

# Wiskunde 1 Schakel

## DOCENTENTEAM

Giovanni Vanroelen

[giovanni.vanroelen@uhasselt.be](mailto:giovanni.vanroelen@uhasselt.be)

Andy Snoecx

[andy.snoecx@uhasselt.be](mailto:andy.snoecx@uhasselt.be)

Sabine Bertho

[sabine.bertho@kuleuven.be](mailto:sabine.bertho@kuleuven.be)

[sabine.bertho@uhasselt.be](mailto:sabine.bertho@uhasselt.be)

# Programma Wiskunde 1: grote lijnen

Lesweek	Onderwerpen
1 $\rightarrow$ 3	Functies in 1 variabele en 2D-krommen (H1)
2 $\rightarrow$ 6	Afgeleiden en toepassingen (H2)
4 $\rightarrow$ 6	Taylor benaderingsveeltermen (H3)
	1 week HERFSTVAKANTIE

7 $\rightarrow$ 8	Gemengde oefeningen (H1 + H2)
8	PE-TEST WISKUNDE 1
6 $\rightarrow$ 9	Functies in meer veranderlijken (H4)
9 $\rightarrow$ 11	Integralen en toepassingen (H5)
11 $\rightarrow$ 13	Differentiaalvergelijkingen (H6)

# Programma Wiskunde 1: grote lijnen

	2 weken KERSTVAKANTIE
	1 week "BLOK"
	3 weken EXAMENS
	LESVRIJE WEEK

## CURSUSMATERIAAL

- THEORIECURSUS (naslagwerk met extra voorbeelden)
- OEFENBUNDEL (meebrengen naar elke werksitting!)
- TOLEDO (ondersteunende lesvideo's + extra materiaal)
- FORMULARIUM + CAS REKENTOESTEL

# Wiskunde 1 Schakel: EVALUATIE

<b>Eerste examenkans</b>	
LESWEEK 8 (dinsdag 14/11 om 8u30): Schriftelijke PE-test (deelname <b>VERPLICHT</b> !) Leerstof: Hoofdstuk 1 en 2 (focus: oefeningen en toepassingen met mogelijk een inzichtsbijvraagje) Toegelaten hulpmiddelen: formularium en CAS rekentoestel	25%
JANUARI 2024: schriftelijk examen ( <u>zelfde stramien</u> als in november) Leerstof: Hoofdstuk 3, 4, 5 en 6 Toegelaten hulpmiddelen: formularium en CAS rekentoestel	75%
<b>Beoordelingscriteria: ZIE eindcompetenties ECTS-fiche (studiegids) !!</b>	

## Tweede examenkans (augustus)

**VERPLICHT:** schriftelijk examen van de leerstof van hoofdstuk 3, 4, 5 en 6

75%

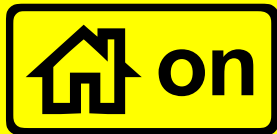
De punten van de PE-test van de 1<sup>ste</sup> kans blijven behouden **MIT** een score van  $\geq 20/50$  op deze test, tenzij je beslist (op de dag van de 2<sup>de</sup> examenkans) om deel te nemen aan de herkansingstest (na het schriftelijk herexamen). Dan komen de nieuwe punten van de PE-test in de plaats te staan van de oude.

Is je score op de **PE-test**  $< 20/50$  is dus de herkansing van deze test ook **VERPLICHT** !

25%

# OPGELET !!

**AFSPRAAK:** het permanent en het werkgeheugen van het rekentoestel moeten **leeg** zijn voor de start van de PE-test en het schriftelijk examen !!!



Bladeren  
(Mijn documenten)



Alles wissen  
**OK !**

# REGEL VAN DRIE

1. **Durf** fouten maken en vragen stellen!
2. **Focus** je eerst op de **grote lijnen** en dan pas op de details !
3. **Maak** elke week **ZELF** een aantal oefeningen die niet in de les zijn opgelost en **help elkaar** !

# Hoofdstuk 1: Functies en 2D-krommen

We zullen 4 soorten krommen bestuderen

1. **Expliciete** krommen (functie) :

$$y = f(x)$$

Cartesisch denken

2. **Impliciete** krommen (relatie) :

$$F(x,y) = 0$$

3. **Parameter**krommen :  $\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases}$

4. **Pool**krommen :  $r = r_1(\theta)$

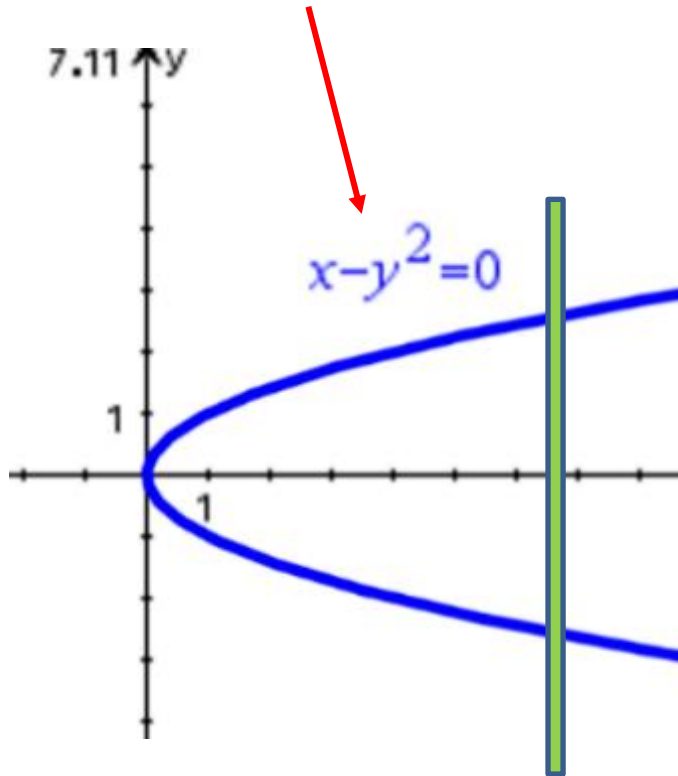


VOLGENDE  
WEEK !

