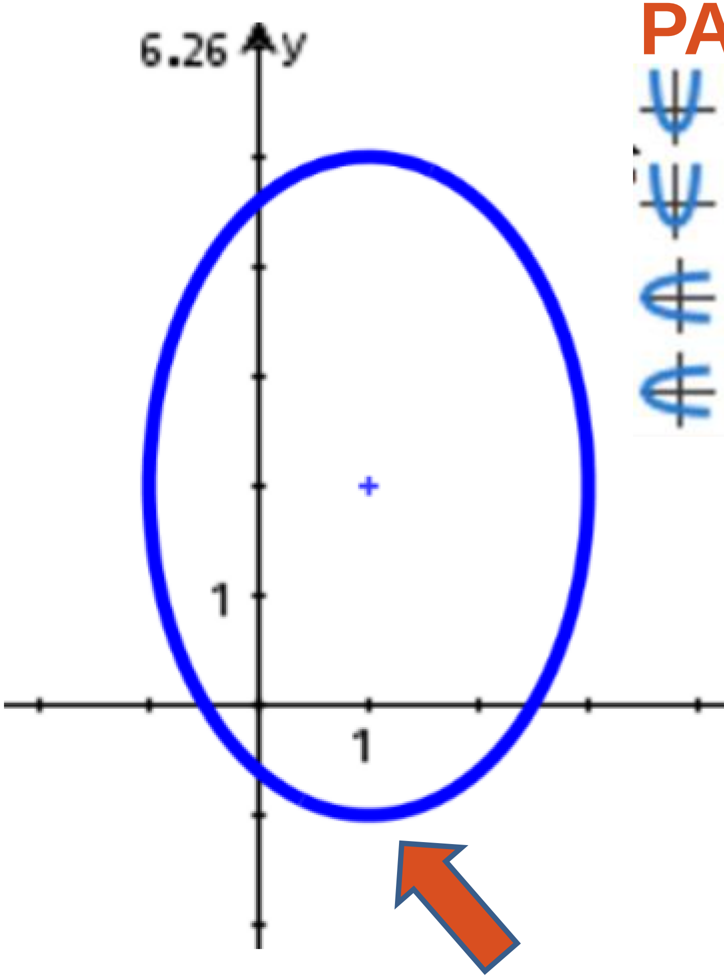
HC 2: Poolkrommen, snijpunten zoeken van krommen, afgeleiden en differentialen

Afwerking HOOFDSTUK 1 +

HOOFDSTUK 2, §2.1 tot en met §2.5

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

Vorige week: kegelsneden



ELLIPS

PARABOOL

1 Topformule $y=a\cdot(x-h)^2+k$
2 Standaard vorm $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$
3 Topformule $x=a\cdot(y-k)^2+h$
4 Standaard vorm $x=a\cdot y^2+b\cdot y+c$

Parametervergelijking?

$$\begin{cases} x = 2\cdot\cos(t)+1 \leftarrow x1(t) \\ y = 3\cdot\sin(t)+2 \leftarrow y1(t) \end{cases}$$

Cartesische vergelijking?

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{y-2}{3}\right)^2=1$$

Kegelsneden

HYPERBOOL

1 Oost−west $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

2 Zuid−noord $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

Parametervergelijking ?

