Hoofdstuk 3 – Kinetica van een puntmassa: arbeid en energie

Eric Demeester

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

Overzicht H1 t.e.m. H8

H1 – H2 – H3 – H4 → Puntmassa's, waarvoor oriëntatie niet van belang is

H5 – H6 – H7 – H8 → Starre lichamen, waarvoor oriëntatie van belang is

Kinematica (H1 / H5)

$v = ds/dt$

$a = dv/dt$

$a \cdot ds = v \cdot dv$

Tweede wet van Newton (H2 / H6)

$\Sigma F = m \cdot a$

- momentopname

Arbeid en energie (H3 / H7)

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **plaats**:

$\Sigma \int F \cdot ds = m \cdot v_2^2 / 2 - m \cdot v_1^2 / 2$

- 2 discrete plaatsen
- Enkel conservatieve krachten => behoud van mechanische energie: $T1 + V1 = T2 + V2$

Stoot en hoeveelheid van beweging (H4 / H8)

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **tijd** en gebruik $a = dv/dt$:

$\Sigma \int F \cdot dt = m \cdot v_2 - m \cdot v_1$

- 2 discrete tijdstippen
- Behoud van hoev. v. beweging:
  - Geen externe stoten
  - Botsingen en explosies

Overzicht H1 t.e.m. H8

Basisformules voor de dynamica

KINEMATICA

H1

Rechtlijnige beweging van een puntmassa

variabele a	constante $a = a_c$
$a = \frac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \frac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a\,ds = v\,dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Kromlijnige beweging van een puntmassa

x-, y-, z-coördinaten		r-, θ-, z-coördinaten	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

n-, t-, b-coördinaten

$v = \dot{s}$ $\qquad a_t = \dot{v} = v\frac{dv}{ds}$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad \rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

Relatieve beweging

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

H5

Beweging van een star lichaam om een vaste as

variabele α	constante $\alpha = \alpha_c$
$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

Voor punt P

$s = \theta r \qquad v = \omega r \qquad a_t = \alpha r \qquad a_n = \omega^2 r$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{scharnier})} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{scharnier})}$

Relatieve algemene beweging in het platte vlak—translerende en roterende assen

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \times (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

KINETICA

H6

Massatraagheidsmoment	$I = \int r^2\,dm$
Evenwijdige-assenstelling	$I = I_G + md^2$
Gyrostraal	$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$

H2

Bewegingsvergelijkingen

Puntmassa	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

H6

Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

H3

Principe van arbeid en energie

$T_1 + U_{1-2} = T_2$

Kinetische energie

Puntmassa	$T = \frac{1}{2}mv^2$

H7

Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

Arbeid

Variabele kracht	$U_F = \int F\cos\theta\,ds$
Constante kracht	$U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$
Gewicht	$U_W = -W\,\Delta y$
Veer	$U_s = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$
Koppelmoment	$U_M = M\,\Delta\theta$

Vermogen en rendement

$P = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad \epsilon = \frac{P_{\text{uit}}}{P_{\text{in}}} = \frac{U_{\text{uit}}}{U_{\text{in}}}$

Wet van behoud van energie

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potentiële energie

$V = V_g + V_e$, waarbij $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

H4

Principe van stoot en impuls

Puntmassa	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int\mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$
Star lichaam	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int\mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Behoud van impuls

$\Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{st. } m\mathbf{v})_2$

Restitutiecoëfficiënt $\quad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

H8

Principe van stootmoment en impulsmoment

Puntmassa	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int\mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = (d)(mv)$
Star lichaam (beweging in het platte vlak)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int\mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$ waarbij $H_G = I_G\omega$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int\mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ waarbij $H_O = I_O\omega$

Behoud van impulsmoment

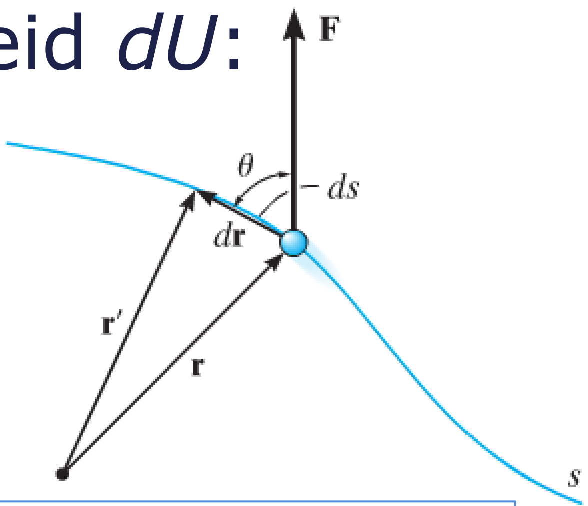
$\Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{st. } \mathbf{H})_2$

UHASSELT KU LEUVEN

3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

- Definitie: elementaire arbeid *dU*:

$$dU = F\,ds\cos\theta$$



- Alternatieve schrijfwijze:

$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

"Scalair" of "inwendig" product;
$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0;\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1$

- Arbeid *U* t.g.v. een veranderlijke kracht:

$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\theta\,ds$$

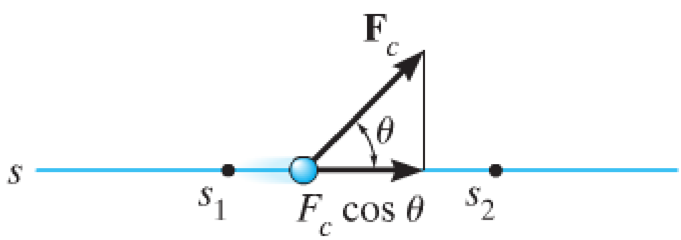
- Scalair ~~of vectorieel~~?
- Altijd positief? Neen!
- Eenheid? Joule: J = Nm

Een kracht levert arbeid als het een component heeft in de richting van de verplaatsing (en als verplaatsing ≠ 0)

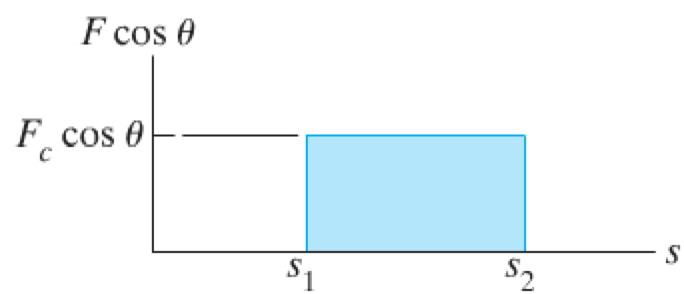
3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

- Speciaal geval 1: arbeid van constante kracht langs rechte lijn: grootte van kracht ($\boldsymbol{F_c}$) én hoek θ zijn constant

$$\boxed{U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos\theta \, ds}$$



$$U_{1-2} = F_c \cos\theta \int_{s_1}^{s_2} ds$$



$$\boxed{U_{1-2} = F_c \cos\theta (s_2 - s_1)} \qquad (3.2)$$

3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

- Speciaal geval 2: arbeid van gewicht

$$U_{1-2} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} -W\, dy = -W(y_2 - y_1)$$

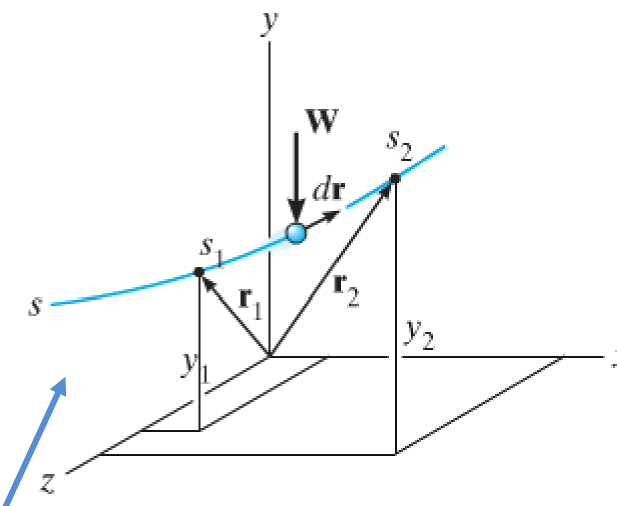


Fig. 3.4

  - Onafhankelijk van de gevolgde baan, enkel van Δy (dus enkel afh. van begin- en eindpunt)!

