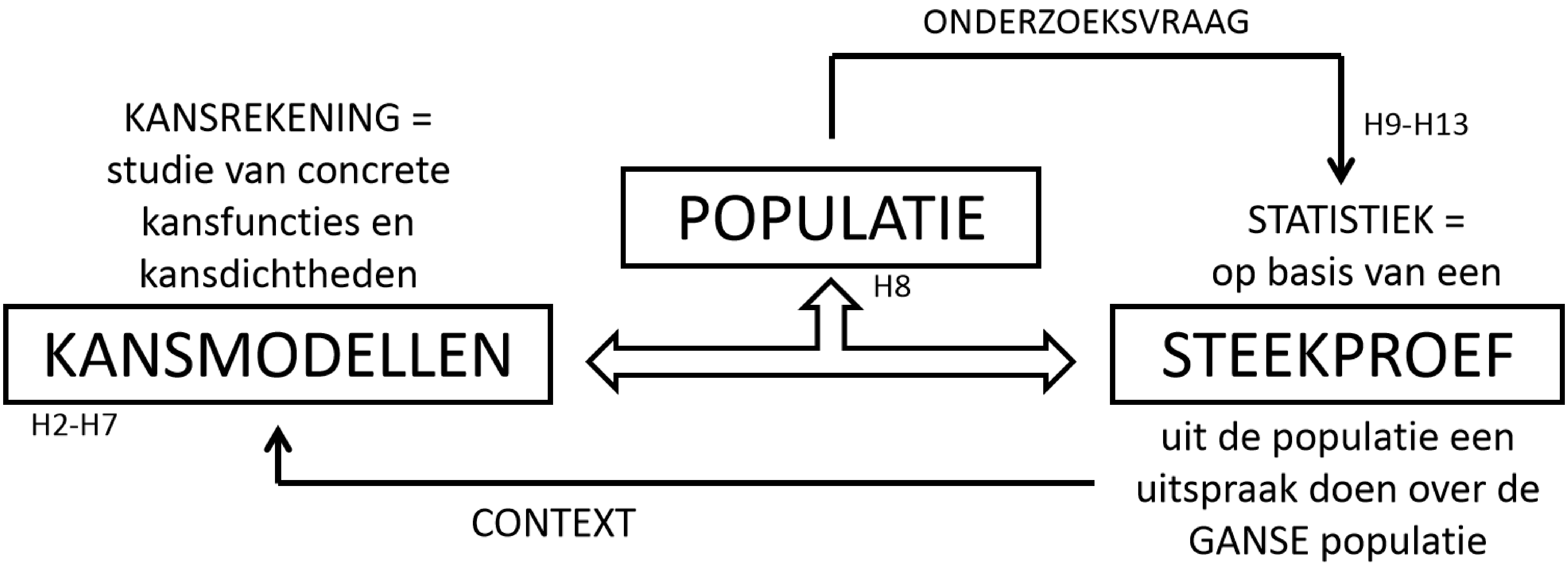
Statistiek: les 2

Discrete en continue kansverdelingen, intro normale verdeling

Sabine Bertho sabine.bertho@kuleuven.be
Giovanni Vanroelen giovanni.vanroelen@uhasselt.be

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

Even herhalen...



BEGINSELEN VAN KANSREKENEN

BASISREGELS:

- Regel van Laplace: $P(A) = \frac{\#\text{ gunstige gevallen}}{\#\text{ mogelijke gevallen}}$
- Complementregel: $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Somregel voor 2 gebeurtenissen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Productregel: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- Totale waarschijnlijkheid: $P(B) = \sum_i P(B \cap A_i)$ met alle A_i onderling disjunct en $\sum_i A_i = U$
- Regel van Bayes: $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$

Les 1

KANSREKENING = studie van concrete kansfuncties en kansdichtheden

KANSMODELLEN

H2-H7

POPULATIE

H8

STATISTIEK = op basis van een

STEEKPROEF

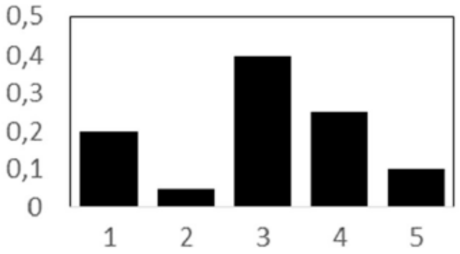
uit de populatie een uitspraak doen over de GANSE populatie

CONTEXT

Ev

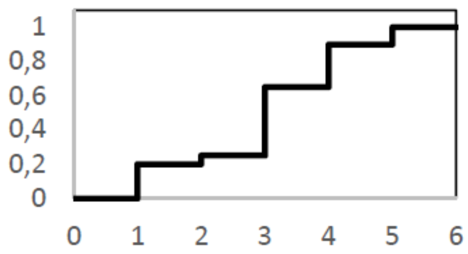
Discrete kansvariabele vs. continue kansvariabele

kansfunctie: $p_i = P(X = x_i)$



$$\sum_i p_i = 1$$

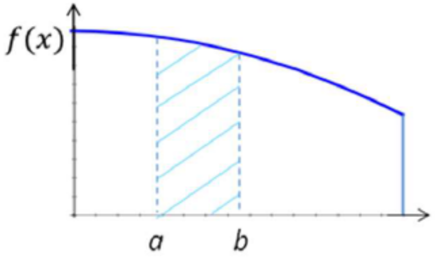
cumulatieve verdelingsfunctie $F_X(x) = P(X \leq x)$



$$\mu_X = E(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$$

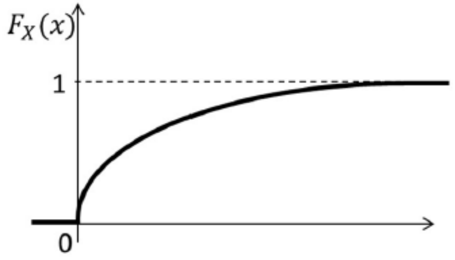
$$\sigma_X^2 = E((X - \mu_X)^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

kansdichtheid $f(x)$ met $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

cumulatieve verdelingsfunctie $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$



$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)\, dx = E(X^2) - (E(X))^2$$

Les 2

KANSREKENING = studie van concrete kansfuncties en kansdichtheden

KANSMODELLEN

H2-H7

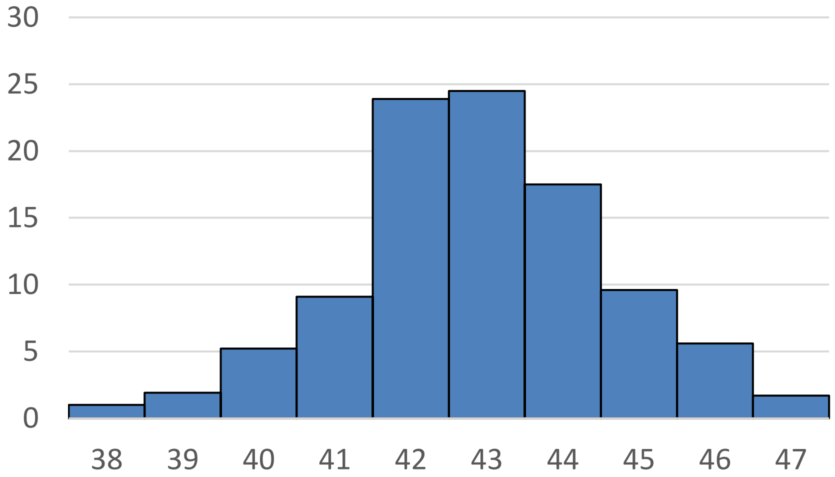
CONTEXT

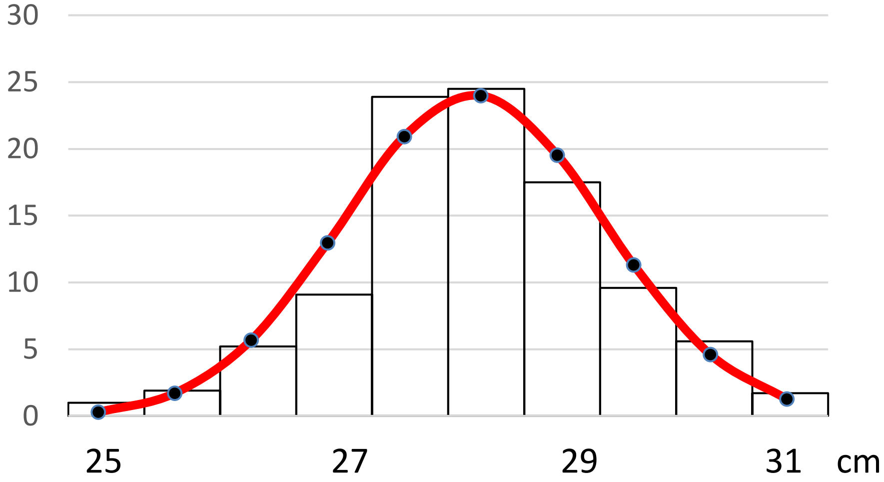
uit de populatie een uitspraak doen over de GANSE populatie

