Lesweek 6 :

Afronding hoofdstuk 2

(convex / concaaf / kromming)

Kort hoofdstuk 3

(benaderingsveeltermen)

Start hoofdstuk 4

(functies in meer veranderlijken)

Wiskunde 1 Schakel: EVALUATIE

Eerste examenkans	
LESWEEK 8 (~~dinsdag 14/11~~ om 8u30): Schriftelijke PE-test (deelname VERPLICHT !) Leerstof: Hoofdstuk 1 en 2 (focus: oefeningen en toepassingen met mogelijk een inzichtsbijvraagje) Toegelaten hulpmiddelen: formularium en CAS rekentoestel	25%

NIEUWE DATUM PE-TEST: woensdag 15/11/23
In gebouw B !!

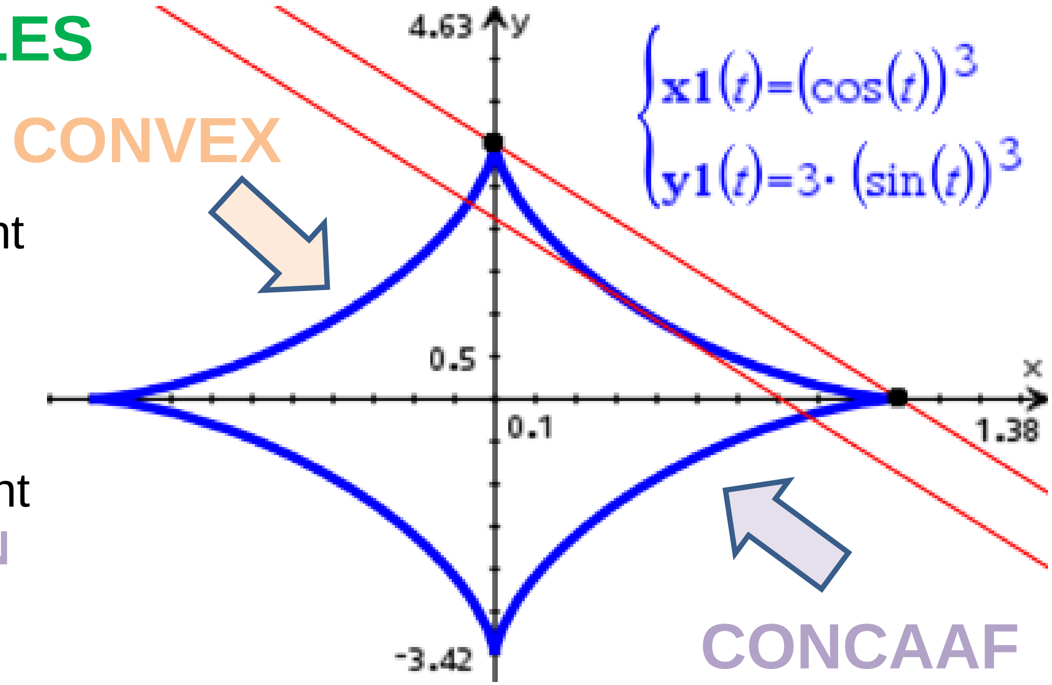
- 8u30 – 10u (zonder faciliteiten)
- 8u30 – 10u30 (met bewijs voor faciliteiten !!)

Zorg dat dit in orde is !!

§ 2.9 Convex ←→ Concaaf

VOORBEELD VORIGE LES

KROMME ligt in 1^e en 2^e kwadrant
volledig **BOVEN elke RAAKLIJN**



KROMME ligt in 3^e en 4^e kwadrant
volledig **ONDER elke RAAKLIJN**

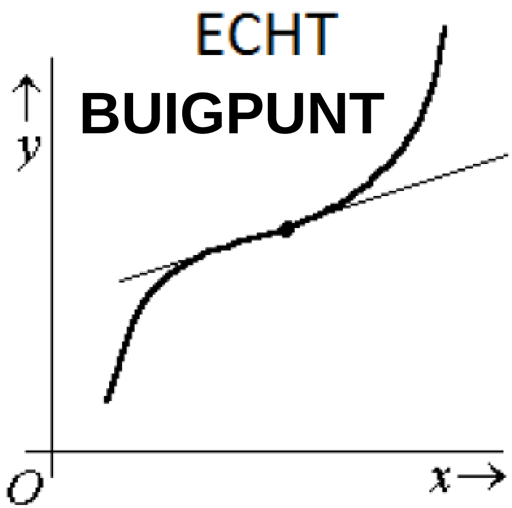
Eigenschap (voldoende voorwaarde voor concaaf/convex)

