Lesweek 4 : Convexiteit, buigpunten, kromming en benaderingsveeltermen

Cursustekst HOOFDSTUK 2, §2.9 tot §2.10

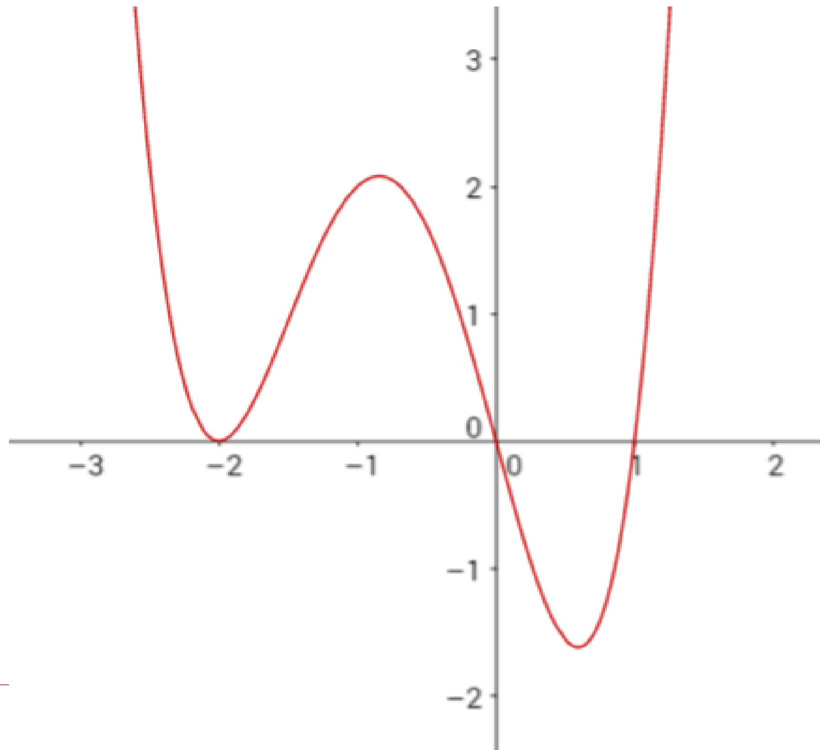
+ HOOFDSTUK 3

Vorige keer: extremum-controle

Eigenschap 2 (tweede voldoende voorwaarde voor bereiken van extremum)

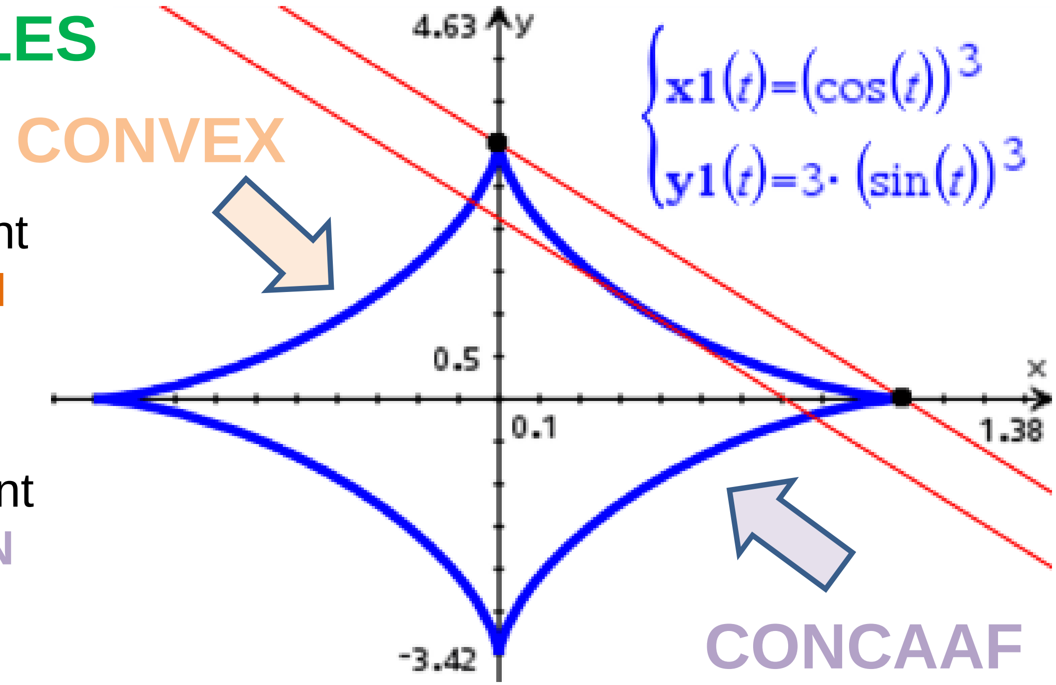
Gegeven is een kromme K die minstens tweemaal afleidbaar is in een omgeving van x_0.