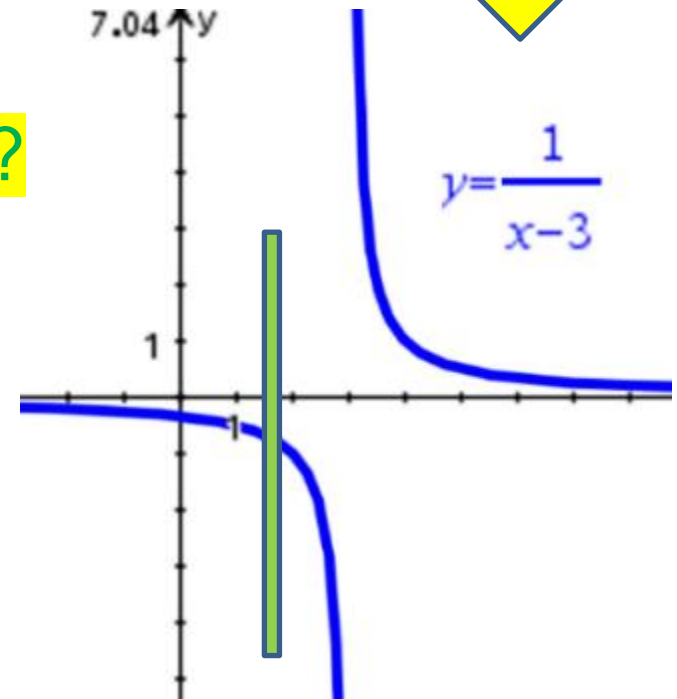


# Verskil tss expliciete en impliciete krommen

- Expliciete cartesische functie :  $y = f(x)$
- **Impliciete** cartesische relatie :  $F(x,y) = 0$



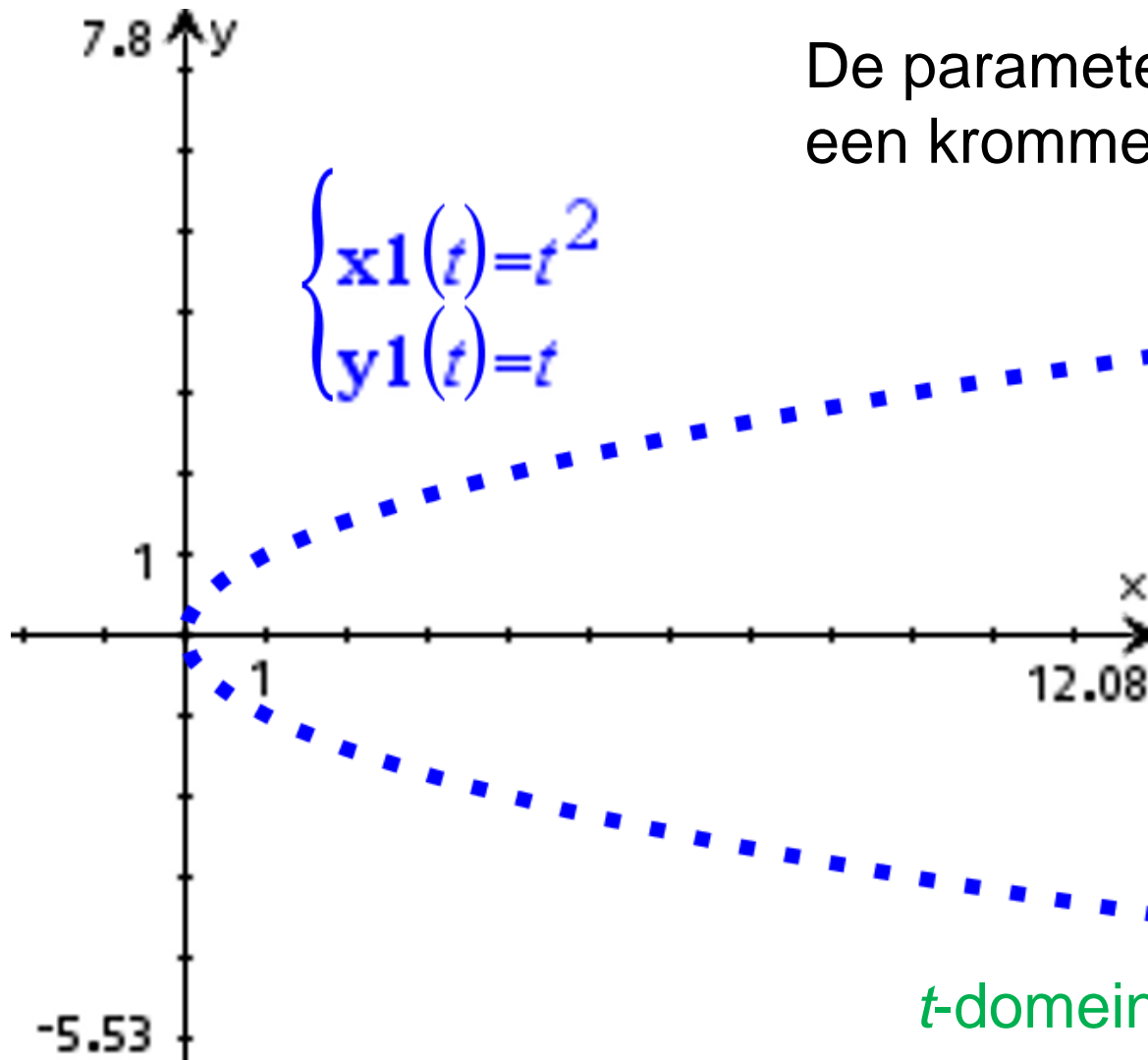
x-domein?



