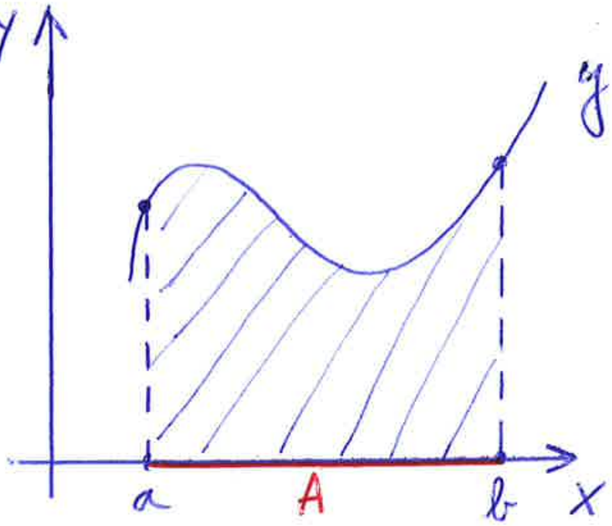
Meervoudige integralen

1. Enkelvoudige en meervoudige integralen

enkelvoudige integraal:



$A = [a, b] \subset X\text{-as} =$ integratiegebied

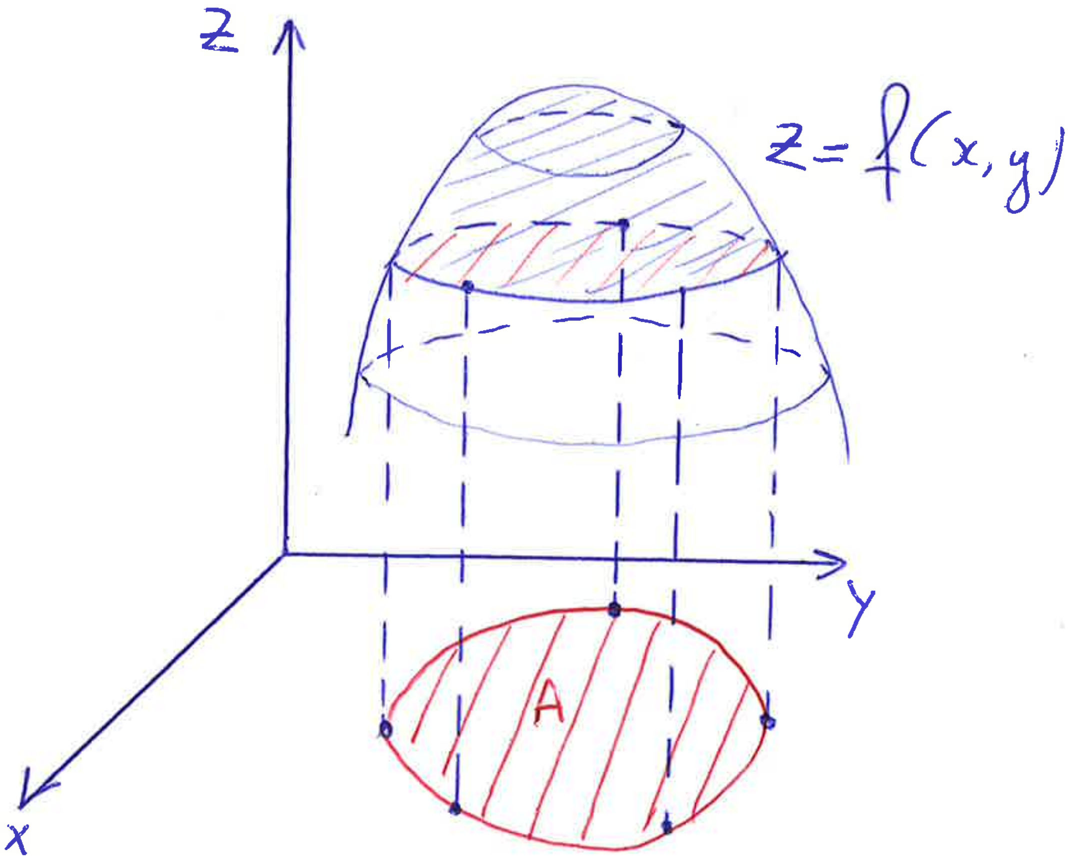
$$\int_A f(x) . dx = \text{georiënteerde oppervlakte}$$

Meervoudige integralen

1. Enkelvoudige en meervoudige integralen

1.2

meervoudige integraal:



$A \subset XY$-vlak = integratiegebied

$\iint\limits_A f(x,y).dxdy$ = gearceerd volume

Meervoudige integralen

2. Dubbelintegralen in cartesische coördinaten

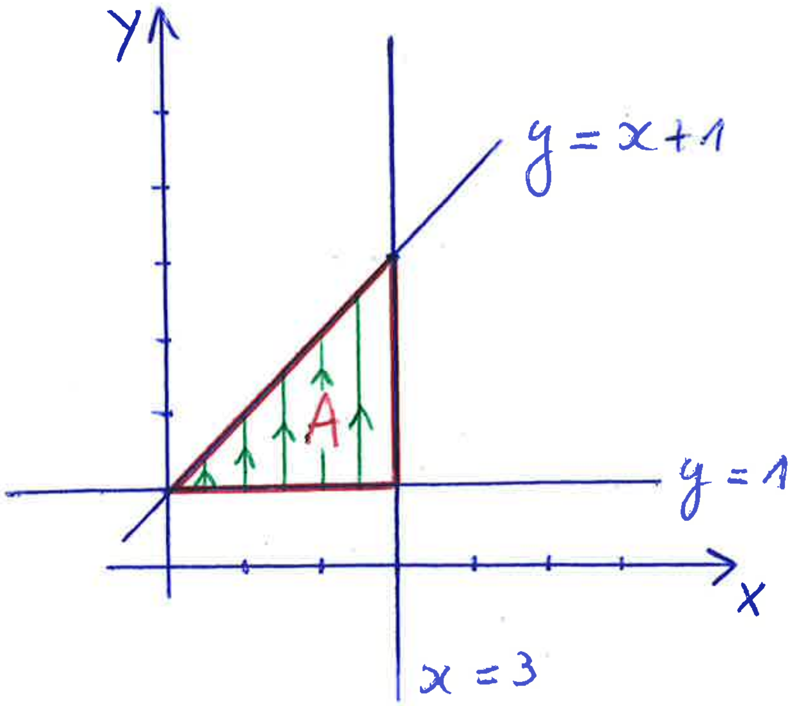
2.1

Voorbeeld:

$$z = f(x,y) = 2x + 3y + 4$$

Integratiegebied A: deel van het XY-vlak begrensd door de rechten $x = 3$, $y = 1$ en $y = x+1$.

Eerste manier: doorloop A in de Y-richting, van onder naar boven: $\uparrow\uparrow\uparrow$



Meervoudige integralen

2. Dubbelintegralen in cartesische coördinaten

2.2

$$\text{Volume} = \iint_A f(x,y).dx.dy$$

$$= \int_{x=0}^{x=3} \left[\int_{y=1}^{y=x+1} (2x+3y+4).dy \right].dx$$

binnenste integraal:

$$2x.y + 3.\frac{y^2}{2} + 4.y \Bigg|_{y=1}^{y=x+1}$$

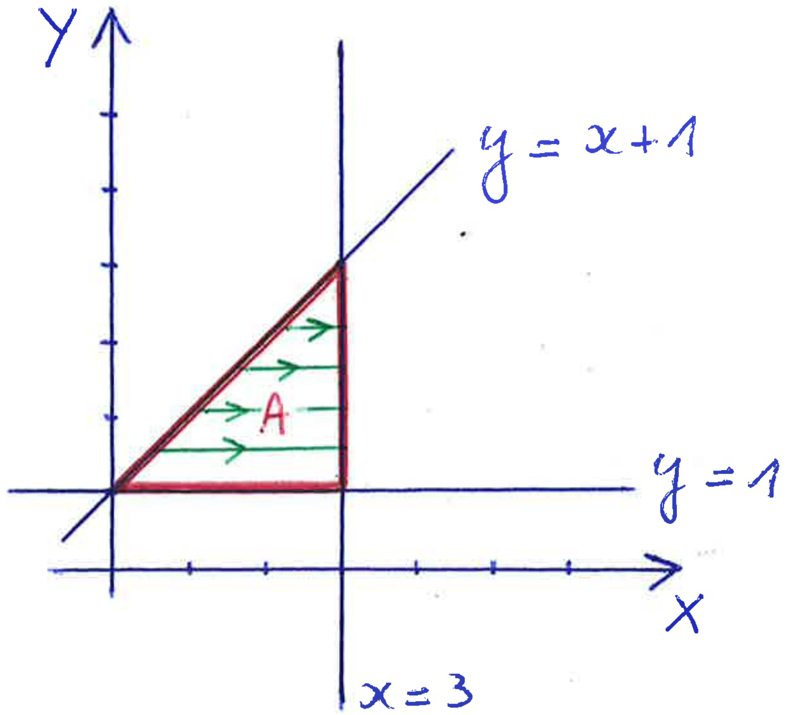
$$= \dots = \frac{7}{2}x^2 + 7x$$

$$\text{Dus Volume} = \int_{x=0}^{x=3} \left(\frac{7}{2}x^2 + 7x\right).dx = 63$$

2. Dubbelintegralen in cartesische coördinaten

2.3

Tweede manier: doorloop A in de X-richting van links naar rechts:



$$\text{Volume} = \iint_A f(x,y) \cdot dx \cdot dy$$

$$= \int_{y=1}^{y=4} \Bigg[\underbrace{\int_{x=y-1}^{x=3} (2x+3y+4) \cdot dx}_{\Downarrow} \Bigg] \cdot dy$$

Meervoudige integralen

2. Dubbelintegralen in cartesische coördinaten

2.4

binnenste integraal:

$$2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3y \cdot x + 4x \Big|_{x=y-1}^{x=3}$$

