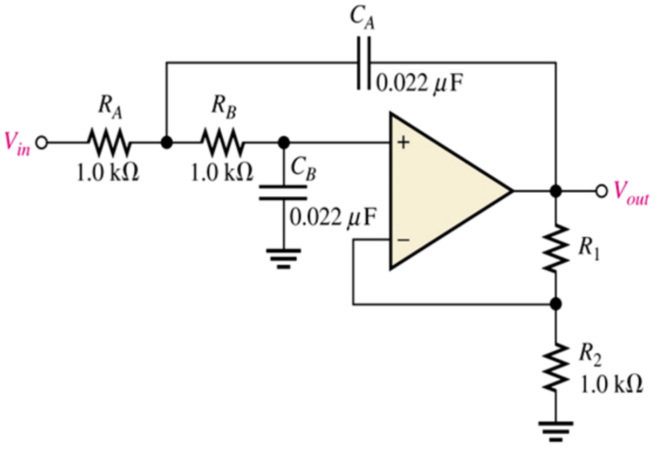


$$\omega_c = \frac{1}{R_1C_1} = \frac{1}{R_2C_2} = \frac{1}{R_2C_1}$$

$$v_{out} = \frac{(k+1)\omega_c^2}{s^2 + \omega_c(2-k)s + \omega_c^2} v_{in}$$

Dit circuit kan met een opamp een tweede orde filterterm realiseren. Dus kunnen we aan de hand van deze circuits een laagdoorlaatfilter van de orde n maken met n opamps.