**GRAFISCH:** bij een expliciete kromme zal elke verticale lijn de grafiek in **hoogstens 1** punt snijden!

# Parametervoorstelling = Dynamisch denken!

De parametervoorstelling van een kromme is **NOOIT** uniek !!



“Je kan sneller / trager tekenen of andersom (van boven naar onder)”

*t*-domein m.b.t. 1 periode ?

# Inverteren van functies en krommen

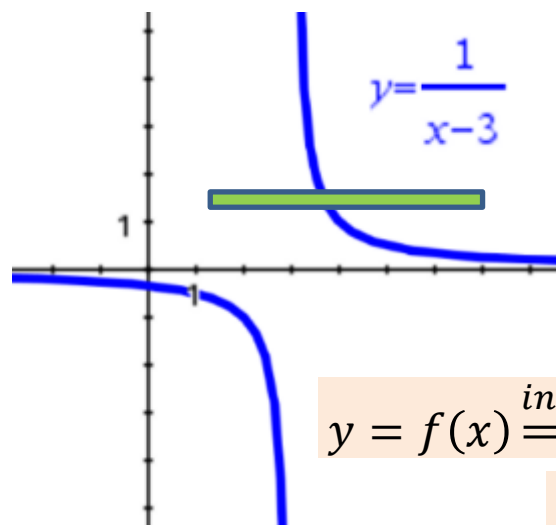
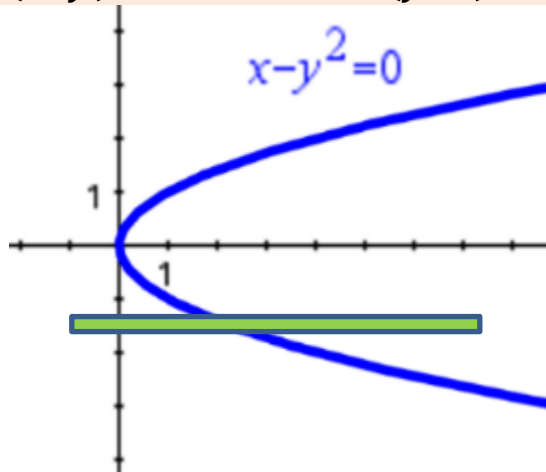
Inverse functies en krommen zijn elkaars **spiegelbeeld** t.o.v. de eerste bissectrice ( $y = x$ ) !

Alleen **injectieve** krommen zijn **uniek** inverteerbaar!



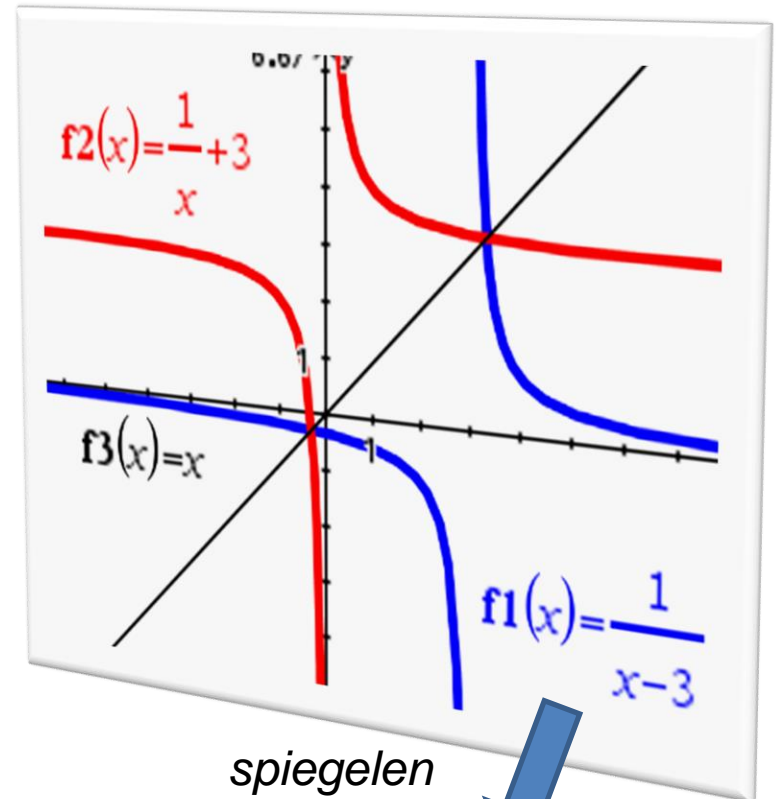
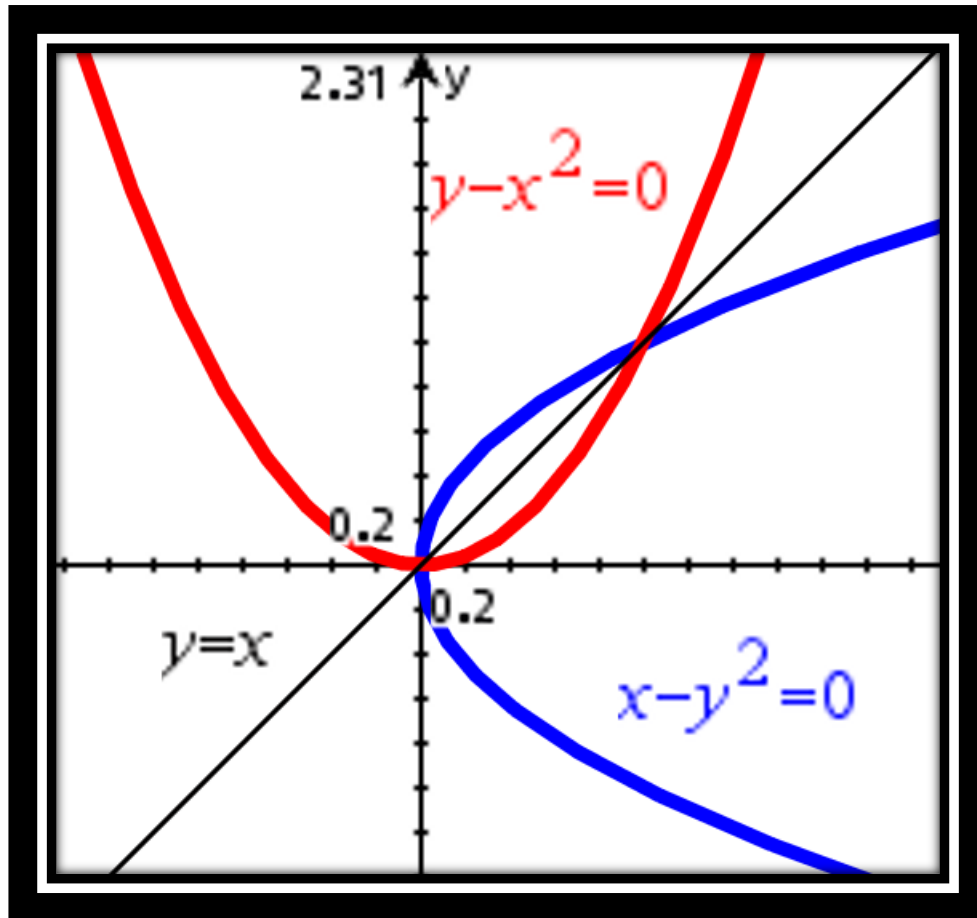
**GRAFISCH:** elke horizontale lijn zal de grafiek in **hoogstens 1 punt** snijden!