$$\boxed{U_{1-2} = -W\, \Delta y}$$

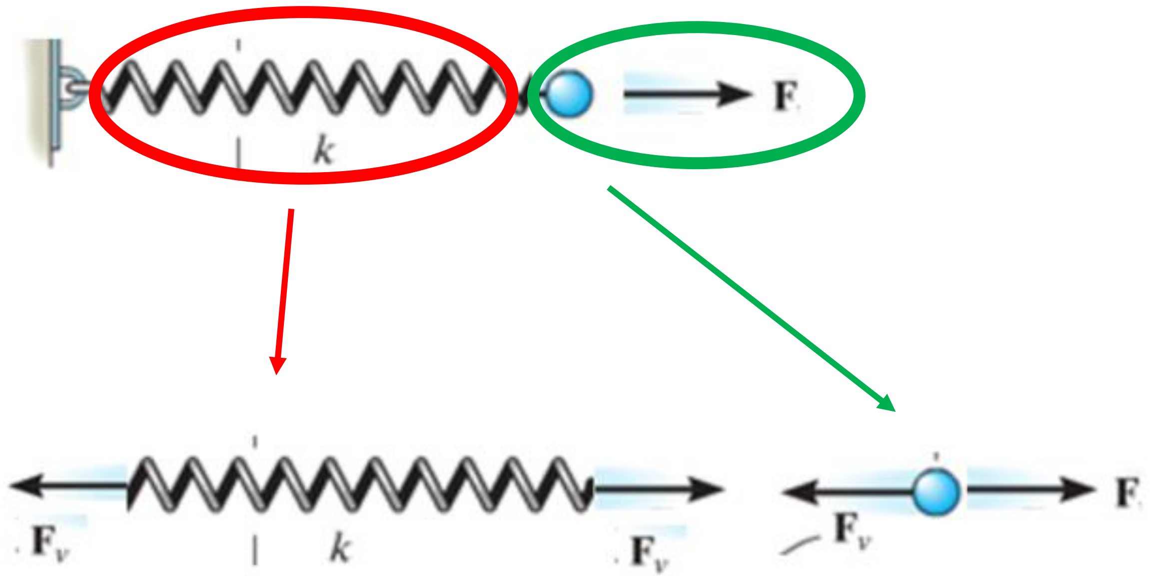
Levert het gewicht pos./neg. arbeid als we van beneden naar boven bewegen?

Achterliggende veronderstelling?

Y-as positief naar boven gericht!

3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

- Speciaal geval 3: kracht van een veer F_v



- Lineaire (ideale) veer: $F_v = k \cdot (l - l_0) = k \cdot s$
  - Met l_0 de rustlengte van de veer
  - Met l de veerlengte op een bepaald moment

3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

- Kracht van een veer

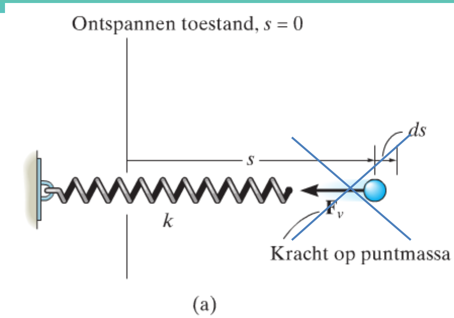
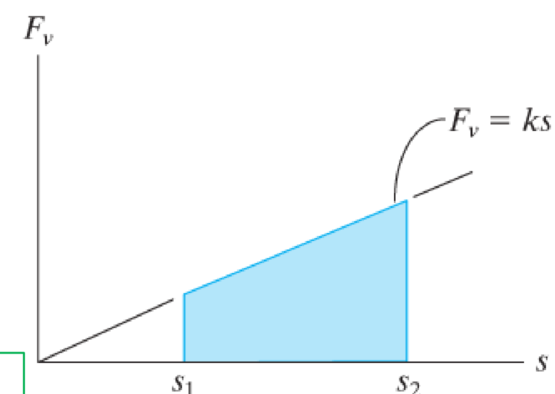


Fig. 3.5

- Arbeid door F_v op puntmassa: $dU = -F_v \,.\, ds$
- Grootte van de veerkracht $F_v = k.s$ (met s=0 de rusttoestand van de veer)

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} -F_v\, ds = \int_{s_1}^{s_2} -ks\, ds$$

$$\boxed{U_{1-2} = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)}$$



Onafhankelijk van de gevolgde baan, enkel van s_1 en s_2 (dus enkel afh. van begin- en einduitrekking)!

3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

$\boldsymbol{dU}$?	$ds \geq 0$	$ds \leq 0$
$s \geq 0$ Veer is uitgerokken	$-k \cdot s \cdot ds$	$-k \cdot s \cdot ds$
$s \leq 0$ Veer is ingeduwd	$-k \cdot s \cdot ds$	$-k \cdot s \cdot ds$

m.a.w. er geldt inderdaad: $dU_{veer} = -k \cdot s \cdot ds$, of s nu positief of negatief is, en of ds nu positief of negatief is;

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} -F_v\, ds = \int_{s_1}^{s_2} -ks\, ds \qquad (3.4)$$

$$\boxed{U_{1-2} = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)}$$

UHASSELT KU LEUVEN

3.2 Principe van arbeid en energie

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$ Vectorvergelijking

<u>In tangentiële richting</u>: $\sum F_t = ma_t$ en $a_t = v\,\dfrac{dv}{ds}$

Algebraïsche vergelijking

$$\sum F_t = mv\,\frac{dv}{ds}$$

$$\sum F_t\,ds = mv\,dv$$

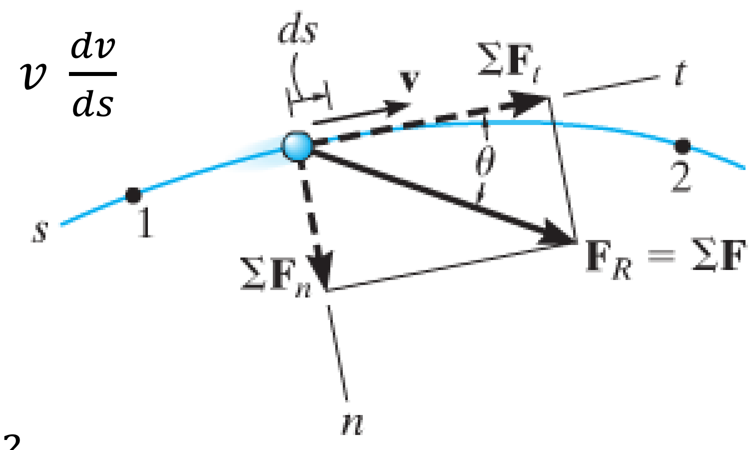


Fig. 3.7

$$\sum \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = \int_{v_1}^{v_2} mv\;dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

$$\sum U_{1-2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + \sum U_{1-2} = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\boxed{T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2}$$

Algebraïsche vergelijking

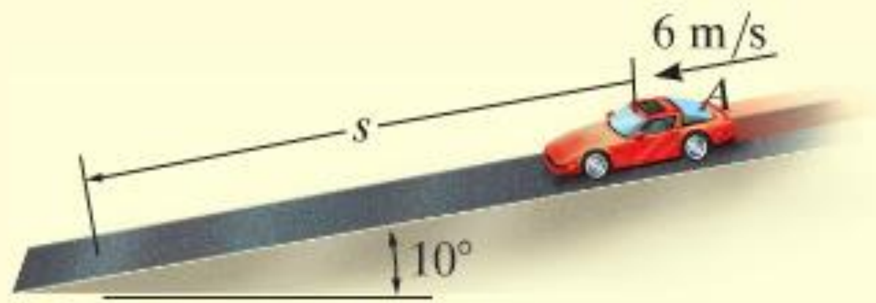
"Kinetische energie" $T = \dfrac{mv^2}{2}$

Waarom bekijken we enkel de tangentiële richting, en niet de normale of binormale richting?

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2

De wagen van ~~17,5 kN~~ (≈ 1750 kg) die in fig. 3.10*a* wordt afgebeeld, rijdt met een snelheid van 6 m/s over een weg met een helling van 10° naar beneden. De bestuurder trapt hard op de rem en de wielen blokkeren. Bepaal de afstand *s* waarover de banden over de weg slippen. De kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen de wielen en de weg is $\mu_k = 0{,}5$.



