Lesweek 9 – HC7 :
Vrije extrema, oppervlakteberekeningskunde en booglengte van krommen

Cursustekst HOOFDSTUK 4, § 4.6

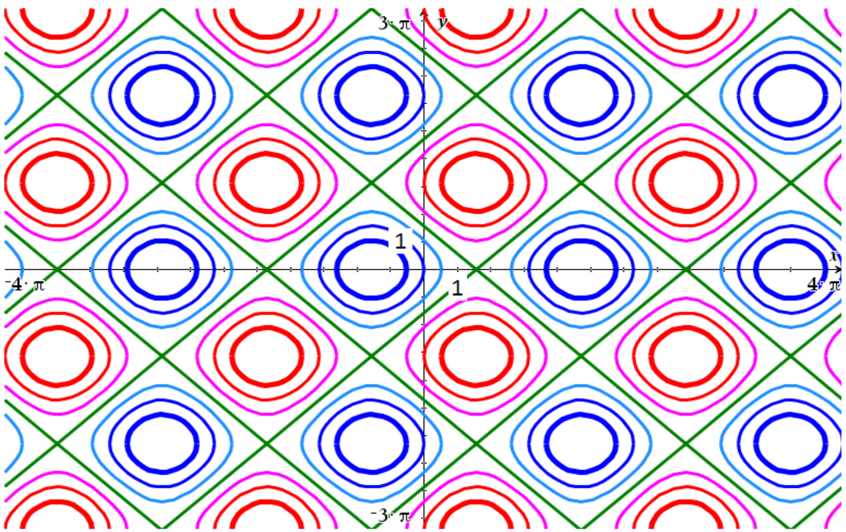
en HOOFDSTUK 5

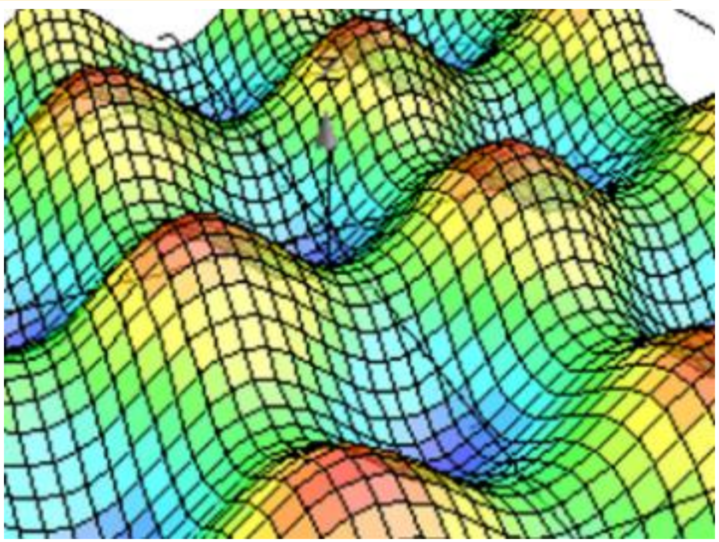
Hoe lokaal (vrije) extrema bepalen? (§ 4.6)

DEFINITIE. Gegeven is een functie $z = f(x,y)$.

Dan bereikt f een **lokaal extremum** in (x_0, y_0) als er een omgeving V van (x_0, y_0) bestaat waarvoor ofwel

- $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ voor alle $(x,y) \in V$ (= lokaal minimum)
- $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ voor alle $(x,y) \in V$ (= lokaal maximum)





Voorbeeld : z = sin(x) – cos(y)

UHASSELT KU LEUVEN

Nodige voorwaarde voor een extremum

Bij een extremum moet het raakvlak horizontaal gelegen zijn!

Eigenschap

Als $f(x, y)$ een relatief minimum of maximum bereikt in (x_0, y_0) dan is

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

en dus $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Dit is geen voldoende voorwaarde!