Soorten kansvariabelen

Schoenmaat vs. Grootte van de voet

Maat 38: 1,0%
Maat 39: 1,9%
Maat 40: 5,2%
Maat 41: 9,1%
Maat 42: 23,9%
Maat 43: 24,5%
Maat 44: 17,5%
Maat 45: 9,6%
Maat 46: 5,6%
Maat 47: 1,7%





https://www.persbericht.nu/schoenmaat-en-maatverdeling-van-de-nederlandse-man/

Soorten kansvariabelen

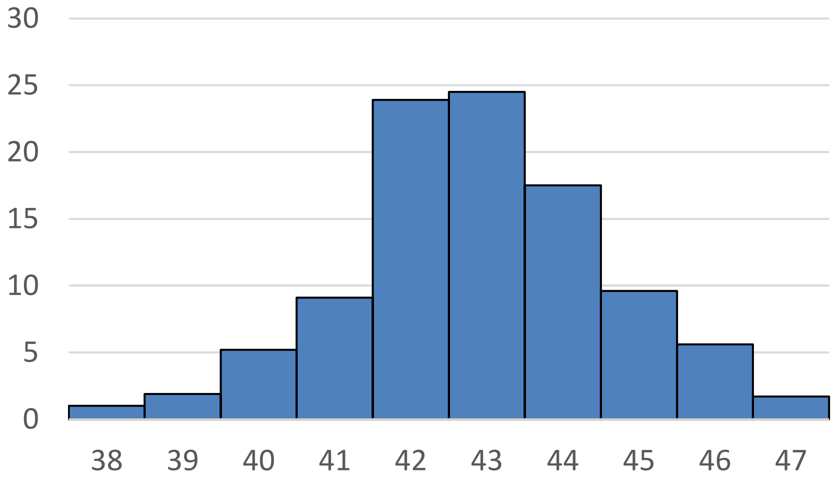
Schoenmaat

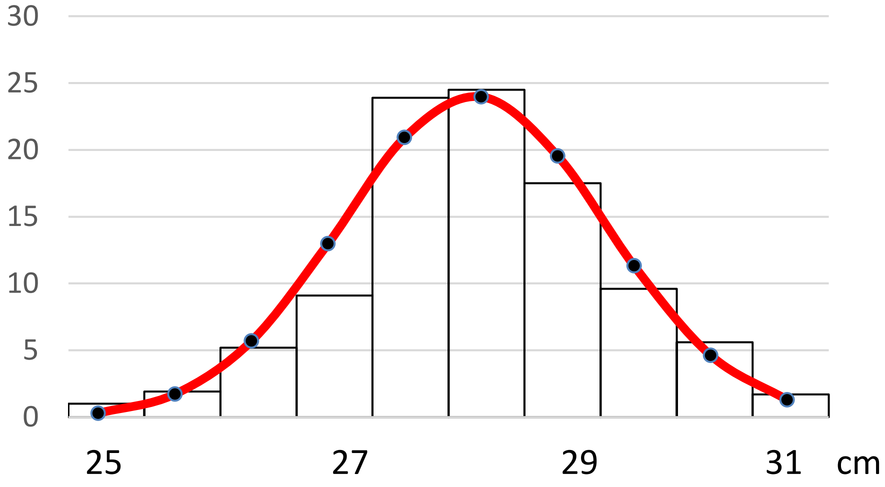
DISCRETE KANSVARIABELE

vs.

Grootte van de voet

CONTINUE KANSVARIABELE





https://www.persbericht.nu/schoenmaat-en-maatverdeling-van-de-nederlandse-man/

Soorten kansverdelingen

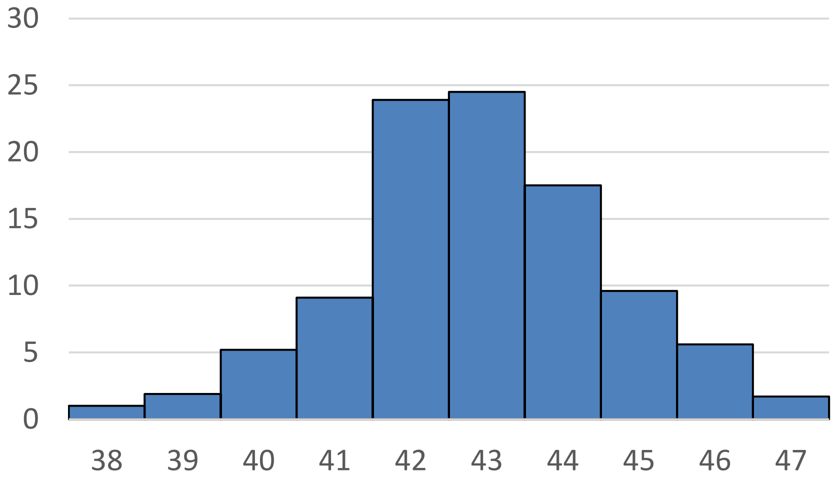
Schoenmaat

DISCRETE KANSVARIABELE

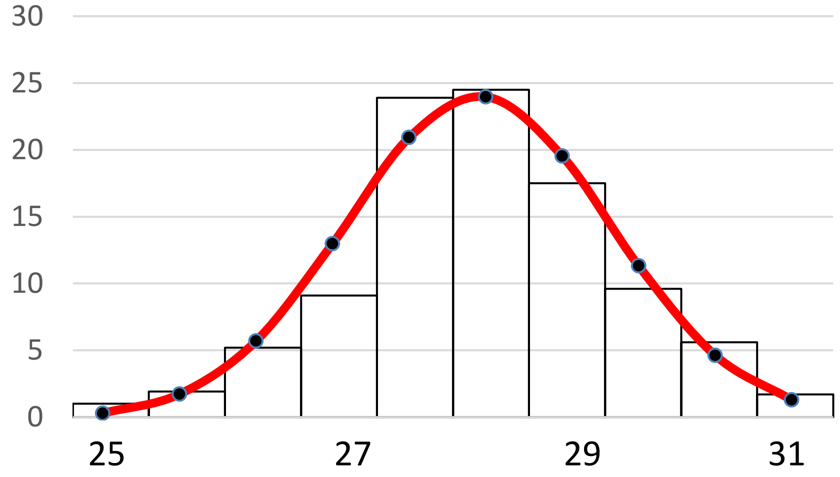
vs.

Grootte van de voet

CONTINUE KANSVARIABELE



DISCRETE KANSVERDELING



CONTINUE KANSVERDELING

U kunt niet langer stemmen

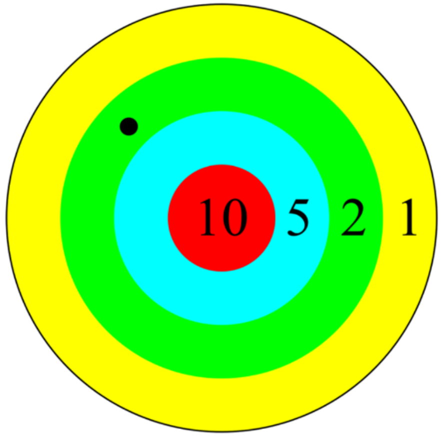
Over welk soort kansvariabele gaat het?

De tijd waarbinnen je 5 km loopt	1 ✓88% B	Continu
Het aantal bladzijden dat je nog moet lezen voordat je boek uit is	2 ✓91% F	Discreet
De buitentemperatuur	3 ✓78% A	Continu
Je eindscore op 20 voor dit vak	4 ✓84% C	Discreet
De kleur van je nieuwe auto	5 ✓69% E	Discreet
De afstand tot aan het eerstvolgende tankstation	6 ✓78% D	Continu

Discrete kansvariabele

- Experiment: gooien met 1 dobbelsteen
- Kansvariabele X = het totaal aantal ogen als 1 dobbelsteen wordt geworpen
- Mogelijke waarden van $X = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Gebeurtenis: bvb $X = 3$ (het totaal aantal ogen als 1 dobbelsteen wordt geworpen = 3)
- Kans op een gebeurtenis: $P(X = 3) = 1/6$

Continue kansvariabele



- Experiment: dartspel spelen
- Kansvariabele X = de afstand van de dartpijl tot het centrum van het dartbord
- Mogelijke waarden van X: $x \in [\, 0 \text{ cm} \,, 22.5 \text{ cm}]$
- Gebeurtenis: bvb $X = 7$ (de afstand van de dartpijl tot het centrum van het dartbord = 7 cm)
- Kans op een gebeurtenis: $P(X = 7) = 0$ (!)

Discrete kansvariabele: kansen weergeven

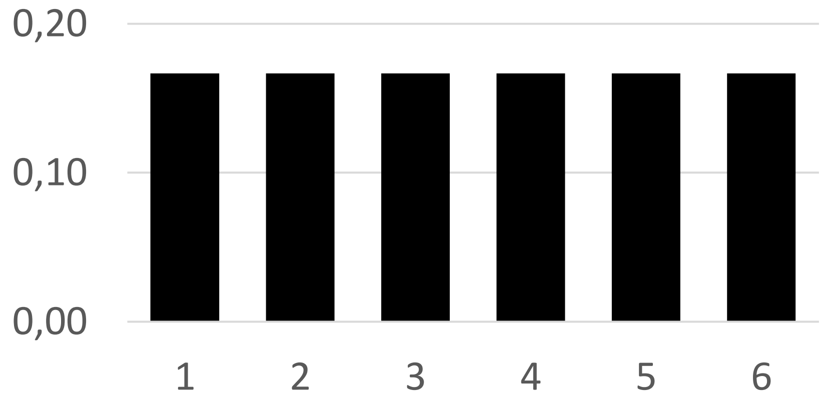
De kansfunctie van een discrete kansvariabele X kent aan elke mogelijke uitkomst van X een kans toe.

- Experiment: gooien met 1 dobbelsteen
- Kansvariabele X = het totaal aantal ogen

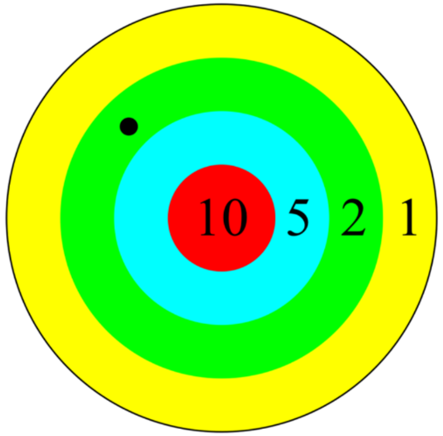
Kansfunctie:

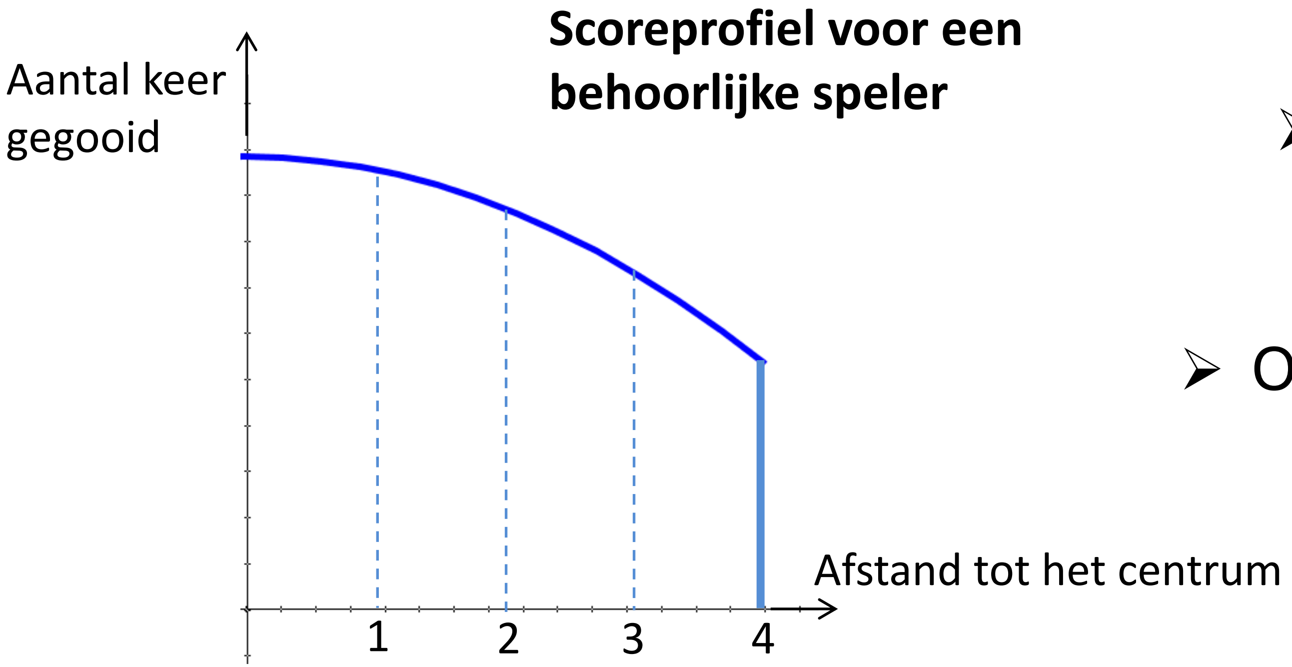
- $P(X = 1) = 1/6$
- $P(X = 2) = 1/6$
- $P(X = 3) = 1/6$
- $P(X = 4) = 1/6$
- $P(X = 5) = 1/6$
- $P(X = 6) = 1/6$

Kanshistogram = weergave van de kansfunctie



Continue kansvariabele: kansen weergeven



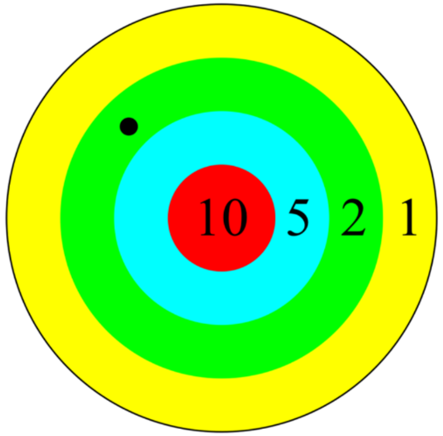


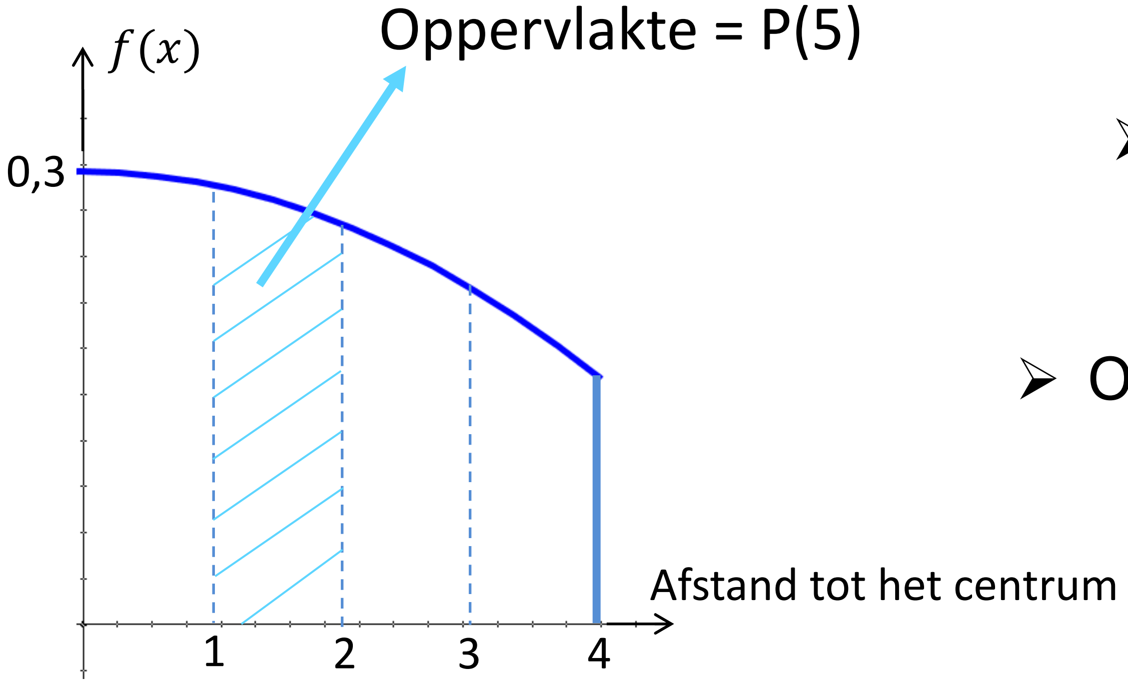
Dichtheidsfunctie $f(x)$

- Tegenhanger van de kansfunctie
- Voorwaarden:
  - $f(x) \geq 0$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- Oppervlakte als kansmaat:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Continue kansvariabele: kansen weergeven





Dichtheidsfunctie $f(x)$

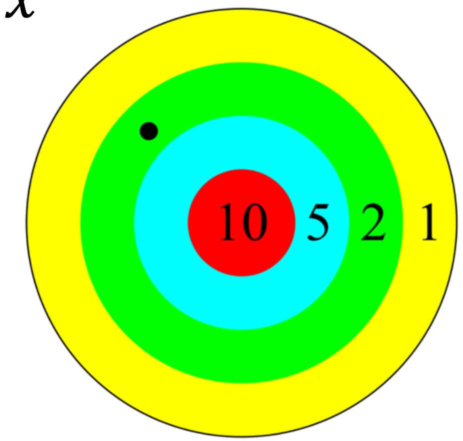
- Tegenhanger van de kansfunctie
- Voorwaarden:
  - $f(x) \geq 0$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- Oppervlakte als kansmaat:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Continue kansvariabele: dichtheidsfunctie

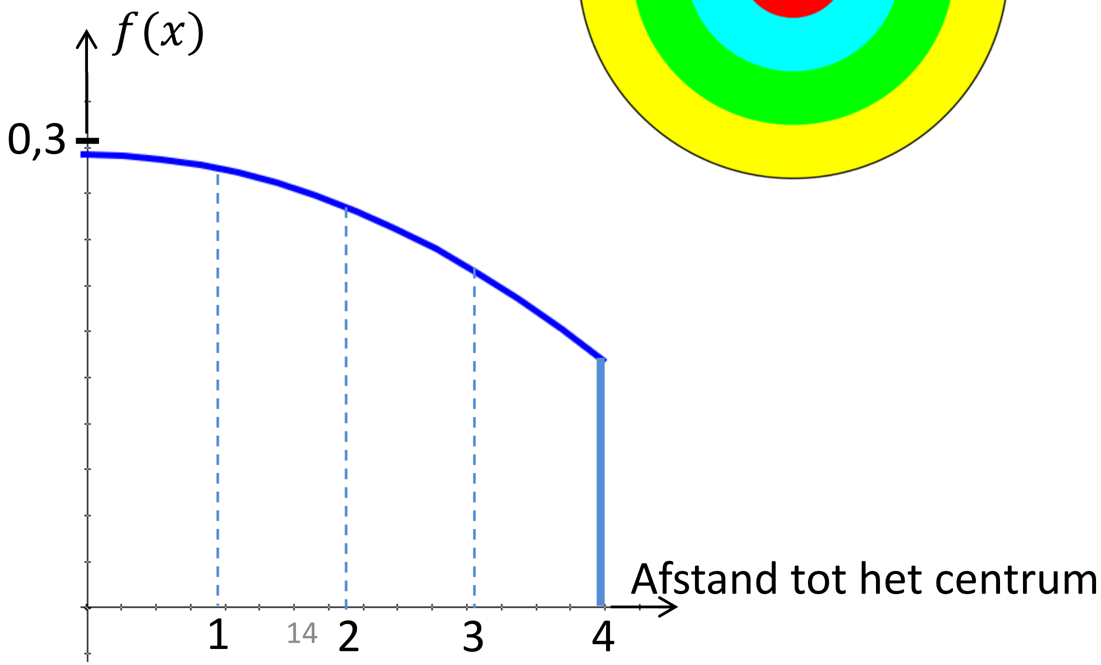
De dichtheidsfunctie voor een behoorlijk goede dartspeler wordt gegeven door:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{150} + \dfrac{257}{900} & \text{als} \quad 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{als} \quad x < 0 \ \text{en} \ 4 < x \end{cases}$$



a) Ga na dat de totale kans = 1

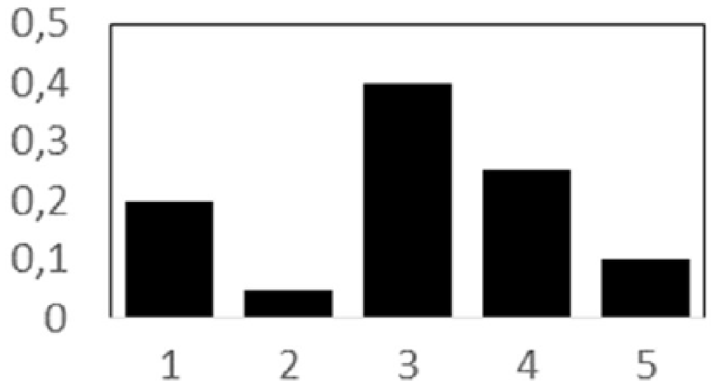
b) Bereken de kans dat deze speler 5 punten scoort bij een worp



Discrete vs. continue kansvariabele: formularium

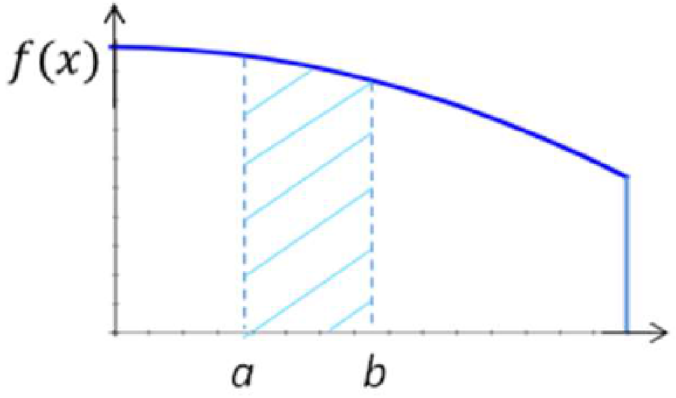
Discrete kansvariabele vs. continue kansvariabele

kansfunctie: $p_i = P(X = x_i)$



$$\sum_i p_i = 1$$

kansdichtheid $f(x)$ met $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

UHASSELT KU LEUVEN

U kunt niet langer stemmen

Welke uitspraken over de cumulatieve verdelingsfunctie zijn zeker waar?