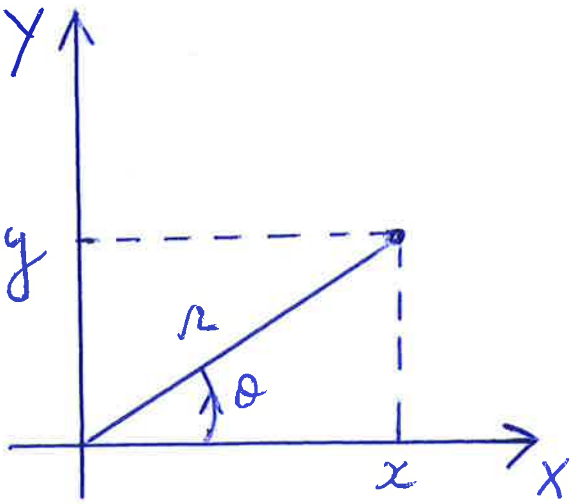
$$= \ldots = -4 \cdot y^2 + 10 \cdot y + 24$$

Dus Volume $= \int_{y=1}^{y=4} (-4 \cdot y^2 + 10 \cdot y + 24) \cdot dy = 63$

Meervoudige integralen

3. Dubbelintegralen in poolcoördinaten

3.1



$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases}$$

infinitesimaal oppervlakte-element:

$$dx.dy = r.dr.d\theta$$

$$\iint_A f(x,y).dx.dy \Leftrightarrow \iint_A f(r,\theta).r.dr.d\theta$$

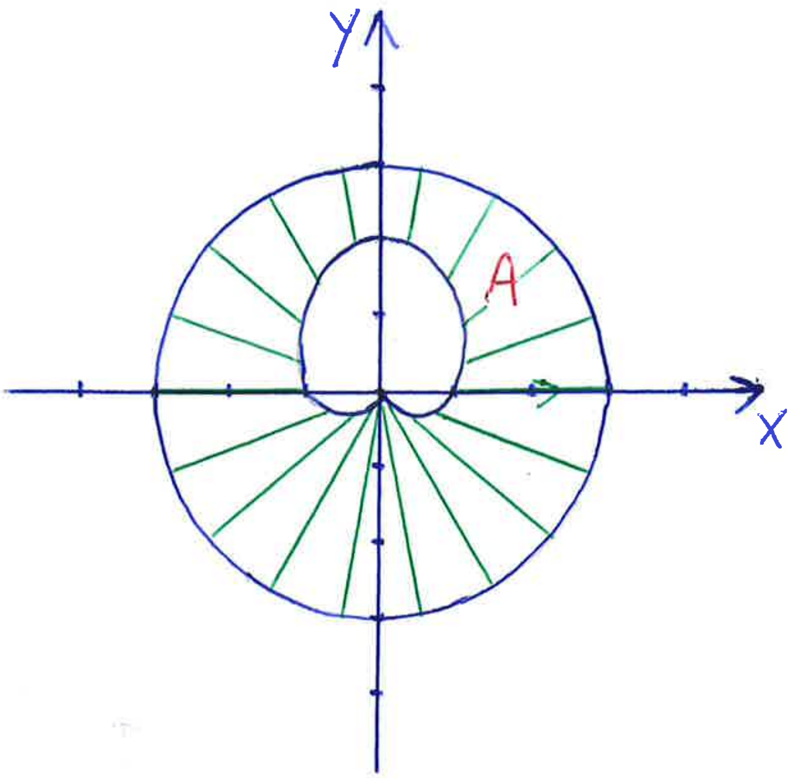
3. Dubbelintegralen in poolcoördinaten

3.2

Voorbeeld:

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,.dx.dy$$

met integratiegebied A begrensd door de twee grafieken $r = 1+\sin\theta$ en $x^2+y^2=9$.



3. Dubbelintegralen in poolcoördinaten

3.3

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\cdot dx\cdot dy$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\underbrace{\left[\int_{r=1+\sin\theta}^{r=3} r\cdot r.dr\right]}\cdot d\theta$$

$$\left.\frac{r^3}{3}\right|_{r=1+\sin\theta}^{r=3} = 9-\frac{1}{3}\cdot(1+\sin\theta)^3$$

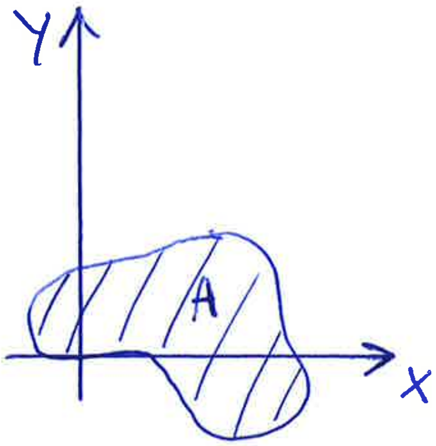
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left(9-\frac{1}{3}(1+\sin\theta)^3\right)\cdot d\theta = \frac{49.\pi}{3}$$

Meervoudige integralen

4. Zwaartepunt en traagheidsmoment

4.1

(*) Massa van een niet-homogene vlakke plaat A:



$\rho(x,y)$ = massadichtheid in punt (x,y) van de plaat A

$$\boxed{m = \iint_A \rho(x,y) \cdot dx \cdot dy}$$

4. Zwaartepunt en traagheidsmoment

4.2

Speciaal geval: homogene plaat, $\rho(x,y) = \rho \in \mathbb{R}$:

$$m = \rho \cdot \iint_A 1 \cdot dx \cdot dy$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m = \rho \cdot \text{oppervlakte van } A}$$