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \not\Rightarrow f(x, y) \text{ heeft een extremum in } (x_0, y_0)$$

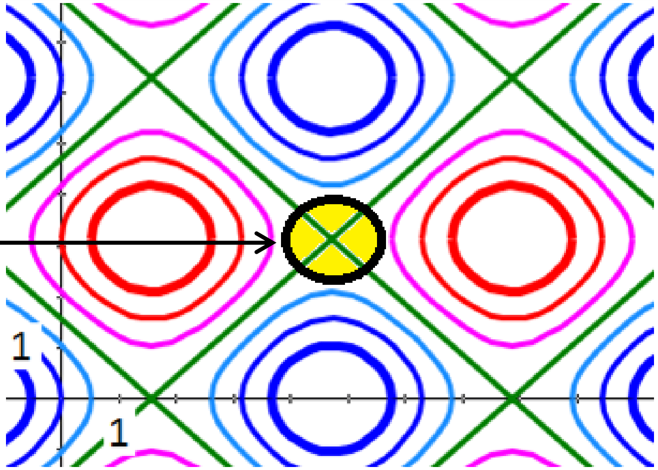
Denk aan: $z = f(x, y) = x \cdot y$ $\Rightarrow$ (0, 0) is een ZADELPUNT !

Definitie zadelpunt

Een punt (x_0, y_0) van een oppervlak $z = f(x, y)$ waarvoor $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ heet een zadelpunt

als en slechts als

in ELKE omgeving van dit punt (hoe klein ook gekozen) er punten (x, y) bestaan waarvoor $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, maar ook andere punten waarvoor $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

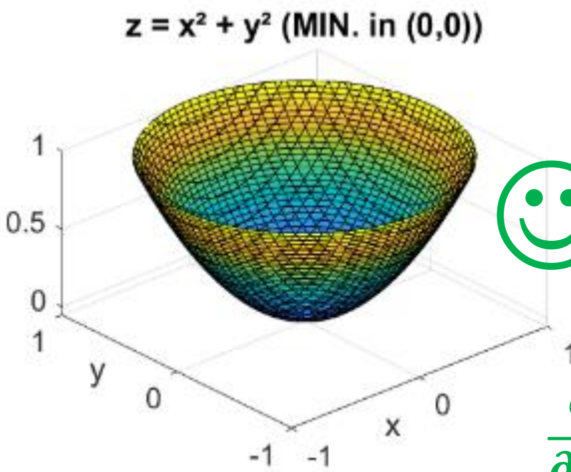


UHASSELT

KU LEUVEN

Hoe bekom je voldoende voorwaarden?

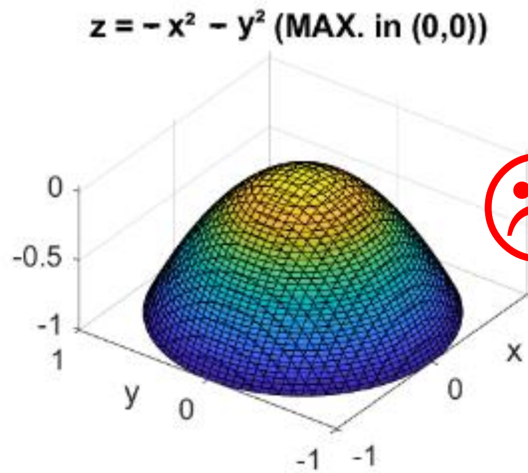
Tweede orde partiële afgeleiden inschakelen!



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = +2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = +2$$

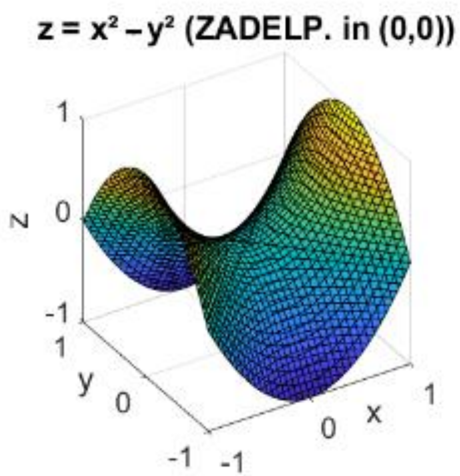
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