$$F(x, y) = 0 \xrightarrow{\text{inverse}} F(y, x) = 0$$



$$y = f(x) \xrightarrow{\text{inverse}} x = f(y) \\ \Rightarrow y = f^{-1}(x)$$

# Inverteren van functies en krommen



spiegelen  
rond  $y = x$

$$x = \frac{1}{y-3} \rightarrow y-3 = \frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{1}{x} + 3$$

# Limieten

Conceptueel heel belangrijk!

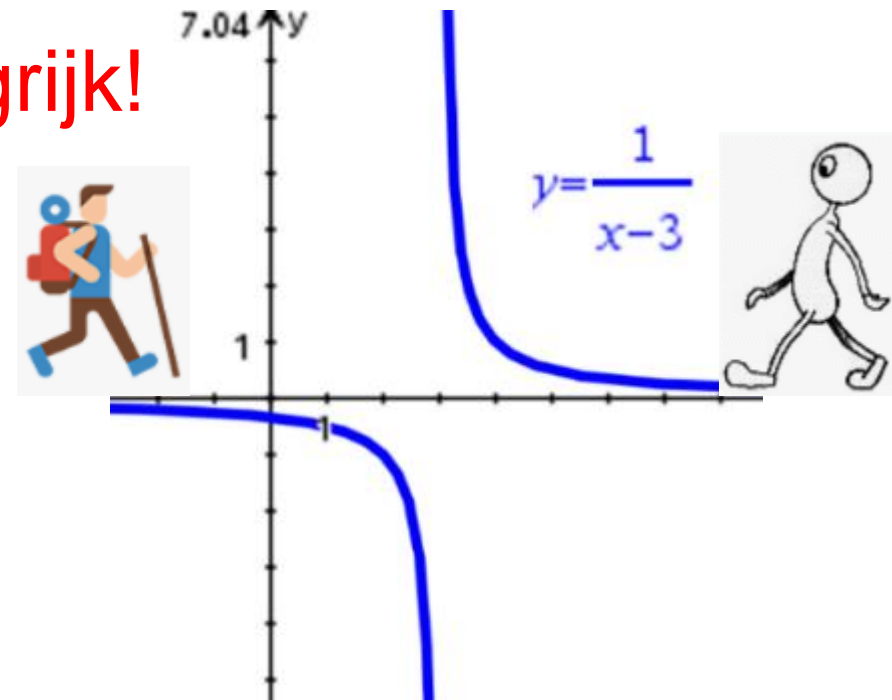
Twee soorten limieten:

- naar +/- oneindig
- naar een getal  $a$



$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  bestaat

$$\Leftrightarrow f(a-) = \lim_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = f(a+)$$

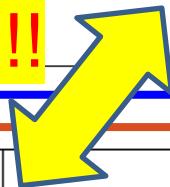


# Belangrijke functieklassen

Veelterm-  
Breuk-  
&  
Wortel-  
functies

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}$	$\operatorname{cotg} x := \frac{\cos x}{\sin x}$
dom	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k \cdot \pi\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi\}$
bld	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Periode	$2\pi$	$2\pi$	$\pi$	$\pi$
Nulpunten	$k \cdot \pi$	$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$k \cdot \pi$	$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Limieten			$\lim_{x \nearrow \pi/2} \operatorname{tg} x = +\infty$ $\lim_{x \searrow \pi/2} \operatorname{tg} x = -\infty$	$\lim_{x \nearrow \pi} \operatorname{cotg} x = -\infty$ $\lim_{x \searrow \pi} \operatorname{cotg} x = +\infty$