Voorbeeld: butterworth 2de orde

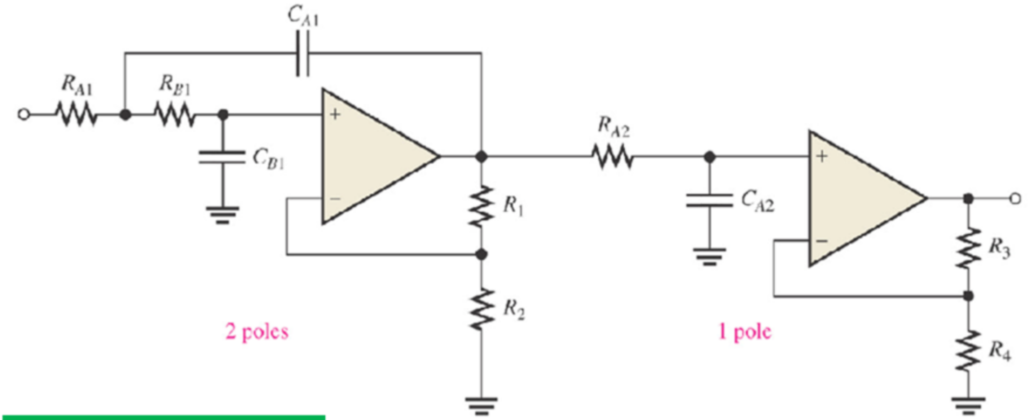


$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = 7.23kHz$$

$$R_1 = 0.586 R_2$$

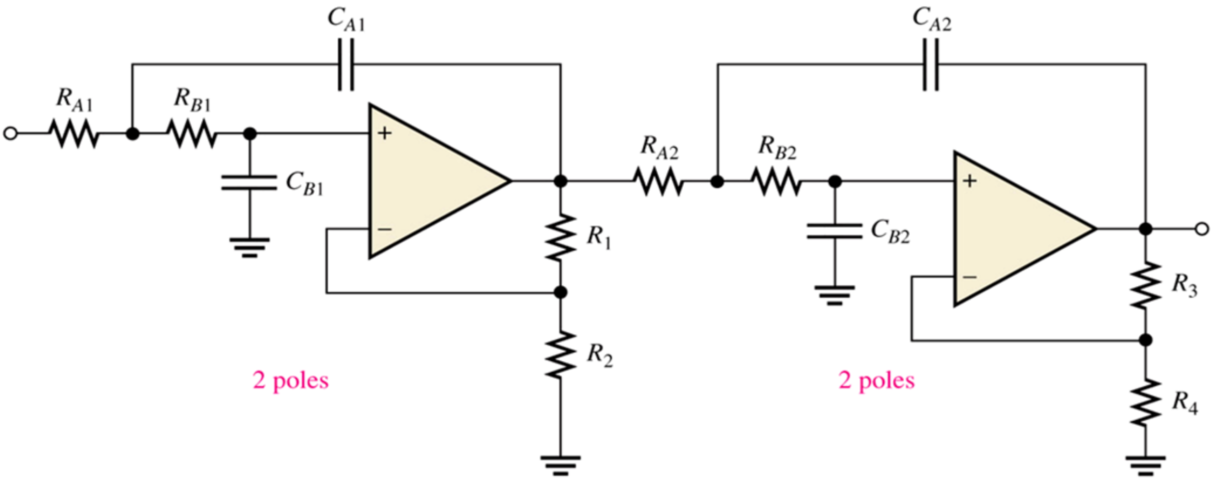
$$2 - k = 2\cos 45°$$

Voorbeeld: butterworth 3de orde



$$2 - k = 2\cos 60°$$

Voorbeeld: butterworth 4de orde



$2 - k = 2\cos 22.5°$

$2 - k = 2\cos 67.5°$

2: Chebyshev filter: transferfunctie

- De transferfunctie is:
  - n rimpels in de doorlaatband

$$T_n^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(jS)}$$

- met

$$C_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$$

- met S voor een laagdoorlaatfilter:

$$S = \frac{s}{\omega_c}$$

- De amplitude voor $s=\omega_c$ is:
  - Dit is ook de amplitude van de rimpel

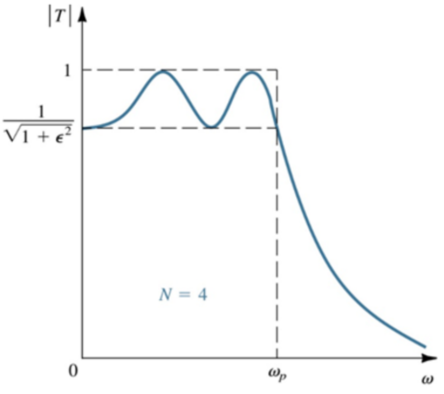
$$|T_n| = 1 \Big/ \sqrt{1+\varepsilon^2}$$

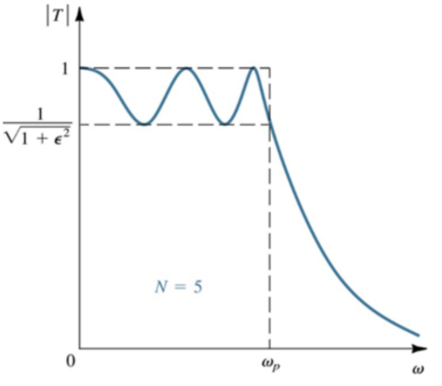
- Boven deze frequentie daalt deze functie als:

$$|T_n| = 1 \Big/ \varepsilon^2 2^{n-1} |S|^n$$

Chebyshev filter: transferfunctie

$$\boxed{T_n^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(jS)}}$$





Chebyshev filter: plaats van de polen

- Deze laagdoorlaatfilter heeft enkel polen
- Deze polen liggen op een ellips in het complexe vlak met als lange as ω_c cosh(a) en als korte as ω_c sinh(a)

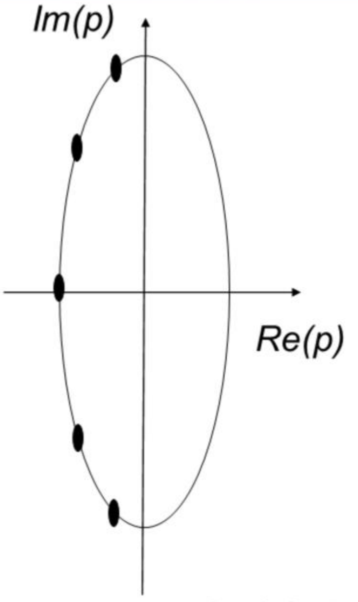
$$a = \frac{1}{n} \sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon}$$

- De orde van de filter n geeft een scheiding tussen de polen van π/n

$$p_k = \omega_c \left[-\sinh a \sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right) + j \cosh a \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right) \right]$$