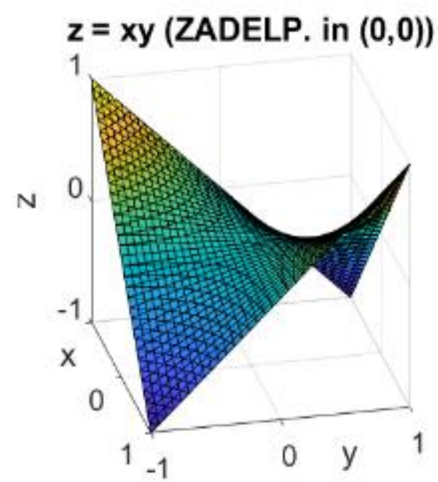
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = +2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Voldoende vw voor een extremum en zadelpunt

ALS $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$

"Hessiaan"

STEL DAN
$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

DAN GELDT

* $H(x_0, y_0) > 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$
$\Rightarrow (x_0, y_0)$ MINIMUM

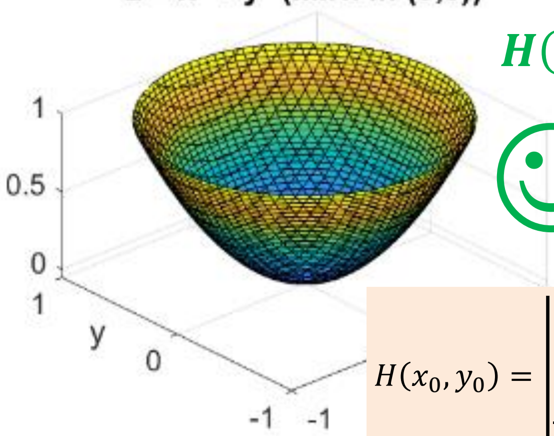
* $H(x_0, y_0) > 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$
$\Rightarrow (x_0, y_0)$ MAXIMUM

* $H(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ ZADELPUNT

Hessiaanmethode voor zoeken van extremum / zadelpunt

HESSIAAN inschakelen!

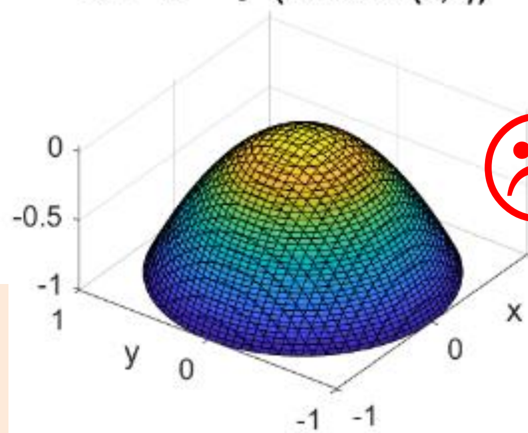
z = x² + y² (MIN. in (0,0))



$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

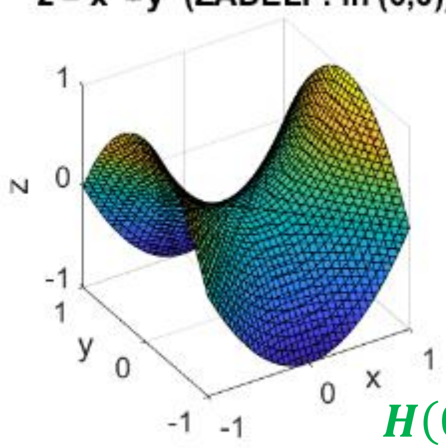
$$H(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

z = − x² − y² (MAX. in (0,0))



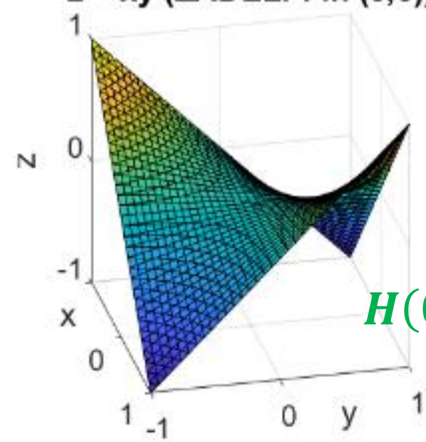
$$H(0,0) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

z = x² − y² (ZADELP. in (0,0))