!!! $(\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2 = 1$

!!! $\left(\frac{1}{\cos(t)}\right)^2 - (\tan(t))^2 = 1$

KEGELSNEDE

1 Algemeen

$a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$

TYPE ?? STEL

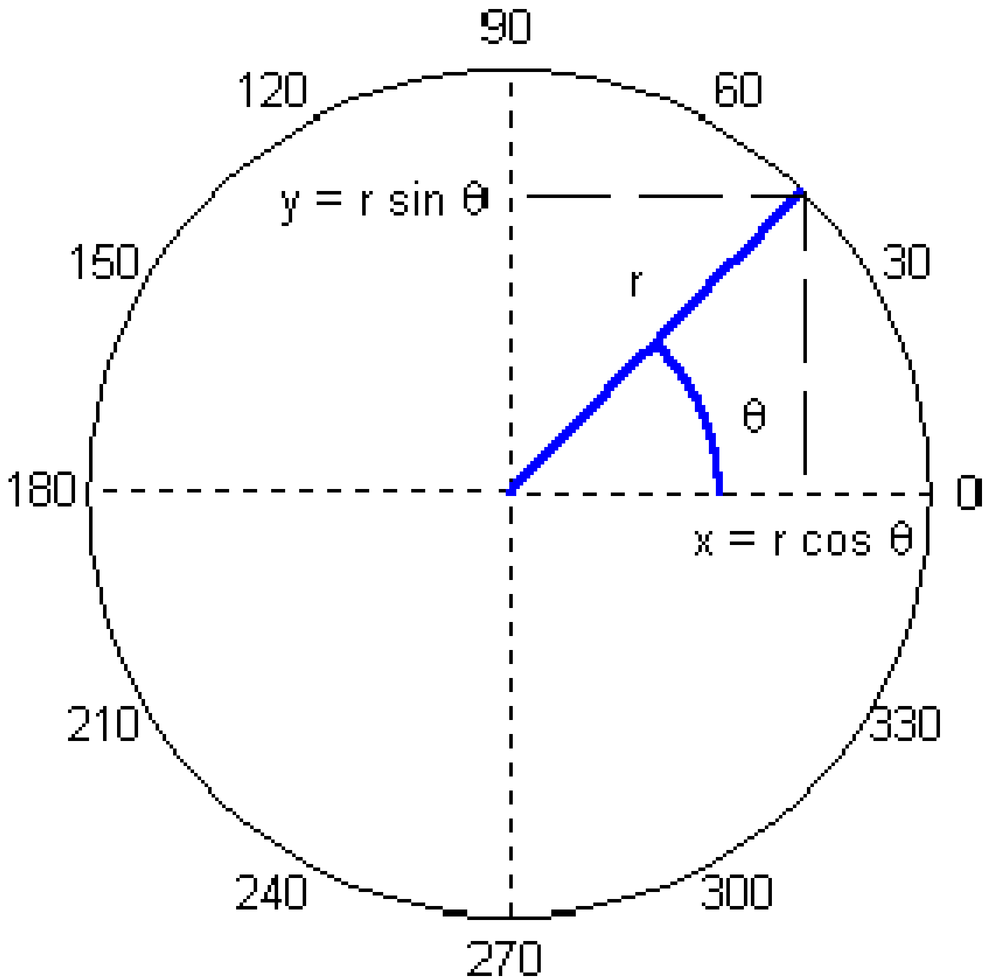
$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

(1) $\det(A) = a \cdot c - \frac{b^2}{4} = 0$: de kegelsnede is van het parabolische type.

(2) $\det(A) > 0$: de kegelsnede is van het elliptische type.

(3) $\det(A) < 0$: de kegelsnede is van het hyperbolische type.

