Hoofdstuk 6 – Kinetica van een star lichaam in een plat vlak: kracht en versnelling

Eric Demeester

Overzicht H1 t.e.m. H8

H1	–	H2	–	H3	–	H4	→ Puntmassa's, waarvoor oriëntatie niet van belang is
H5	–	H6	–	H7	–	H8	→ Starre lichamen, waarvoor oriëntatie van belang is

Kinematica (H1 – H5)

$v = ds/dt$

$a = dv/dt$

$a \cdot ds = v \cdot dv$

$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta}/dt$

$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$

$\alpha \cdot d\theta = \omega \cdot d\omega$

$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{B|A}$

$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{B|A} - \omega^2 \boldsymbol{r}_{B|A}$

Tweede wet van Newton (H2 – H6)

$\Sigma F = m \cdot a$

- momentopname

Arbeid en energie (H3 – H7)

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **plaats**:

$\Sigma \int F \cdot ds = m \cdot v_2^2 / 2 - m \cdot v_1^2 / 2$

- 2 discrete plaatsen
- Enkel conservatieve krachten => behoud van mechanische energie: $T1 + V1 = T2 + V2$

Stoot en hoeveelheid van beweging (H4 – H8)

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **tijd** en gebruik $a = dv/dt$:

$\Sigma \int F \cdot dt = m \cdot v_2 - m \cdot v_1$

- 2 discrete tijdstippen
- Behoud van hoev. v. beweging:
  - Geen externe stoten
  - Botsingen en explosies

Overzicht H1 t.e.m. H8

Basisformules voor de dynamica

KINEMATICA

H1

Rechtlijnige beweging van een puntmassa

variabele a	*constante* $a = a_c$
$a = \frac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \frac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_c t^2$
$a\,ds = v\,dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Kromlijnige beweging van een puntmassa

x-, y-, z-coördinaten		*r-, θ-, z-coördinaten*	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

n-, t-, b-coördinaten

$v = \dot{s}$ | $a_t = \dot{v} = v\frac{dv}{ds}$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

Relatieve beweging

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

H5

Beweging van een star lichaam om een vaste as

variabele α	*constante* $\alpha = \alpha_c$
$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

Voor punt P

$s = \theta r \quad v = \omega r \quad a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{scharnier})} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{scharnier})}$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende en roterende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \times (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

KINETICA

H6

Massatraagheidsmoment $I = \int r^2\,dm$

Evenwijdige-assenstelling $I = I_G + md^2$

Gyrostraal $k = \sqrt{\frac{I}{m}}$

H2

Bewegingsvergelijkingen

Puntmassa	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

H6

H3

Principe van arbeid en energie

$T_1 + U_{1-2} = T_2$

Kinetische energie

Puntmassa	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

H7

Arbeid

Variabele kracht	$U_F = \int F\cos\theta\,ds$
Constante kracht	$U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$
Gewicht	$U_W = -W\,\Delta y$
Veer	$U = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$
Koppelmoment	$U_M = M\,\Delta\theta$

Vermogen en rendement

$P = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F}\wp\mathbf{v} \quad \epsilon = \frac{P_{\text{uit}}}{P_{\text{in}}} = \frac{U_{\text{uit}}}{U_{\text{in}}}$

Wet van behoud van energie

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potentiële energie

$V = V_g + V_e$, waarbij $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

H4

Principe van stoot en impuls

Puntmassa	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int\mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$
Star lichaam	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int\mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Behoud van impuls

$\Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_2$

Restitutiecoëfficiënt $e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

H8

Principe van stootmoment en impulsmoment

Puntmassa	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int\mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = (d)(mv)$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int\mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$ waarbij $H_G = I_G\omega$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int\mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = I_O\omega$

Behoud van impulsmoment

$\Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_2$

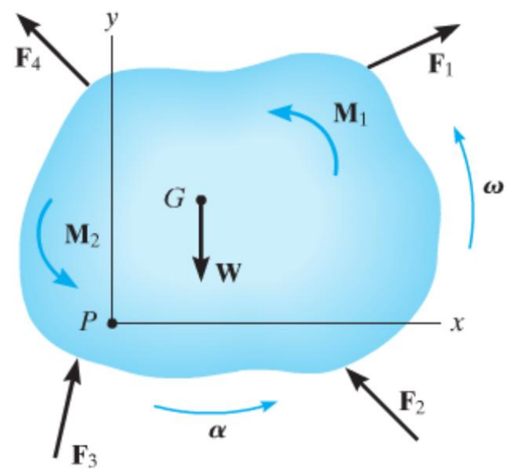
Even recapituleren …

- Verschillende manieren gezien voor het berekenen van het massatraagheidsmoment I:
    1. Toepassing van de definitie, d.m.v. integratie (vaak met schaal- of schijfelementen); $I = \int_m r^2\, dm$
    2. Formularium (eenvoudige vormen: bol, dunne stang, …);
    3. Stelling van Steiner; $I = I_G + md^2$
    4. Gyrostraal k; $I = mk^2 \quad \text{of} \quad k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$
    5. Samengestelde lichamen: algebraïsche som van de massatraagheidsmomenten (aangepast met Steiner zodat alle I uitgedrukt zijn rond dezelfde as):

$$I_{totaal} = \sum_{lichaam\ i} \left(I_{G,i} + m_i \cdot d_i^2\right)$$

Even recapituleren …

- In dit vak beperken we ons tot de kinetica van <u>onvervormbare</u> lichamen in het <u>vlak</u>
- Alle krachten en momenten worden in dit vlak geprojecteerd
- Voorwerp en belastingen zijn symmetrisch t.o.v. een vast referentievlak



- Assenstelsel *x*, *y*, *z*:
  - een <u>inertiaal</u> assenstelsel (d.w.z. roteert niet, staat stil of transleert aan een constant snelheid)
  - Oorsprong laten we ogenblikkelijk samenvallen met het (willekeurig) referentiepunt P

Even recapituleren: translatievergelijking

$$\underbrace{\sum \mathbf{F}}_{\text{Uitwendige krachten}} = m\underbrace{\mathbf{a}_G}_{\text{Versnelling van massamiddelpunt!}}$$

Uitwendige krachten

Versnelling van massamiddelpunt!