$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

z = xy (ZADELP. in (0,0))



$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Zwakke plek van de methode: HESSIAAN = NUL

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

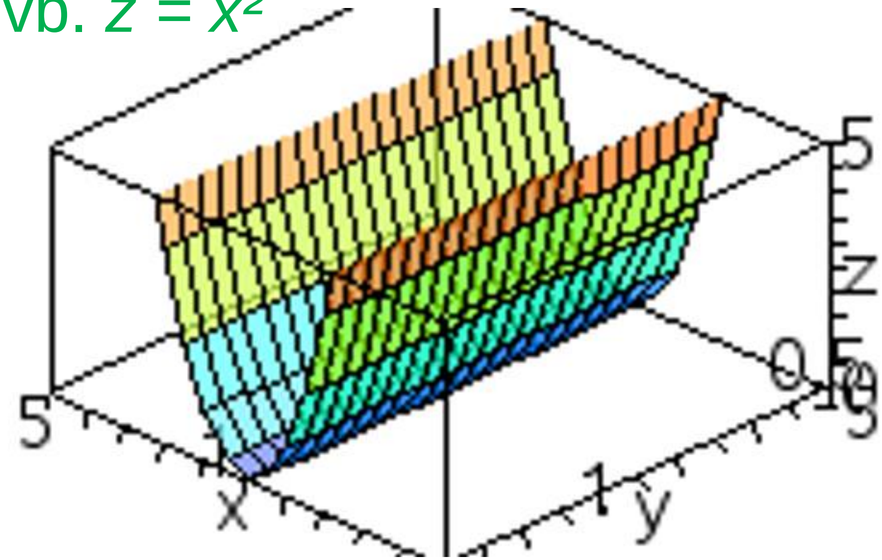
WAT ALS HESSIAAN = NUL ??

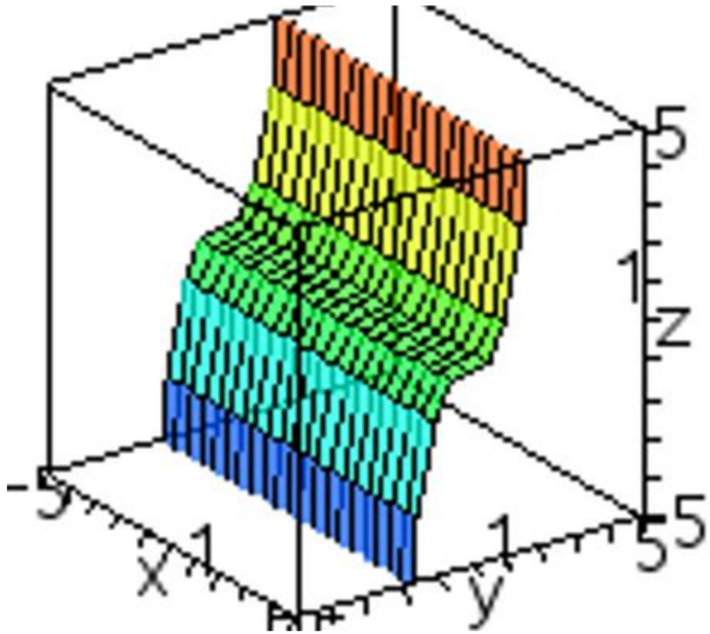
→ GEEN UITSLUITSEL !!

Nu moet je met de definitie werken om tot een besluit te komen!

vb. $z = y^3$

vb. $z = x^2$





Alle punten op de Y-as zijn **MINIMA** !

Alle punten op de X-as zijn **zadelpunten** !

UHASSELT KU LEUVEN

Praktische werkwijze

- Bereken de 1ste en 2de orde partiële afgeleiden.
- Zoek de nulpunten van het stelsel

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

  Dit zijn kandidaat extrema (kritische punten).
- Bereken voor elk van de kritische punten de waarde van de Hessiaan.

VOORBEELD uit oefenbundel.