- $y'(x_0) = 0$ en $y''(x_0) < 0 \Rightarrow K$ heeft een maximum in x_0
- $y'(x_0) = 0$ en $y''(x_0) > 0 \Rightarrow K$ heeft een minimum in x_0



§ 2.9 Convex ←→ Concaaf

VOORBEELD VORIGE LES



$$\begin{cases} x1(t) = (\cos(t))^3 \\ y1(t) = 3 \cdot (\sin(t))^3 \end{cases}$$

KROMME ligt in 1^e en 2^e kwadrant volledig **BOVEN elke RAAKLIJN**

KROMME ligt in 3^e en 4^e kwadrant volledig **ONDER elke RAAKLIJN**

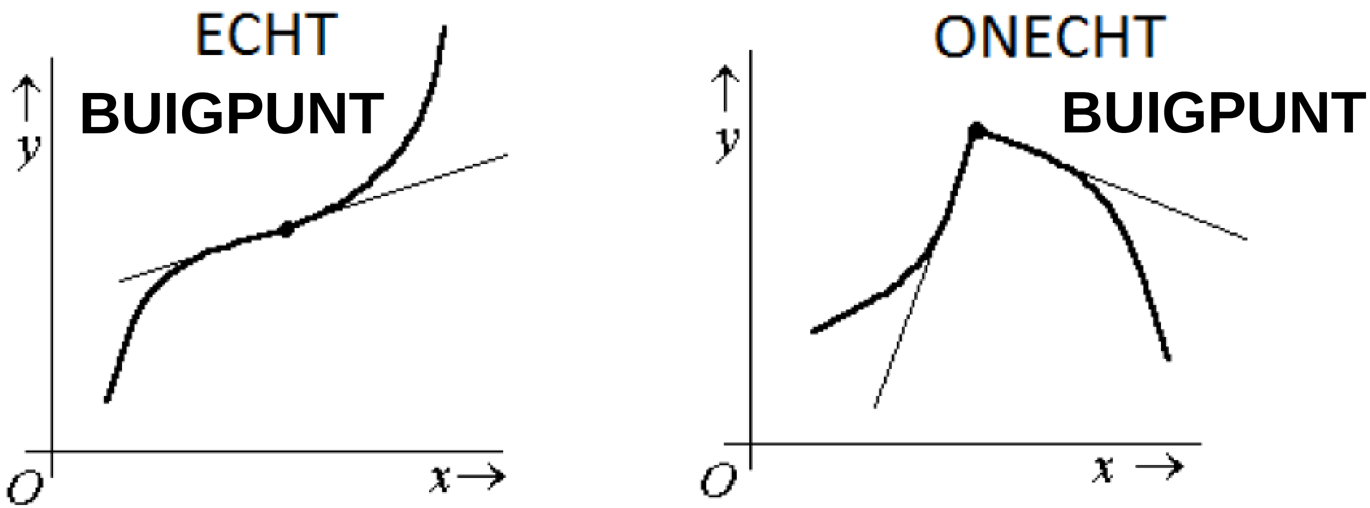
Eigenschap (voldoende voorwaarde voor concaaf/convex)

Veronderstel dat de kromme K op een interval I minstens 2 keer afleidbaar is.

- Indien $\forall x \in I : \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ grafiek van K is concaaf op I.
- Indien $\forall x \in I : \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ grafiek van K is convex op I.