(a)

Fig. 3.10

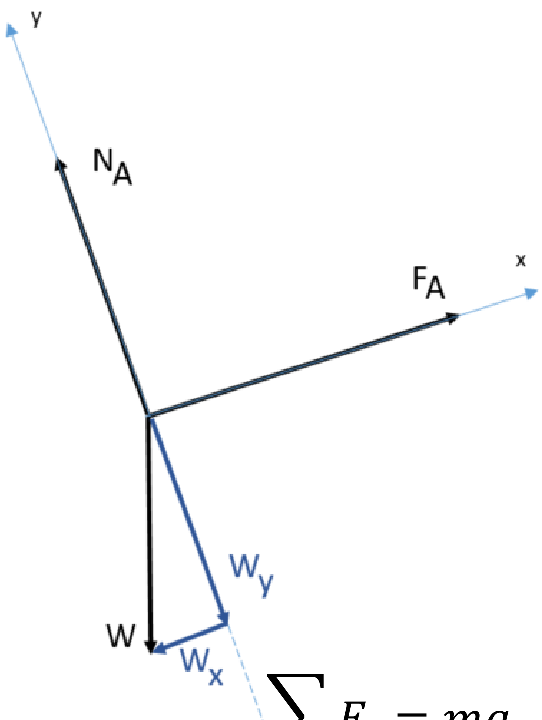
- Geg
  - m=1750kg
  - v_1=6m/s
  - μ_k=0,5
  - Wielen blokkeren
- Gevr
  - Afstand s tot stilstand

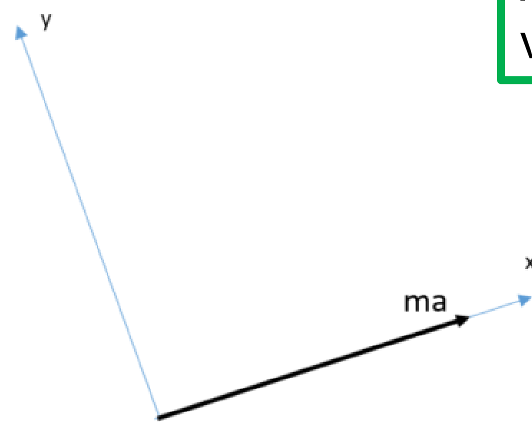
UHASSELT KU LEUVEN

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2

Aanpak via tweede wet van Newton (hoofdstuk 2)





- Onbekenden?
- Bijkomende vergelijkingen nodig?

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow \boxed{+F_A} - W_x = \boxed{m(+a)}$$

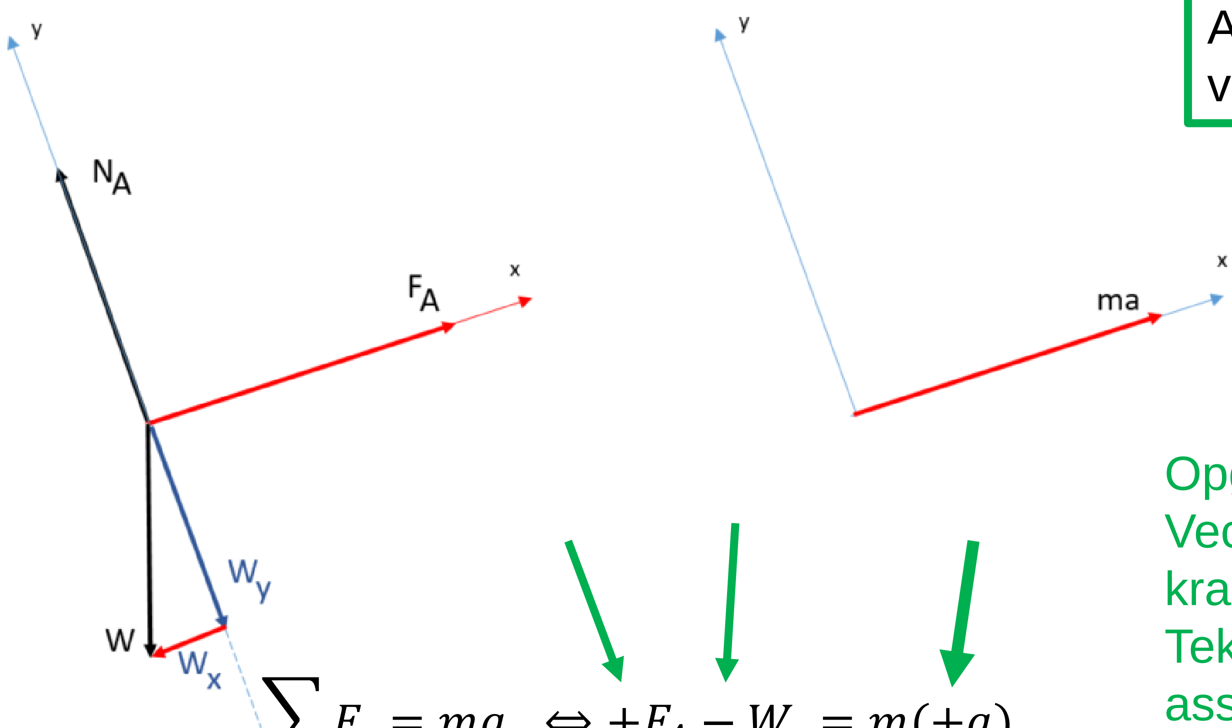
$$\sum F_y = ma_y \Leftrightarrow \boxed{+N_A} - W_y = 0 \Leftrightarrow N_A = mg\cos 10° = 16907N$$

Dynamische wrijving: $F_A = \mu_k N_A$ =0.5 . 16907N = 8453N

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2

Aanpak via tweede wet van Newton (hoofdstuk 2)



Opgelet!
Vectorvergelijking met krachten en versnellingen.
Tekens volgen uit keuze van assenstelsel

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow +F_A - W_x = m(+a)$$

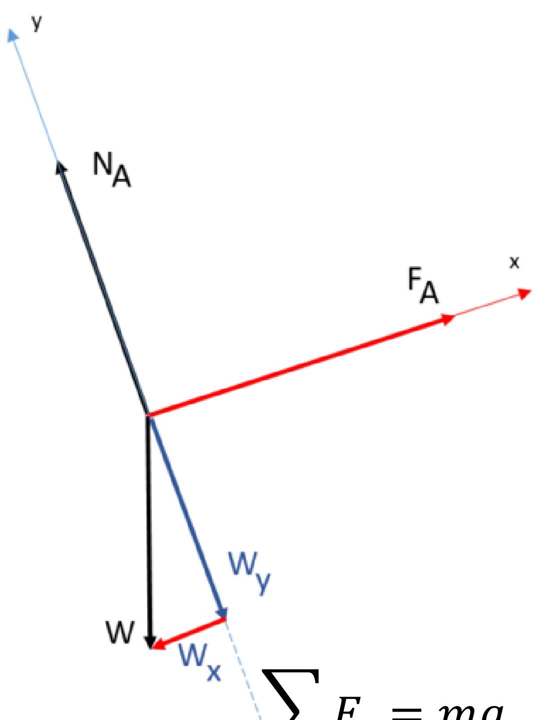
$$\sum F_y = ma_y \Leftrightarrow +N_A - W_y = 0 \Leftrightarrow N_A = mg\cos 10° = 16907N$$

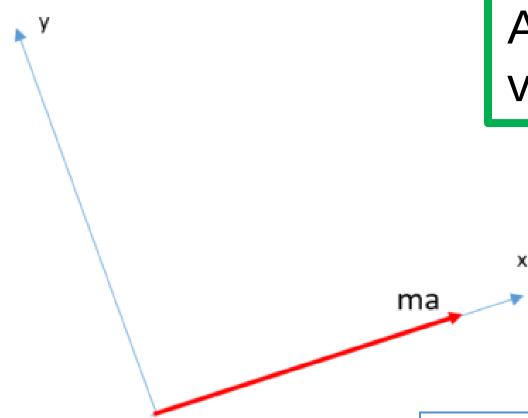
Dynamische wrijving: $F_A = \mu_k N_A$ =0.5 . 16907N = 8453N

UHASSELT KU LEUVEN

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2





Aanpak via tweede wet van Newton (hoofdstuk 2)

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow +F_A - W_x = m(+a)$$

$$\sum F_y = ma_y \Leftrightarrow +N_A - W_y = 0 \Leftrightarrow N_A = mg\cos 10° = 16907N$$

Dynamische wrijving: $F_A = \mu_k N_A$ =0.5 . 16907N = 8453N

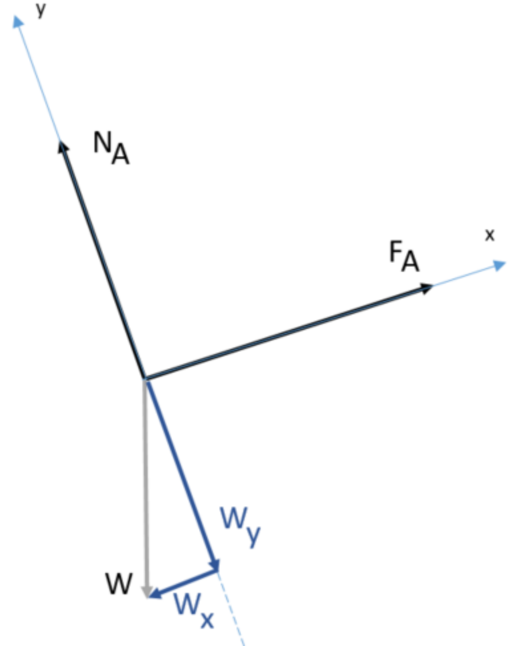
Is het vraagstuk nu opgelost?