1	Alle functiewaarden zijn groter dan nul.	56%	14
2	Alle functiewaarden zijn kleiner dan 1.	16%	4
3	De functie begint bij nul.	68%	17 ✓
4	De functie eindigt bij nul.	0%	0
5	De functie begint bij 1.	8%	2
6	De functie eindigt bij 1.	56%	14 ✓
7	Het is een stijgende functie.	40%	10 ✓
8	Het is een strikt stijgende functie.	36%	9
9	Het is een dalende functie.	0%	0
10	Het is een strikt dalende functie.	0%	0
11	De functie kan stijgen en dalen.	32%	8

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x).$$

wooclap

100 %

4% juist

25 / 47

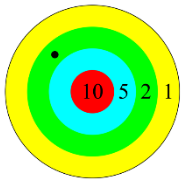
De cumulatieve verdelingsfunctie

De **cumulatieve verdelingsfunctie** *van* X *is gedefinieerd als*

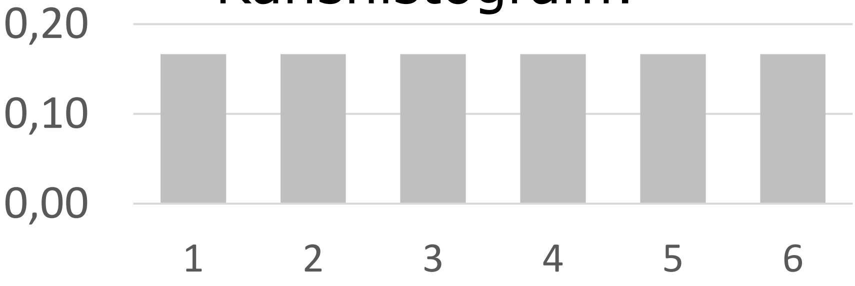
DISCRETE KANSVARIABELE

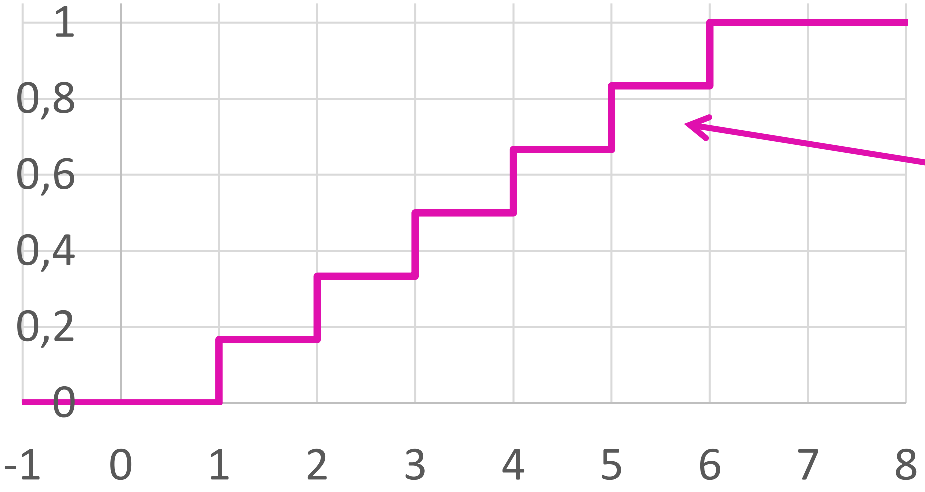
$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x).$$

CONTINUE KANSVARIABELE



Kanshistogram:





Cumulatieve verdelingsfunctie

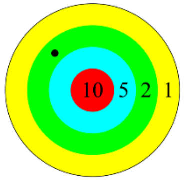
De cumulatieve verdelingsfunctie

De **cumulatieve verdelingsfunctie** *van* X *is gedefinieerd als*

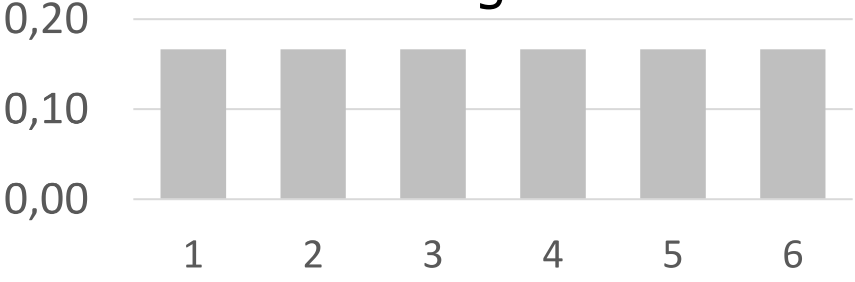
$$\boxed{F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x).}$$

DISCRETE KANSVARIABELE

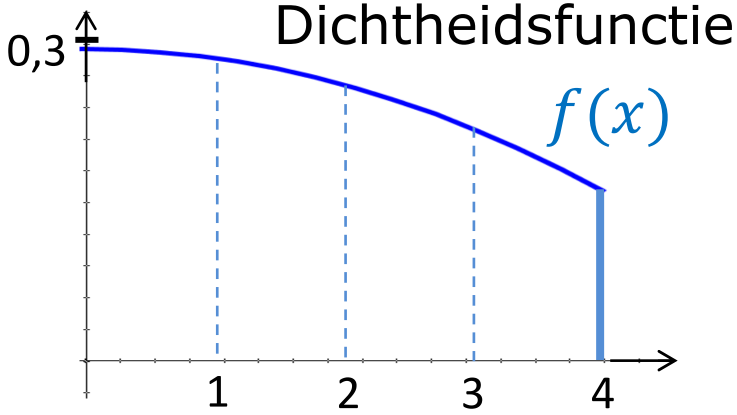
CONTINUE KANSVARIABELE

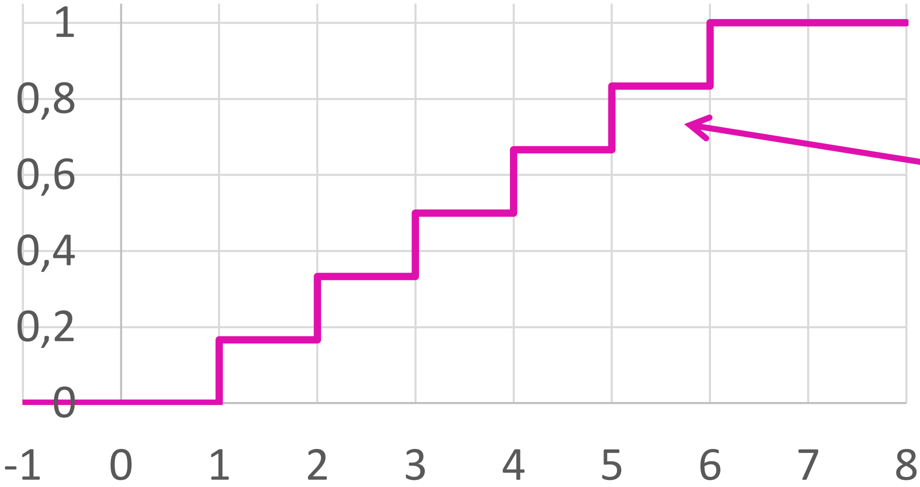


Kanshistogram:

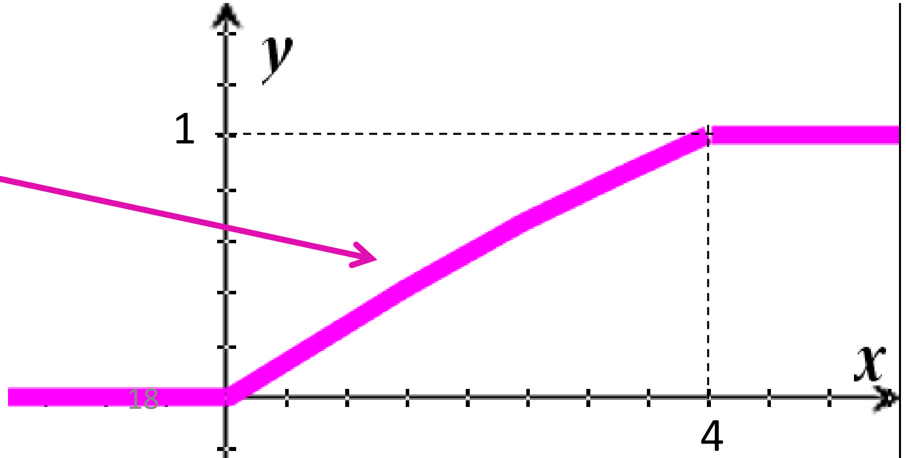


Dichtheidsfunctie





Cumulatieve verdelingsfunctie



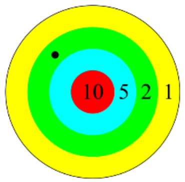
De cumulatieve verdelingsfunctie

De **cumulatieve verdelingsfunctie** *van* X *is gedefinieerd als*

DISCRETE KANSVARIABELE

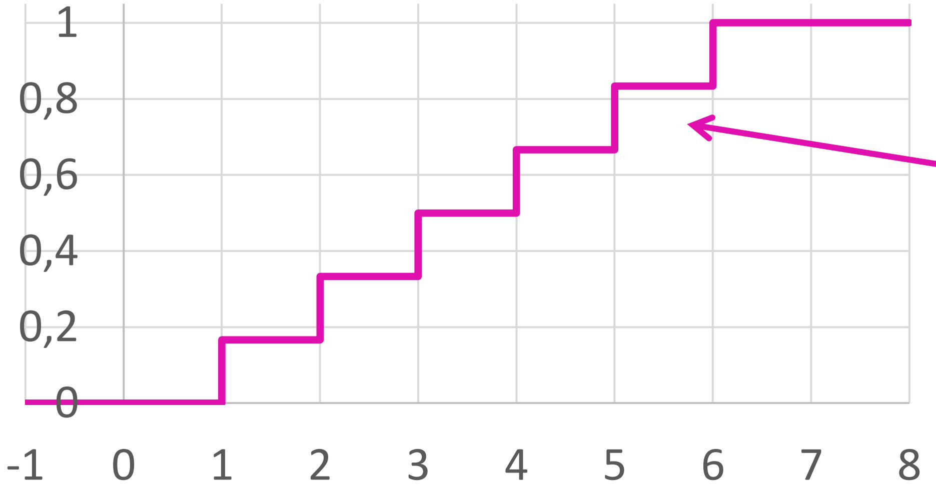
$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x).$$