Polair denken

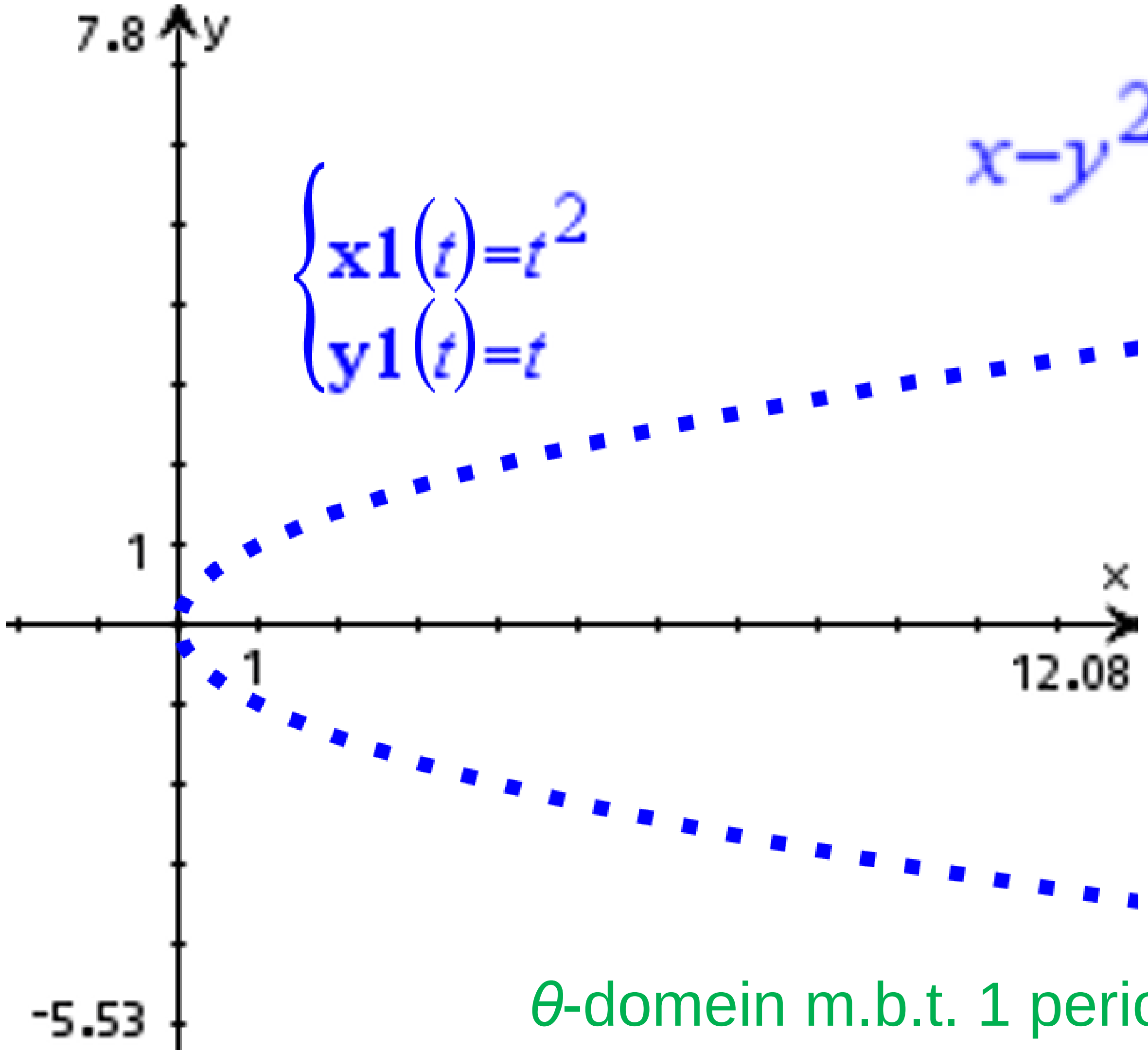


STEL VAST

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Verband tussen pool- en cartesische coördinaten

Poolvergelijking van parabool ?



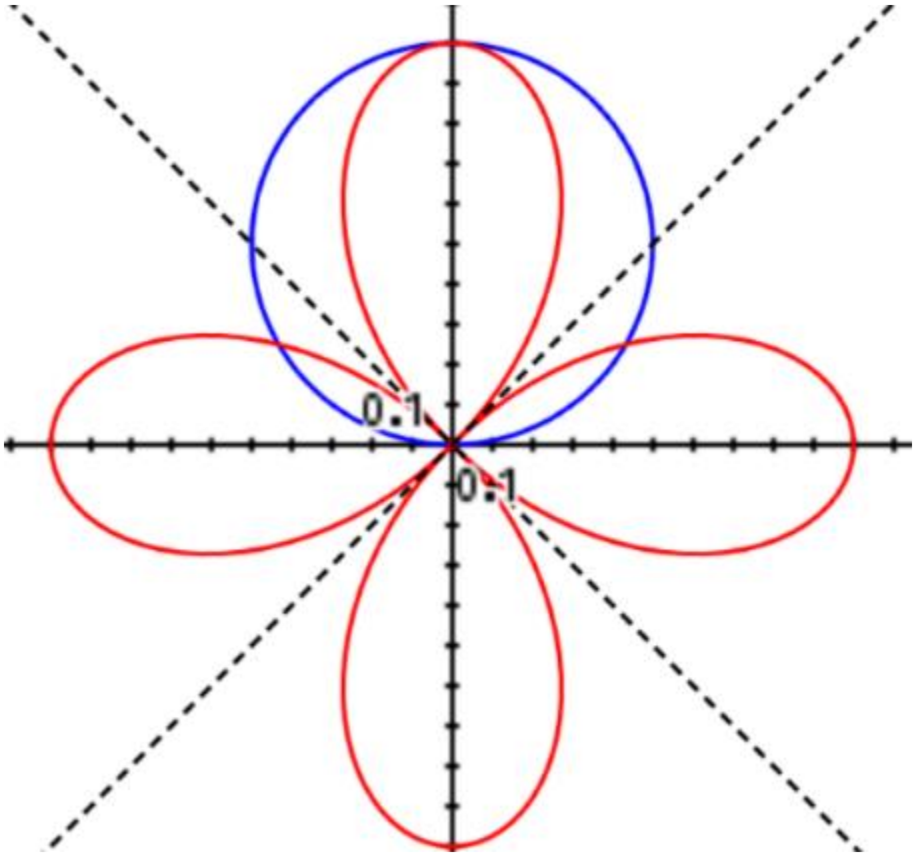
$x - y^2 = 0$

$$\begin{cases} x1(t) = t^2 \\ y1(t) = t \end{cases}$$

θ-domein m.b.t. 1 periode ??