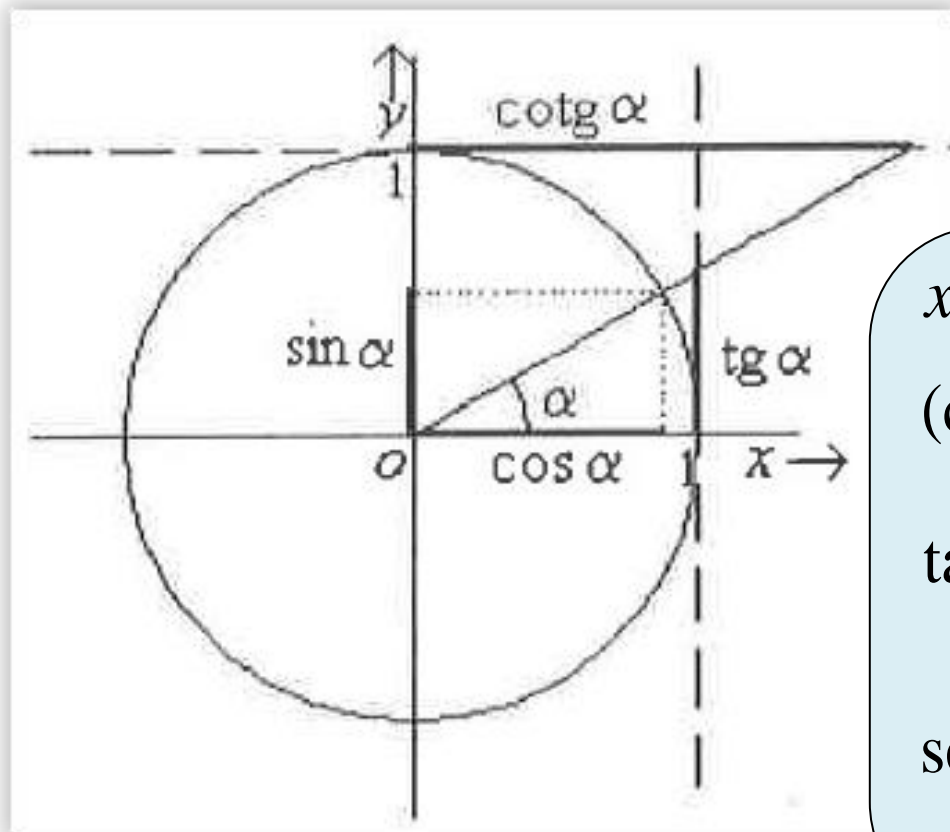
**INVERSE !!**



	$\operatorname{Bgsin} x$	$\operatorname{Bgcos} x$	$\operatorname{Bgtg} x$	$\operatorname{Bgcotg} x$
dom	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
bld	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[0, \pi]$	$] -\pi/2, \pi/2[$	$] 0, \pi[$
Nulpunten	0	1	0	/
Limieten			$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Bgtg} x = -\pi/2$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Bgtg} x = \pi/2$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Bgcotg} x = \pi$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Bgcotg} x = 0$

# Goniometrische getallen

$(\cos \alpha, \sin \alpha)$  ligt op de goniometrische cirkel ( $\alpha$  in radialen)



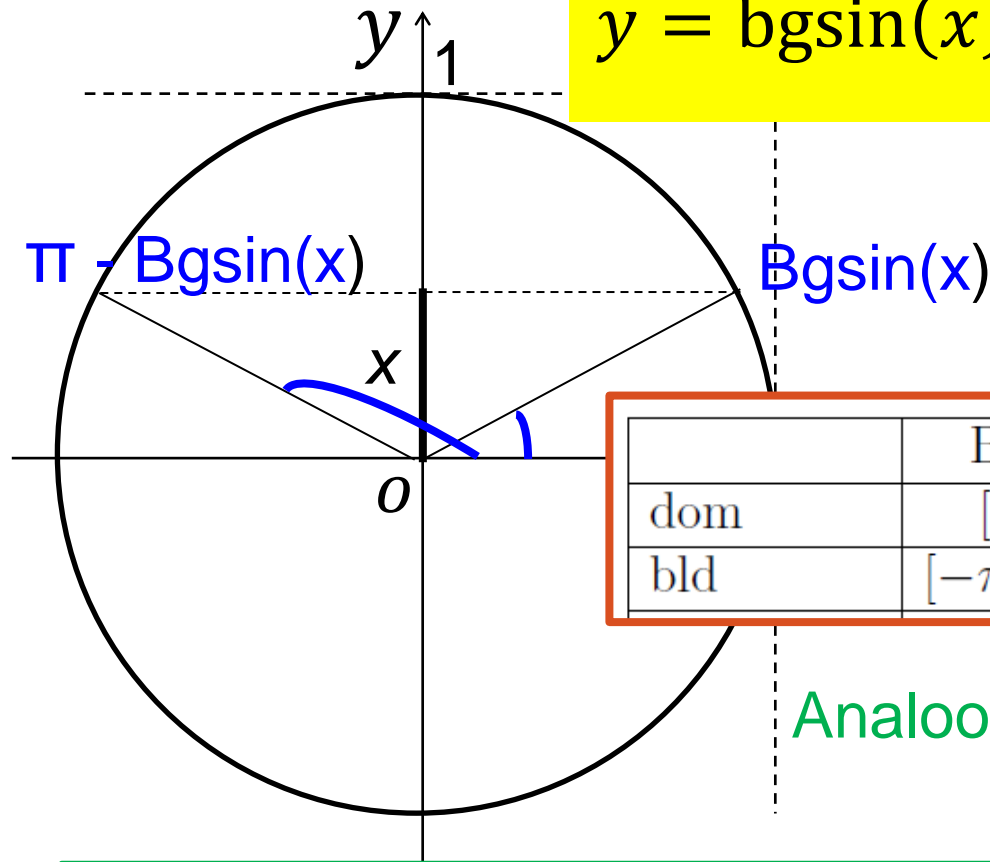
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\text{bgsin}(x) \leftrightarrow \text{Bgsin}(x) \text{ ?!!?}$$



$$y = \text{bgsin}(x) = \begin{cases} \text{Bgsin}(x) + k \cdot 2\pi \\ \pi - \text{Bgsin}(x) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