§ 2.9 Buigpunt

BEELDVORMING: van concaaf naar convex of omgekeerd !



Eigenschap (voldoende voorwaarde voor bereiken van buigpunt)

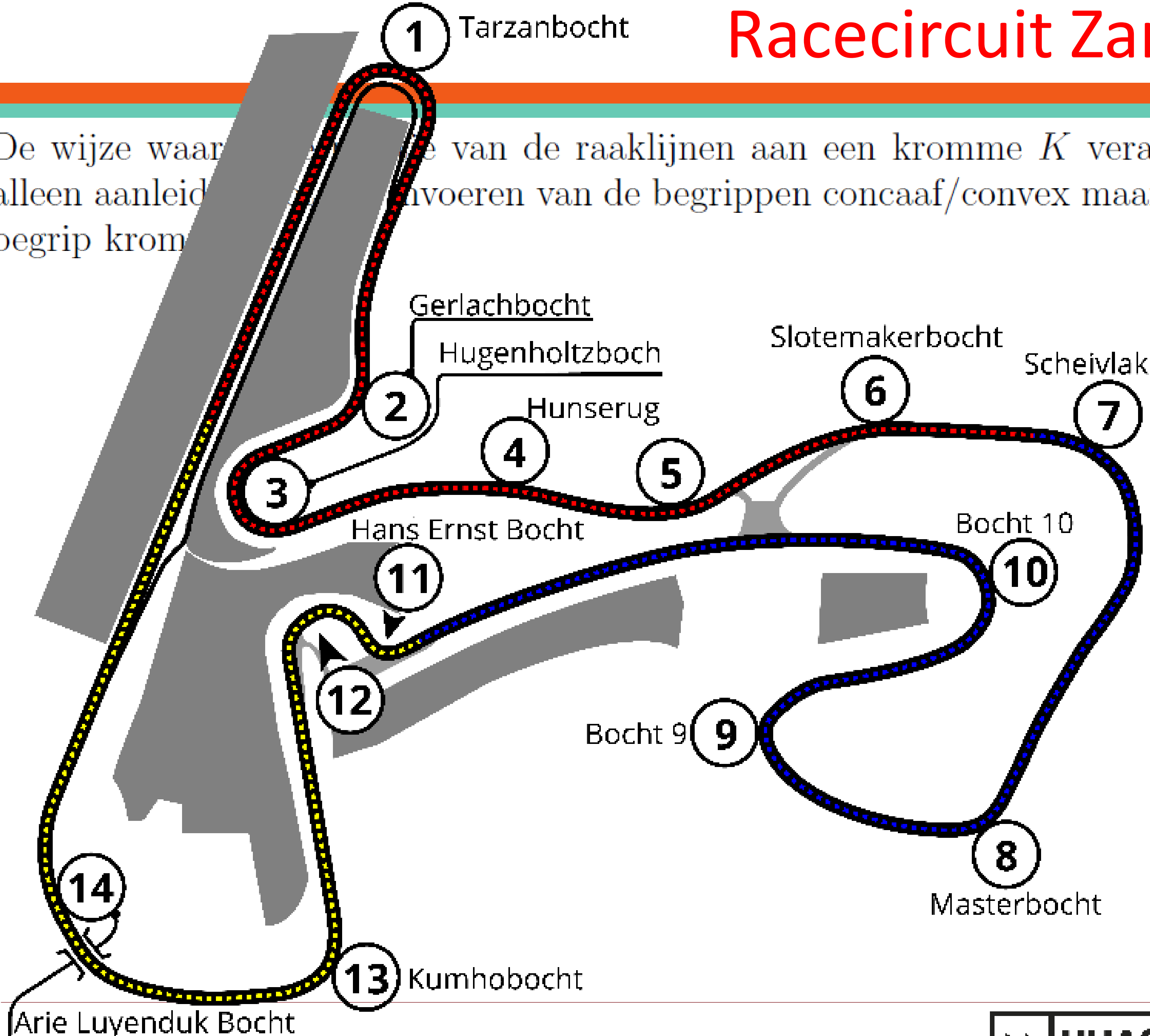
Veronderstel dat in een omgeving van x_0 de kromme K minstens 2 keer afleidbaar is (x_0 zelf eventueel uitgezonderd).