TOEPASSING: snijpunten zoeken

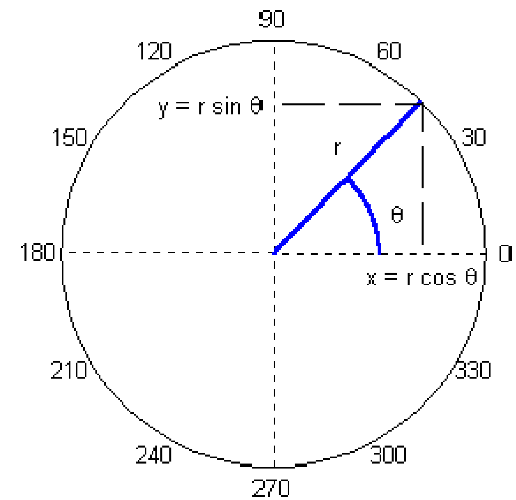
OEFENING 18a, pagina 8



Zoek alle gemeen-schappelijke punten van de poolkrommen:

$$r1(\theta) = \sin(\theta)$$

en $r2(\theta) = \cos(2\theta)$



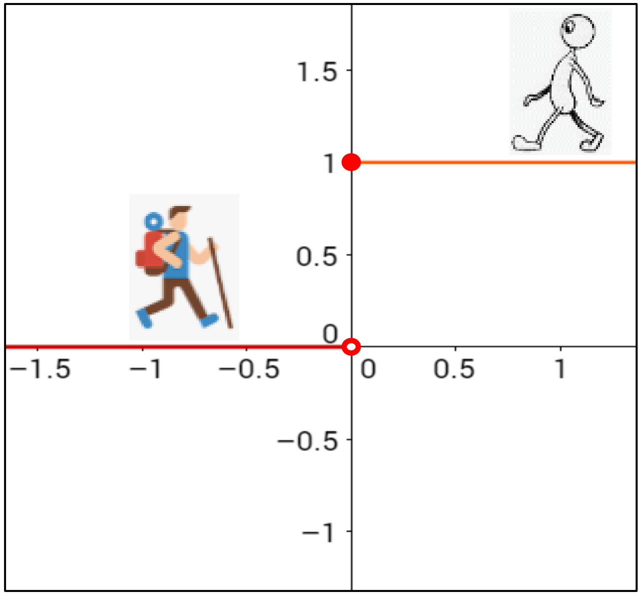
§ 1.4 Limietdefinitie continuïteit

f(x) is continu in a als:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

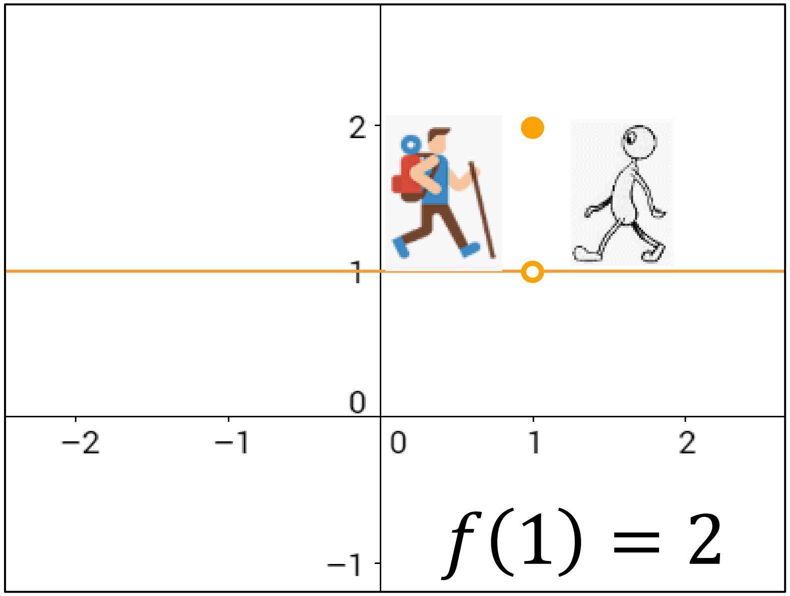
$a \in \mathrm{dom}(f)$

Tegenvoorbeelden



$f(0) = 1$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ bestaat niet