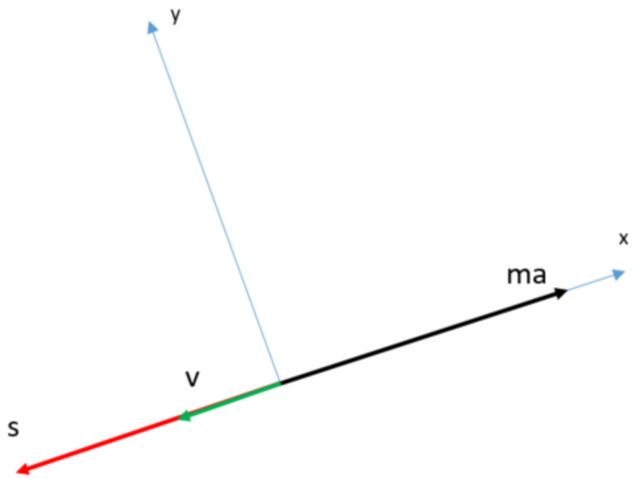
Neen! Uit versnelling nog afgelegde weg *s* bepalen; hoe?

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2

Aanpak via energie-methode (hoofdstuk 3)

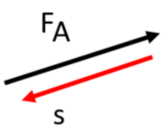


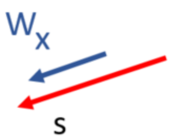


$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + F_A\, s\cos 180° + N_A\, s\cos 90° + W_x\, s\cos 0° + W_y\, s\cos 90° = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - F_A\, s + 0 + W_x\, s + 0 = \frac{mv_2^2}{2}$$



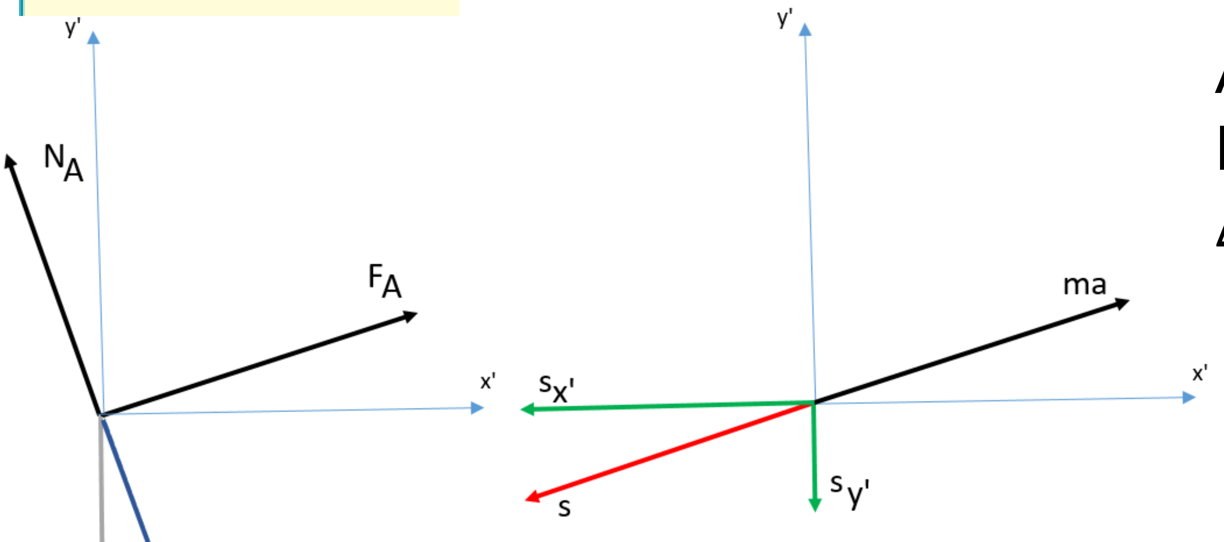


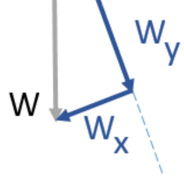
$$\frac{mv_1^2}{2} - F_A\, s + 0 + (W\sin 10°)\, s + 0 = \frac{mv_2^2}{2}$$

Opgelet! Energievergelijking
Tekens volgen uit definitie positieve vs negatieve energie

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2





Alternatief:
Niet *W* maar wel
Δy ontbinden

$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + F_A\, s\cos 180° + N_A\, s\cos 90° + \overbrace{W_x\, s\cos 0° + W_y\, s\cos 90°}^{(-W\,\Delta y)} = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + F_A\, s\cos 180° + N_A\, s\cos 90° - W(-s_{y'}) = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - F_A\, s + 0 + W(s\,\sin 10°) = \frac{mv_2^2}{2}$$

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2

$$\frac{mv_1^2}{2} - F_A\, s + W(s\ \sin 10°) = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\frac{1750\,.\,6^2}{2} - 8453{,}35\, s + 1750\,.\,9.81(s\ \sin 10°) = 0$$

Uitkomst: s=5.76m

31500J – 48658J + 17159J = 0J (Energiebalans)

3.3 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.3

De kraan in fig. 3.11*a* tilt de balk met een gewicht van 2500 kg gedurende korte tijd op met een kracht $F = (28 + 3s^2)$ kN. Bepaal de snelheid van de balk wanneer deze een hoogte van $s = 3$ m bereikt heeft. Hoe lang duurt het om die hoogte vanuit rust te bereiken?

Waarom hier het principe van arbeid en energie gebruiken?

Wat is de eerste stap bij het oplossen?

- Voorwerp of stelsel kiezen
- Vrijlichaamsschema (VLS) opstellen

3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

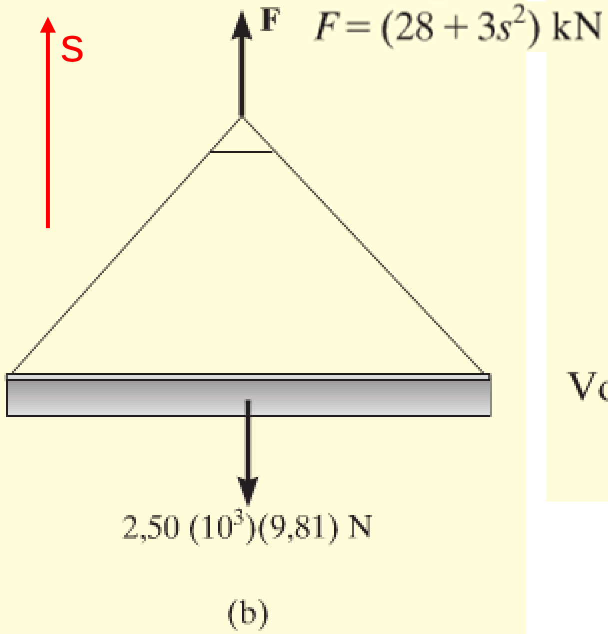


Fig. 3.11

Principes van arbeid en energie

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$0 + \int_0^s (28 + 3s^2)(10^3)\,ds - (2{,}50)(10^3)(9{,}81)s = \tfrac{1}{2}(2{,}50)(10^3)v^2$$

$$28(10^3)s + (10^3)s^3 - 24{,}525(10^3)s = 1{,}25(10^3)v^2$$

$$v = (2{,}78s + 0{,}8s^3)^{\frac{1}{2}}$$

Voor $s = 3$ m,

$$v = 5{,}47 \text{ m/s} \qquad (1) \quad \textit{Antw.}$$

3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

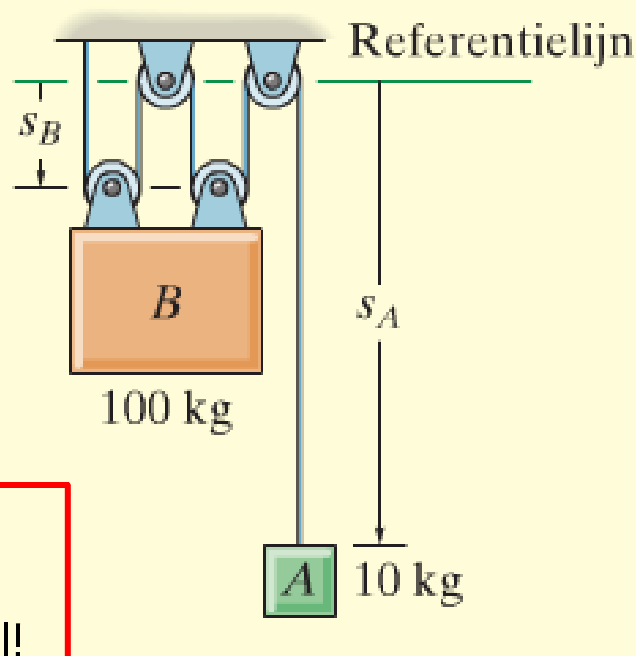
$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2 \tag{3.8}$$

- Definieer correct en consequent het stelsel (=vrijlichaamsschema) van de puntmassa's waarop je de energievergelijking toepast !