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ verandert van teken in } x_0 \Rightarrow K \text{ heeft een buigpunt in } x_0.$$

LET OP ! Bij een (echt) buigpunt hoeft de raaklijn **niet** horizontaal te liggen !

Racecircuit Zandvoort

De wijze waar ... e van de raaklijnen aan een kromme K verandert, geeft niet alleen aanleid ... nvoeren van de begrippen concaaf/convex maar ook nog tot het begrip krom ...



UHASSELT

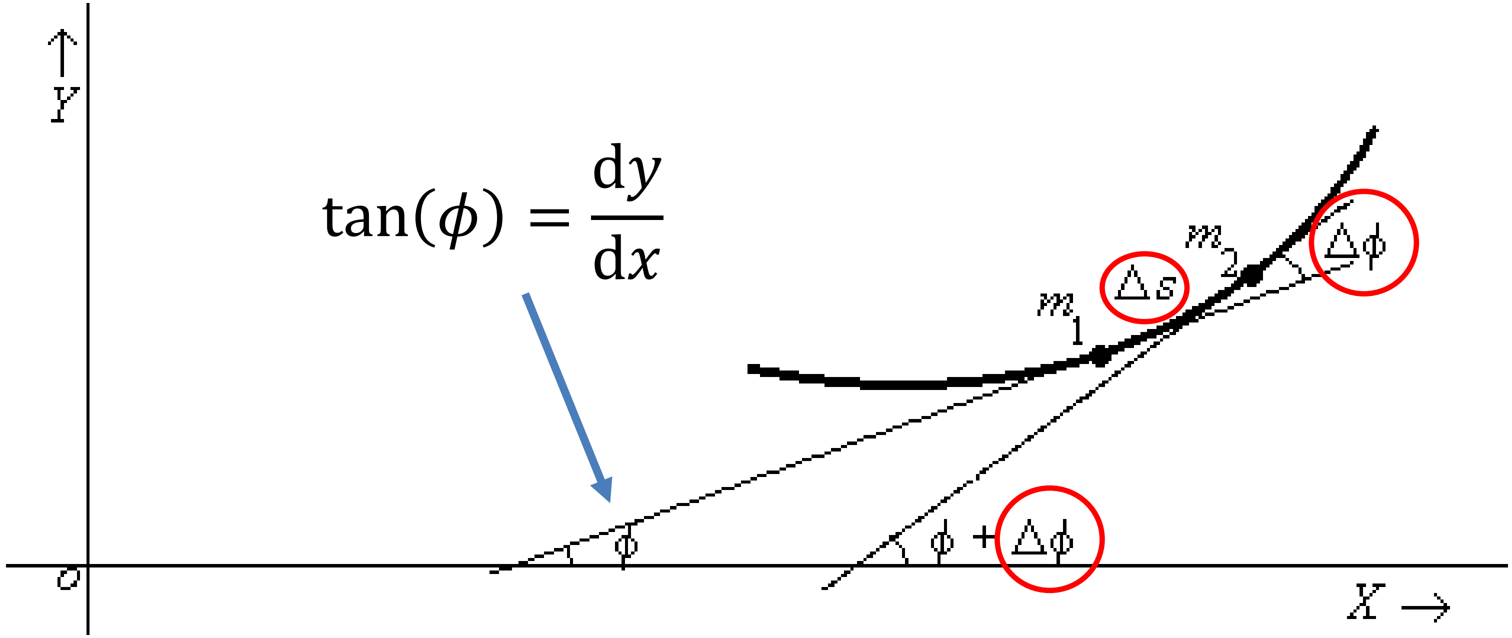
KU LEUVEN

§ 2.10 (Gemiddelde) kromming

Contingentiehoek $(\Delta\phi)$

= hoek tussen de raaklijnen tussen 2 punten van de kromme