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$

2 onafhankelijke scalaire vergelijkingen

Of ook (voor een stelsel van aparte starre lichamen):

$$\sum \boldsymbol{F} = \sum m_i \, \boldsymbol{a_i}$$

Maak altijd een vrijlichaamsschema en best ook een kinetisch schema!

Even recapituleren: rotatievergelijking

- Moment van kracht $\boldsymbol{F}$ om P: $\boldsymbol{r_F} \times \boldsymbol{F}$: loodrechte hefboomsarm x F
- Verschillende opties voor rotatievergelijking:

Let op de tekens van de momenten!

1. Momenten t.o.v. massamiddelpunt G:

$$\boxed{\Sigma M_G = I_G \alpha}$$

2. Momenten t.o.v. willekeurig punt P:

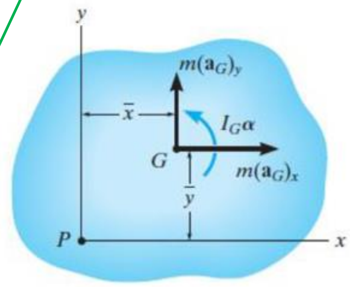
$$\sum M_P = -\bar{y}m(a_G)_x + \bar{x}m(a_G)_y + I_G\alpha$$

$$\boxed{\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P} \quad \text{(algemenere vorm)}$$

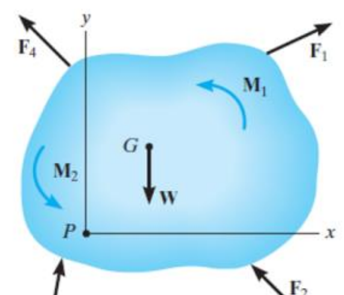
$$\sum M_P = I_G \cdot \alpha + \boldsymbol{r_G} \times m\, \boldsymbol{a_G}$$

3. Stelsel van aparte massa's:

$$\sum \boldsymbol{M_P} = \sum \boldsymbol{r_i} \times m_i\, \boldsymbol{a_i}$$



Kinetic diagram



Free-body diagram

Even recapituleren …

- <u>Conclusie:</u> **3 onafhankelijke scalaire vergelijkingen** worden opgesteld om de algemene beweging in het platte vlak van een symmetrisch star lichaam te beschrijven.

$$\sum F_x = m(a_G)_x$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y$$

$$\sum M_G = I_G \alpha \qquad \text{of } \sum M_P = \sum (\mathcal{M}_k)_p$$

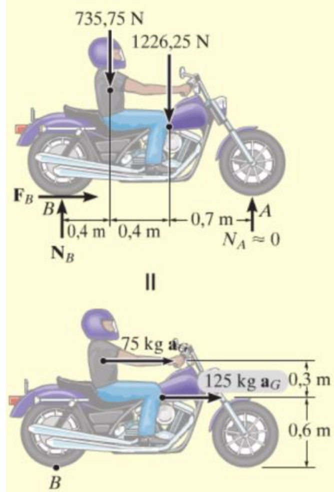
- Punt P kiezen we typisch op een plaats waar veel onbekende krachten aangrijpen; op die manier hebben deze krachten geen moment t.o.v. P en vallen dus weg uit de (derde) vergelijking;
- Analyse geldig voor: star lichaam, 1 enkel tijdsogenblik, inertiaal assenstelsel

6.2 Bewegingsvergelijkingen voor de vlakke beweging

- Voorbeeld 6.6

Geg.: De motorfiets heeft een massa van 125 kg en massamiddelpunt in G_1. De motorrijder heeft een massa van 75 kg en massamiddelpunt in G_2. Verwaarloos de massa van de wielen.

Gevr.: (1) Bepaal de minimale statische wrijvingscoëfficiënt tussen de wielen en de straat zodat de motorrijder zijn voorwiel van de grond kan krijgen. (2) Welke versnelling moet hij hiervoor hebben?



(b)

Fig. 6.11 (vervolg)

OPLOSSING

Vrijlichaamsschema en kinetisch schema In dit vraagstuk zullen we de motor en de motorrijder als *één stelsel* beschouwen. Door middel van de vergelijkingen $\bar{x} = \Sigma\tilde{x}m/\Sigma m$ en $\bar{y} = \Sigma\tilde{y}m/\Sigma m$ is het mogelijk de plaats van het massamiddelpunt van dit 'stelsel' te bepalen. We zullen hier echter het afzonderlijke gewicht en de afzonderlijke massa van de motorfiets en de motorrijder in beschouwing nemen, zoals wordt weergegeven in het vrijlichaamsschema en het kinetisch schema, fig. 6.11*b*. Beide delen ondervinden *dezelfde* versnelling. We hebben aangenomen dat het voorwiel *nog net niet* losgekomen is van de grond, zodat de normale reactie $N_A \approx 0$ is. De drie onbekenden in het vraagstuk zijn N_B, F_B en a_G.