35. Drie getallen hebben als som 1200. Wat is de maximale waarde van hun product?

Voorbeeld 3D-vraagstuk met eliminatie

Oefening 35 (§ 4.4, bundel pagina 42)

Drie getallen hebben als som 1200.

$$x + y + \boldsymbol{z} = 1200$$

Wat is de maximale waarde van hun product?

$$P(x, y, z) = x \cdot y \cdot \boldsymbol{z}$$

Nu kan je een **ELIMINATIE** uitvoeren!
Blijft over: extremumprobleem in 2 onbekenden:

$$f(x, y) = x \cdot y \cdot (1200 - x - y)$$

LOS OP MET DE HESSIAAN METHODE !

Oplossing: x = y = z = 400.

OPMERKING: dit is een LOKAAL MAXIMUM, geen globaal !!!

Dubbele insteek

- Integreren = inverse operatie van afleiden
- Gegeven is een functie f die continu is en positief in

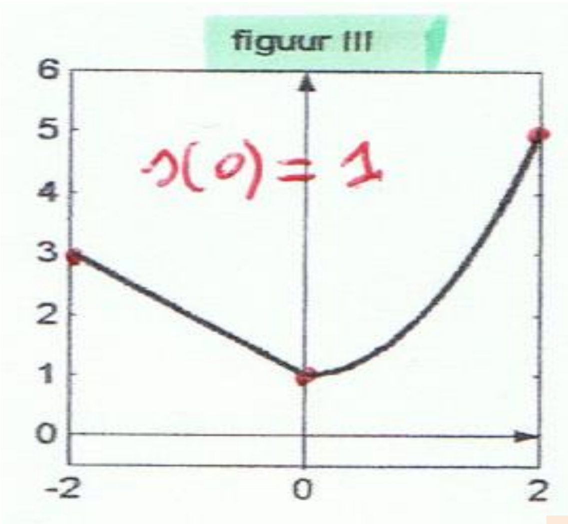
een interval [a, b] → Integreren = oppervlakte bepalen

CONCEPTUELE AANPAK m.b.v.
RIEMANNsommen
(= Hoofdstuk 5, § 1)

PRAKTISCHE AANPAK m.b.v.
“primitieve” functies
(= Hoofdstuk 5, § 3)

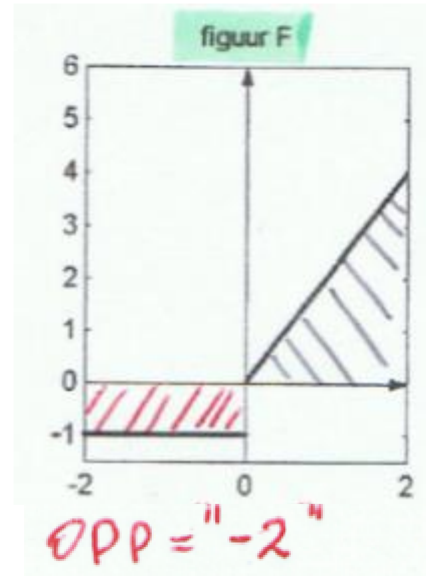
Ook andere integraaltoepassingen zijn mogelijk! (Hoofdstuk 5, § 2)