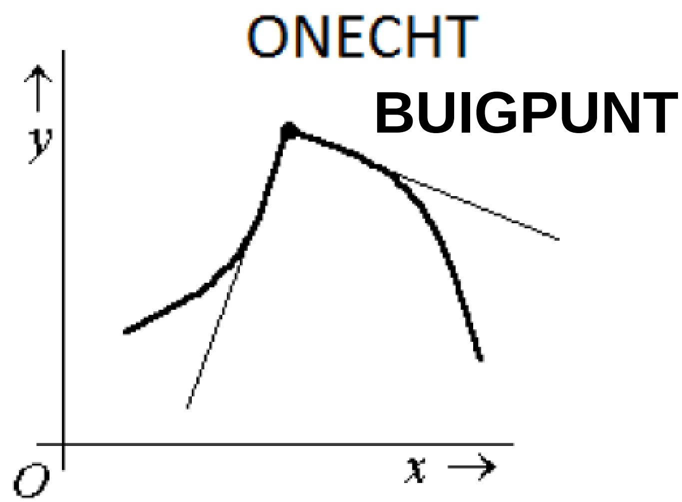
Veronderstel dat de kromme K op een interval I minstens 2 keer afleidbaar is.

- Indien $\forall x \in I : \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ grafiek van K is concaaf op I.
- Indien $\forall x \in I : \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ grafiek van K is convex op I.

§ 2.9 Buigpunt

BEELDVORMING: van concaaf naar convex of omgekeerd !





Eigenschap (voldoende voorwaarde voor bereiken van buigpunt)

Veronderstel dat in een omgeving van x_0 de kromme K minstens 2 keer afleidbaar is (x_0 zelf eventueel uitgezonderd).

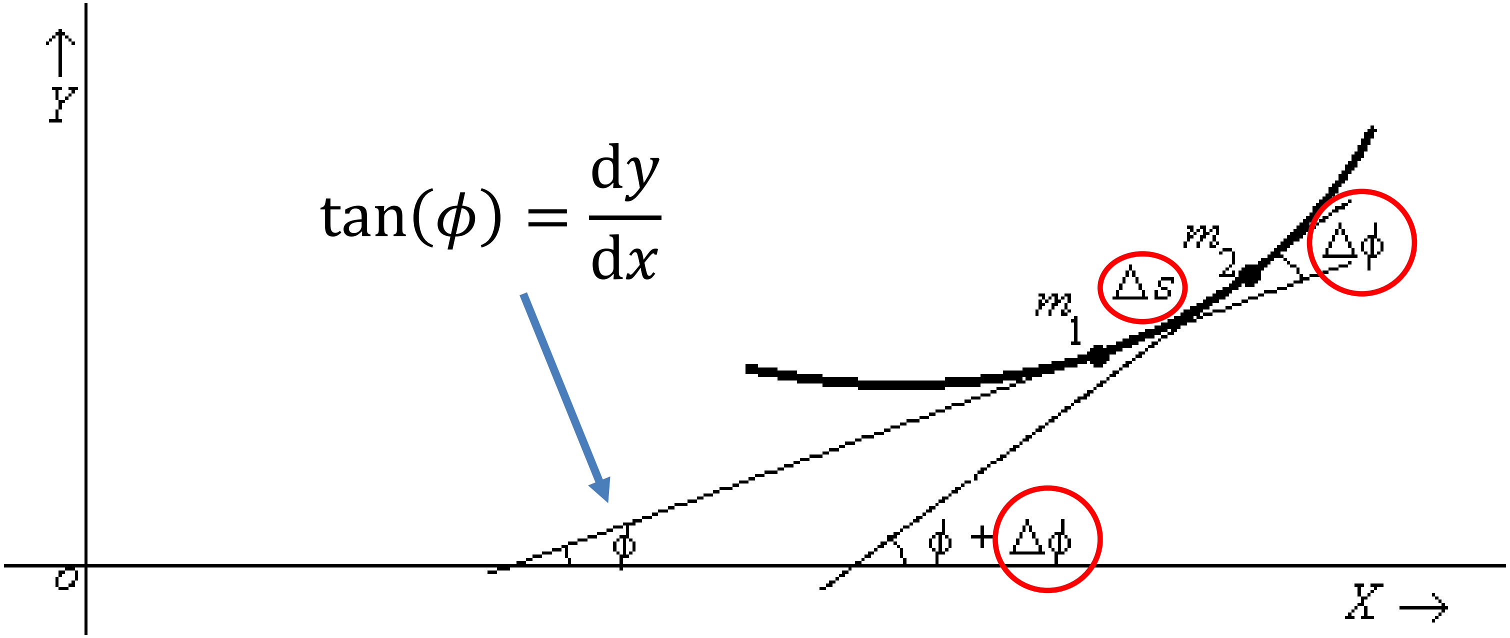
$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ verandert van teken in } x_0 \;\Rightarrow\; K \text{ heeft een buigpunt in } x_0.$$

LET OP ! Bij een (echt) buigpunt hoeft de raaklijn **niet** horizontaal te liggen !