Bewegingsvergelijkingen

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \quad F_B = (75\text{ kg} + 125\text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \quad N_B - 735{,}75\text{ N} - 1226{,}25\text{ N} = 0$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B; -(735{,}75\text{ N})(0{,}4\text{ m}) - (1226{,}25\text{ N})(0{,}8\text{ m}) =$$
$$-(75\text{ kg } a_G)(0{,}9\text{ m}) - (125\text{ kg } a_G)(0{,}6\text{ m}) \qquad (2)$$

Oplossing geeft:

$$a_G = 8{,}95\text{ m/s}\rightarrow \qquad \textit{Antw.}$$
$$N_B = 1962\text{ N}$$
$$F_B = 1790\text{ N}$$

De minimale statische wrijvingscoëfficiënt is dus:

$$(\mu_s)_{\min} = \frac{F_B}{N_B} = \frac{1790\text{ N}}{1962\text{ N}} = 0{,}912 \qquad \textit{Antw.}$$

6.3 Bewegingsvergelijkingen: translatie

- Bij translatie: alle deeltjes van het lichaam hebben dezelfde versnelling en <u>hoekversnelling $\alpha = 0$</u>;

- Bijgevolg: vereenvoudigde rotatievergelijking:

$$\sum M_G = 0$$

- We kunnen deze bewegingsvergelijkingen opstellen voor beide types translaties:
  - Rechtlijnige translatie; vaak gebruiken we een x-y assenstelsel
  - Kromlijnige translatie; vaak gebruiken we een n-t assenstelsel

6.3 Bewegingsvergelijkingen: translatie

- Rechtlijnige translatie:
  - Rotatievergelijking uitgedrukt om *G*:

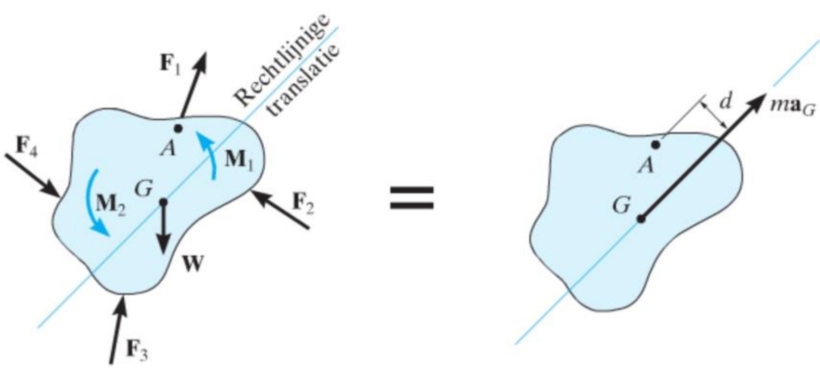
$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma M_G &= 0 \end{aligned}$$

  - Rotatievergelijking uitgedrukt om *A*:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \end{aligned}$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \qquad \Sigma M_A = (ma_G)d$$

Let op de tekens!



6.3 Bewegingsvergelijkingen: translatie

- Kromlijnige translatie:
  - Rotatievergelijking uitgedrukt om *G*:

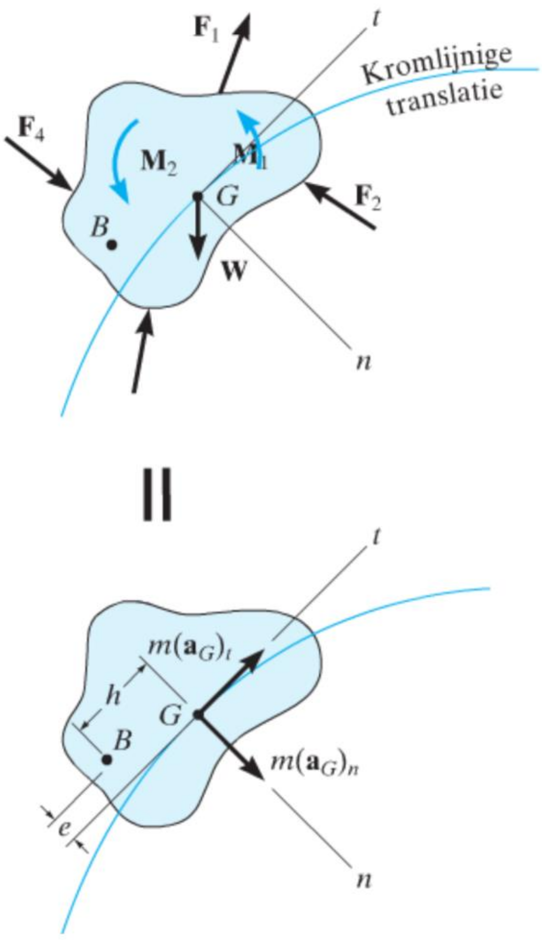
$$\Sigma F_n = m(a_G)_n$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t$$
$$\Sigma M_G = 0$$

  - Rotatievergelijking uitgedrukt om *B*:

$$\Sigma F_n = m(a_G)_n$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t$$

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B;$ $\qquad \Sigma M_B = e[m(a_G)_t] - h[m(a_G)_n]$

Waarom deze tekens?