LINK MET MECHANICA



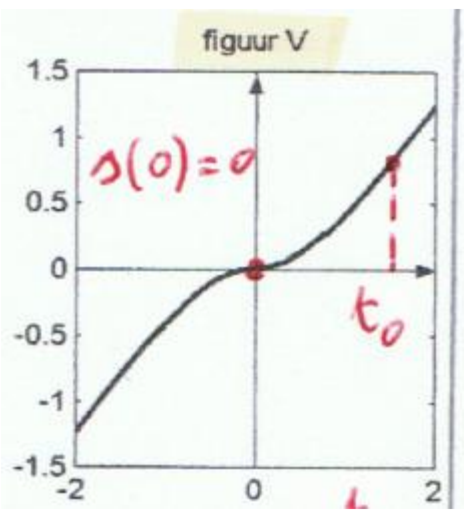
AFLEIDEN

INTEGREREN

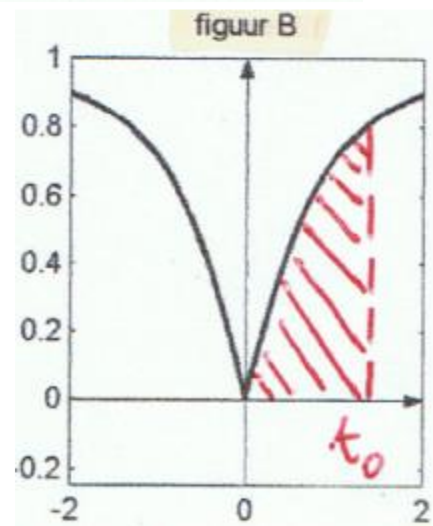


OPP = +4

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$



$$s(t_0) = \int_0^{t_0} v(t)\,\mathrm{d}t$$



Oppervlakte als oneindige som

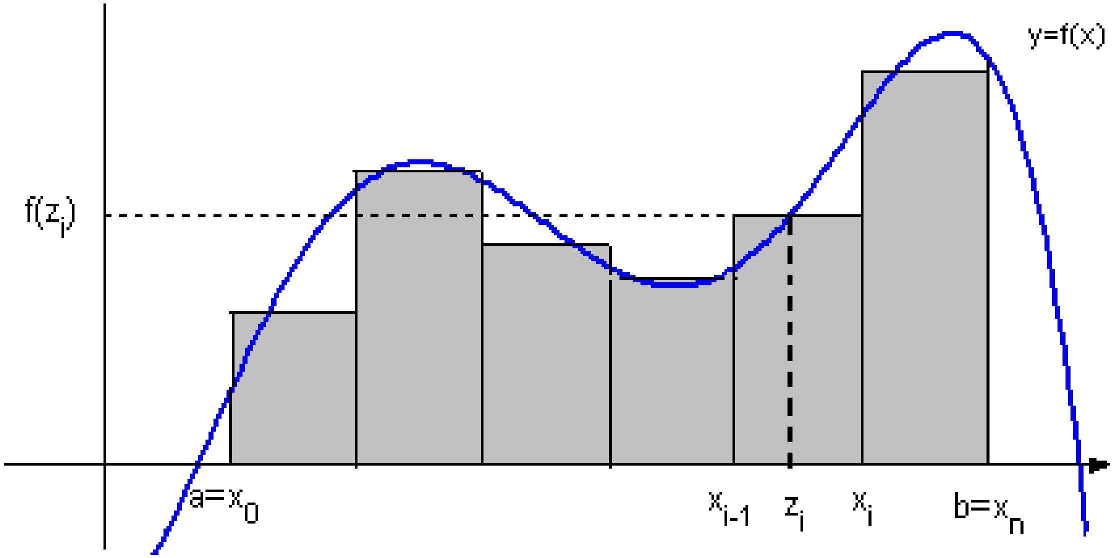
Definitie bepaalde integraal met Riemannsommen

willekeurig gekozen in i-de interval !!

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\boxed{\Delta x_i}}_{\text{Riemann-som}}$$

breedte van i-de interval !

GRAFISCH
kunnen begrijpen !



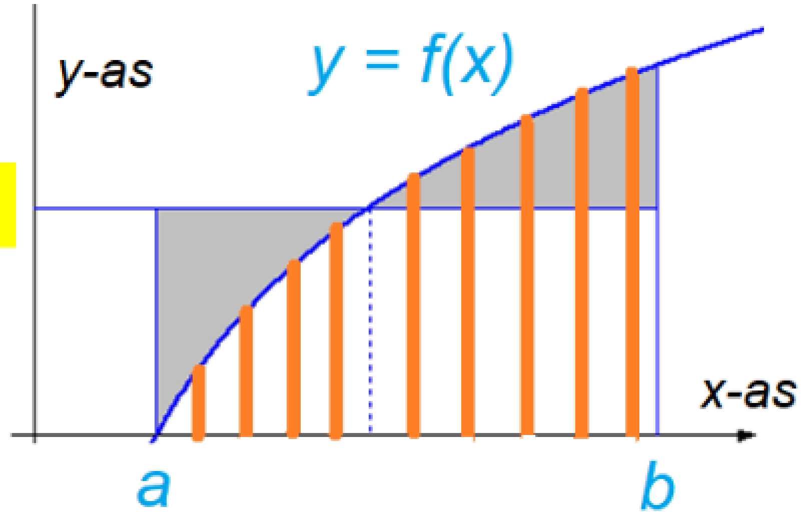
Middelwaardestelling van de integraalrekening