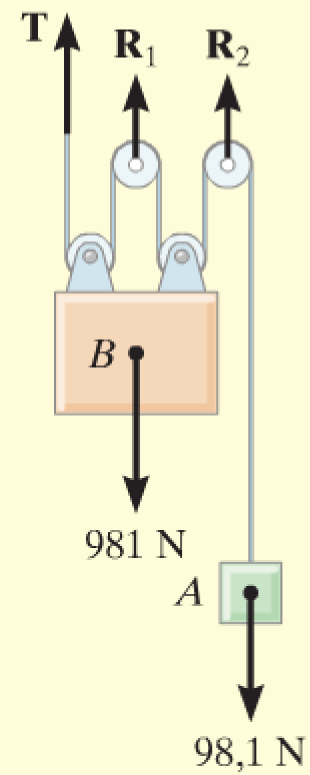
3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

Voorbeeld 3.6

Blok A en blok B in fig. 3.14a hebben respectievelijk een massa van 10 kg en 100 kg. Bepaal de afstand die B aflegt wanneer het vanuit rust wordt losgelaten tot het punt dat het een snelheid van 2 m/s bereikt.



(a)



(b)

Fig. 3.14

Stelsel = puntmassa A en B
Alle krachten op totale stelsel
en totale energie van hele stelsel!

3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

Voorbeeld 3.6

Principe van arbeid en energie Ervan uitgaande dat de blokken vanuit rust worden losgelaten, volgt:

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_1^2\right\} + \{W_A\,\Delta s_A + W_B\,\Delta s_B\} = \left\{\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_2^2\right\}$$

$$\{0 + 0\} + \{98{,}1\text{ N }(\Delta s_A) + 981\text{ N }(\Delta s_B)\} = \left\{\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}(100\text{ kg})(2\text{ m/s})^2\right\} \qquad (1)$$

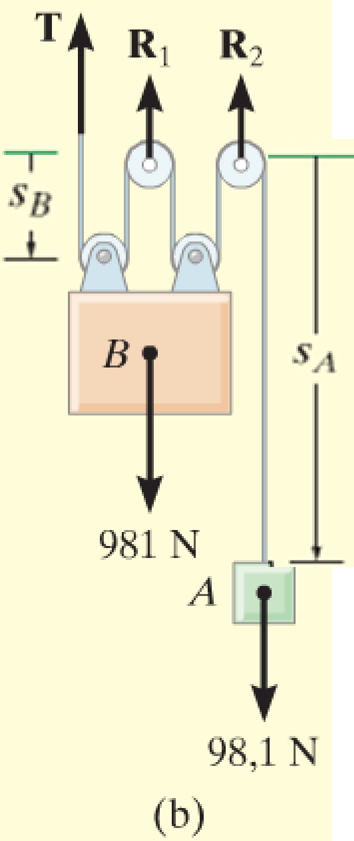


Fig. 3.14

Katrol-vergelijking

$$\Delta s_A + 4\,\Delta s_B = 0 \qquad (2)$$

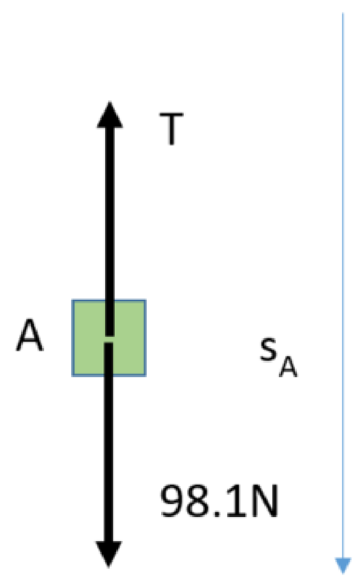
$$v_A = -\,4v_B = -4(2\text{ m/s}) = -8\text{ m/s}$$

3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

Voorbeeld 3.6

Stelsel = puntmassa A
Alle krachten op totale stelsel !

T=inwendige kracht, wel in dit vrijlichaamsschema !
T verplaatst dus levert arbeid !



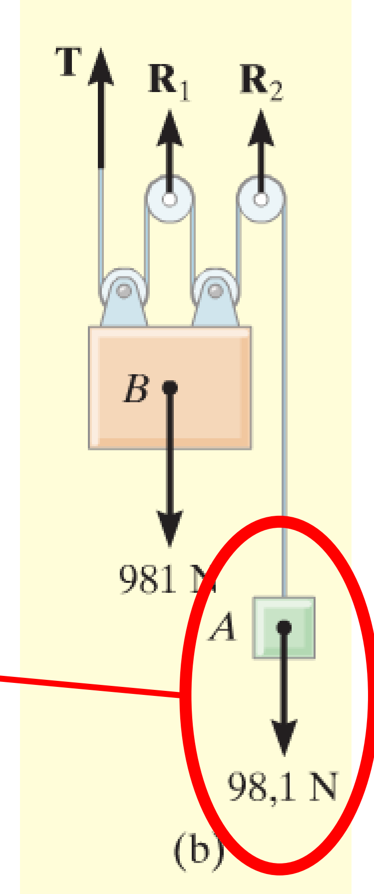


Fig. 3.14

Definieer en teken het gebruikte stelsel (vrijlichaamsschema) !

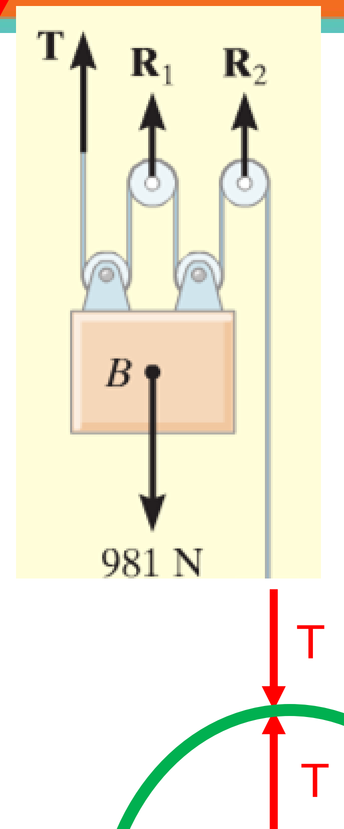
UHASSELT KU LEUVEN

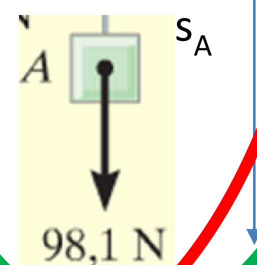
3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

Voorbeeld 3.6

- Arbeid door T

- Stelsel A+B
  - Arbeid=-T.s_A + T.s_A = 0
  - T = inwendige kracht, <u>levert geen arbeid</u>





- Stelsel A
  - Arbeid= - T.s_A ≠ 0
  - T=uitwendige kracht, levert arbeid!

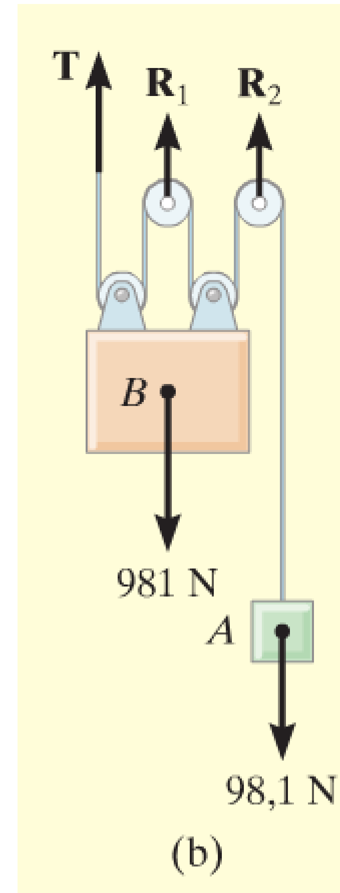


Fig. 3.14

3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

- Is het principe van arbeid en energie geldig wanneer lichamen botsen of exploderen? (dus tijdens de botsing of tijdens de explosie) Waarom wel of waarom niet?