6.3 Bewegingsvergelijkingen: translatie

- Analyseprocedure zuivere translatie:
  1. VLS opstellen (vrijlichaamsschema):
     - Duid alle krachten en momenten aan
     - Kies een gepast assenstelsel (duid positieve rotatiezin aan)
     - Bepaal of kies de richting en zin van $\boldsymbol{a_G}$
     - Duid alle onbekenden aan
     - Indien de rotatievergelijking rondom een ander punt dan *G* gebruikt wordt teken kinetisch schema
  2. Bewegingsvergelijkingen; hierna is $\boldsymbol{a_G}$ gekend;
     - Pas de 3 bewegingsvergelijkingen toe; let op tekens!
     - Vergeet wrijvingskrachten niet; deze werken de beweging in het contactvlak tegen;
  3. Kinematica:
     - Als plaats of snelheid gevraagd zijn, kunnen deze uit de versnelling berekend worden met de formules uit H5

$$a_G = dv_G/dt$$
$$a_G ds_G = v_G dv_G$$
$$v_G = ds_G/dt$$

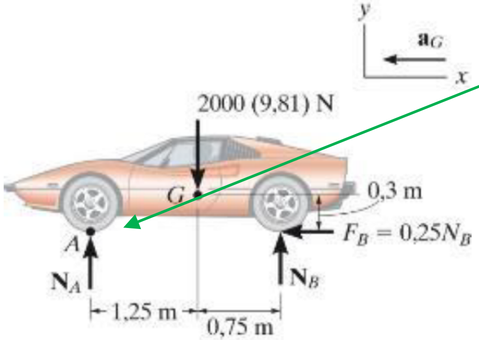
$$(a_G)_n = v_G{}^2/\rho = \omega^2\rho$$
$$(a_G)_t = dv_G/dt,\ (a_G)_t ds_G = v_G dv_G,\ (a_G)t = \alpha\rho$$

6.3 Bewegingsvergelijkingen: translatie

- Voorbeeld 6.5 (rechtlijnige translatie):

De auto heeft een massa van 2000 kg en zijn massamiddelpunt ligt in G. Bepaal de versnelling van de auto als de aangedreven achterwielen altijd glijden terwijl de voorwielen vrij kunnen draaien. Verwaarloos de massa van de wielen. De kinetische wrijwingscoëfficiënt tussen de wielen en de weg is 0.25.

Vrijelichaamsschema



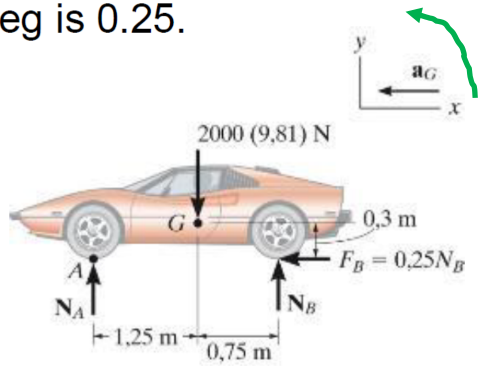
Onbekenden: $N_A, N_B\ en\ a_G$

- De wrijvingskracht van de achterwielen duwt de auto naar voren en omdat er sprake is van glijden, is $F_B = 0.25N_B$.
- De wrijvingskrachten die op de voorwielen worden uitgeoefend zijn nul, aangezien deze wielen een verwaarloosbare massa hebben.
- De auto (punt G) zal naar links versnellen, in de negatieve x-richting.

6.3 Bewegingsvergelijkingen: translatie

- Voorbeeld 6.5 (rechtlijnige translatie):

De auto heeft een massa van 2000 kg en zijn massamiddelpunt ligt in G. Bepaal de versnelling van de auto als de aangedreven achterwielen altijd glijden terwijl de voorwielen vrij kunnen draaien. Verwaarloos de massa van de wielen. De kinetische wrijwingscoëfficiënt tussen de wielen en de weg is 0.25.



Bewegingsvergelijkingen

$$\sum F_x = m\,(a_G)_x \qquad -0.25N_B = -2000\,a_G$$

$$\sum F_y = m\,(a_G)_y \qquad N_A + N_B - 2000\,(9.81) = 0$$

$$\sum M_G = 0 \qquad -N_A(1.25) - 0.25N_B(0.3) + N_B\,(0.75) = 0$$

Stelsel van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden:

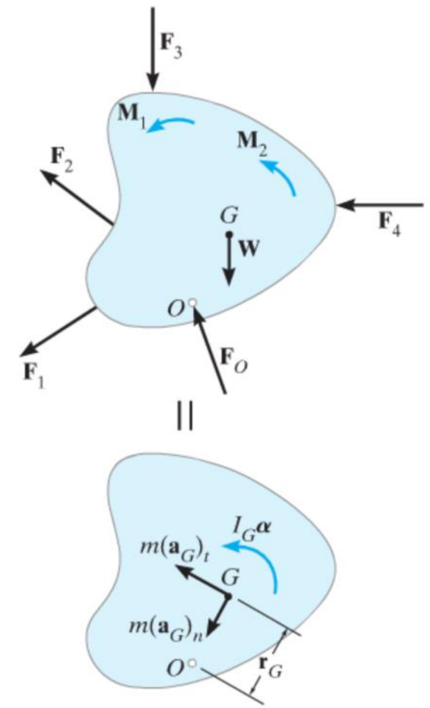
$a_G = 1.59\ m/s$ $\qquad N_A = 6.88\ kN$ $\qquad N_B = 12.7\ kN$

6.4 Bewegingsvergelijkingen: rotatie om een vaste as

- Zuivere rotatie om een as door scharnierpunt *O*:
- *G* beschrijft een cirkelbeweging om *O* => best (n,t) assenstelsel gebruiken (want: kromlijnige baan)
  - Normaalversnelling steeds naar O gericht, onafh. v. draaizin!
  - Rondom *G*:

$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t = m\alpha r_G \\ \Sigma M_G &= I_G\alpha \end{aligned}$$

  - Rondom *O*: onbekende reactiekrachten vallen dan weg!