- De polen met hetzelfde reëel deel vormen een 2de graads veelterm:

$$s^2 + 2\,\mathrm{Re}(p_k)\, s + \omega_c^2$$



universiteit hasselt | KU LEUVEN 37

3: Invers Chebyshev filter

- **De transferfunctie is:**
  - **n rimpels in de sperband**

$$T_n^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2(j/S)}{1+\varepsilon^2 C_n^2(j/S)}$$

- **met**

$$C_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$$

- **met S voor een laagdoorlaatfilter:**

$$S = \frac{s}{\omega_c}$$

- **De polen zijn de omgekeerden (1/p) van de Chebyshev filter**
  - **deze liggen niet op een cirkel**

4: Bessel-thomson filter (Delay filter)

- We willen de output een vaste vertraging geven ten opzichte van de ingang.
- Hiervoor moet de fase lineair veranderen met de ingang.
- We drukken de group delay uit als een reeksontwikkeling van ω, en stellen hierin zoveel mogelijk coëfficiënten gelijk aan nul

Fase delay

$$\boxed{\theta = -\omega D}$$

Group delay

$$\boxed{D = -\frac{\partial \theta}{\partial \omega}}$$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\left[\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right]}$$

universiteit hasselt | KU LEUVEN 39

Uitgewerkt voorbeeld: We vertrekken van de algemene vorm van een laagdoorlaatfilter.

$$\boxed{T_{LP} = \frac{a_0}{s^2 + a_1 s + a_0}}$$

We bepalen de group delay van deze filter.

$$\boxed{D = \frac{a_1}{a_0}\frac{1+\frac{\omega^2}{a_0}}{1+\left(\frac{a_1^2}{a_0^2}-\frac{2}{a_0}\right)\omega^2+\omega^4}}$$

We schrijven dit als een reeksontwikkeling in ω en maken zoveel mogelijk coëfficiënten 0.

Om een delay van 1 te bekomen moeten in dit geval de coëfficiënten a_0 en a_1 beide 3 zijn.

$$\boxed{D = \frac{a_1}{a_0}\left[1+\left(\frac{1}{a_0}-\frac{a_1^2}{a_0^2}+\frac{2}{a_0}\right)\omega^2+\ldots\right]}$$

Transfer functie Bessel-thomson filter

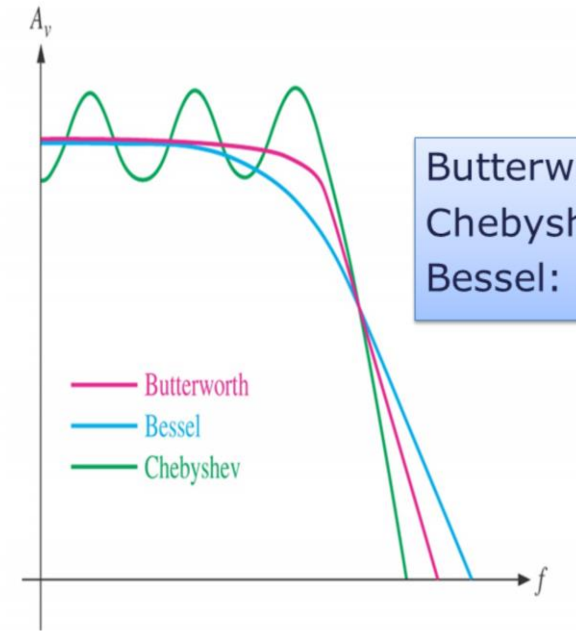
- De transferfunctie van een Bessel-Thomson filter met eenheidsdelay kan ook bekomen worden aan de hand van de Bessel veeltermen.
- Een belangrijk voordeel van deze laagdoorlaatfilter is ook dat er geen overshoot is als het gevolg van een stap aan de ingang.

$$T_n(s) = \frac{\mathbf{B}_n(0)}{\mathbf{B}_n(s)}$$

$$\mathbf{B}_n(s) = (2n-1)\mathbf{B}_{n-1}(s) + s^2\mathbf{B}_{n-2}(s)$$
$$\mathbf{B}_0(s) = 1$$
$$\mathbf{B}_1(s) = s + 1$$