3.4 Vermogen en rendement

$$\boxed{P = \frac{dU}{dt}}$$

“Ogenblikkelijk vermogen”
Eenheid?

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\boxed{P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}$$

James Watt (1736 – 1819, UK)

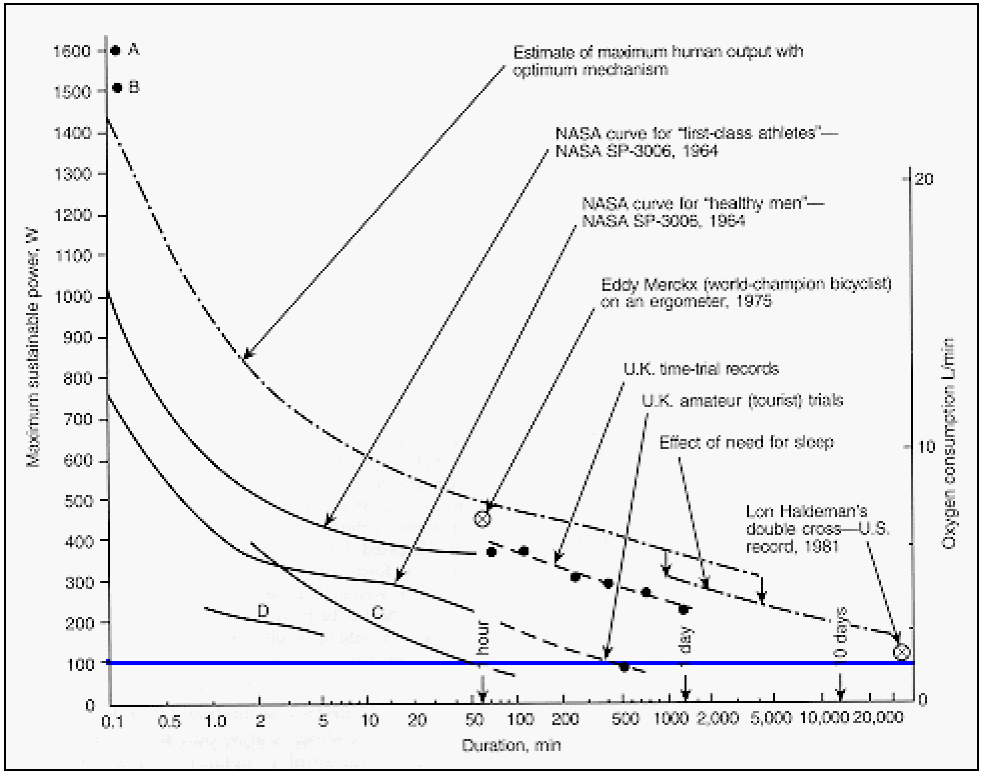
Verbetering van rendement van stoommachines van < 1% naar 19%;

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\text{uitgaand vermogen}}{\text{ingaand vermogen}}} \qquad \boxed{\varepsilon = \frac{\text{uitgaande energie}}{\text{ingaande energie}}} \qquad (3.12)$$

“rendement”
Zijn er grenzen voor de getalwaarde van ε?

3.4 Vermogen en rendement

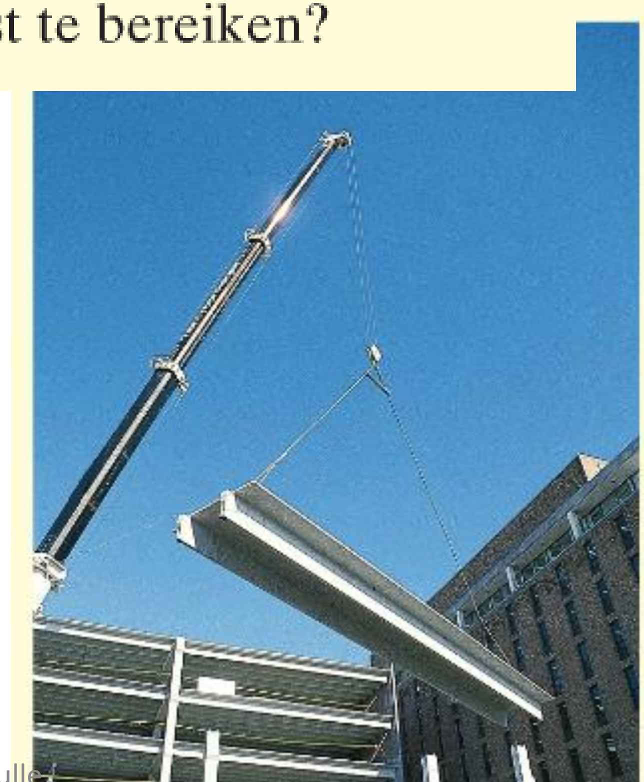
- Enig idee van grootteordes? Vermogen van …
  - Een gloeilamp?
  - Een persoon?
  - Een wasmachine?



3.4 Vermogen en rendement

Voorbeeld 3.3

De kraan in fig. 3.11*a* tilt de balk met een gewicht van 2500 kg gedurende korte tijd op met een kracht $F = (28 + 3s^2)$ kN. Bepaal de snelheid van de balk wanneer deze een hoogte van $s = 3$ m bereikt heeft. Hoe lang duurt het om die hoogte vanuit rust te bereiken?



<u>Gevraagd</u>: Welk vermogen levert de motor als de balk een hoogte van *s* = 3m bereikt ?

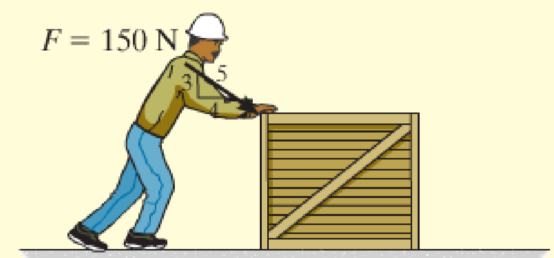
Oplossing:
v=5,47m/s
F=(28+3s²)=28+3*3²=55kN

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F.v.\cos(\theta) = 55000.5{,}47.\cos(0°)$$
$$P = 300850W = 301kW$$

3.4 Vermogen en rendement

Voorbeeld 3.7

De man in fig. 3.15*a* drukt met een kracht $F = 150$ N tegen de kist van 50 kg. Bereken het vermogen dat de man levert op $t = 4$ s. De kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen de kist en het vlak $\mu_k = 0{,}2$. In eerste instantie is de kist in rust.



OPLOSSING

Redenering:

1/ Gevraagd: P = ?

2/ $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ (scalair product)

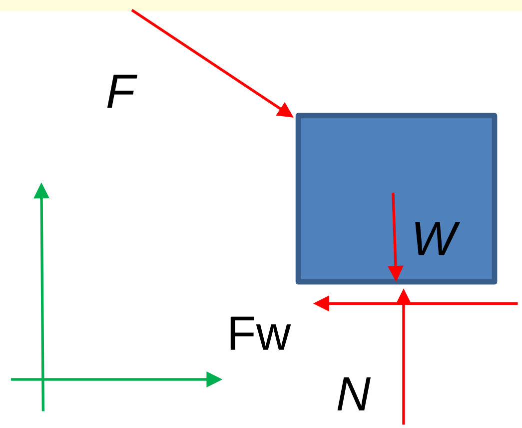
F is gekend, snelheid ***v*** is niet gekend

3/ Snelheid ***v*** berekenen uit 2e wet van Newton: daarmee kunnen we de versnelling berekenen, en daarmee dan de snelheid

- VLS maken
- 2e wet van Newton toepassen:

(x) $-\mu_k \cdot N + F\,(4/5) = m\,a$

(y) $N - m\,g - F\,(3/5) = m \cdot 0$



Kunnen we ***v*** ook bepalen uit het principe van arbeid en energie? Waarom wel of niet?

Hieruit: ***N*** en ***a*** bepalen;

Met ***a*** kan je snelheid na 4 s berekenen: $v = 0 + a \cdot t$ met t = 4s.