	$\text{Bgsin } x$	$\text{Bgcoss } x$	$\text{Bgtg } x$
dom	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$
bld	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[0, \pi]$	$] -\pi/2, \pi/2[$

Analoog kan je op de goniometrische cirkel aflezen dat

$$x = \cos y \Leftrightarrow y = \text{bgcos } x \Leftrightarrow y = \pm \text{Bgcoss } x + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = \text{tg } y \Leftrightarrow y = \text{bgtg } x \Leftrightarrow y = \text{Bgtg } x + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



# Belangrijke functieklassen

$a^x$	$a > 1$	$a < 1$
dom $a^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
bld $a^x$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
Nulpunten	/	/
$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x$	0	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x$	$+\infty$	0

**INVERSE !!**

$\log_a(x)$	$a > 1$	$a < 1$
dom $\log_a(x)$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
bld $\log_a(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Nulpunten	1	1
$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x)$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x)$	$+\infty$	$-\infty$



	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\tanh(x)$
dom	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
bld	$\mathbb{R}$	$[1, +\infty[$	$] -1, 1[$
Nptn	0	/	0
Lim	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

# Exponentiële en logaritmische functies

$$y = a^x$$

$(a > 0, a \neq 1)$

INVERSE !!



$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

$(a > 0, a \neq 1)$

GROEIFACTOR

$$f2(x) = (0.5)^x$$

$$f1(x) = 2^x$$

$$f3(x) = x$$

$$f4(x) = \log_2(x)$$

Tot welke macht moet je a verheffen om x uit te komen?

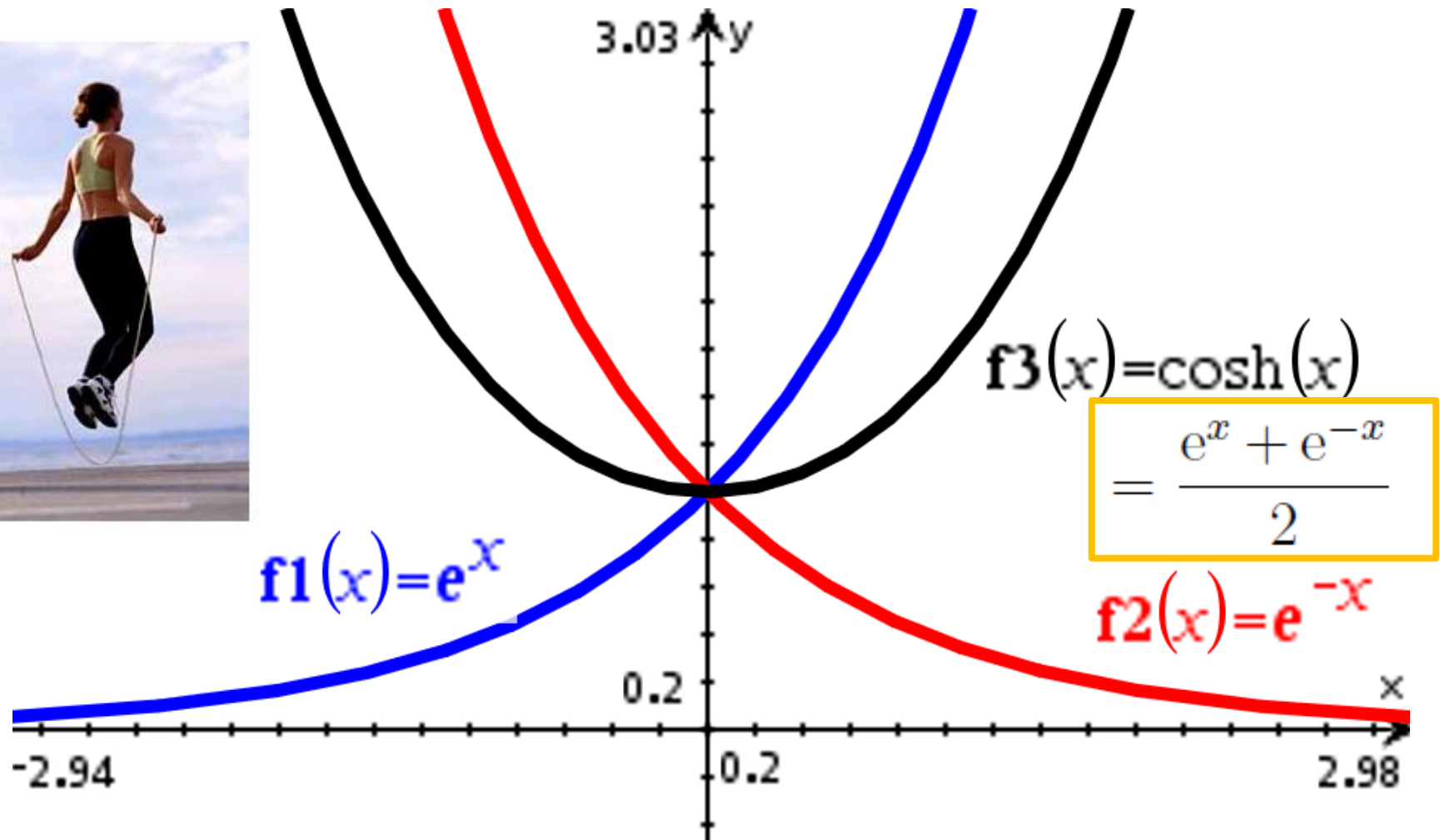
Rekenregels voor machten en logaritmen

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \Leftrightarrow \log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \Leftrightarrow \log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
- $(a^m)^n = a^{n \cdot m} \Leftrightarrow \log_a(u^n) = n \cdot \log_a u$