4. Zwaartepunt en traagheidsmoment

4.3

⊛ Zwaartepunt van een niet-homogene vlakke plaat A: (x_{zw}, y_{zw})

$$\boxed{\begin{aligned} x_{zw} &= \frac{1}{m} \cdot \iint_A x \cdot \rho(x,y) \cdot dx \cdot dy \\ y_{zw} &= \frac{1}{m} \cdot \iint_A y \cdot \rho(x,y) \cdot dx \cdot dy \end{aligned}}$$

Speciaal geval: homogene plaat, $\rho(x,y) = \rho \in \mathbb{R}$:

$$x_{zw} = \frac{\rho}{m} \cdot \iint_A x \cdot dx \cdot dy$$

$$y_{zw} = \frac{\rho}{m} \cdot \iint_A y \cdot dx \cdot dy$$

4. Zwaartepunt en traagheidsmoment

4.4

bij een homogene plaat A is

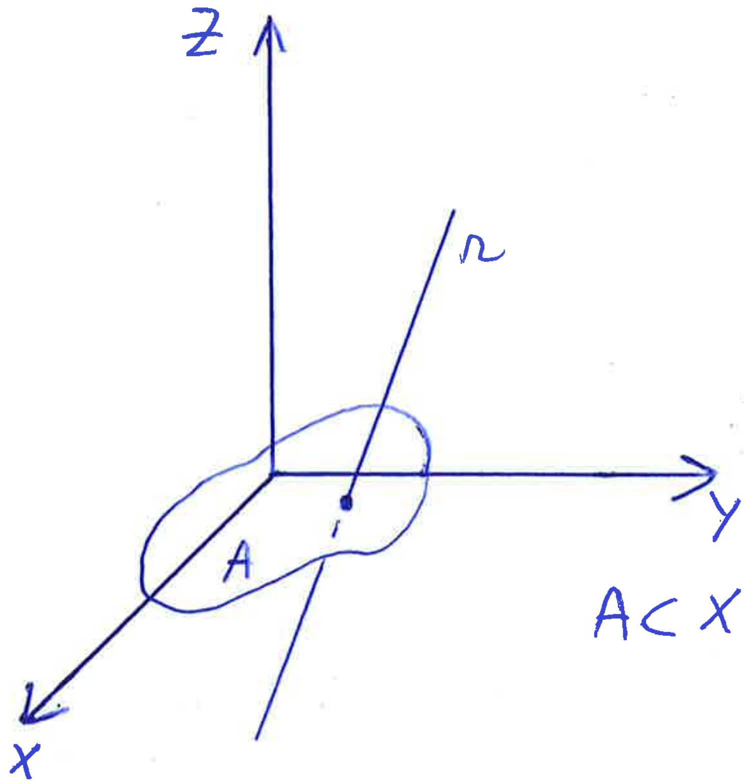
$$m = \rho \cdot \text{opp}(A) \Rightarrow \frac{\rho}{m} = \frac{1}{\text{opp}(A)}$$

Dus:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{zw} &= \frac{1}{\text{opp}(A)} \cdot \iint_A x \cdot dx \cdot dy \\ y_{zw} &= \frac{1}{\text{opp}(A)} \cdot \iint_A y \cdot dx \cdot dy \end{aligned}}$$

4. Zwaartepunt en traagheidsmoment 4.5

⊛ Traagheidsmoment van een niet-homogene vlakke plaat A ten opzichte van een rotatie-as r : I_r



$A \subset XY$-vlak

$$I_r = \iint_A r_\perp^2 \cdot \rho(x,y) \cdot dx \cdot dy$$

met $r_\perp^2$ de loodrechte afstand van een punt (x,y) van A tot de rotatie-as. r.

4. Zwaartepunt en traagheidsmoment

4.6

In de praktijk is de rotatie-as vaak de X-as of de Y-as of de Z-as:

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \iint_A y^2 \cdot \rho(x,y) \cdot dx \cdot dy \\ I_y &= \iint_A x^2 \cdot \rho(x,y) \cdot dx \cdot dy \\ I_z &= \iint_A (x^2+y^2) \cdot \rho(x,y) \cdot dx \cdot dy \end{aligned}}$$

4. Zwaartepunt en traagheidsmoment

4.7

Speciaal geval: homogene plaat, $\rho(x,y) = \rho \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \rho \cdot \iint_A y^2 \cdot dx \cdot dy \\ I_y &= \rho \cdot \iint_A x^2 \cdot dx \cdot dy \\ I_z &= \rho \cdot \iint_A (x^2+y^2) \cdot dx \cdot dy \end{aligned}}$$