§ 2.10 (Gemiddelde) kromming

Contingentiehoek $(\Delta\phi)$

= hoek tussen de raaklijnen tussen 2 punten van de kromme



Gemiddelde kromming $(\Delta\phi / \Delta s)$

§ 2.10 (Ogenblikkelijke) kromming

Limietdefinitie ogenblikkelijke kromming

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds} \Big|_{s=0}$$

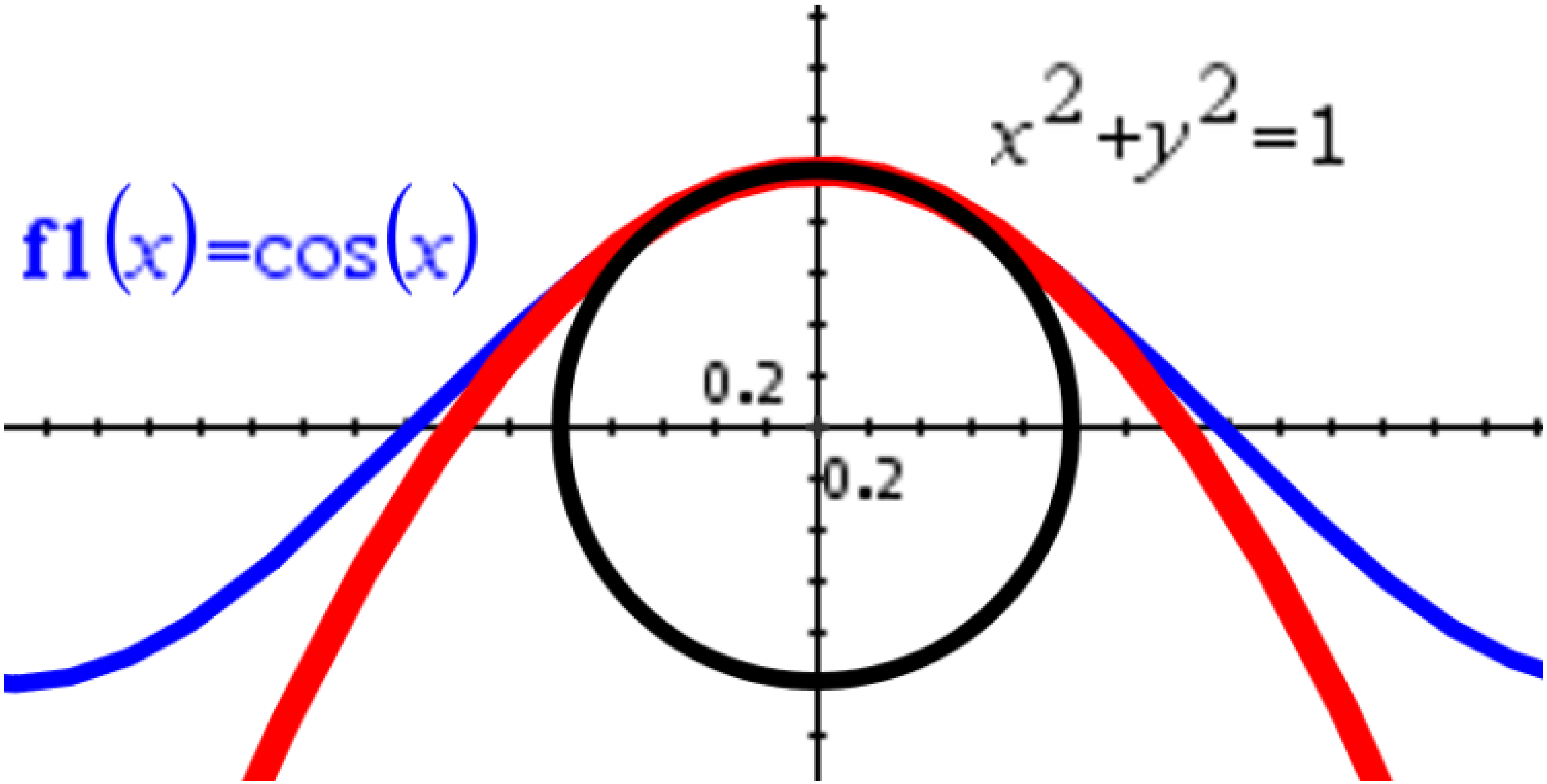
Praktische berekening: kettingregelformule!

$$K = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \boxed{= \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}}$$