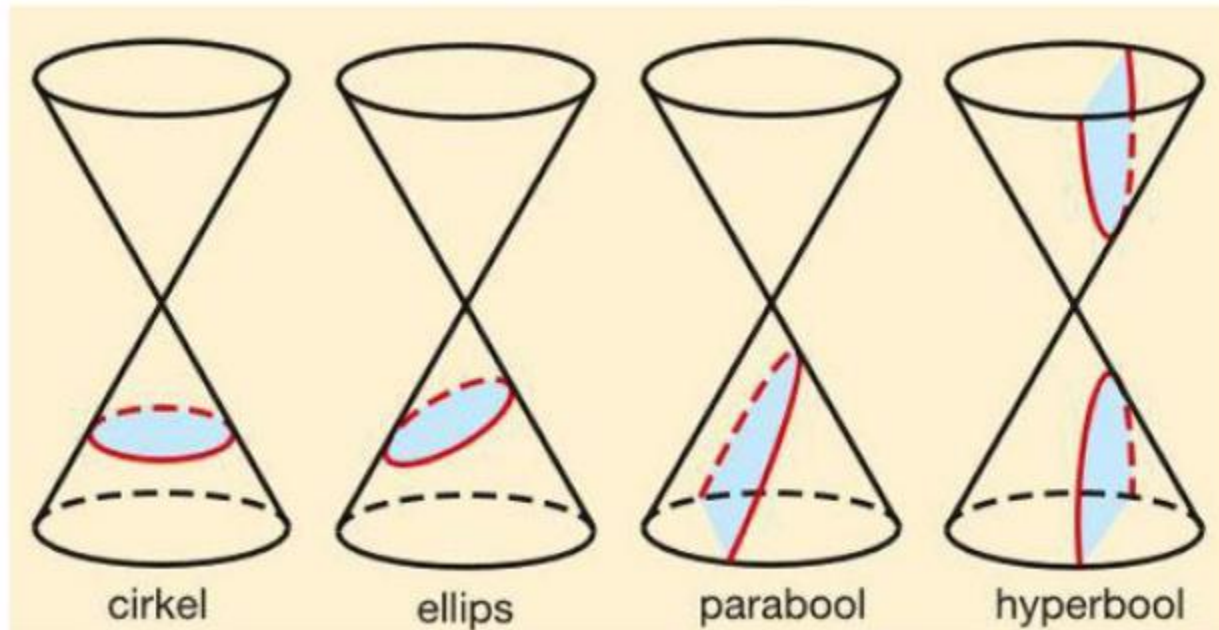
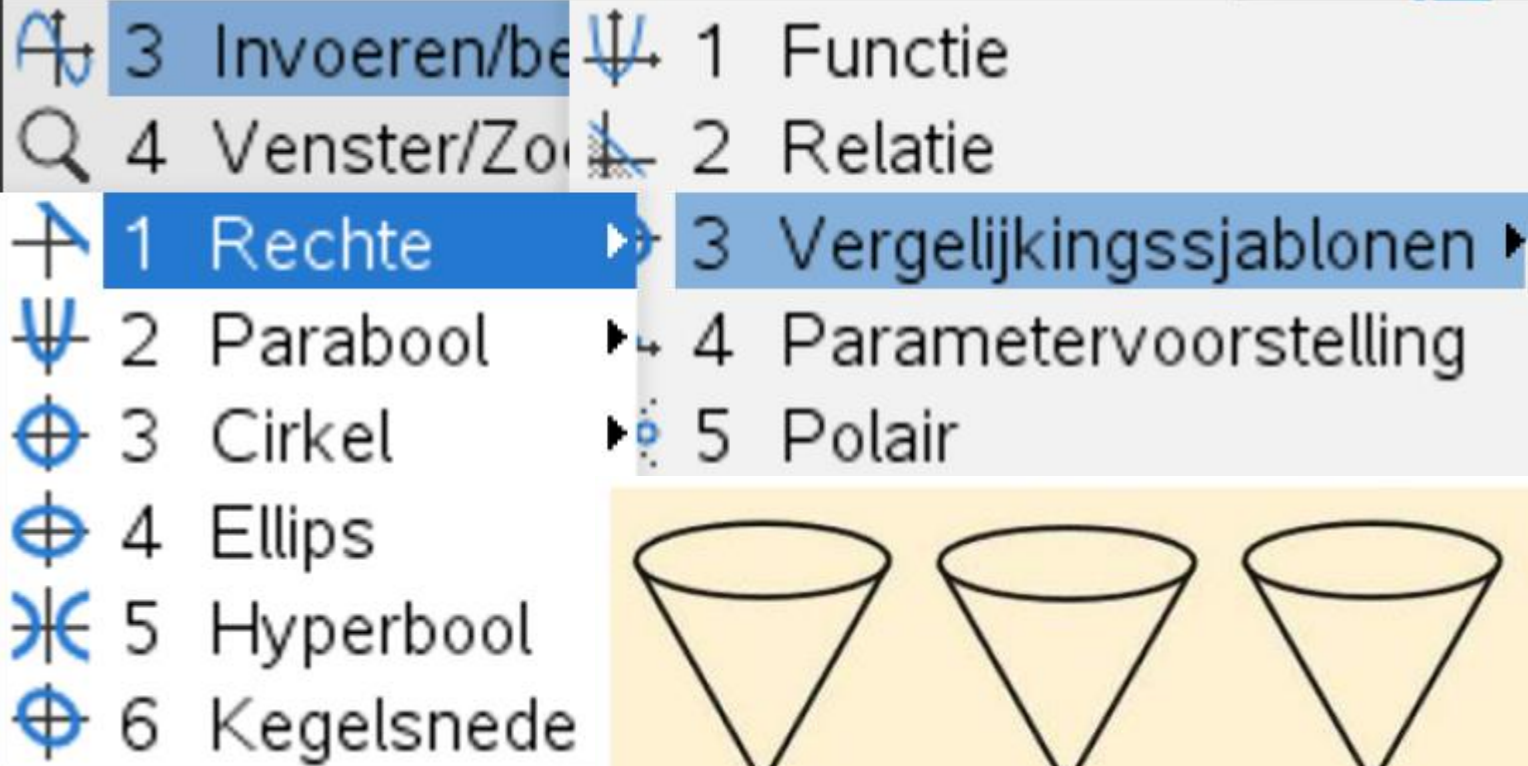
$$a^x = e^{x \cdot \ln a} \quad \text{en} \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