5. Drievoudige integralen in cartesische coördinaten

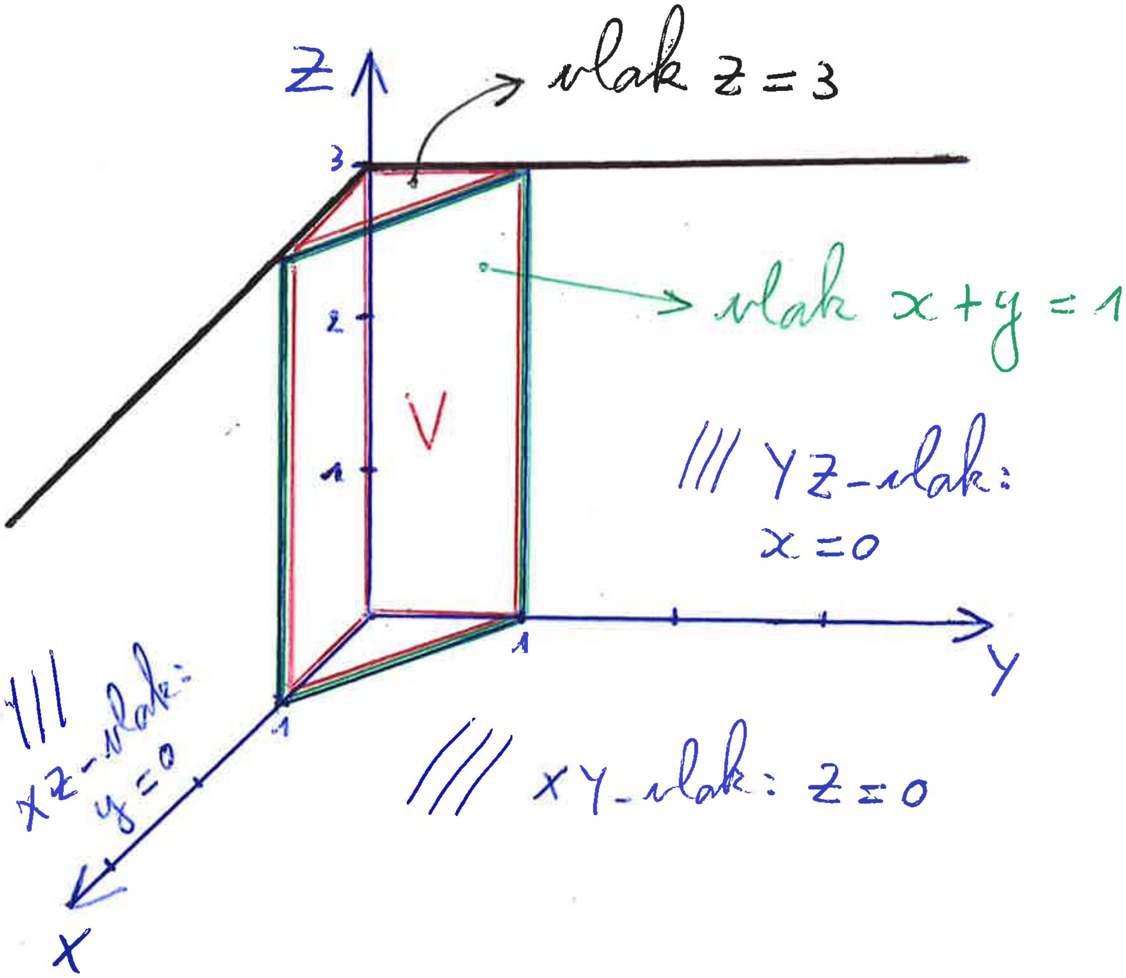
5.1

Voorbeeld:

Gegeven de 4-dim. grafiek van

$t = f(x,y,z) = x^2 + 2x.y + y.z$

Integratiegebied $V \subset \mathbb{R}^3$ als volgt:

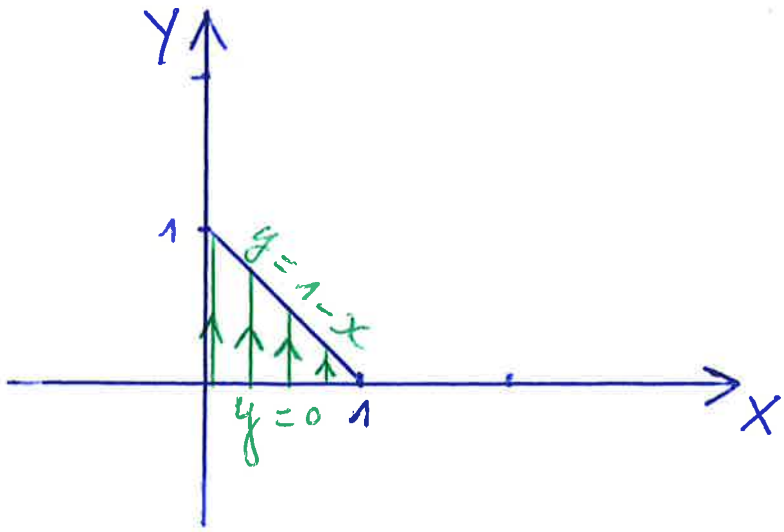


5. Drievoudige integralen in cartesische coördinaten

5.2

grenzen in de Z-richting: $z=0 \longrightarrow z=3$

grenzen in het XY-vlak:



$$\iiint\limits_V (x^2+2xy+yz).dx.dy.dz$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=0}^{y=1-x}\left[\underbrace{\int_{z=0}^{z=3}(x^2+2xy+yz).dz}\right].dy\right].dx$$