$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \qquad \Sigma M_O = r_G m(a_G)_t + I_G\alpha \qquad (a_G)_t = r_G\alpha$$

$$I_O = I_G + m \cdot r_G^2$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t = m\alpha r_G \\ \Sigma M_O &= I_O\alpha \end{aligned}$$

6.4 Bewegingsvergelijkingen: rotatie om een vaste as - analyseprocedure

1. VLS opstellen (vrijlichaamsschema):
   - Duid alle krachten en momenten aan
   - Bepaal het (n,t) assenstelsel
   - Bepaal of kies de richting en zin van $\boldsymbol{a_{G,t}}$ en $\boldsymbol{a_{G,n}}$ en α (consistentie!)
   - Bepaal het massatraagheidsmoment I_G of I_O
   - Duid alle onbekenden aan
   - Indien de rotatievergelijking rondom een ander punt dan *G* gebruikt wordt, teken dan best het kinetisch schema
2. Bewegingsvergelijkingen; hierna is $\boldsymbol{a_G}$ gekend;
   - Pas de 3 bewegingsvergelijkingen toe; let op tekens!
   - Als momenten rondom het scharnierpunt O worden opgeteld, dan geldt $\sum M_O = I_O\alpha$
3. Kinematica:
   - Als geen volledige oplossing kan bekomen worden uit de bewegingsvergelijkingen, gebruik dan de kinematica uit H5:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

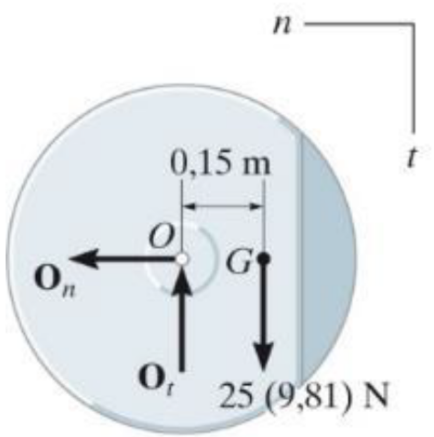
$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^{\,2} + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

6.4 Bewegingsvergelijkingen: rotatie om een vaste as

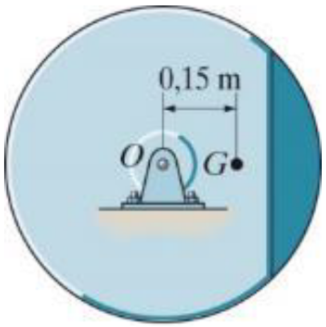
- Voorbeeld 6.9:

Het ongebalanceerde vliegwiel van 25 kg heeft een gyrostraal van 0.18 m om een as die door zijn massamiddelpunt G gaat. Bepaal de horizontale en verticale reactiecomponenten op het scharnier O als het vanuit stilstand wordt losgelaten.

Vrijelichaamsschema



- G beweegt in een cirkel-vormige baan dus heeft zowel een normale als tangentiële versnellingscomponent.
- Gewicht vliegwiel veroorzaakt een versnelling α in wijzerszin => $(A_G)_t$ = neerwaarts



Onbekenden: O_n, O_t *en* α

$$I_G = mk_G{}^2 = 25\,(0.18)^2 = 0.81\ kg\ m^2$$

6.4 Bewegingsvergelijkingen: rotatie om een vaste as

- Voorbeeld 6.9:

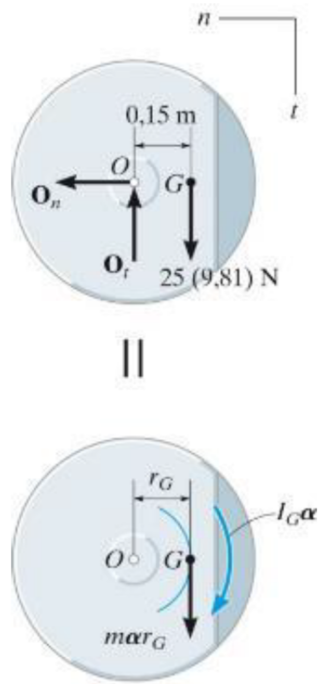
Het ongebalanceerde vliegwiel van 25 kg heeft een gyrostraal van 0.18 m om een as die door zijn massamiddelpunt G gaat. Bepaal de horizontale en verticale reactiecomponenten op het scharnier O als het vanuit stilstand wordt losgelaten.

Bewegingsvergelijkingen

$$\sum F_n = m\,\omega^2 r_G \qquad O_n = 0$$

$$\sum F_t = m\,\alpha\, r_G \qquad -O_t + 25(9.81) = 25\,\alpha\,(0.15)$$

$$\sum M_G = I_G\,\alpha \qquad O_t(0.15) = 0.81\,\alpha$$



Stelsel van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden:

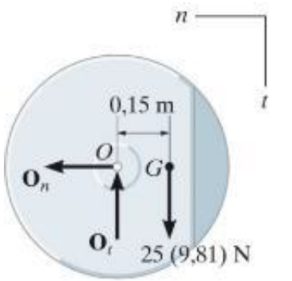
$\alpha = 26.80\ rad/s^2 \qquad O_t = 144.7\ N \qquad O_n = 0\ N$

6.4 Bewegingsvergelijkingen: rotatie om een vaste as

- Voorbeeld 6.9:

Het ongebalanceerde vliegwiel van 25 kg heeft een gyrostraal van 0.18 m om een as die door zijn massamiddelpunt G gaat. Bepaal de horizontale en verticale reactiecomponenten op het scharnier O als het vanuit stilstand wordt losgelaten.