Definitie kromtestraal :

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|}$$

Kromtecirkel ←→ Benaderingsparabool



Formule benaderingsveelterm van graad 2

VOORSTEL: $p_2(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot (x - x_0) + \boldsymbol{c} \cdot (x - x_0)^2$

DRIE EISEN nodig om a, b en c vast te leggen!

$$p_2(x_0) = f(x_0) \qquad \boldsymbol{a} = f(x_0)$$

$$p_2{}'(x_0) = f'(x_0) \qquad \boldsymbol{b} = f'(x_0)$$

$$p_2{}''(x_0) = f''(x_0) \qquad 2\boldsymbol{c} = f''(x_0)$$

BESLUIT

DAL- of BERGparabool naargelang teken !!

$$p_2(x) = f(x_0) + \underbrace{\boldsymbol{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}} + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2$$

= 0 (in geval van een extremum !)

H3: Benaderingsveelterm-mechanisme

KERN VAN DE ZAAK:

Een functie f(x) kan je rond een punt $x = a$ benaderen door een veeltermfunctie $p_k(x)$ van willekeurige graad *k* :

$$f(x) = p_k(x) + R_k(x)$$

Vlot kunnen opstellen !!

restterm of afbreekfout

hier bestaan formules voor, deze moet je echter niet kunnen opstellen (§ 3.3.5 valt weg)

Notatie in cursustekst x_0 ||

REKENTOESTEL-commando : $\text{taylor}(f(x), x, k, a)$

UHASSELT KU LEUVEN

kde orde benaderingsveelterm → Taylorreeks

Analoog aan de benadering door een eerste- of tweedegraadsveelterm kan je een functie rond een punt $x = x_0$ benaderen door een veeltermfunctie van willekeurige graad k:

$$f(x) \approx p_k(x)$$

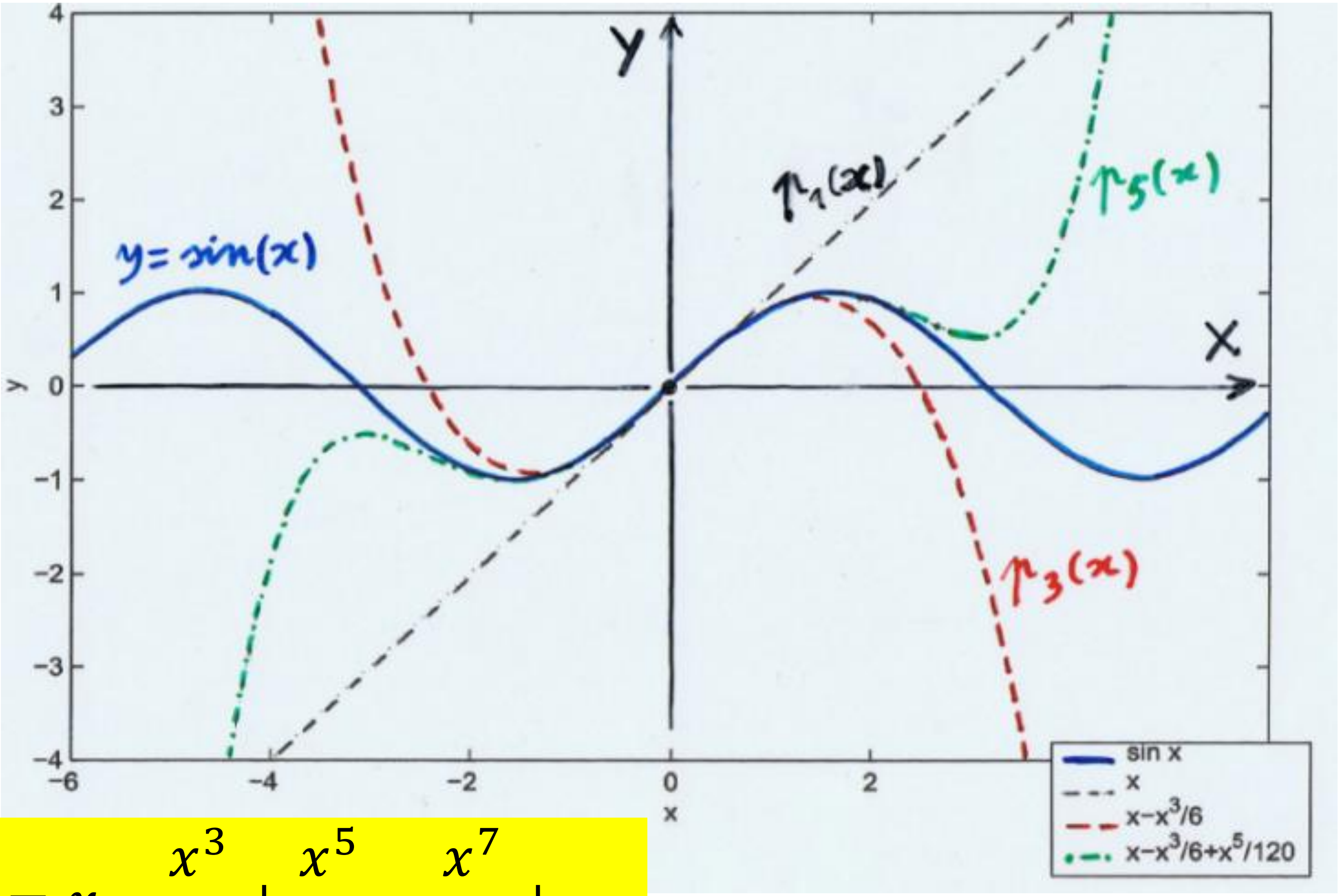
$$\begin{aligned} p_k(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &\overset{notatie}{=} \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