5. Drievoudige integralen in cartesische coördinaten 5.3

$$x^2 \cdot z + 2xy \cdot z + y \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=3}$$

$$= 3x^2 + 6xy + \frac{9}{2} y$$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=1} \underbrace{\left[\int_{y=0}^{y=1-x} \left(3x^2 + 6xy + \frac{9}{2} y\right) \cdot dy \right]}_{} \cdot dx$$

$$3x^2 \cdot y + 6x \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1-x}$$

$$= 3x^2 \cdot (1-x) + 3x \cdot (1-x)^2 + \frac{9}{4} \cdot (1-x)^2$$

$$= -\frac{3}{4} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{9}{4}$$

5. Drievoudige integralen in cartesische coördinaten

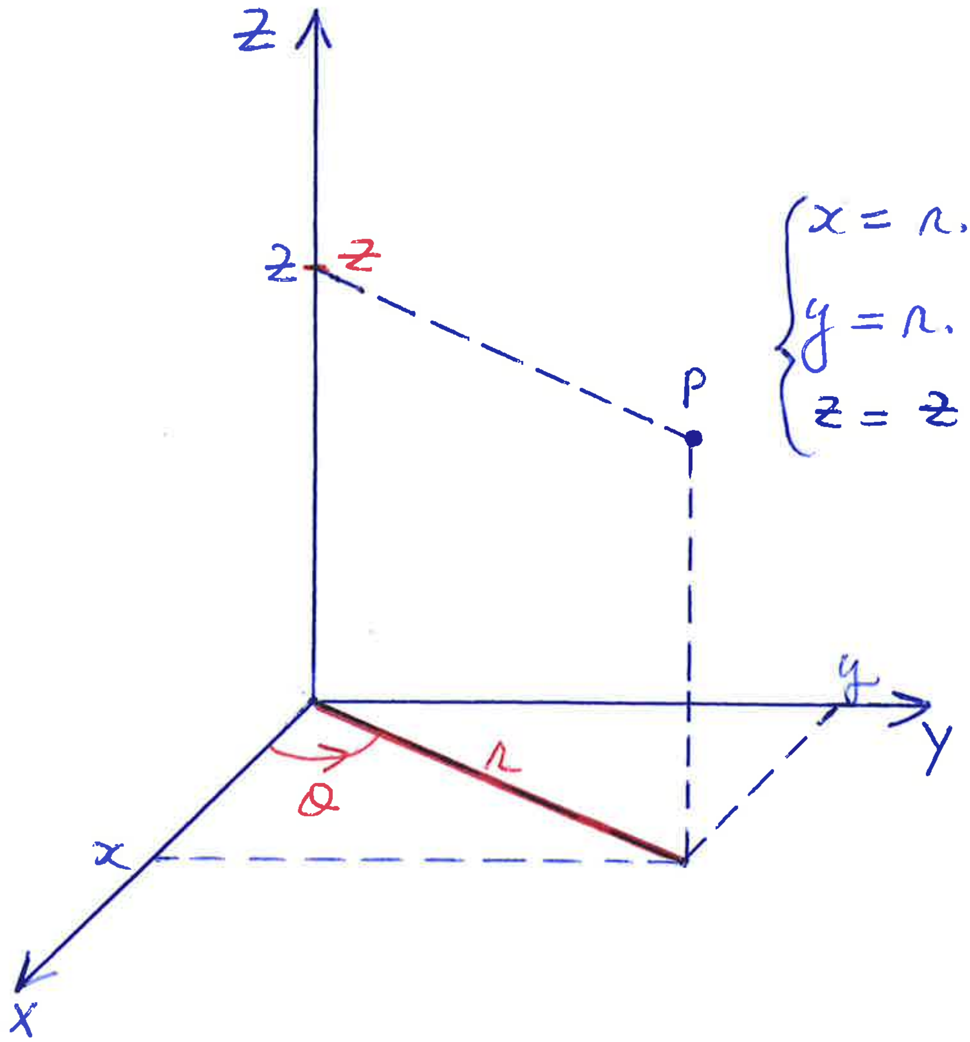
5.4

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=1} \left(-\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) . dx$$

$$= \frac{5}{4}$$

6.1

6. Drievoudige integralen in cilindercoördinaten



$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

infinitesimaal volume-element:

$$dx \cdot dy \cdot dz = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$$

6. Drievoudige integralen in cilindercoördinaten

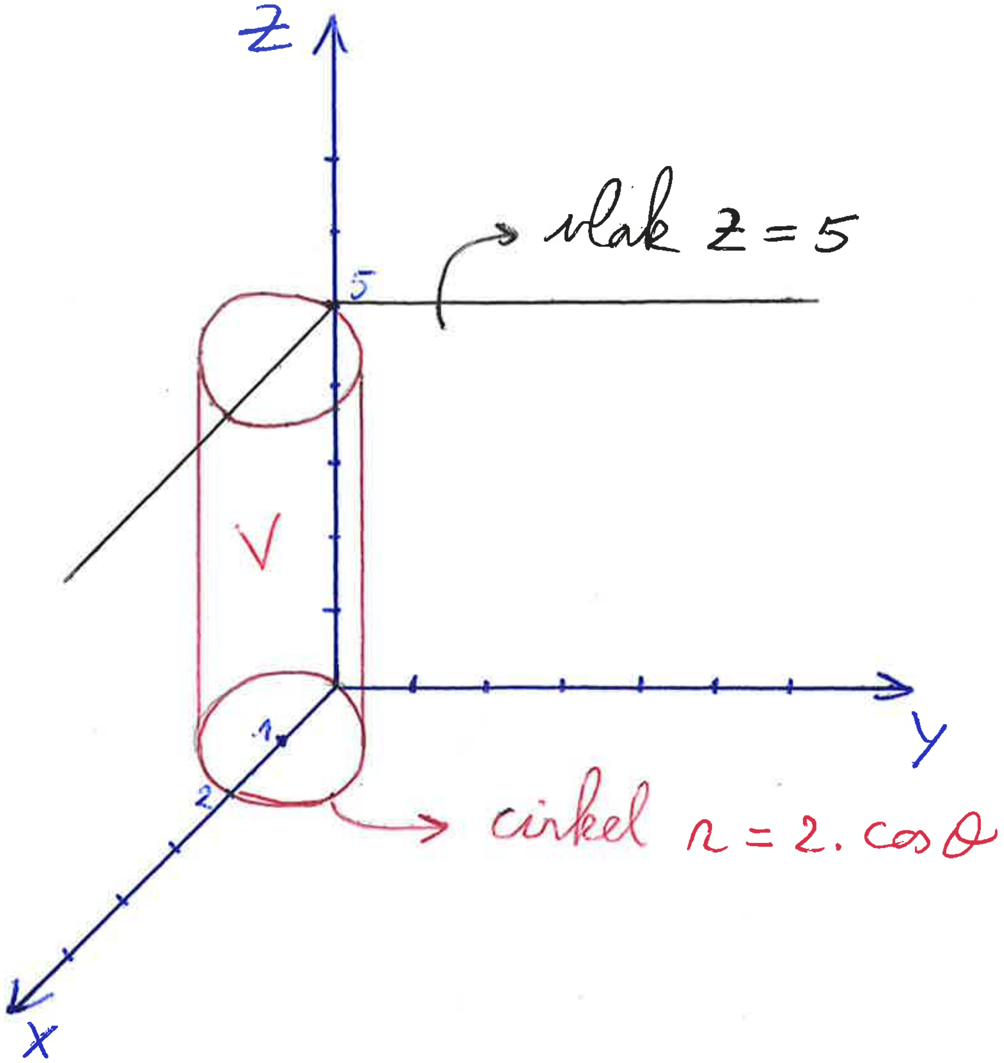
6.2

Voorbeeld:

Gegeven de 4-dim grafiek van

$$t = f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + 2.z$$

Integratiegebied $V \subset \mathbb{R}^3$ als volgt:



6. Drievoudige integralen in cilindercoördinaten

6.3

$$\iiint_V \left(\sqrt{x^2+y^2} + 2.z\right).dx.dy.dz$$

$$= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\int_{r=0}^{r=2.\cos\theta} \underbrace{\left[\int_{z=0}^{z=5} (r+2.z).r.dz \right]} .dr \right] .d\theta$$

$$\int_{z=0}^{z=5} (r^2+2r.z).dz$$

$$= r^2.z + 2r.\frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=5}$$

$$= 5.r^2 + 25.r$$

Meervoudige integralen

6. Drievoudige integralen in cilindercoördinaten

6.4

$$\Rightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \Bigg[\underbrace{\int_{r=0}^{r=2.\cos\theta} (5.r^2 + 25.r).dr}_{} \Bigg] .d\theta$$

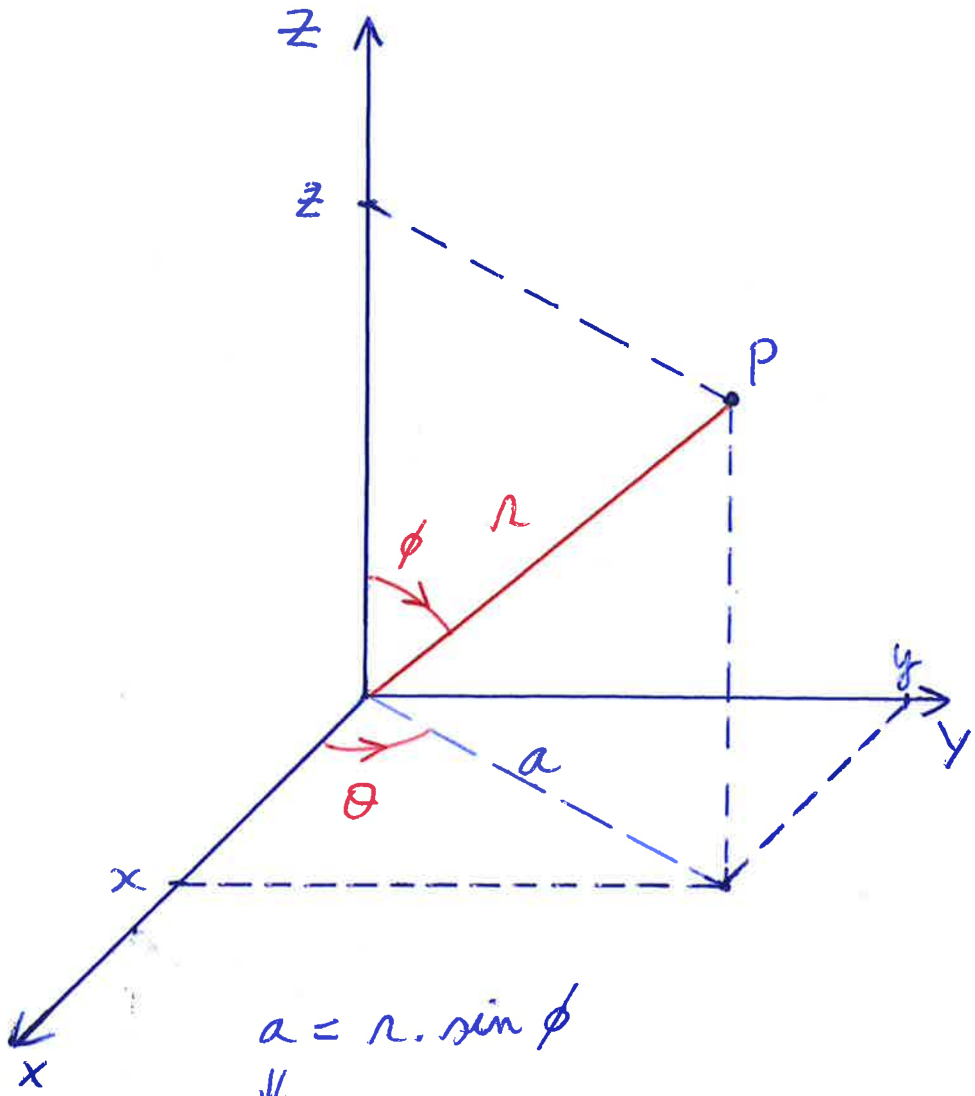
$$5.\frac{r^3}{3} + 25.\frac{r^2}{2} \Bigg|_{r=0}^{r=2.\cos\theta}$$