Alternatief: Momenten opstellen rond punt 0 => O_n en O_t elimineren



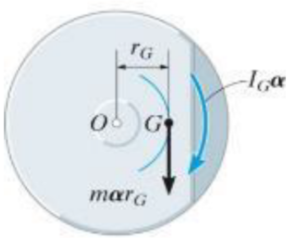
Optie 1

$$\sum M_O = \sum (M_k)_O$$

$$25\,(9.81)(0.15) = 0.81\alpha + 25\alpha(0.15)(0.15)$$

$$245.25(0.15) = 1.3725\,\alpha \qquad \alpha = 26.80\ rad/s^2$$

=



Optie 2

$$\sum M_O = I_O\alpha$$

$$I_O = I_G + m{r_G}^2 = 0.81 + 25(0.15)^2$$

$$245.25(0.15) = 1.3725\,\alpha \qquad \alpha = 26.80\ rad/s^2$$

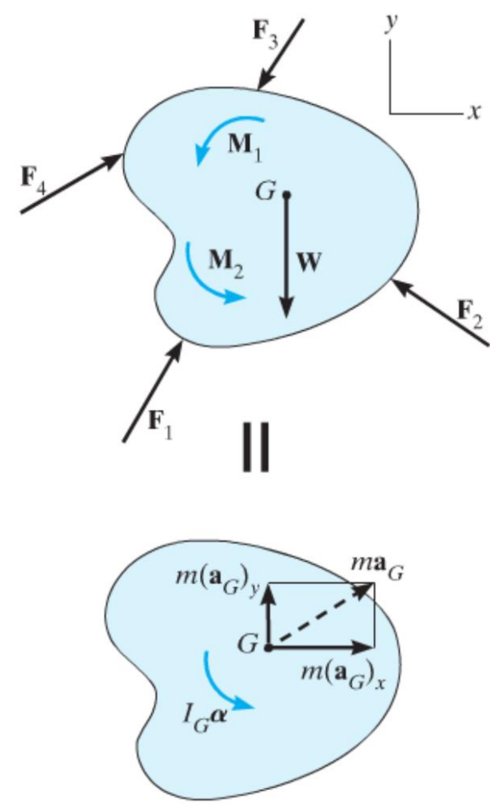
6.5 Bewegingsvergelijkingen: algemene beweging in het platte vlak

- Rondom G:

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha$$

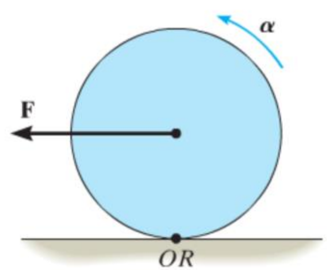
- Rondom P (onbekende krachten verdwijnen uit derde vergelijking)

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$$



- Rondom het ogenblikkelijk rotatiecentrum:
  - Voor cirkelvormig lichaam dat rolt over een oppervlak zonder glijden:

$$\Sigma M_{OR} = I_{OR}\alpha$$

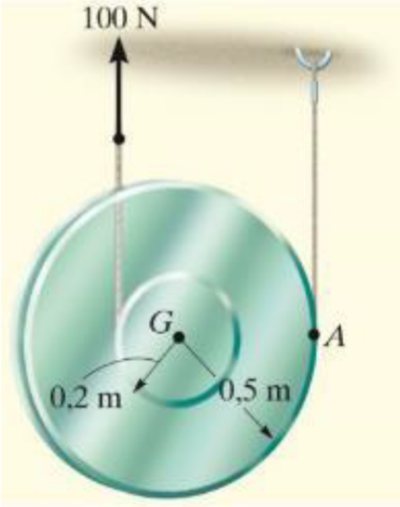


6.5 Bewegingsvergelijkingen: algemene beweging in het platte vlak - analyseprocedure

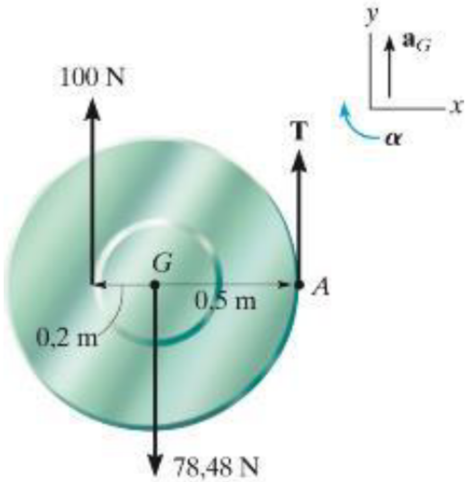
1. VLS opstellen (vrijlichaamsschema):
   - Duid alle krachten en momenten aan
   - Bepaal het (x,y) assenstelsel
   - Bepaal of kies de richting en zin van $\boldsymbol{a}_G$ en α
   - Bepaal het massatraagheidsmoment I_G
   - Duid alle onbekenden aan
   - Indien de rotatievergelijking rondom een ander punt dan *G* gebruikt wordt, teken dan best ook het kinetisch schema
2. Bewegingsvergelijkingen;
   - Pas de 3 bewegingsvergelijkingen toe; let op tekens!
   - Indien wrijving aanwezig is, kan de beweging zonder glijden of kantelen plaatsvinden; beide mogelijkheden moeten worden onderzocht;
3. Kinematica:
   - Als geen volledige oplossing kan bekomen worden uit de bewegingsvergelijkingen, gebruik dan de kinematica uit H5;