CONTINUE KANSVARIABELE

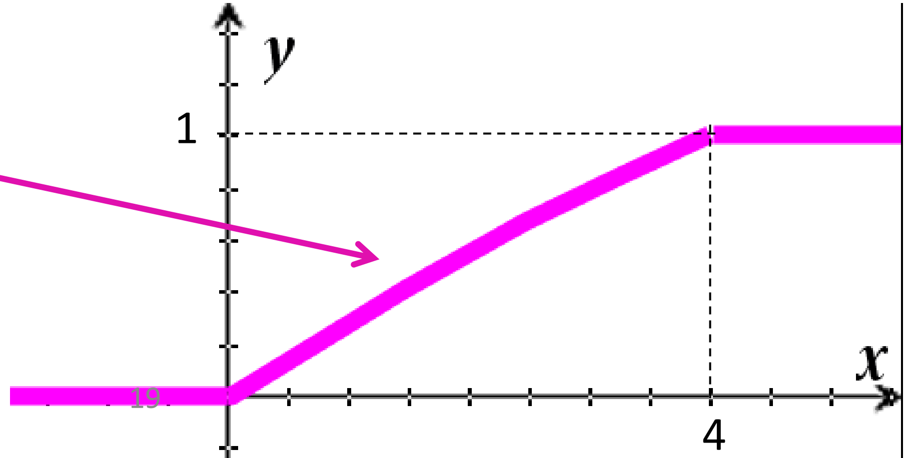


$$F_X(x) = \sum p_i$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$



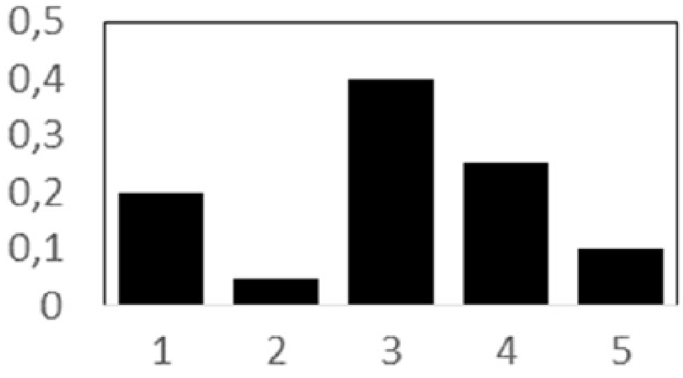
Cumulatieve verdelingsfunctie



Discrete vs. continue kansvariabele: formularium

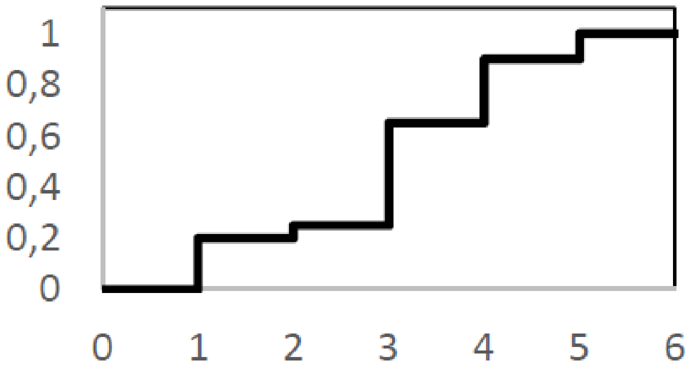
Discrete kansvariabele vs. continue kansvariabele

kansfunctie: $p_i = P(X = x_i)$

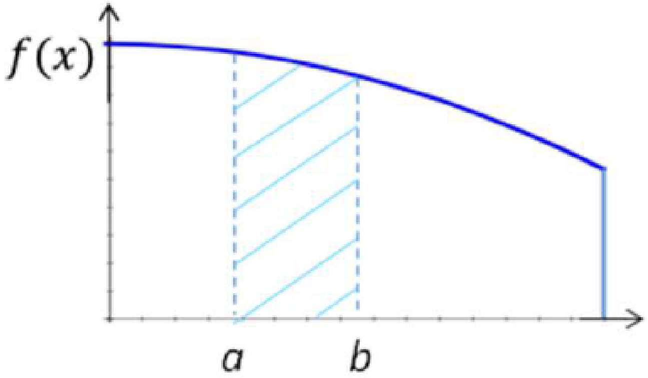


$$\sum_i p_i = 1$$

cumulatieve verdelingsfunctie $F_X(x) = P(X \leq x)$

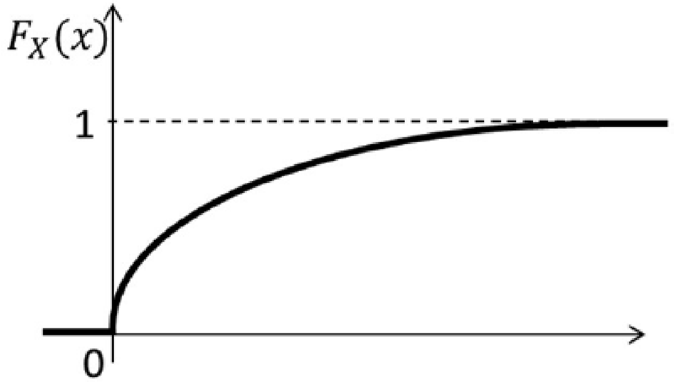


kansdichtheid $f(x)$ met $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

cumulatieve verdelingsfunctie $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$



Verwachtingswaarde of gemiddelde

De verwachting(swaarde) E(X) of μ_X is het gemiddelde van alle uitkomsten voor X wanneer je het experiment héél dikwijls zou uitvoeren.

Voorbeeld: gooien met een eerlijke dobbelsteen

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$$

Ofwel:

$$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

Algemeen: $\mu_X = \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$

Verwachtingswaarde of gemiddelde

De verwachting(swaarde) E(X) of μ_X is het gemiddelde v uitkomsten voor X wanneer je het experiment héél dikwi uitvoeren.

Voorbeeld: schoenen $$\mu_X = \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

Maat 38: 1,0%
Maat 39: 1,9%
Maat 40: 5,2%
Maat 41: 9,1%
Maat 42: 23,9%
Maat 43: 24,5%
Maat 44: 17,5%
Maat 45: 9,6%
Maat 46: 5,6%
Maat 47: 1,7%

$$\mathrm{E}(X) = 38 \cdot 0{,}01 + 39 \cdot 0{,}019 + 40 \cdot 0{,}052 + 41 \cdot 0{,}091$$
$$+ 42 \cdot 0{,}239 + 43 \cdot 0{,}245 + 44 \cdot 0{,}175 + 45 \cdot 0{,}096$$
$$+46 \cdot 0{,}056 + 47 \cdot 0{,}017 = 42{,}9$$

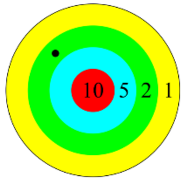
Gemiddelde schoenmaat

Verwachtingswaarde of gemiddelde

DISCRETE KANSVARIABELE

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

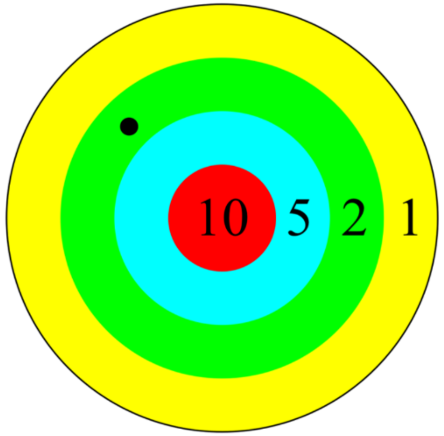
CONTINUE KANSVARIABELE



$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

Voorbeeld: dartbord

De dichtheidsfunctie voor een behoorlijk goede dartspeler wordt gegeven door: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{150} + \dfrac{257}{900} & \text{als} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{als} \quad x < 0 \text{ en } 4 < x \end{cases}$