40

Vergelijking laagdoorlaatfilters



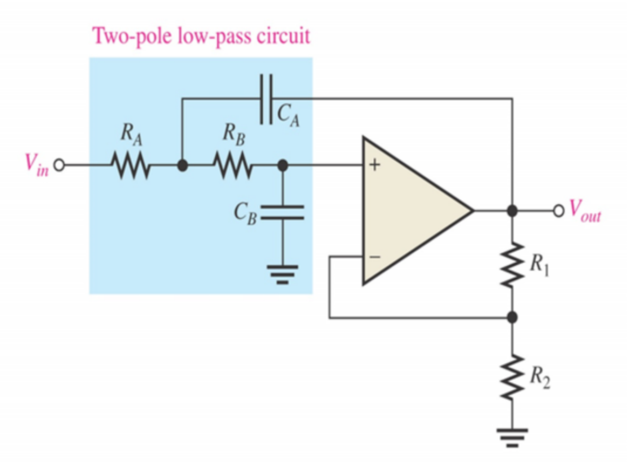
Butterworth: meest vlak
Chebyshev: meest stijl
Bessel: lineaire faseverschil

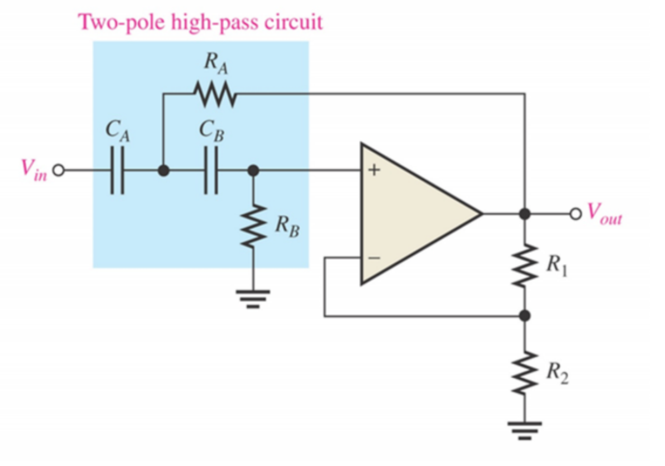
Frequentie transformatie voor hoogdoorlaatfilter

- Vanuit de transferfunktie
  - S voor een hoogdoorlaatfilter: $S = \frac{\omega_c}{s}$
  - We bekomen evenveel nullen op 0 als er polen zijn in de transferfunctie
- Vanuit een schema
  - vervang elke weerstand R_i door de condensator: $C_i = \frac{1}{R_i}$
  - vervang elke condensator C_i door de weerstand: $R_i = \frac{1}{C_i}$