$k \to \infty$ ⇒ TAYLORREEKS

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Benaderingsveeltermen van sin(x) rond 0

VOORBEELD



$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

UHASSELT KU LEUVEN

Overzicht belangrijke “MacLaurinreeksen”

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots && \forall x \in \left]-1,1\right[\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots && \forall x \in \left]-1,1\right[\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots && \forall x \in \mathbb{R}\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots && \forall x \in \mathbb{R}\\
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots && \forall x \in \mathbb{R}\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots && \forall x \in \left]-1,1\right]
\end{aligned}$$

ANDERE “wonderbaarlijke” formule is

FORMULE van EULER : $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

Hoofdstuk 4: Functies in meer veranderlijken

VAAK TWEE ! $f: \mathrm{IR}^2 \rightarrow \mathrm{IR} : (x, y) \mapsto z = f(x, y)$

Dezelfde vragen als in H1 en H2 komen terug!

DERDE DIMENSIE !!

Domein ??

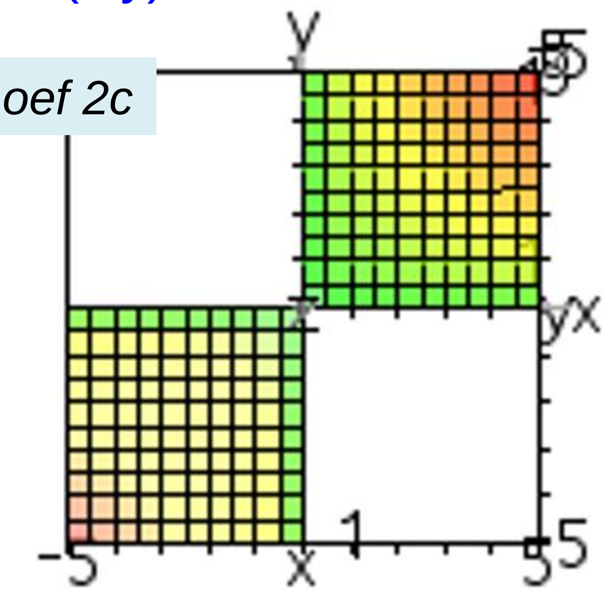
= deelverzameling van IR² en bevat alle puntenkoppels (x,y) waarvoor z = f(x,y) bestaat.

Voorbeeld: $z = f(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$

Oefenbundel, oef 2c

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$$

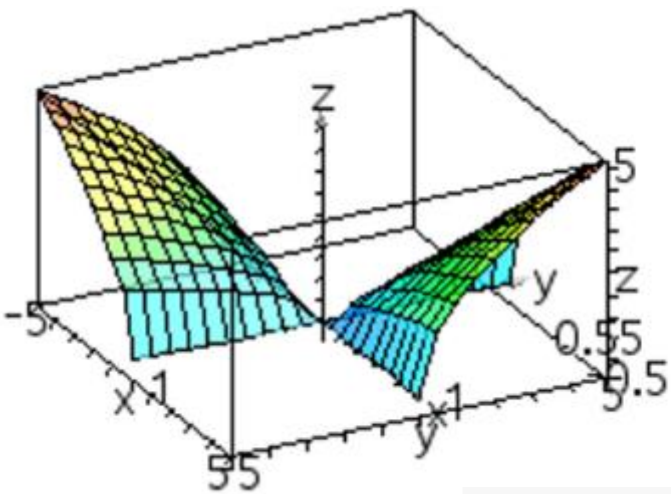
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x\&y \geq 0 \ \text{ OF } \ x\&y \leq 0\}$$



Hoe grafisch voorstellen ??