$$\tan(\phi) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$



Gemiddelde kromming $(\Delta\phi / \Delta s)$

§ 2.10 (Ogenblikkelijke) kromming

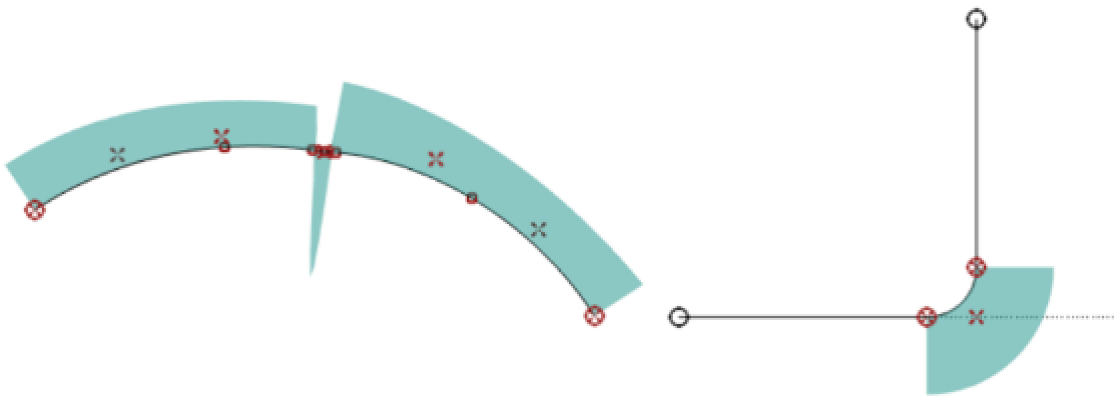
Limietdefinitie ogenblikkelijke kromming

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds}\Big|_{s=0}$$

Praktische berekening: kettingregelformule!

$$K = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \boxed{= \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}}$$

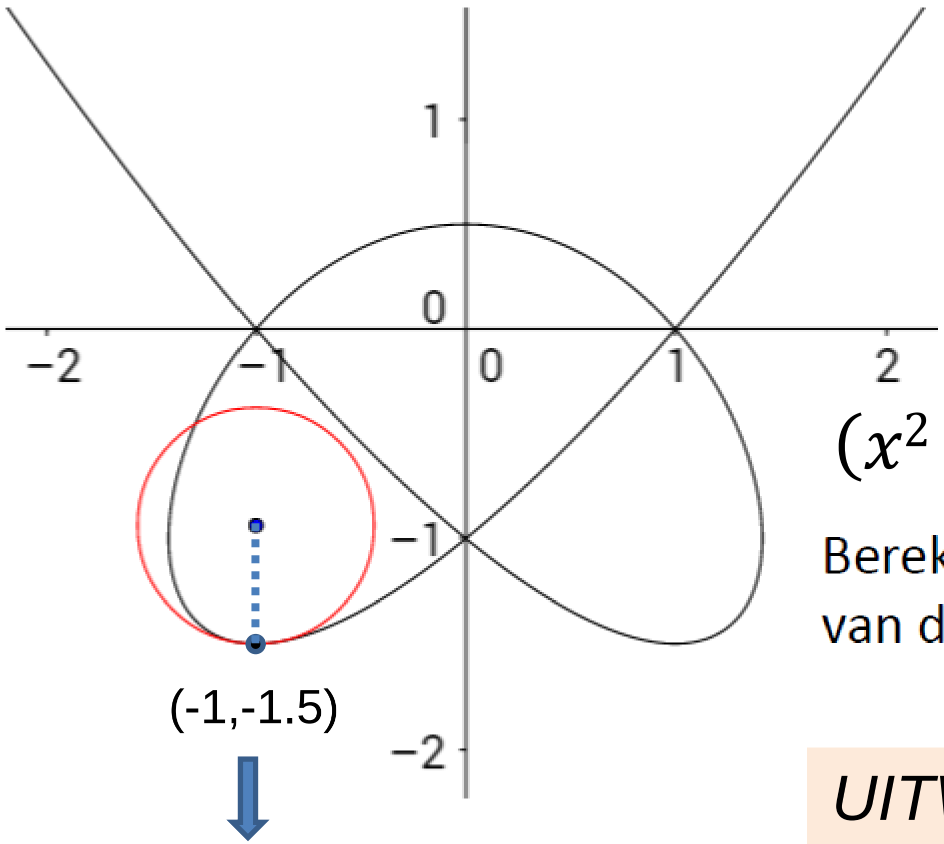
TOEPASSING “krommingsplot”