6.5 Bewegingsvergelijkingen: algemene beweging in het platte vlak – voorbeeld 6.13

Bepaal de hoekversnelling van de haspel met massa 8kg en gyrostraal van 0.35m. De touwen hebben een verwaarloosbare massa en zijn respectievelijk om de naaf en de omtrek van de haspel gewikkeld.



Vrijelichaamsschema



- a_G is opwaarts
- α in wijzerszin

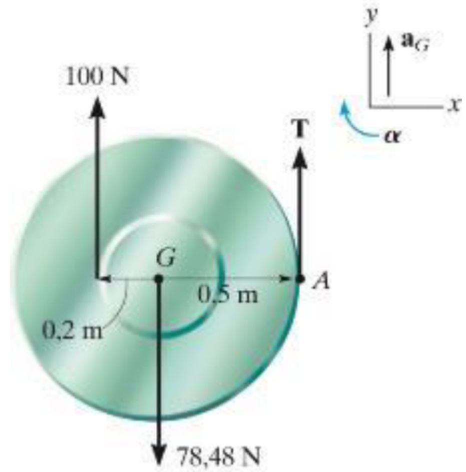
$$I_G = mk_G^{\,2} = 8\,(0.35)^2 = 0.98\;kg\;m^2$$

Onbekenden: a_G, T en α

6.5 Bewegingsvergelijkingen: algemene beweging in het platte vlak – voorbeeld 6.13

Bepaal de hoekversnelling van de haspel met massa 8kg en gyrostraal van 0.35m. De touwen hebben een verwaarloosbare massa en zijn respectievelijk om de naaf en de omtrek van de haspel gewikkeld.

Bewegingsvergelijkingen



$$\sum F_y = m\,(a_G)_y \qquad T + 100 - 78.48 = 8(a_G)_y$$

$$\sum M_G = I_G \alpha \qquad 100(0.2) - T(0.5) = 0.98\,\alpha$$

Kinematica

$$a_G = \alpha\, r \qquad a_G = \alpha\,(0.5)$$

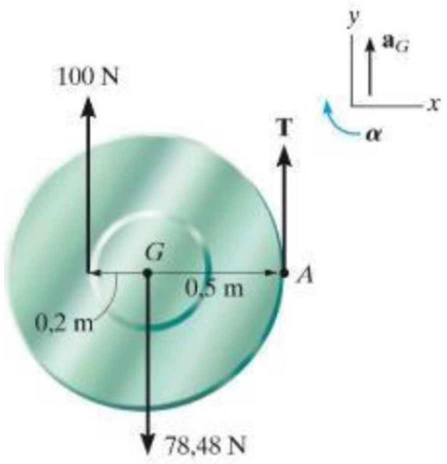
Stelsel van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden:

$$\alpha = 10.3\, rad/s^2 \qquad a_G = 5.16\, m/s^2 \qquad T = 19.8\, N$$

6.5 Bewegingsvergelijkingen: algemene beweging in het platte vlak – voorbeeld 6.13

Bepaal de hoekversnelling van de haspel met massa 8kg en gyrostraal van 0.35m. De touwen hebben een verwaarloosbare massa en zijn respectievelijk om de naaf en de omtrek van de haspel gewikkeld.

Alternatief 1: Momenten rond punt A

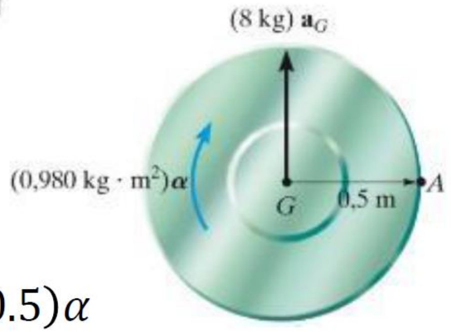


$$\sum M_A = \sum (M_k)_A$$

$$100(0.7) - 78.48(0.5) = 0.98\,\alpha + 8\,a_G(0.5)$$

$$a_G = \alpha\,(0.5) \qquad \alpha = 10.3\,rad/s^2$$

Alternatief 2: Punt A is OR voor haspel

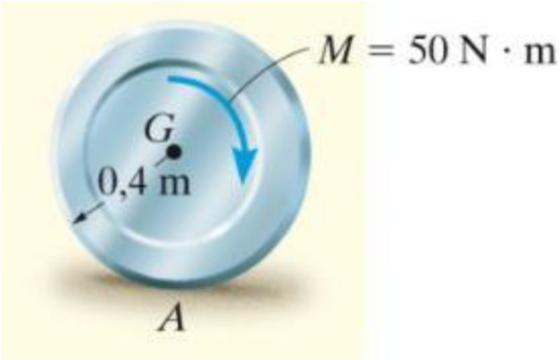


$$\sum M_A = I_A \alpha \qquad 100(0.7) - 78.48(0.5) = 0.98\alpha + 8\,(0.5)(0.5)\alpha$$