Voorbeeld: $z = f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$

3D voorstelling

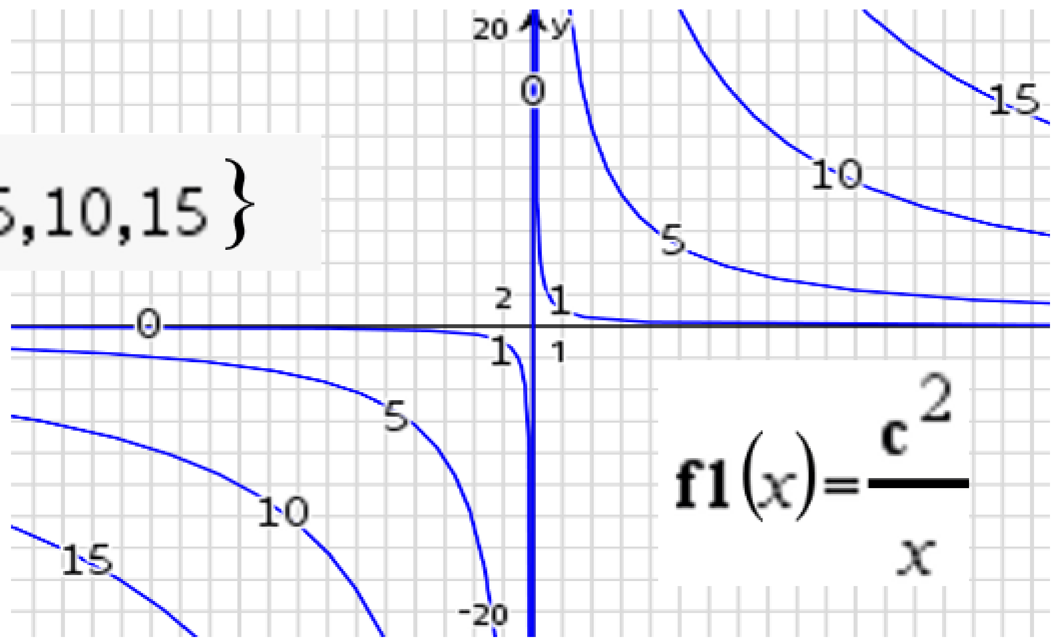


2D NIVEAULIJNENKAART

$$\{(x,y) \in \operatorname{dom}(f) \mid \sqrt{x \cdot y} = c\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \operatorname{dom}(f) \mid y = \frac{c^2}{x}\right\} \qquad c \geq 0$$

$c := \{1, 5, 10, 15\}$

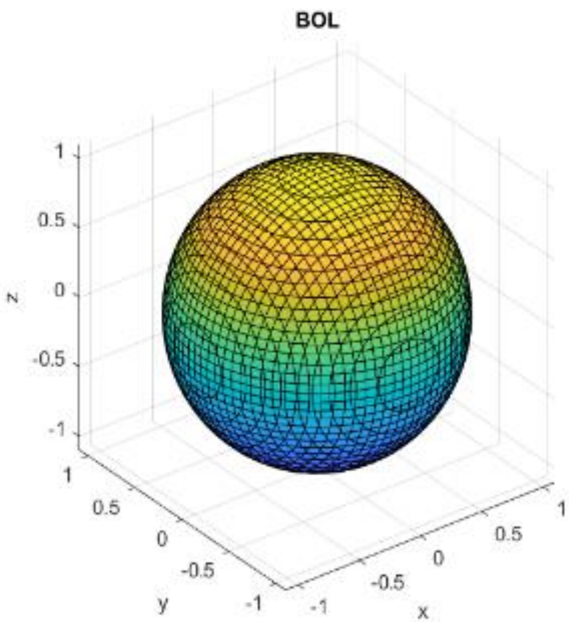


ZIE OOK op TOLEDO
DEMO-VIDEO !

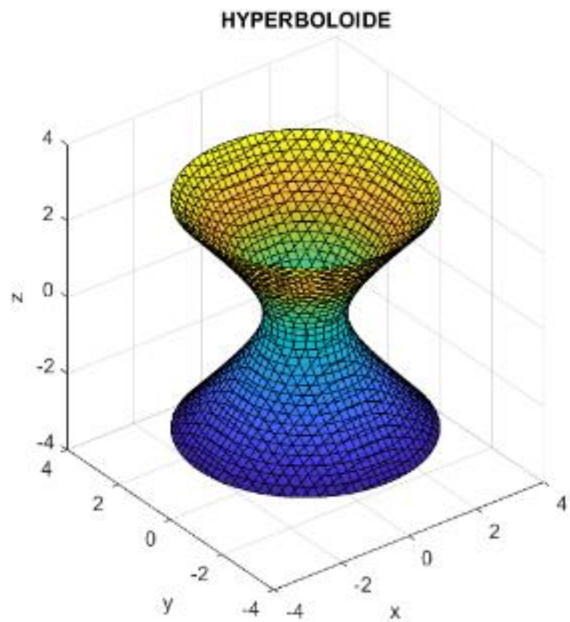
UHASSELT KU LEUVEN

BESTAAN ER OOK IMPLICIETE OPPERVLAKKEN ?