§ 2.10 Voorbeeld Kromtecirkel

Definitie kromtestraal :

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|}$$



Straal kromtecirkel = 9/16

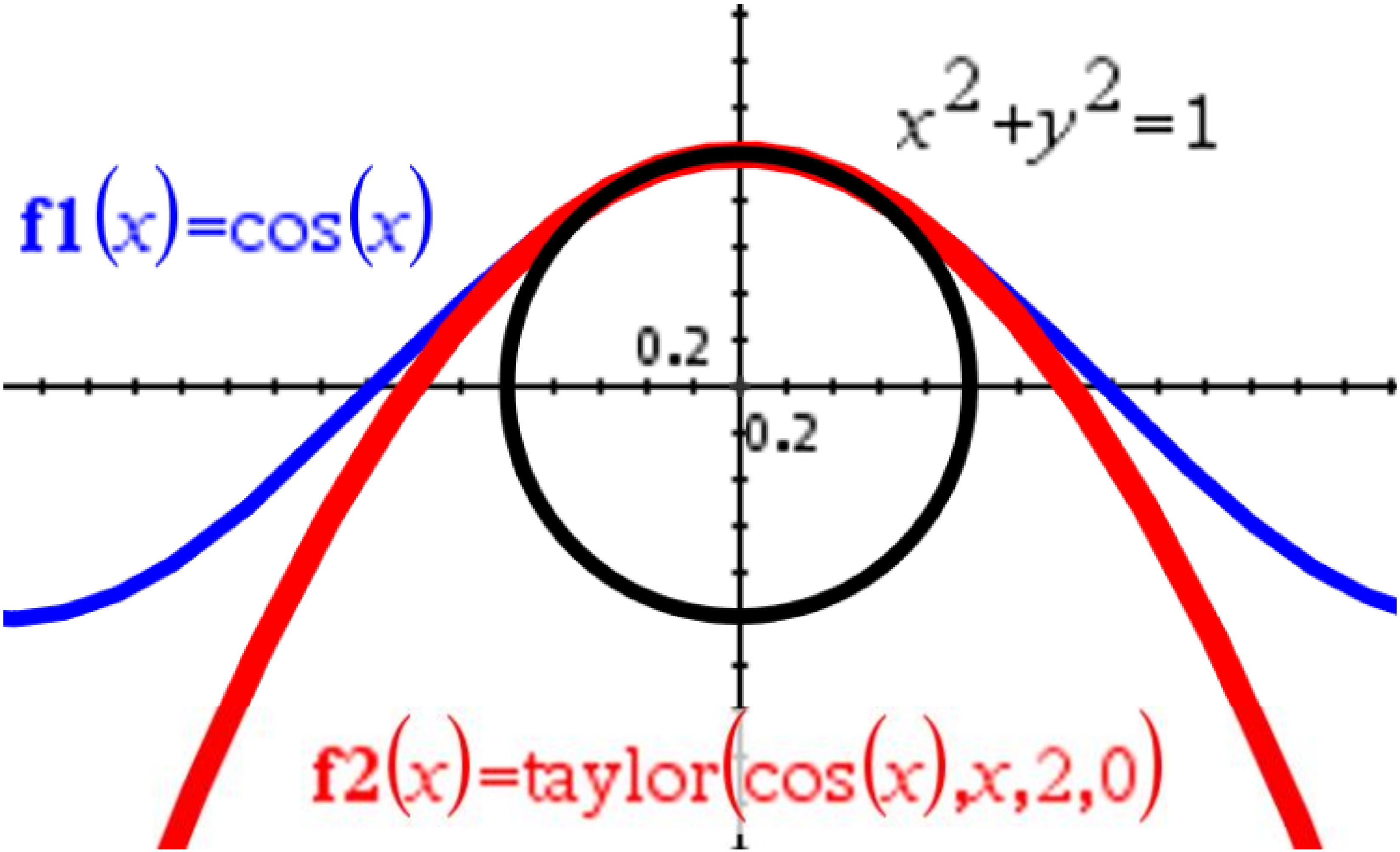
Voorbeeld:

$$(x^2 - 1)^2 - y^2(3 + 2y) = 0$$

Bereken de kromtestraal in het minimum van deze kromme in het 3e kwadrant.