$$= \frac{40}{3}.\cos^3\theta + 50.\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{40}{3}.\cos^3\theta + 50.\cos^2\theta\right).d\theta = \frac{5(45\pi+32)}{9}$$

7. Drievoudige integralen in bolcoördinaten

7.1



$$a = r \cdot \sin\phi$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta \\ z = r \cdot \cos\phi \end{cases}$$

Infinitesimaal volume-element:

$$dx \cdot dy \cdot dz = r^2 \cdot \sin\phi \cdot dr \cdot d\phi \cdot d\theta$$

7. Drievoudige integralen in bolcoördinaten

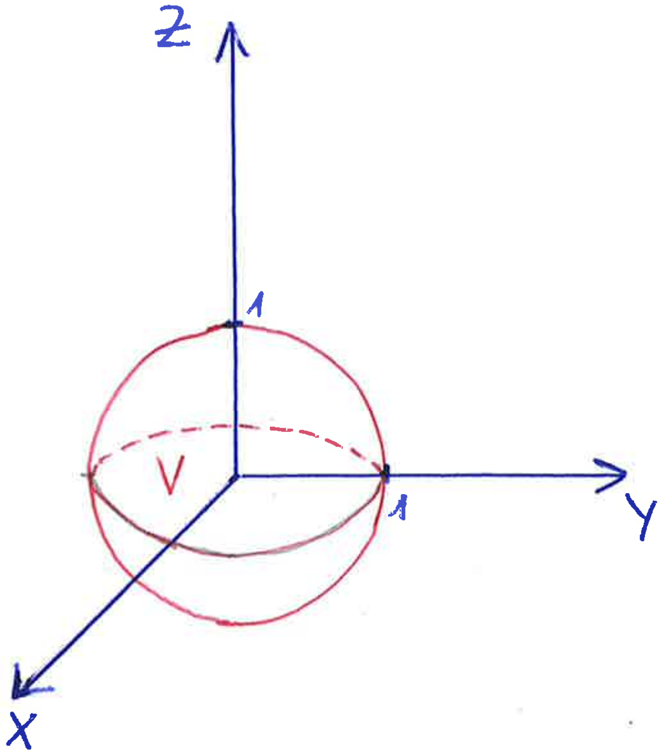
7.2

Voorbeeld:

Gegeven de 4-dim grafiek van

$t = f(x, y, z) = z^2$

Integratiegebied $V \subset \mathbb{R}^3$ de bal met straal 1:



7. Drievoudige integralen in bolcoördinaten

7.3

$$\iiint_V z^2 . dx . dy . dz$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \left[\underbrace{\int_{r=0}^{r=1} r^2 . \cos^2\phi . r^2 . \sin\phi . dr}_{} \right] . d\phi \right] . d\theta$$

$$\frac{r^5}{5} . \cos^2\phi . \sin\phi \Big|_{r=0}^{r=1}$$

$$= \frac{1}{5} . \cos^2\phi . \sin\phi$$

$$\Rightarrow \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\underbrace{\int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \frac{1}{5} . \cos^2\phi . \sin\phi . d\phi}_{} \right] . d\theta$$

$$-\frac{1}{15} . \cos^3\phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi} = -\frac{1}{15} . (-1-1) = \frac{2}{15}$$

7. Drievoudige integralen in bolcoördinaten

7.4

$$\Rightarrow \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{2}{15} \cdot d\phi$$

$$= \frac{4\pi}{15}$$