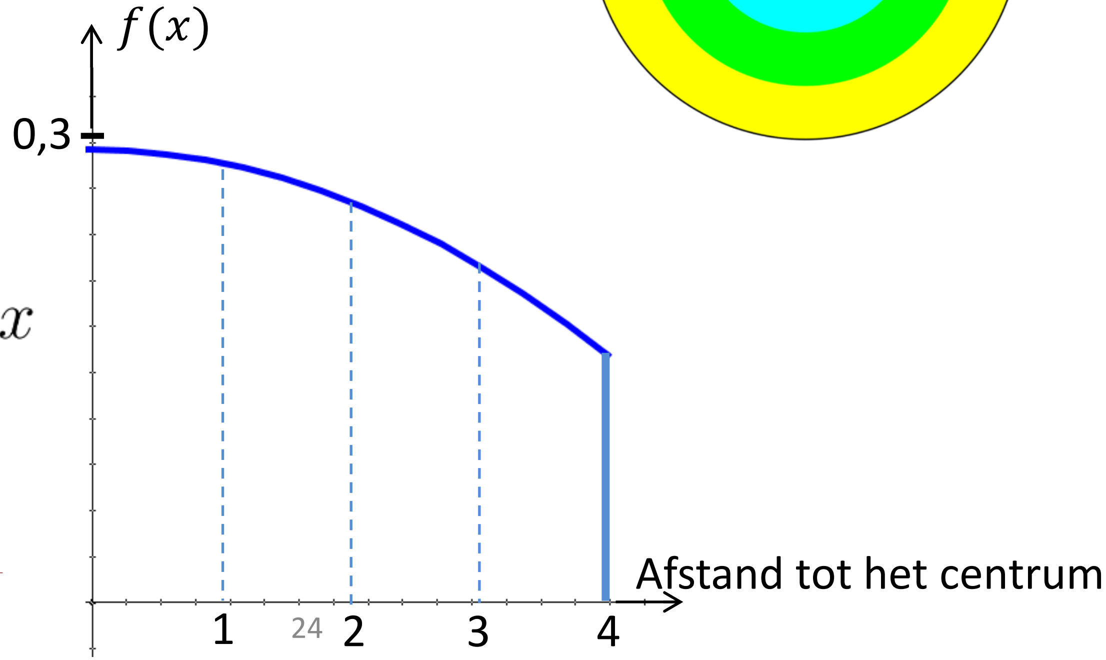


c) Bereken de gemiddelde afstand tot het centrum van een worp

d) Bereken de gemiddelde score voor deze dartspeler

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$



Variantie en standaardafwijking (spreiding)

Voorbeeld: gooien met een eerlijke dobbelsteen

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i - \mu$
1	1/6	−2.5
2	1/6	−1.5
3	1/6	−0.5
4	1/6	0.5
5	1/6	1.5
6	1/6	2.5
		$\mathrm{E}(X - \mu) = 0$

x_i	$P(X = x_i)$	$(x_i - \mu)^2$
1	1/6	6.25
2	1/6	2.25
3	1/6	0.25
4	1/6	0.25
5	1/6	2.25
6	1/6	6.25
		$\mathrm{E}[(X - \mu)^2] = 35/12 = 2.91667$

$$\boxed{6{,}25 \cdot \frac{1}{6} + 2{,}25 \cdot \frac{1}{6} + 0{,}25 \cdot \frac{1}{6} + 0{,}25 \cdot \frac{1}{6} + 2{,}25 \cdot \frac{1}{6} + 6{,}25 \cdot \frac{1}{6}}$$

Variantie en standaardafwijking (spreiding)

Definitie 3.5 *De* **variantie** *(notatie σ_X^2 of $\mathrm{Var}(X)$) van een discrete kansvariabele X is*

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}((X-\mu_X)^2)\\ &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2\end{aligned}$$

Voorbeeld: gooien met een eerlijke dobbelsteen 

$$\mathrm{E}(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5$$

$$\mathrm{E}(X^2) = 1^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\cdot\frac{1}{6} + 3^2\cdot\frac{1}{6} + 4^2\cdot\frac{1}{6} + 5^2\cdot\frac{1}{6} + 6^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{91}{6} - 3{,}5^2 = 2{,}91667$$

UHASSELT KU LEUVEN

Variantie en standaardafwijking (spreiding)

Definitie 3.5 *De* **variantie** *(notatie σ_X^2 of $\mathrm{Var}(X)$) van een discrete kansvariabele X is*

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}((X-\mu_X)^2) \\ &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2\end{aligned}$$

Een andere maat voor de spreiding van X is de **standaardafwijking** σ_X (de vierkantswortel van de variantie).

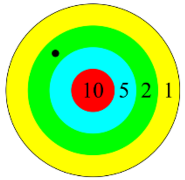
Gemiddelde en variantie

DISCRETE KANSVARIABELE

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \mathrm{E}((X-\mu_X)^2)\\ &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2\end{aligned}$$

CONTINUE KANSVARIABELE



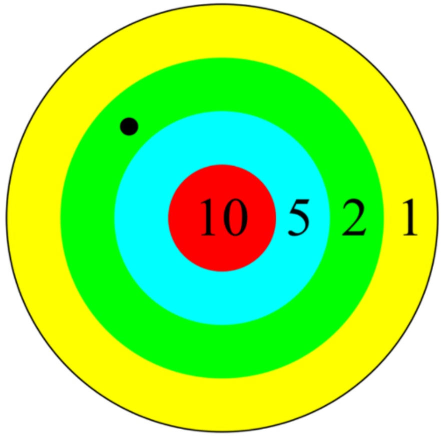
$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)\, dx\\ &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2\end{aligned}$$

Voorbeeld: dartbord

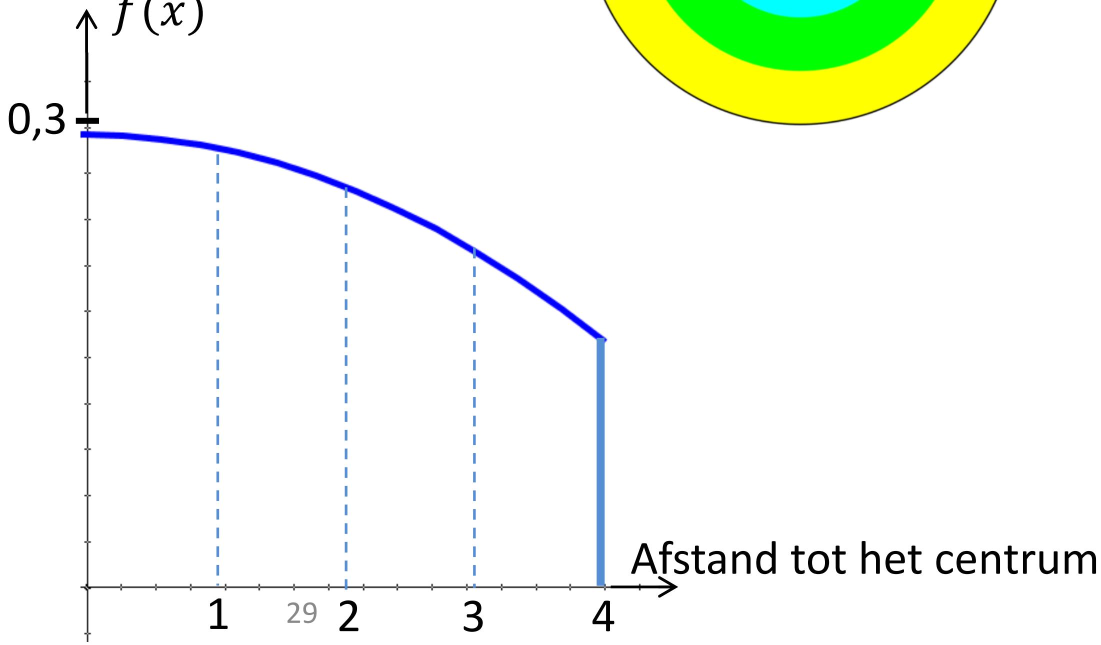
De dichtheidsfunctie voor een behoorlijk goede dartspeler wordt gegeven door:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{150} + \dfrac{257}{900} & \text{als} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{als} \quad x < 0 \text{ en } 4 < x \end{cases}$$



e) Bereken de standaardafwijking voor de afstand van het centrum tot een worp.

f) Bereken de standaardafwijking op de score voor deze dartspeler



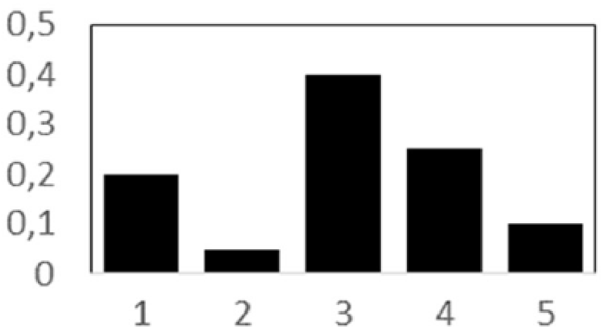
$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}((X-\mu_X)^2) \qquad \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)\,dx$$

$$= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$$

Discrete vs. continue kansvariabele: formularium

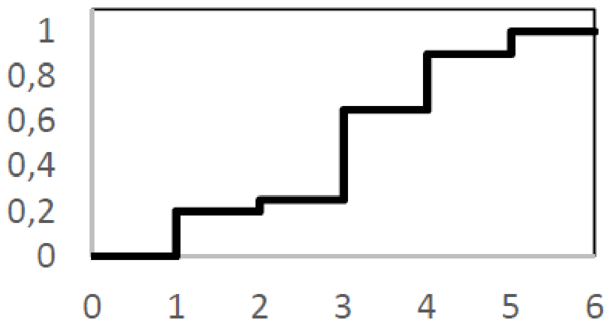
Discrete kansvariabele vs. continue kansvariabele

kansfunctie: $p_i = P(X = x_i)$



$$\sum_i p_i = 1$$

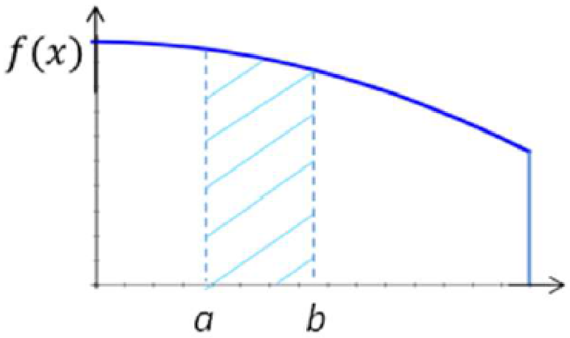
cumulatieve verdelingsfunctie $F_X(x) = P(X \leq x)$



$$\mu_X = E(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$$

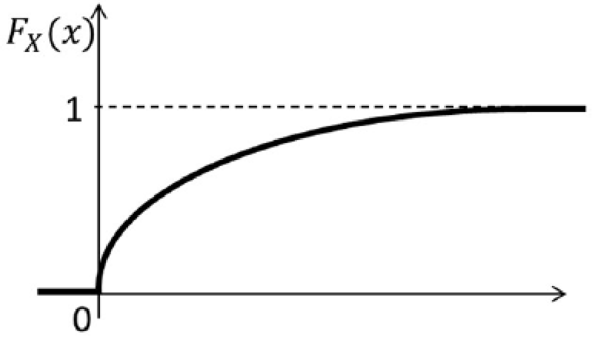
$$\sigma_X^2 = E((X - \mu_X)^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

kansdichtheid $f(x)$ met $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

cumulatieve verdelingsfunctie $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$