UITWERKING: zie ook lesvideo!

Kromtecirkel ←→ Benaderingsparabool



Benaderingsveelterm-mechanisme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$$

Als we kijken naar de partieelsommen van een machtreeks, dan stellen we vast dat dit veeltermen zijn waarvan de graad stelselmatig oploopt.

KERN VAN DE ZAAK:

Een functie f(x) kan je rond een punt $x = a$ benaderen door een veeltermfunctie $p_k(x)$ van willekeurige graad *k* :

$$f(x) = p_k(x) + R_k(x)$$

Vlot kunnen opstellen !!

restterm of afbreekfout

hier bestaan formules voor, deze moet je echter niet kunnen opstellen (§ 3.3.5 valt weg)

LOGISCHE VRAAG. Hoe zien $p_2(x), p_3(x), \ldots$ eruit ?

Notatie in cursustekst x_0 $=$

REKENTOESTEL-commando : $\text{taylor}(f(x), x, k, a)$

UHASSELT KU LEUVEN

Formule benaderingsveelterm van graad 2

VOORSTEL: $p_2(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot (x - x_0) + \boldsymbol{c} \cdot (x - x_0)^2$

DRIE EISEN nodig om a, b en c vast te leggen!

$$\begin{aligned} p_2(x_0) &= f(x_0) \\ {p_2}'(x_0) &= f'(x_0) \\ {p_2}''(x_0) &= f''(x_0) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \boldsymbol{a} &= f(x_0) \\ \boldsymbol{b} &= f'(x_0) \\ 2\boldsymbol{c} &= f''(x_0) \end{aligned}$$

BESLUIT

DAL- of BERGparabool naargelang teken !!

$$p_2(x) = f(x_0) + \underbrace{\boldsymbol{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}}_{= 0 \text{ (in geval van een extremum !)}} + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2$$

kde orde benaderingsveelterm → Taylorreeks

Analoog aan de benadering door een eerste- of tweedegraadsveelterm kan je een functie rond een punt $x = x_0$ benaderen door een veeltermfunctie van willekeurige graad k:

$$f(x) \approx p_k(x)$$

$$p_k(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \overset{notatie}{=} \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$k \to \infty$ ⇨ TAYLORREEKS