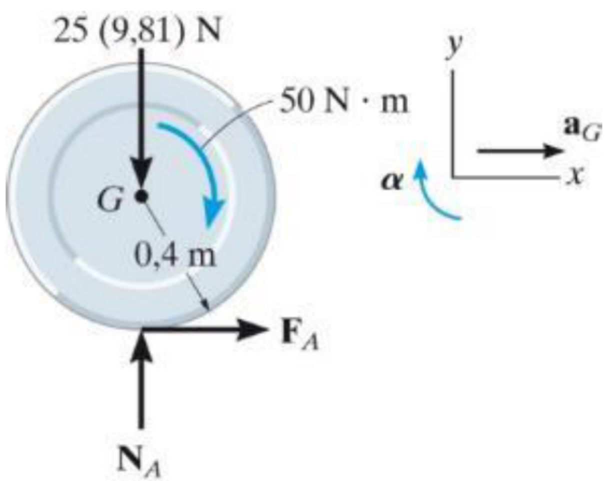
$$\alpha = 10.3\,rad/s^2$$

6.5 Bewegingsvergelijkingen: algemene beweging in het platte vlak – voorbeeld 6.14

Het wiel van 25kg heeft een gyrostraal van 0.2m. Bepaal de versnelling van zijn massamiddelpunt G op het moment dat er op het wiel een moment van 50 Nm wordt uitgeoefend. $\mu_s = 0.3\ en\ \mu_k = 0.25$



Vrijelichaamsschema



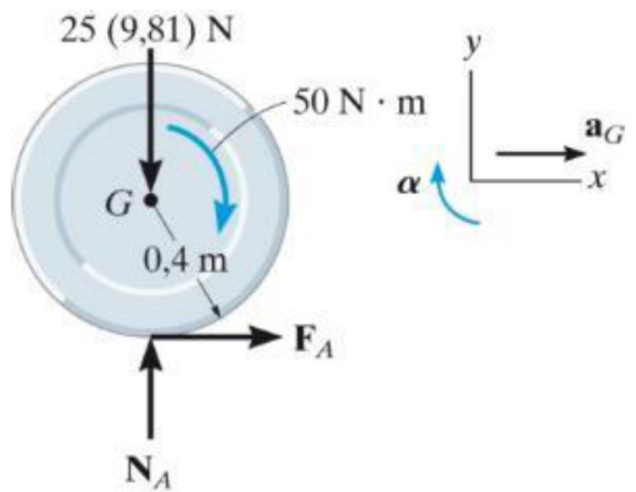
- α in wijzerszin
- a_G is naar rechts

$$I_G = mk_G{}^2 = 25\ (0.2)^2 = 1.0\ kg\ m^2$$

Onbekenden: $N_A,\ F_A, a_G\ en$ α

6.5 Bewegingsvergelijkingen: algemene beweging in het platte vlak – voorbeeld 6.14

Het wiel van 25kg heeft een gyrostraal van 0.2m. Bepaal de versnelling van zijn massamiddelpunt G op het moment dat er op het wiel een moment van 50 Nm wordt uitgeoefend. $\mu_s = 0.3 \; en \; \mu_k = 0.25$



Bewegingsvergelijkingen

$$\sum F_x = m\,(a_G)_x \qquad F_A = 25(a_G)_x$$

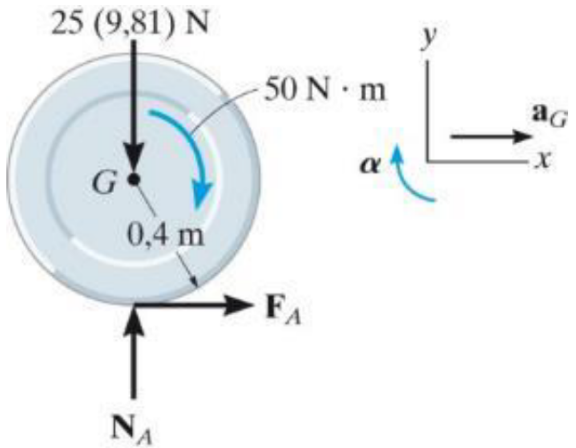
$$\sum F_y = m(a_G)_y \qquad N_A - 25(9.81) = 0$$

$$\sum M_G = I_G\,\alpha \qquad 50 - 0.4\,F_A = 1.0\,\alpha$$

=> 4de vgl nodig uit Kinematica

6.5 Bewegingsvergelijkingen: algemene beweging in het platte vlak – voorbeeld 6.14

Het wiel van 25kg heeft een gyrostraal van 0.2m. Bepaal de versnelling van zijn massamiddelpunt G op het moment dat er op het wiel een moment van 50 Nm wordt uitgeoefend. $\mu_s = 0.3 \; en \; \mu_k = 0.25$



Zonder glijden

$a_G = \alpha\,(0.4)$

Stelsel van 4 vergelijkingen met 4 onbekenden:

$\alpha = 10.0\; rad/s^2$ $\qquad N_A = 245{,}25\; N$

$a_G = 4.0\; m/s^2$ $\qquad F_A = 100\; N$

Met glijden

$F_A = 100N \; > \mu_s N_A = 73.6N \Rightarrow Slip\ (glijden)$

$F_A = 0.25\; N_A$

Stelsel van 4 vergelijkingen met 4 onbekenden:

$\alpha = 25.5\; rad/s^2$ $\qquad N_A = 245{,}25\; N$

$a_G = 2.45\; m/s^2$ $\qquad F_A = 61.31\; N$