$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)\, dx = E(X^2) - (E(X))^2$$

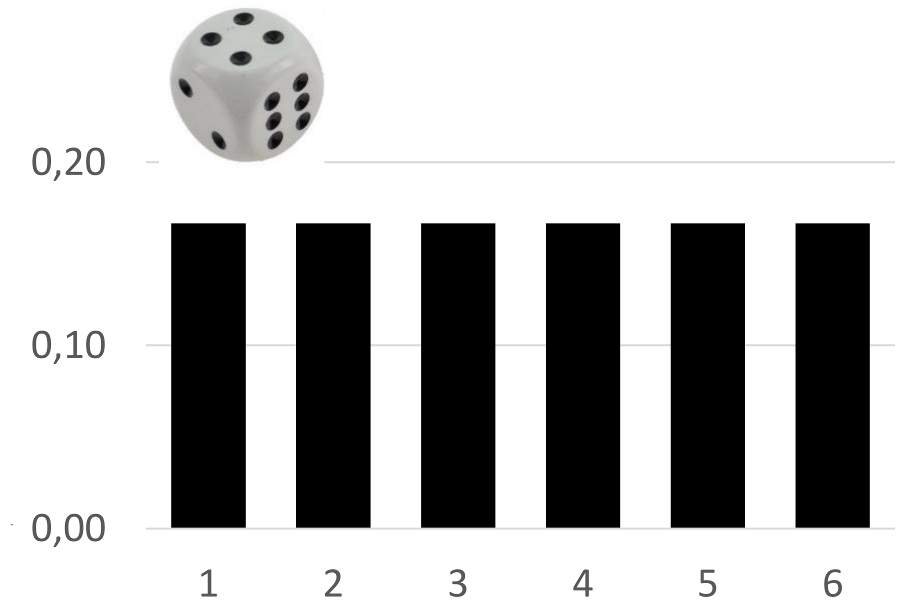
Percentiel en kwantiel

Definitie 4.3 *Het p% **percentiel** is die x waarvoor*

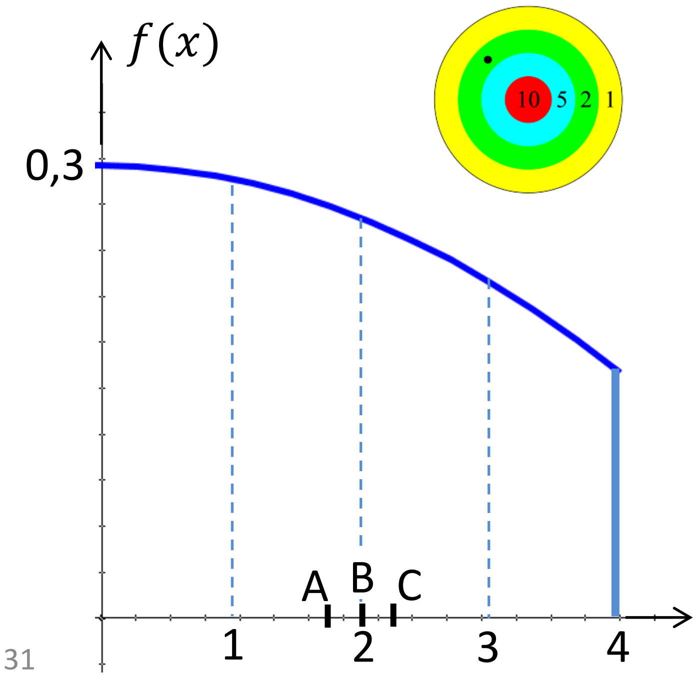
$$F_X(x) = \frac{p}{100}.$$

We spreken ook over het $\frac{p}{100}$-**kwantiel**. *De* **mediaan** *is die x waarvoor* $F_X(x) = 0.5$.

Opmerking: De mediaan is het 0.50-kwantiel of het 50% percentiel. Dus bij kwantielen is het getal dat ervoor komt een kans (of fractie) en bij percentielen een percentage.



Waar ligt de mediaan?



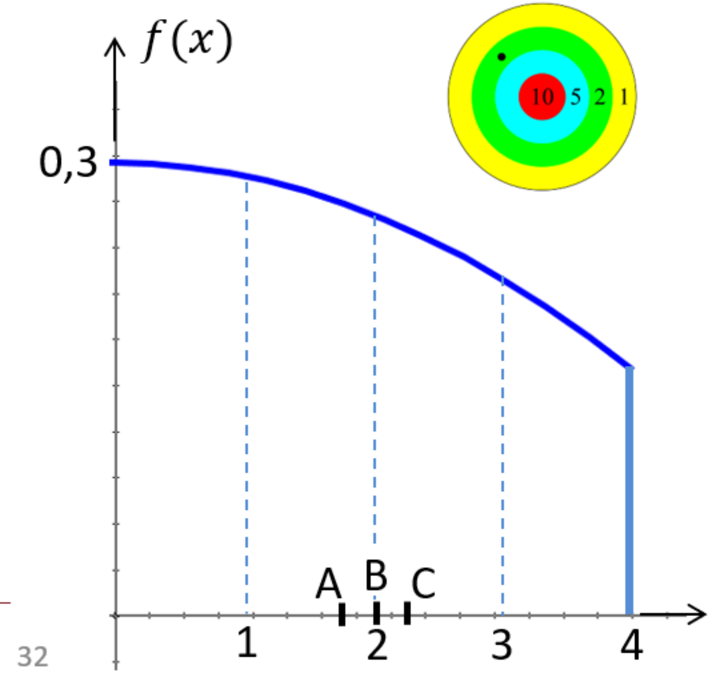
Percentiel en kwantiel

Definitie 4.3 *Het p% **percentiel** is die x waarvoor*

$$F_X(x) = \frac{p}{100}.$$

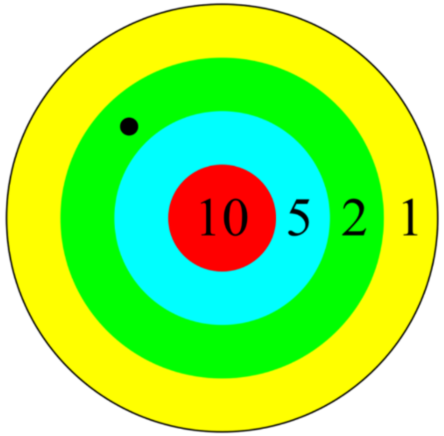
We spreken ook over het $\frac{p}{100}$**-kwantiel**. *De* **mediaan** *is die x waarvoor* $F_X(x) = 0.5$.

Opmerking: De mediaan is het 0.50-kwantiel of het 50% percentiel. Dus bij kwantielen is het getal dat ervoor komt een kans (of fractie) en bij percentielen een percentage.



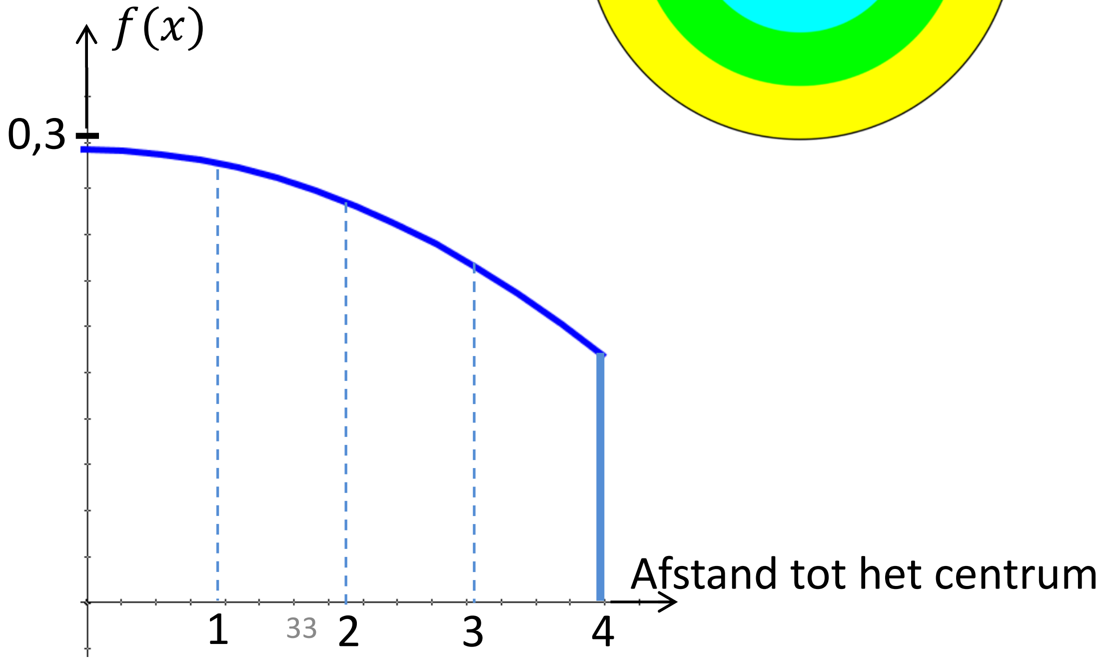
Voorbeeld: dartbord

De dichtheidsfunctie voor een behoorlijk goede dartspeler wordt gegeven door: $f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{150} + \frac{257}{900} & \text{als} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{als} \quad x < 0 \text{ en } 4 < x \end{cases}$



g) Bereken de mediaan voor deze dichtheidsfunctie?