$f(1) = 2$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

UHASSELT KU LEUVEN

§ 2.1 Limietdefinitie afgeleiden

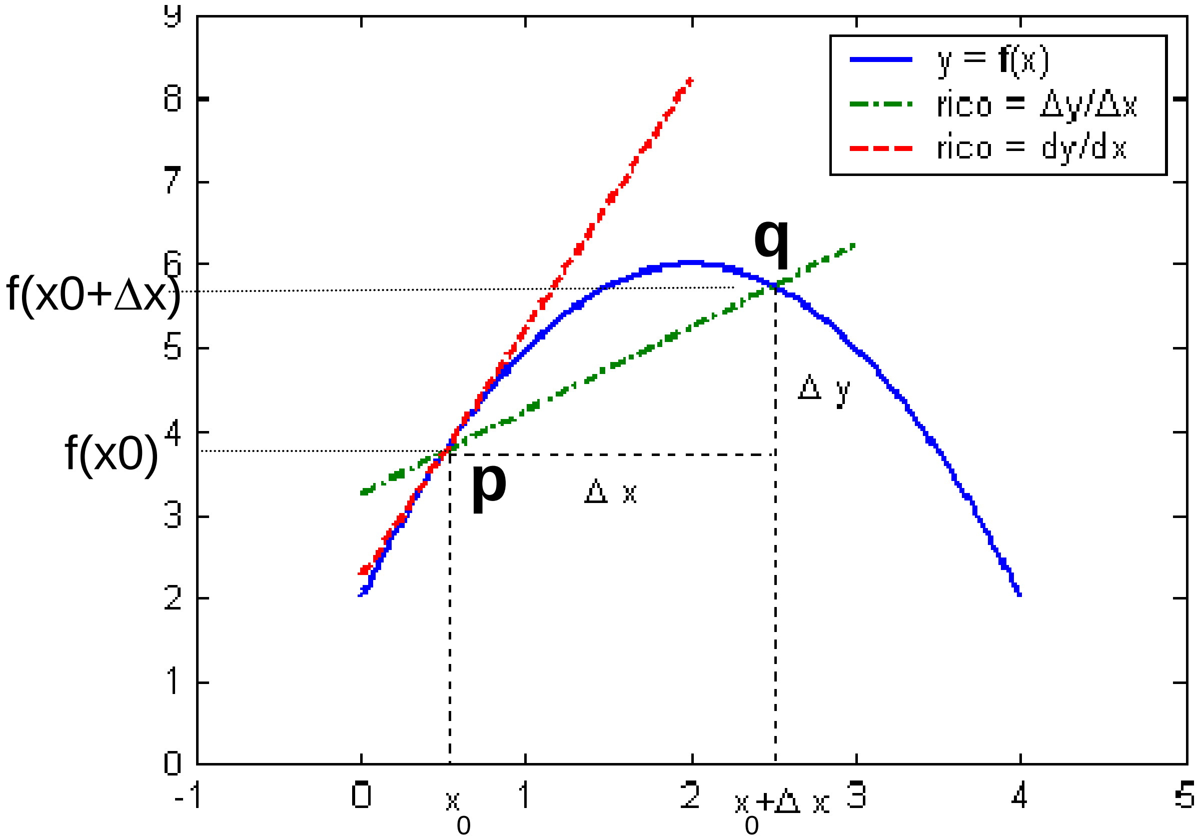
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \boxed{\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$$\text{rico } pq = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

= rico koorde !

$$\text{rico raaklijn in } p = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



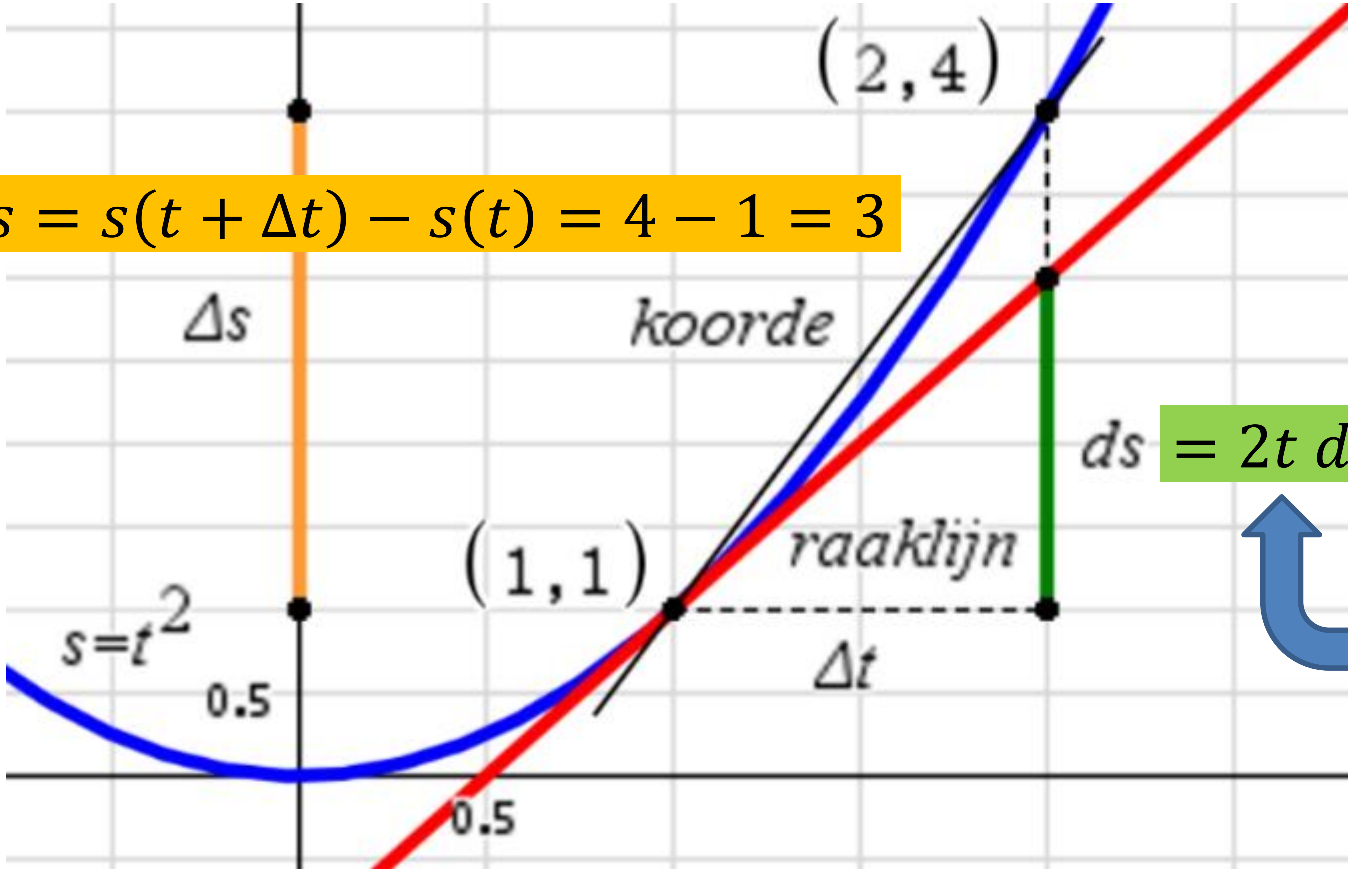
!! LINK MET MECHANICA !!