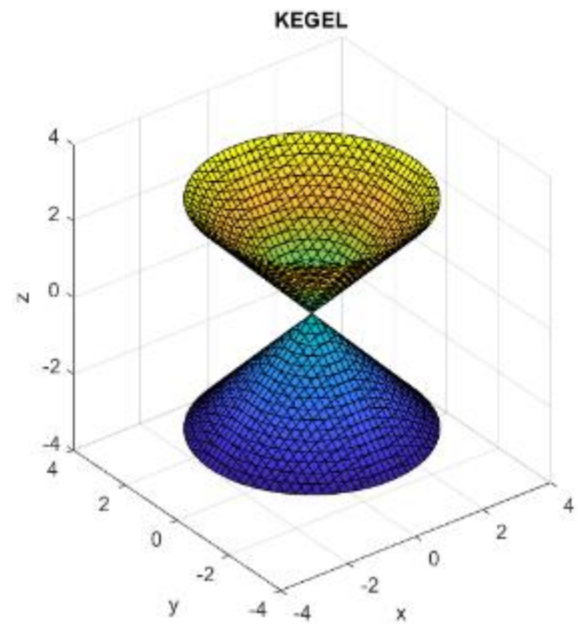
2D: KEGELSNEDEN → 3D: KWADRIEKEN



$x^2 + y^2 + z^2 = 1$



$x^2 + y^2 - z^2 = 1$



$x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Algemene vergelijking:

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2b\, xy + 2c\, xz + 2d\, yz + ex + fy + gz + h = 0$$

HOE FUNCTIE in 2 variabelen AFLEIDEN ?

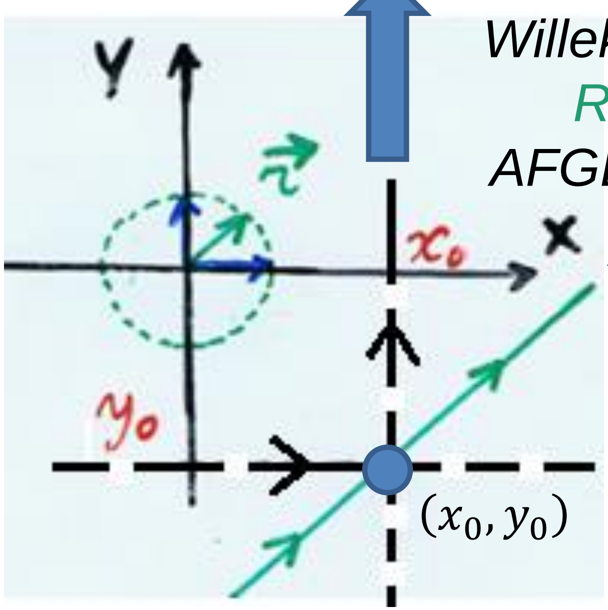
Afhankelijk van de richting !!

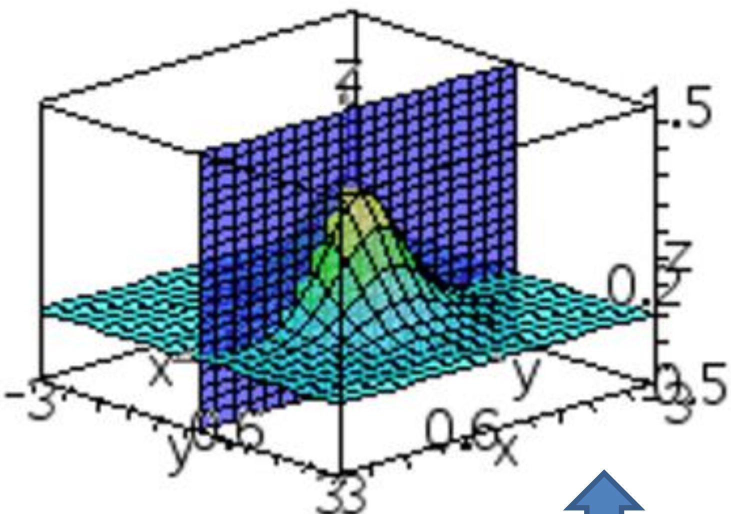
Er zijn 2 hoofdrichtingen: // met x-as of // met y-as

PARTIEEL AFLEIDEN naar x of naar y

Partiële functie: $z = f(x_0, y)$

Willekeurige richting:
RICHTINGS-
AFGELEIDE (§ 4.5)





Partiële functie: $z = f(x, y_0)$
= doorsnede van 3D-opp
met verticaal vlak $y = y_0$!!