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$



Déjà vu: Variantie (spreiding)

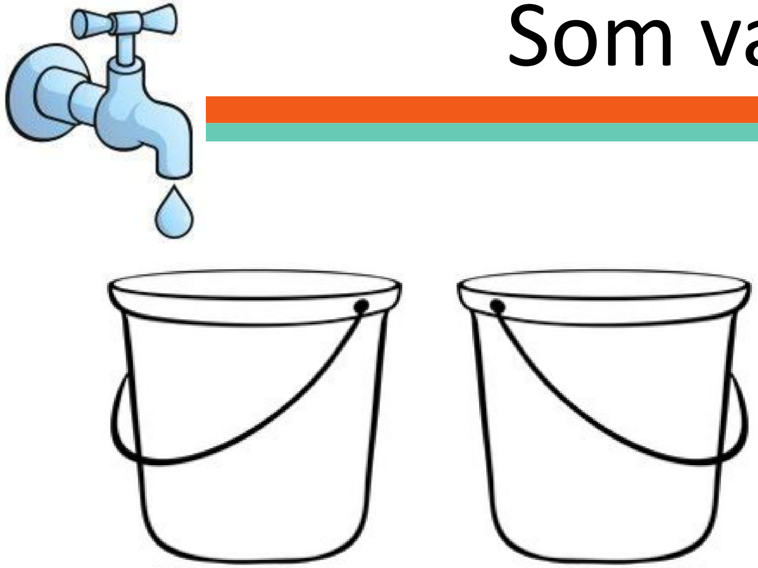
Definitie 3.5 *De* **variantie** *(notatie σ_X^2 of* $\mathrm{Var}(X)$*) van een discrete kansvariabele X is*

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}((X-\mu_X)^2)\\ &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2\end{aligned}$$

x_i	$P(X = x_i)$	$(x_i - \mu)^2$
1	1/6	6.25
2	1/6	2.25
3	1/6	0.25
4	1/6	0.25
5	1/6	2.25
6	1/6	6.25

$\mathrm{E}[(X-\mu)^2] = 35/12 = 2.91667$

Som van variabelen

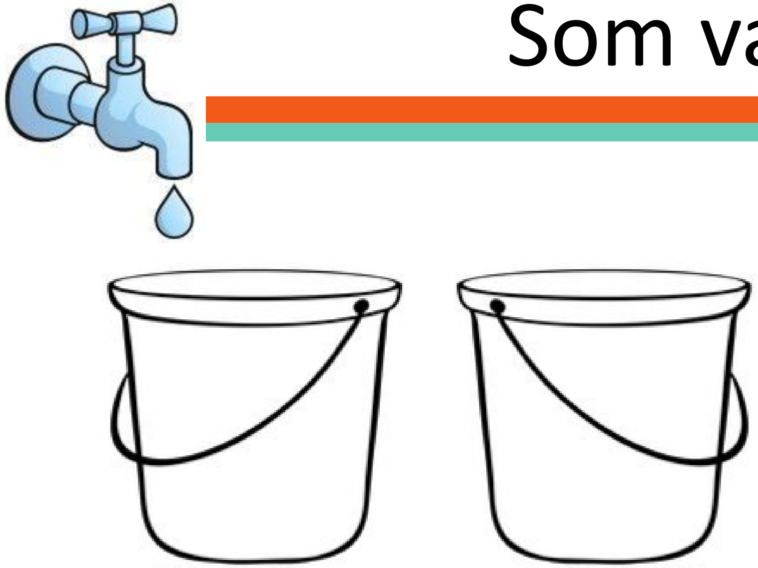


Eigenschap 3.7 *Stel* $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *met* X_i, $i = 1, \ldots, n$ *kansvariabelen. Dan geldt:*

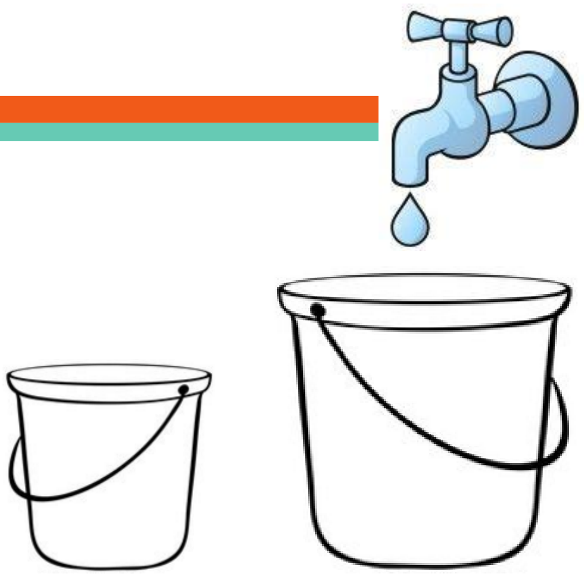
- $\mathrm{E}(S_n) = \mathrm{E}(X_1) + \ldots + \mathrm{E}(X_n)$
- **Als** $X_1, \ldots, X_n$ **onderling onafhankelijk** *zijn, dan*

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n).$$

Som van variabelen



OF



Eigenschap 3.7 *Stel* $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *met* X_i, $i = 1, \ldots, n$ *kansvariabelen. Dan geldt:*

- $\mathrm{E}(S_n) = \mathrm{E}(X_1) + \ldots + \mathrm{E}(X_n)$
- **Als** $X_1, \ldots, X_n$ **onderling onafhankelijk** *zijn, dan*

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n).$$

Som van variabelen

Wat als $X_1, \ldots, X_n$ onderling <u>afhankelijk</u> zijn?

Voorbeeld: gooien met een eerlijke dobbelsteen.

Kansvariabele X = het aantal gegooide ogen, $\sigma_X^2 = \frac{35}{12}$ (zie slide 26)

Kansvariabele D = het dubbel van het aantal gegooide ogen.

d_i	$P(D = d_i)$	$d_i P(D = d_i)$	$d_i^2 P(D = d_i)$
2	1/6	2/6	4/6
4	1/6	4/6	16/6
6	1/6	6/6	36/6
8	1/6	8/6	64/6
10	1/6	10/6	100/6
12	1/6	12/6	144/6
		$\mathrm{E}(D) = 7$	$\mathrm{E}(D^2) = 182/3$

$$\sigma_D^2 = E(D^2) - \left(E(D)\right)^2$$

$$\sigma_D^2 = \frac{182}{3} - 7^2 = \frac{35}{3} \neq \frac{35}{12} + \frac{35}{12}$$

Lineaire combinatie van kansvariabelen

Voorbeeld: gooien met een eerlijke dobbelsteen.

Kansvariabele D = het dubbel van het aantal gegooide ogen.

= $2X$ met X = het aantal gegooide ogen (met $\sigma_X^2 = \frac{35}{12}$)

Eigenschap 4.6 *Als X een kansvariabele is en a en b zijn constanten, dan*

- $\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X)+b$ *of* $\mu_{aX+b} = a\mu_X + b$.
- $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$ *of* $\sigma^2_{aX+b} = a^2\sigma^2_X$.

$$\sigma_D^2 = \frac{35}{3}$$

$$\sigma_{2X}^2 = 2^2 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{3}$$

Lineaire combinatie van kansvariabelen

Algemeen

Eigenschap 4.7 *Stel* $S = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ *met* X_i, $i = 1, \ldots, n$ *kansvariabelen en* a_i *reële getallen. Dan geldt*

- $\mathrm{E}(S) = a_0 + a_1\mathrm{E}(X_1) + \ldots + a_n\mathrm{E}(X_n)$ *of* $\mu_S = a_0 + a_1\mu_{X_1} + \ldots + a_n\mu_{X_n}$.
- **Als** $X_1, \ldots, X_n$ **onderling onafhankelijk** *zijn, dan*

$$\mathrm{Var}(S) = a_1^2\mathrm{Var}(X_1) + \ldots + a_n^2\mathrm{Var}(X_n) \quad \text{of} \quad \sigma_S^2 = a_1^2\sigma_{X_1}^2 + \ldots + a_n^2\sigma_{X_n}^2.$$

Het is belangrijk om op te merken dat $\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ (bij onafhankelijkheid).

Voorbeeld: zwaartekracht voor een volle mand appels:

$$F_z = \left(m_{mand} + m_{appel\,1} + \cdots + m_{appel\,n}\right) \cdot g$$

$\mathrm{E}(F_z)$? $\mathrm{Var}(F_z)$?

Lineaire combinatie van kansvariabelen

Algemeen

Eigenschap 4.7 *Stel* $S = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ *met* X_i, $i = 1, \ldots, n$ *kansvariabelen en* a_i *reële getallen. Dan geldt*

- $\mathrm{E}(S) = a_0 + a_1\mathrm{E}(X_1) + \ldots + a_n\mathrm{E}(X_n)$ *of* $\mu_S = a_0 + a_1\mu_{X_1} + \ldots + a_n\mu_{X_n}$.
- **Als** $X_1, \ldots, X_n$ **onderling onafhankelijk** *zijn, dan*

$$\mathrm{Var}(S) = a_1^2\mathrm{Var}(X_1) + \ldots + a_n^2\mathrm{Var}(X_n) \quad \text{of} \quad \sigma_S^2 = a_1^2\sigma_{X_1}^2 + \ldots + a_n^2\sigma_{X_n}^2.$$

Het is belangrijk om op te merken dat $\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ (bij onafhankelijkheid).

$$= X + (-1) \cdot Y$$

Lineaire combinatie van kansvariabelen

Algemeen

Eigenschap 4.7 *Stel* $S = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ *met* X_i, $i = 1, \ldots, n$ *kansvariabelen en* a_i *reële getallen. Dan geldt*

- $\mathrm{E}(S) = a_0 + a_1\mathrm{E}(X_1) + \ldots + a_n\mathrm{E}(X_n)$ *of* $\mu_S = a_0 + a_1\mu_{X_1} + \ldots + a_n\mu_{X_n}$.
- **Als** $X_1, \ldots, X_n$ **onderling onafhankelijk** *zijn, dan*

$$\mathrm{Var}(S) = a_1^2\mathrm{Var}(X_1) + \ldots + a_n^2\mathrm{Var}(X_n) \quad \text{of} \quad \sigma_S^2 = a_1^2\sigma_{X_1}^2 + \ldots + a_n^2\sigma_{X_n}^2.$$

Het is belangrijk om op te merken dat $\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ (bij onafhankelijkheid).

Formularium:

LINEAIRE COMBINATIES: Als $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onderling **onafhankelijke** ~~normaal verdeelde~~ toevalsvariabelen zijn met verwachting μ_i en standaardafwijking σ_i voor *i* = 1, 2, ..., *n* dan is $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n + b$ ~~ook normaal verdeeld~~ met verwachting $\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n + b$ en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2}$. *(opmerking: hierbij mogen de constanten a_i en b negatief zijn !!)*