4/ P = F (4/5) . v = …

3.5 Conservatieve krachten en potentiële energie

- Conservatieve kracht:
  arbeid is niet afhankelijk van de gevolgde baan
  arbeid is alleen afhankelijk van begin- en eindpositie van de puntmassa
  - Vb Gewicht
  - Vb Veerkracht
- Niet-conservatieve kracht
  arbeid is wel afhankelijk van de gevolgde baan
  - Vb Wrijvingskracht

3.6 Behoud van mechanische energie

- Potentiële energie V

$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

$$T_1 + \sum U_{1-2\ cons} + \sum U_{1-2\ niet\ cons} = T_2$$

Enkel en alleen als $\sum U_{1-2\ niet\ cons} = 0$

$$T_1 + \sum U_{1-2\ cons} = T_2$$

$$T_1 + V_1 - V_2 = T_2$$

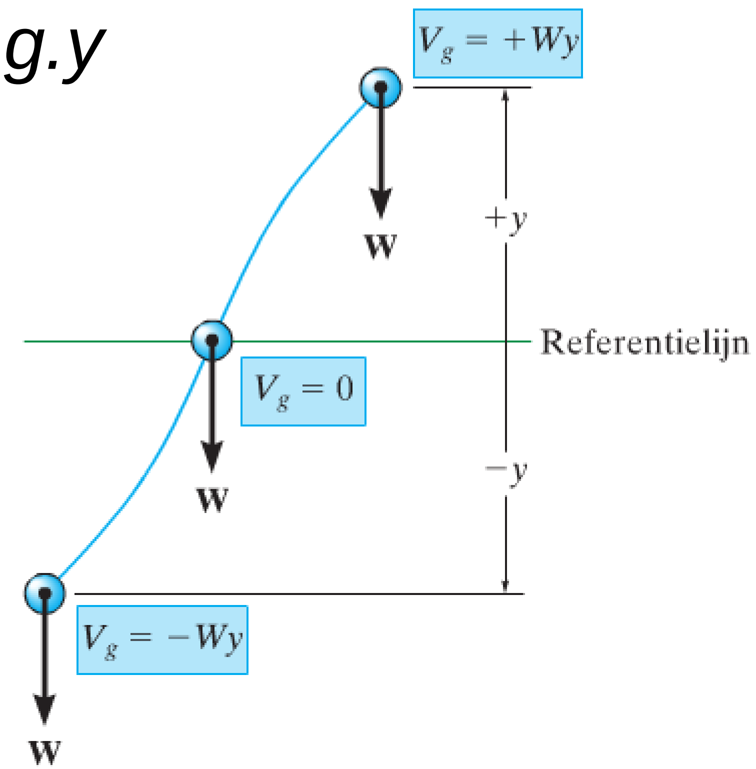
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

- Is dit principe algemeen geldig?
- Waarom dit toepassen ipv principe van arbeid en energie?

3.5 Conservatieve krachten en potentiële energie

- Zwaartekracht

$$\boxed{V_g = W y} \quad = +m.g.y$$



Potentiële energie van de zwaartekracht

Fig. 3.17

3.5 Conservatieve krachten en potentiële energie

Principe van arbeid en energie

$T_1 + U_{1-2} = T_2$

Kinetische energie

Puntmassa	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Star onvervormbaar lichaam	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2} I_G\omega^2$

(Beweging in het platte vlak)

Variabele kracht $U_F = \int F \cos \theta \, ds$

Constante kracht $U_F = (F_c \cos \theta)\, \Delta s$

Gewicht $U_W = -W \Delta y$

Veer $U_s = -(\frac{1}{2} ks_2^2 - \frac{1}{2} ks_1^2)$

Koppel $U_M = M \Delta\theta$

Vermogen en rendement

$$P = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad \epsilon = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{U_{out}}{U_{in}}$$

Wet van behoud van energie

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potentiële energie

$V = V_g + V_e$, where $V_g = \pm W y, V_e = +\frac{1}{2} ks^2$

Let op !!

Arbeid

$$U_W = -W \Delta y$$

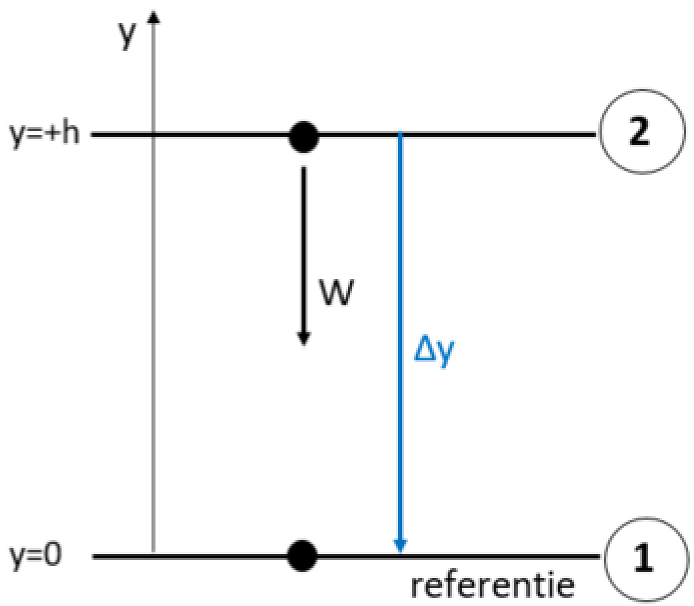
Energie

$$\boxed{V_g = W y} = +m.g.h$$

UHASSELT KU LEUVEN

3.5 Conservatieve krachten en potentiële energie

beweging van de puntmassa. Wanneer energie voorkomt uit de *plaats* van de puntmassa, gemeten vanaf een gekozen referentielijn of -vlak, wordt zij potentiële energie genoemd. De *potentiële energie* is dus een maat voor de hoeveelheid arbeid die een conservatieve kracht zal verrichten wanneer deze van een bepaalde plaats naar de referentielijn beweegt. In de mechanica is de



Arbeid 2→1

$$U_{2\to 1} = -W.\Delta y$$
$$= -(mg).(y_1 - y_2)$$
$$= -(mg).(0 - h)$$
$$= +mgh$$

Dus potentiële energie

$$V_2 = +mgh$$

Opdracht: herneem redenering voor verplaatsing 1→2

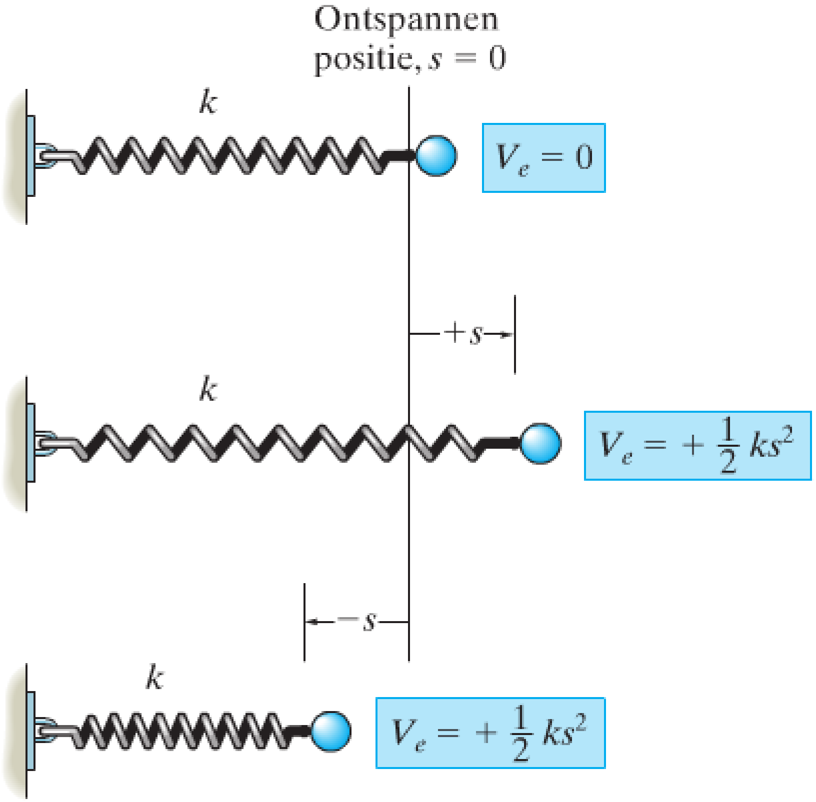
3.5 Conservatieve krachten en potentiële energie

- Elastische vervorming

$$V_e = +\tfrac{1}{2}ks^2$$

LET OP!

$$U_{1-2} = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)$$



Potentiële energie als gevolg van de elastische vervorming

Fig. 3.18

3.5 Conservatieve krachten en potentiële energie

- Potentiële energiefunctie

$$\boxed{V = V_g + V_e} \qquad (3.15)$$

3.6 Behoud van mechanische energie

Stelsel van puntmassa's:

$$\sum T_1 + \sum V_1 = \sum T_2 + \sum V_2$$

Definieer duidelijk op welk stelsel van puntmassa's je de vergelijking toepast!