Concrete berekening partiële afgeleiden

BELANGRIJK: alle rekenregels zoals productregel en kettingregel blijven gelden!
Wanneer je (partieel) afleidt naar een veranderlijke gedragen alle andere veranderlijken die in het spel zijn zich als een constante!

VOORBEELDEN Als $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ dan is

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(-x^2-y^2) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cdot (-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(-x^2-y^2) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cdot (-2y)$$

REKENTOESTEL CONTROLE IS PERFECT MOGELIJK!

$$\frac{d}{dx}\left(\mathbf{e}^{-x^2-y^2}\right) \qquad -2\cdot x\cdot \mathbf{e}^{-x^2-y^2}$$

Hogere orde partiële afgeleiden (§ 4.3)

INTERPRETATIE: de partiële afgeleide van een landschap *z = f(x,y)* stelt opnieuw een landschap voor waarop je kan rondlopen in een x- of y-richting en bijgevolg de hellingsgraad kan van berekenen.

EIGENSCHAP

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

VW: PARTIELE AFGELEIDEN VAN 2^e ORDE BESTAAN EN ZIJN CONTINU

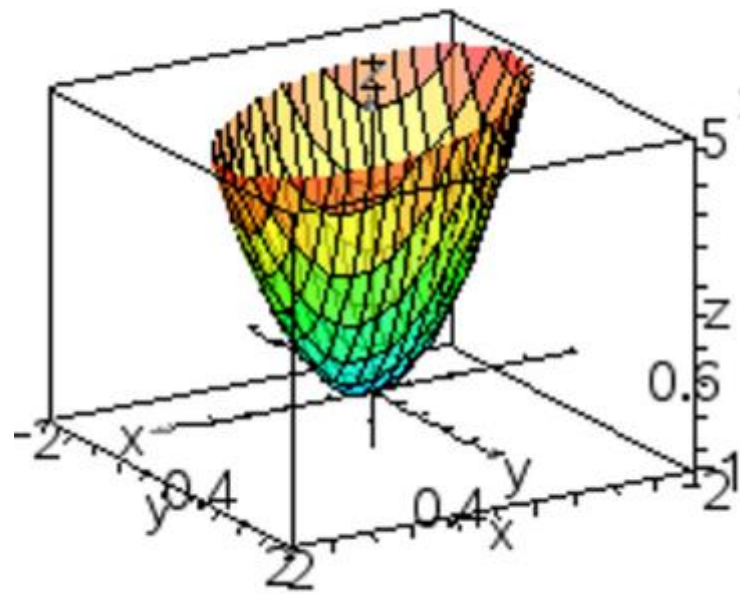
Hogere orde partiële afgeleiden (§ 4.3)

VOORBEELD

Als $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2$ dan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 8y$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(4x - 3y) = 4 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(4x - 3y) = -3 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(-3x + 8y) = -3 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(-3x + 8y) = 8
\end{aligned}$$



$$\frac{d^2}{dx^2}\left(2\cdot x^2 - 3\cdot x\cdot y + 4\cdot y^2\right) \qquad 4$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}\left(2\cdot x^2 - 3\cdot x\cdot y + 4\cdot y^2\right)\right) \qquad -3$$

Kan je ook impliciet partieel afleiden?

JA !

Denk eraan: z = functieletter, x = veranderlijke, y = constante !!

Gegeven is het kwadriek: $5x^2 - 9y^2 + 2z^2 - 12xy + 6yz = 0$. Impliciet partieel afleiden naar x geeft dan

$$10x + 4z\frac{\partial z}{\partial x} - 12y + 6y\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6y - 5x}{3y + 2z}.$$

Nu is x constant en y veranderlijk !!

Impliciet partieel afleiden naar y levert op:

PRODUCTREGEL !!

$$-18y + 4z\frac{\partial z}{\partial y} - 12x + \boxed{6z + 6y\frac{\partial z}{\partial y}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6x + 9y - 3z}{3y + 2z}.$$

Rekentoestel-controle is perfect mogelijk!

→ impDif-commando werkt ook in deze context !

$$\text{impDif}\left(5\cdot x^2-9\cdot y^2+2\cdot z^2-12\cdot x\cdot y+6\cdot y\cdot z=0,y,z,1\right) \qquad \frac{3\cdot(2\cdot x+3\cdot y-z)}{3\cdot y+2\cdot z}$$