f(x) ← → s(t)

f ’(x) ← → v(t)

UHASSELT KU LEUVEN

§ 2.1 Link met mechanica: $s(t) = t^2$



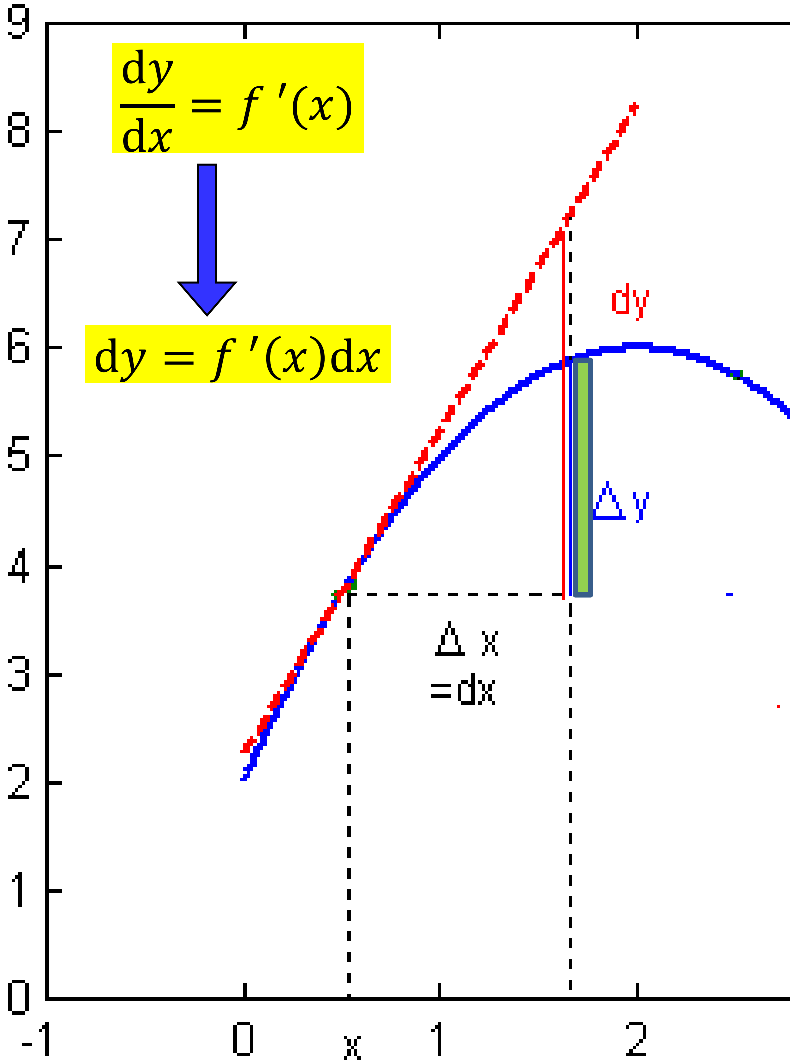
$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = 4 - 1 = 3$$

$$ds = 2t\,dt = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\frac{ds}{dt}$$

Enkel voor Δt (= dt) voldoende klein zal Δs ≈ ds !