BESLUIT

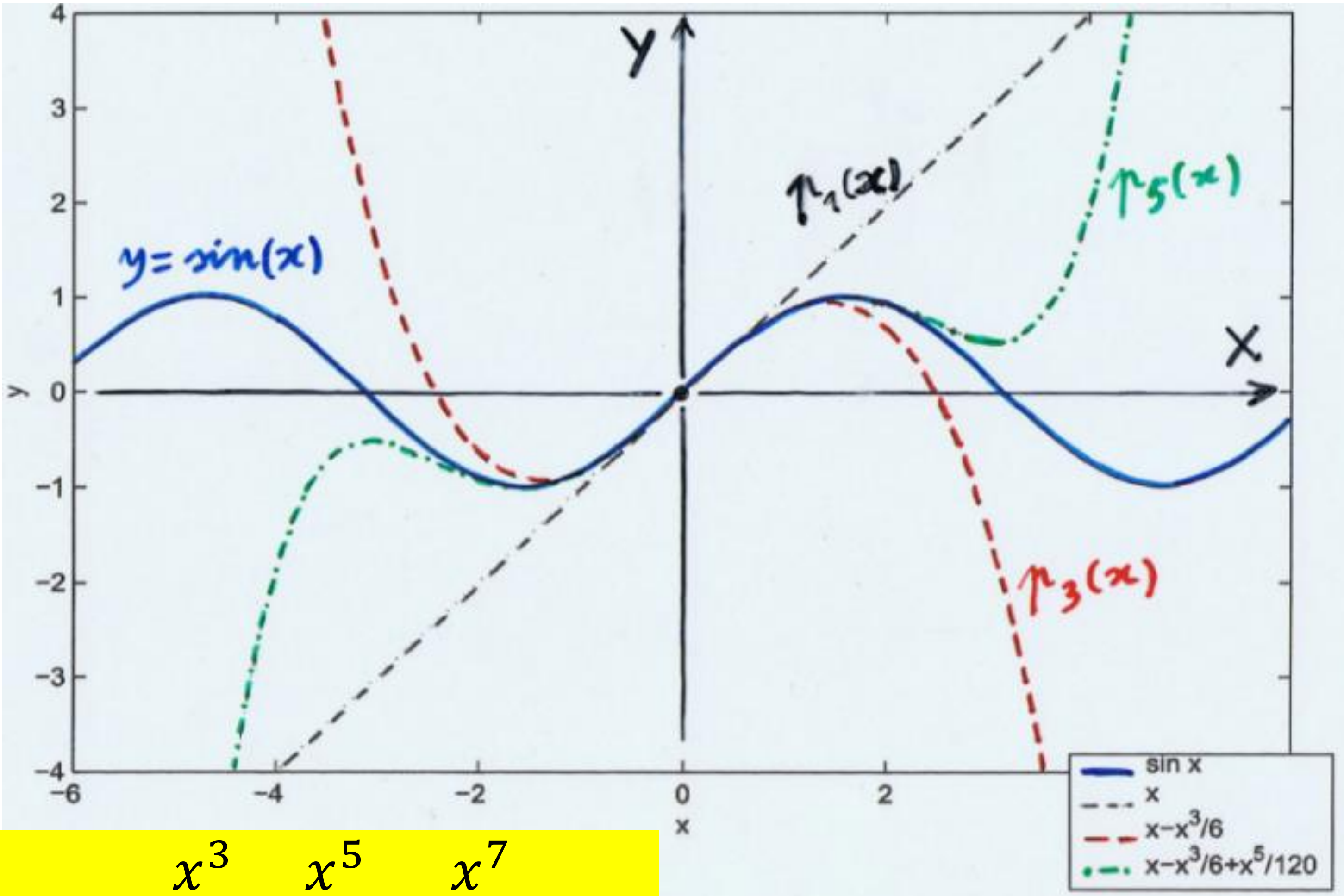
Let op de notatie! Haakjes rond *n* zijn cruciaal (anders machten) !!

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

De gelijkheid *p(x) = f(x)* geldt daarbij enkel voor alle *x*-waarden in het convergentiegebied

Opmerking: synoniem voor convergentiegebied is convergentiedomein.

VB: benaderingsveeltermen van sin(x) rond 0



$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Voorbeeld: MacLaurinreeks van sin(x)

$$\sin(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!}}_{\text{taylor(sin(x), x, 3, 0)}} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

taylor(sin(x), x, 3, 0)

Reeksontwikkeling volgens Maclaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots$$

3. Derde orde benadering voor de sinusfunctie rond de oorsprong.
   a) Bepaal de 3de orde MacLaurinbenadering $p_3(x)$ voor $\sin(x)$.
   b) Wat is de **absolute** fout van deze benadering voor $x = \frac{\pi}{10}$? Vergelijk hiervoor de benaderende waarde met de "echte" waarde van $\sin\left({}^{\pi}/_{10}\right)$.
   c) Wat is de **relatieve** fout $\left|\frac{f(x)-p_3(x)}{f(x)}\right|$ van deze benadering voor $x = \frac{\pi}{10}$?
   d) Voor welke x-waarden kan je de 3de orde benadering in de buurt van 0 gebruiken, als de relatieve fout niet groter mag zijn dan 5%?

= oefening 3, pagina 31 (oefenbundel)

Overzicht belangrijke MacLaurinreeksen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots && \forall x \in \,]-1,1[\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots && \forall x \in \,]-1,1[\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots && \forall x \in \mathbb{R}\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots && \forall x \in \mathbb{R}\\
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots && \forall x \in \mathbb{R}\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots && \forall x \in \,]-1,1]
\end{aligned}$$

ANDERE “wonderbaarlijke” formule is

FORMULE van EULER : $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$