universiteit hasselt | KU LEUVEN 42

Sallen en Key: van laagdoorlaat naar hoogdoorlaatfilter

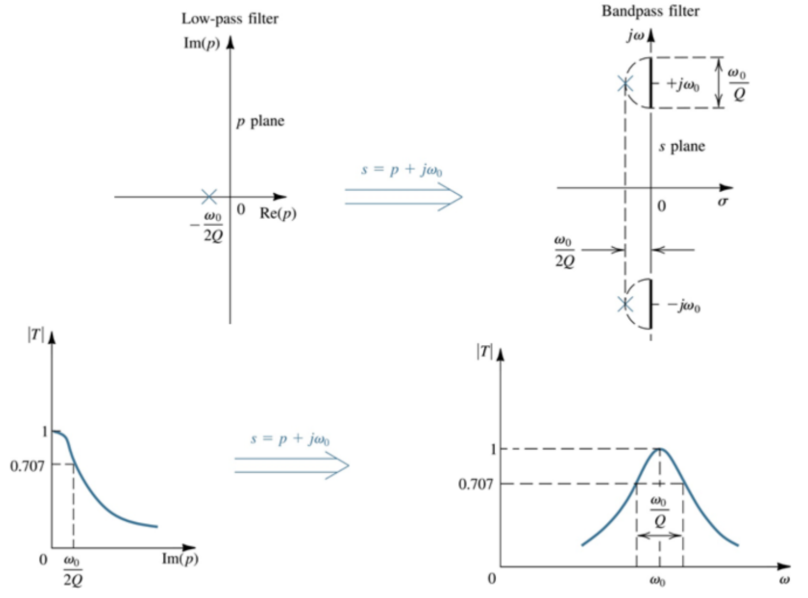




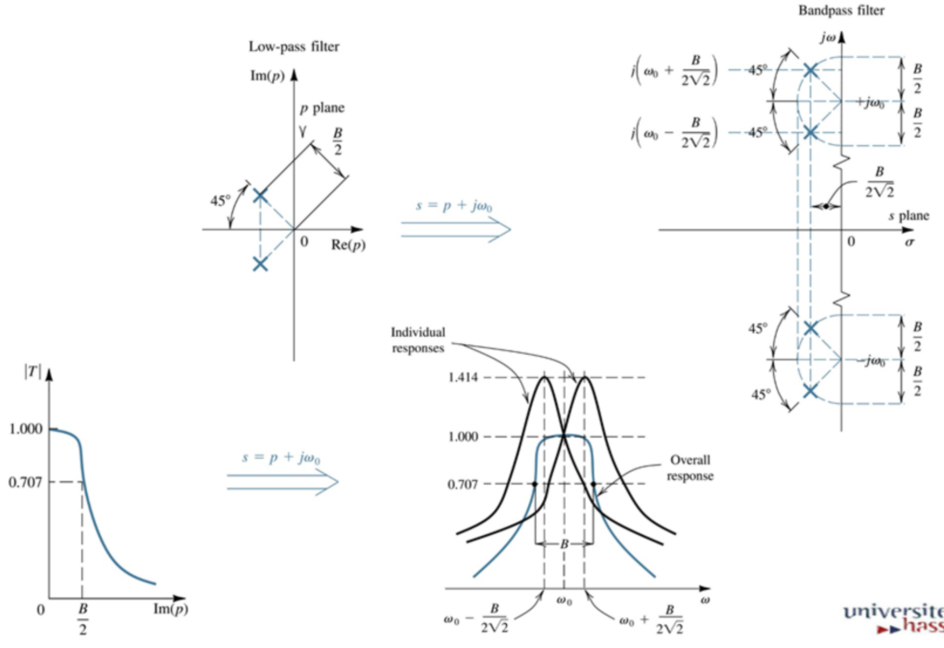
Frequentie transformatie voor banddoorlaatfilter

- Vanuit de transferfunktie
  - S voor een banddoorlaatfilter: $$S = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \frac{s^2 + \omega_1 \omega_2}{s}$$
  - We bekomen dubbel zoveel trappen als er nodig zijn voor de laagdoorlaatfilter van dezelfde orde
  - We bekomen half zoveel nullen als er polen zijn in de transferfunctie

Van laagdoorlaat naar banddoorlaat



Van laagdoorlaat naar banddoorlaat



Delay Equalization

- Eerste orde all-pass

$$\theta_{AP_1} = -2\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)$$

$$D_{AP_1} = -\frac{\partial}{\partial\omega}\theta(\omega) = \frac{2/\omega_o}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$$

- Tweede orde all-pass

$$\theta_{AP_2} = -2\arctan\left(\frac{\omega\omega_o/Q}{\omega_o^2-\omega^2}\right)$$

$$D_{AP_2} = \frac{2}{\omega_o Q}\frac{1+\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2/Q^2}$$

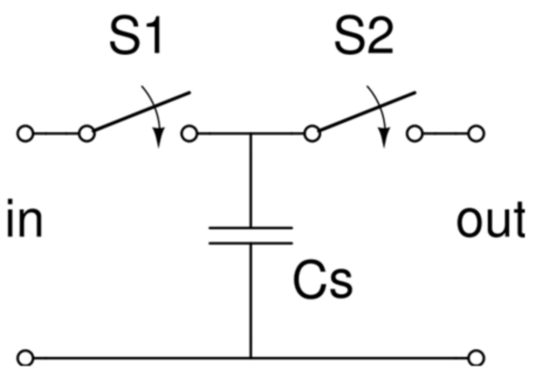
universiteit hasselt | KU LEUVEN 47

Voor delay equalization maken we gebruik van een all-pass filter. Het is namelijk de bedoeling dat alle frequenties er onveranderd doorkomen. Het enige wat we willen veranderen is de fase. Meestal gaan we deze filter gebruiken om een faseverschuiving die ergens in een circuit gegenereerd is, terug te compenseren.