§ 2.3 Differentiaal van een functie y = f(x)



Betekenis dy

Bij toename $\Delta x = dx$ is

Δy = f(x+ Δx) – f(x) = de toename van de functiewaarde y

dy = de toename van y volgens de raaklijn

Eigenschap

$dy \approx \Delta y$

bij kleine $\Delta x = dx$

§ 2.3 Voorbeeld differentiaal

De onderste bal van een sneeuwman heeft een straal van 0,4 m.

Door smelten neemt de straal af met 5 mm.

Hoeveel neemt het volume van de sneeuwbal af ?

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

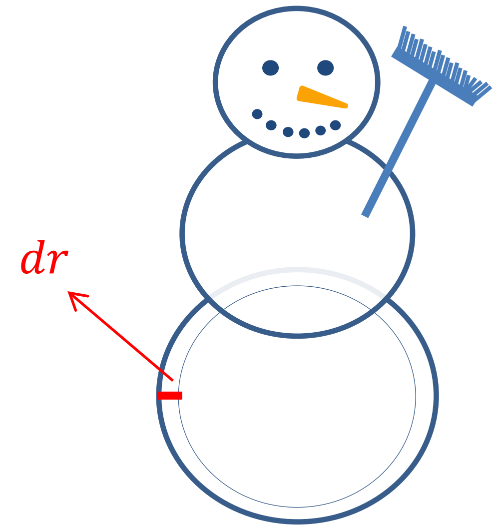
$$dV = 4\pi r^2 dr = 4\pi(0{,}4\,m)^2 \cdot (-0{,}005)m = -0{,}010\,m^3$$

Exacte berekening:

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi(0{,}4\,m)^3 = 0{,}268083\,m^3$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi(0{,}395\,m)^3 = 0{,}258155\,m^3$$

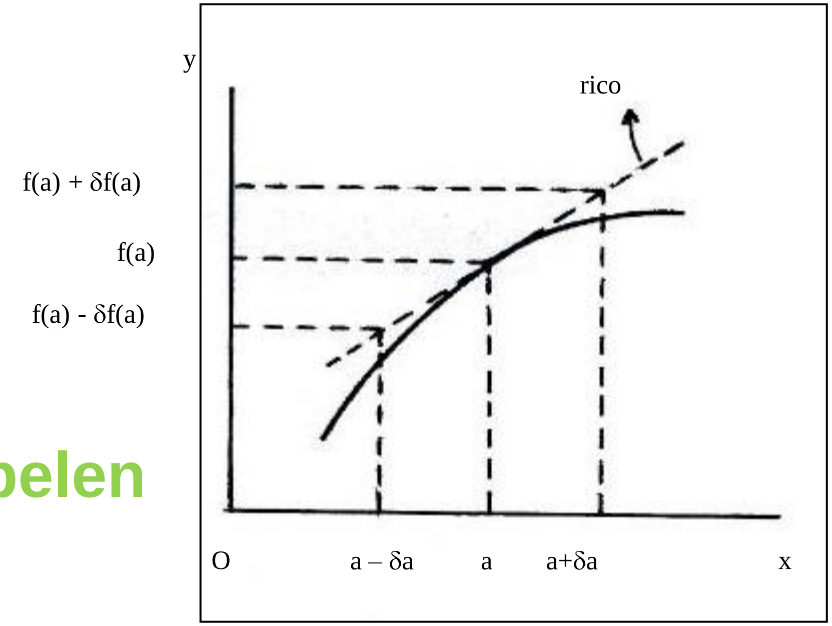
$$V_1 - V_0 = -0{,}009928\,m^3$$



LINK MET BES SCHAKEL (onzekerheidsanalyse) !!

5.1 Methode van de totale differentiaal voor één variabele

$$\delta f(a) = \left| \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right)_{x=a} \right| \delta a$$



5.2 Methode van de totale differentiaal voor meerdere van elkaar onafhankelijke variabelen

Indien *f(x,y,…)*

$$\delta f(a,b,\ldots) = \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=a} \right| \delta a + \left| \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=b} \right| \delta b + \ldots$$

=> **Absolute waarde** van de rico (partieel afgeleiden)!