3.5 Conservatieve krachten en potentiële energie

- http://sporza.be/cm/sporza/videozone/sporten/andernieuws/2.36794/1.2181751

Gegeven: topsnelheid Usain Bolt = 44 km/h

Gevraagd: maximale theoretische hoogte *h* die hij bereikt?

Oplossing:
T1 + V1 = T2 + V2

V1 = 0 J
T1 = m (44 . 1000m/3600s)^2/2
T2 = 0 J
V2 = + m g h

m (44/3.6) ^{2}/2 + 0 = 0 + m g h

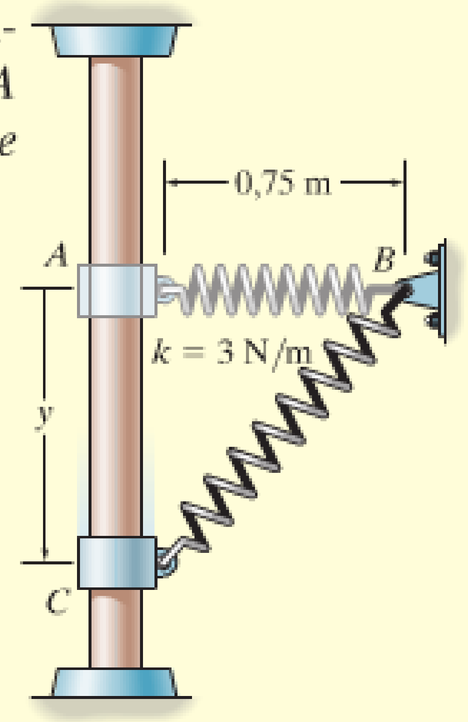
Daaruit: h = (44/3,6)^2/(2 g) = 7,61 m

Waarom zijn athleten hier zover van verwijderd? WR Sotomayor: 2,45m

3.6 Behoud van mechanische energie

Voorbeeld 3.11

De gladde mof van 2 kg, afgebeeld in fig. 3.23*a*, zit losjes om de verticale stang. De veer is niet uitgerekt als de mof in *A* is. Bepaal de snelheid waarmee de mof beweegt op $y = 1$ m, als (a) zij vanuit rust in *A* wordt losgelaten en (b) zij in *A* wordt losgelaten met een *opwaartse* snelheid $v_A = 2$ m/s.



(a)

OPLOSSING

Deel (a) $s_{CB} = l_{CB} - rustlengte = \sqrt{y^2 + 0{,}75^2} - 0{,}75 = 0{,}5$ m

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$0 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_C{}^2 + \{\tfrac{1}{2}ks_{CB}{}^2 - mgy\}$$

$$0 + 0 = \{\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_C{}^2\} + \{\tfrac{1}{2}(3\text{ N/m})(0{,}5\text{ m})^2 - 2(9{,}81)\text{ N }(1\text{ m})\}$$

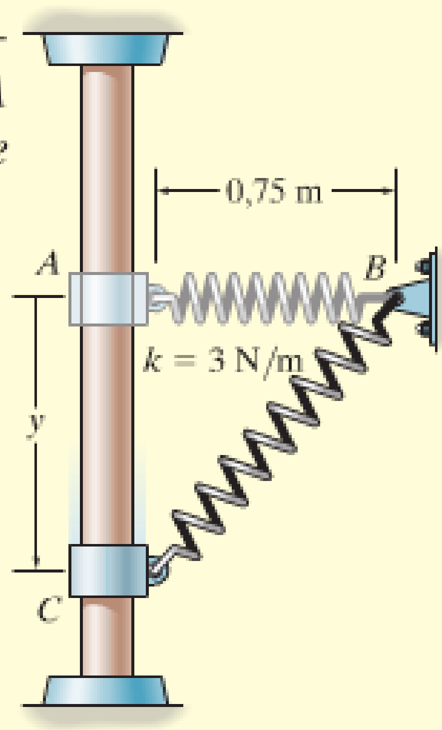
$$v_C = 4{,}39\text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Antw.}$$

UHASSELT KU LEUVEN

3.6 Behoud van mechanische energie

Voorbeeld 3.11

De gladde mof van 2 kg, afgebeeld in fig. 3.23*a*, zit losjes om de verticale stang. De veer is niet uitgerekt als de mof in *A* is. Bepaal de snelheid waarmee de mof beweegt op $y = 1$ m, als (a) zij vanuit rust in *A* wordt losgelaten en (b) zij in *A* wordt losgelaten met een *opwaartse* snelheid $v_A = 2$ m/s.



(a)

OPLOSSING

Deel (b)

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + \{\tfrac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy\}$$

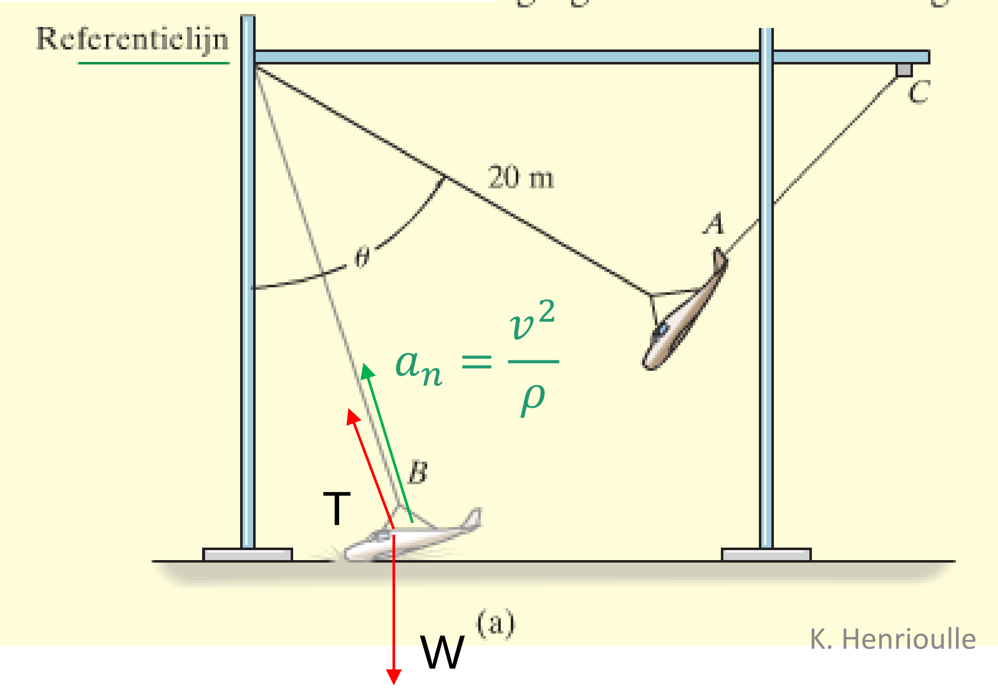
$$\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 + 0 = \tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_C^2 + \{\tfrac{1}{2}(3\text{ N/m})(0{,}5\text{ m})^2 - 2(9{,}81)\text{ N }(1\text{ m})\}$$

$$v_C = 4{,}82\text{ m/s}\downarrow$$

3.6 Behoud van mechanische energie

Voorbeeld 3.9

De portaalstructuur op de foto wordt gebruikt om het gedrag van een vliegtuig bij een crash te testen. Een vliegtuig met een massa van 8000 kg wordt, zoals is weergegeven in fig. 3.21*a*, omhooggetrokken tot het een hoek $\theta = 60°$ met de horizontaal maakt. Vervolgens wordt, wanneer het vliegtuig in rust hangt, de lierkabel *AC* losgelaten. Bereken de snelheid van het vliegtuig net voor het ogenblik dat het de grond raakt ($\theta = 15°$). Wat is de maximale trekkracht die in de draagkabel optreedt tijdens de beweging? Laat de afmetingen van het vliegtuig en het effect van de lift van de vleugels tijdens de beweging buiten beschouwing.



(a)

1/ Welk principe toepassen?
2 discrete plaatsen, geen wrijvingskrachten => behoud van mechanische energie;
2/ T1 + V1 = T2 + V2
T1 = 0 J
V1 = - m g h = - m g L cos(60graden)
T2 = m $\frac{v^2}{2}$
V2 = - m g L cos(15 graden)

3/ tweede wet van Newton in normaalrichting:
T – W cos(15 graden) = m $\frac{v^2}{L}$

K. Henrioulle