Switched Capacitor filters

Switched Capacitor weerstand (SC)

- Weerstanden op chip zijn nooit heel erg nauwkeurig
- We kunnen een weerstand vervangen door een condensator en 2 schakelaars



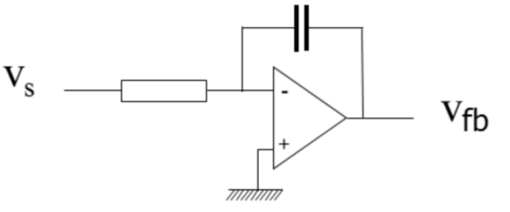
$$i = f C_s \left(v_{in} - v_{out} \right)$$

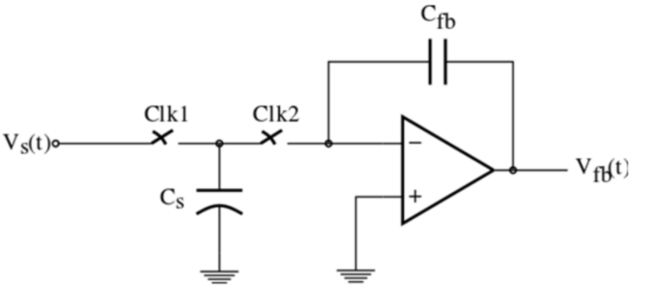
$$R = \frac{1}{f C_s}$$

universiteit hasselt | KU LEUVEN 49

Eerst orde SC

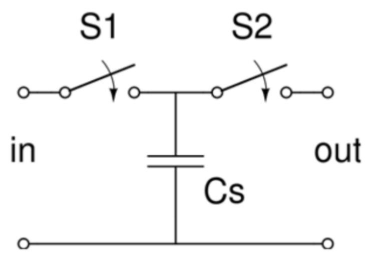
We vervangen de weerstand R door een SC schakeling



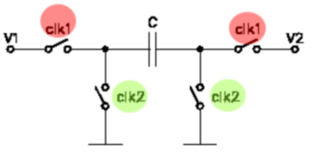


Betere SC weerstand

Het eenvoudige circuit heft last van de parasitaire capaciteiten



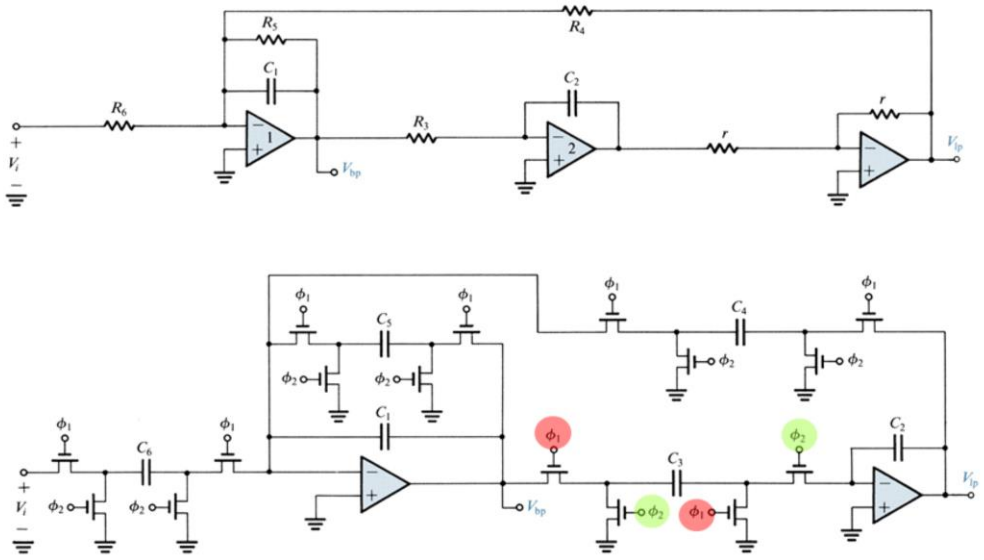
Het verdubbelen van de schakelaars lost dit probleem op



$$i = fC_s\,(v_{in} - v_{out})$$

$$R = \frac{1}{fC_s}$$

SC Biquad filter



Merk op dat bij het omschakelen naar de Switched Capacitor implementatie de laatste stage (inverterende opamp) verdwenen is.

De truc is dat voor R_3 de klokken omgewisseld zijn, waardoor de stomen omgekeerd zijn en het geheel zich dus gedraagt als een negatieve weerstand