§ 2.2 Elementaire afgeleiden

	Afgeleide $f'(x)$
C	0
x^n	nx^{n-1}
x	1
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$\operatorname{cotg} x$	$-1/\sin^2 x$
$\operatorname{Bgsin} x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\operatorname{Bgcos} x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\operatorname{Bgtg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{Bgcotg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Enige functie die er bestaat waarvoor de afgeleide opnieuw de functie is !

e^x	e^x
a^x	$\ln a \cdot a^x$
$\ln \lvert x \rvert$	$1/x$
$\log_a \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{\ln a \cdot x}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$
$\coth x$	$-1/\sinh^2 x$

UHASSELT KU LEUVEN

§ 2.4 + 2.5 Rekenregels afgeleiden

- Somregel : $D[f(x)+g(x)] = Df(x) + Dg(x)$
- Factorregel : $D[C \cdot f(x)] = C \cdot Df(x)$
- Productregel : $D[f(x) \cdot g(x)] = Df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x)$
- Quotiëntregel : $D\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{Df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot Dg(x)}{g^2(x)}$

Lees als : komt na

2.5.1 Kettingregel

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$$

of ook $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

UHASSELT KU LEUVEN

Toepassingen afgeleiden

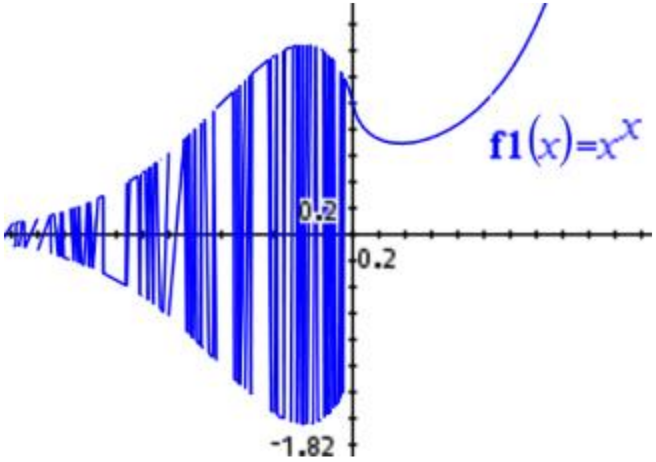
Toepassing: afleiden van inverse functies

"Hoe heeft men afgeleiden van ln(x), Bgsin(x), Bgcos(x), Bgtg(x), … gevonden ??"

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Toepassing: logaritmisch afleiden

bvb. $y = x^x$



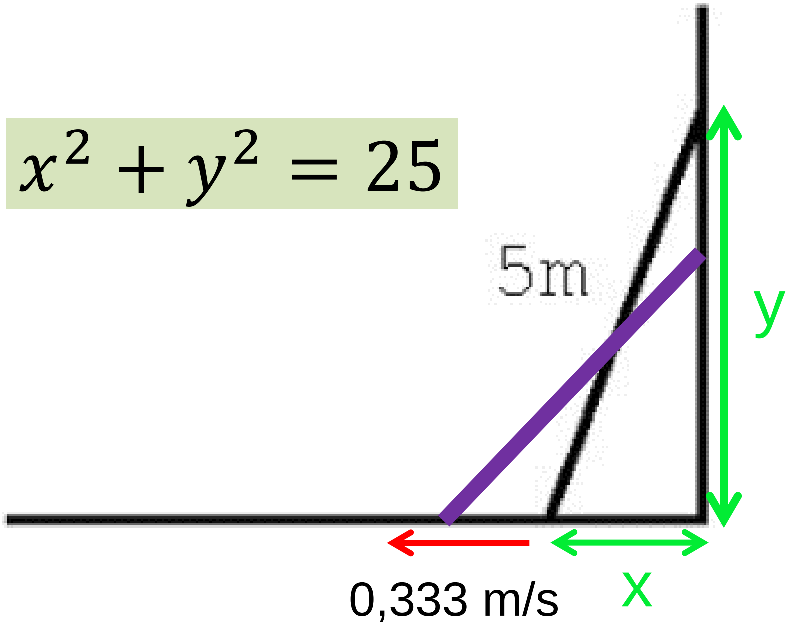
$$\boxed{y = f(x) \rightarrow \ln y = \ln f(x)}$$

Nu afleiden naar *x* !

Toepassing: kettingregelvraagstuk (oef 12, p.15)

12. Een ladder van 5m lang staat schuin tegen een muur zoals aangegeven op de tekening.

$$x^2 + y^2 = 25$$



Door een forse windstoot begint de voet van de ladder ineens weg te schuiven met een constante snelheid van 1/3 meter per seconde. Bereken de snelheid waarmee de top van de ladder naar beneden glijdt op het moment dat de top zich nog maar 3 meter boven de begane grond bevindt.

Gegeven: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}\ \mathrm{m/s}$

Kettingregel: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

Gevraagd: $\frac{dy}{dt}$ | y = 3m

Verband tussen y en x nodig !