VLEKKELOOS KUNNEN !

# Cosinus hyperbolicus



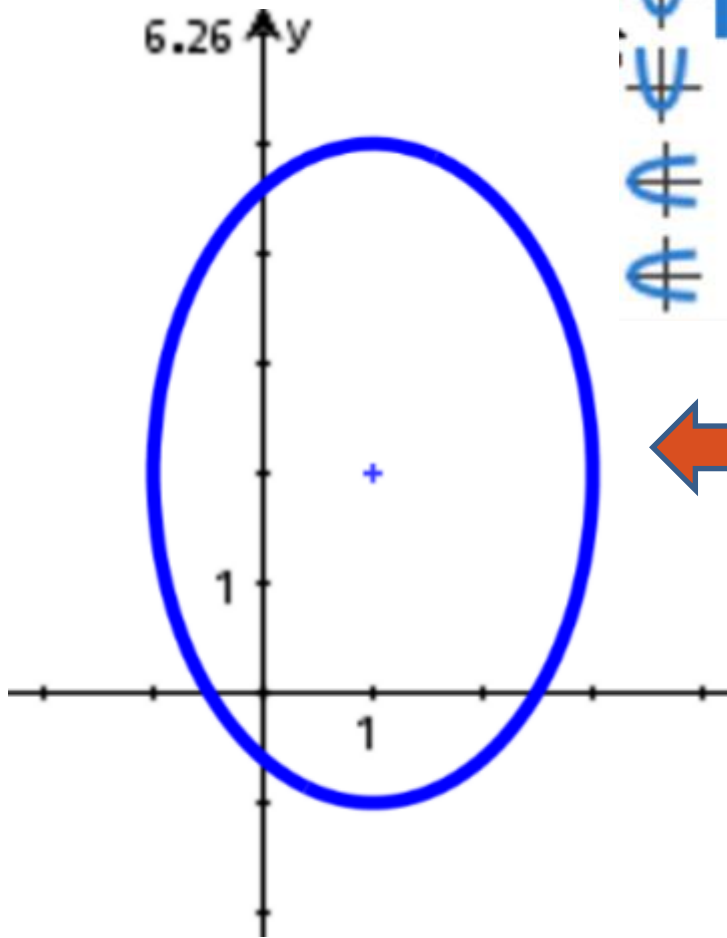
# Kegelsneden



# Kegelsneden

## PARABOOL

- 1 Topformule  $y=a \cdot (x-h)^2+k$
- 2 Standaard vorm  $y=a \cdot x^2+b \cdot x+c$
- 3 Topformule  $x=a \cdot (y-k)^2+h$
- 4 Standaard vorm  $x=a \cdot y^2+b \cdot y+c$



← ELLIPS

Parametervergelijking?

Cartesische vergelijking?

# Kegelsneden

## HYPERBOOL

✳ 1 Oost-west  $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

✳ 2 Zuid-noord  $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

Parametervergelijking ?

$$!!! (\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2 = 1$$

$$!!! \left(\frac{1}{\cos(t)}\right)^2 - (\tan(t))^2 = 1$$

## KEGELSNEDE

1 Algemeen

$$a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$$

TYPE ?? STEL

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

- (1)  $\det(A) = a \cdot c - \frac{b^2}{4} = 0$ : de kegelsnede is van het parabolische type.
- (2)  $\det(A) > 0$ : de kegelsnede is van het elliptische type.
- (3)  $\det(A) < 0$ : de kegelsnede is van het hyperbolische type.

# NU ZELF VERDER AAN DE SLAG ! TO DO...

→ Hoofdstuk 1 verder nakijken in de theoriecursus.

→ Ingesproken lesvideo over “functieklassen”

→ Formularium (Toledo) afdrukken om mee te brengen  
naar de werksitzingen !

→ **TOLEDO: 3 pdf-documenten**

- Voorbeeld-oefeningen DOMEIN
- Voorbeeld-oefeningen van IMPLICIET naar EXPLICIET
- Voorbeeld-oefeningen INVERSE FUNCTIE

**KIJK DEZE NA TEGEN EERSTE WERKSITTING !!**

→ ‘SPELEN’ met het rekentoestel.

→ Ingesproken introductievideo om aan de slag te gaan