MEEST LOGISCHE KEUZE IS: $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$

Middelwaardestelling van de integraalrekening

Als f continu is in [a, b], dan $$\int_a^b f(x)\,dx = \bar{f}\cdot(b-a)$$

gemiddelde waarde van f m.b.t. [a, b] $\bar{f}$



LINK MET MECHANICA !

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\int_{t_a}^{t_b} v(t)dt}{t_b - t_a}$$!!!

HOOFDSTELLING VAN DE INTEGRAALREKENING

Als $f(x)$ $\boxed{\text{continu}}$ is in $[a,b]$ en

$F(x)$ is een willekeurige primitieve functie

van $f(x)$ in $[a,b]$, dan geldt:

$DF(x) = f(x)$!!

Voorwaarde is belangrijk !

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

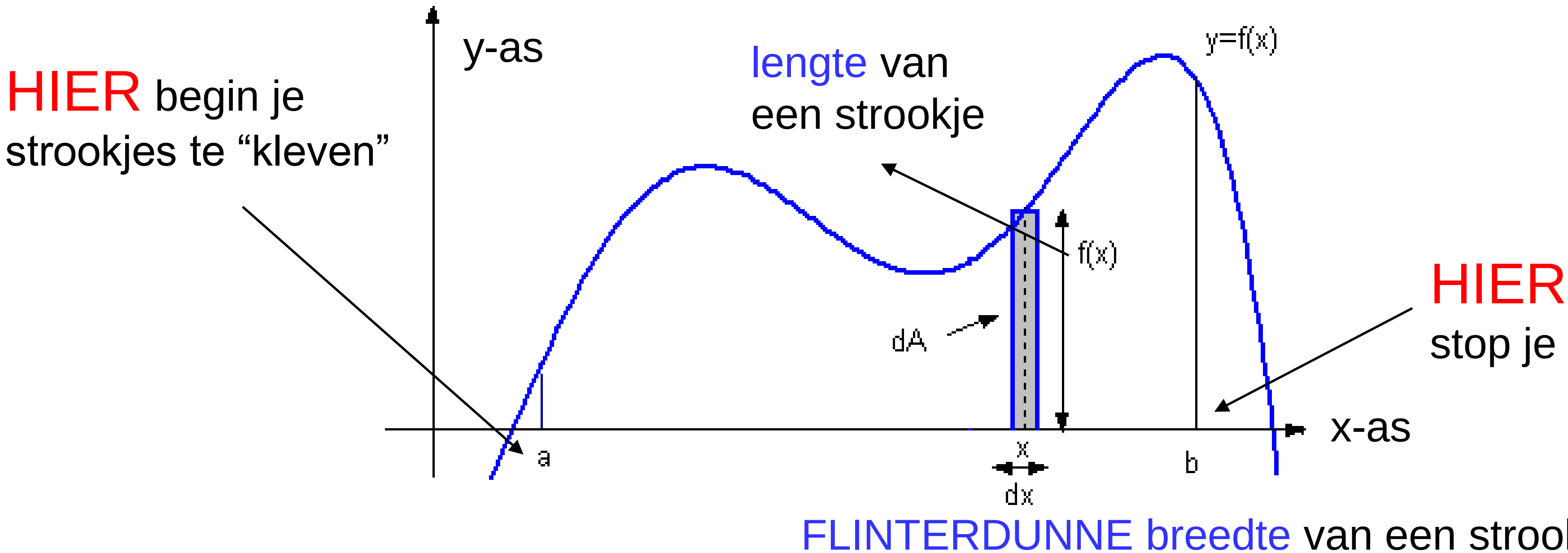
Primitieve functie ??? REKENTOESTEL!

Praktische interpretatie bepaalde integraal

Integraalteken = soort oneindig som-teken

$$\text{Opp} = \int dA \longrightarrow dA = f(x)\,dx$$

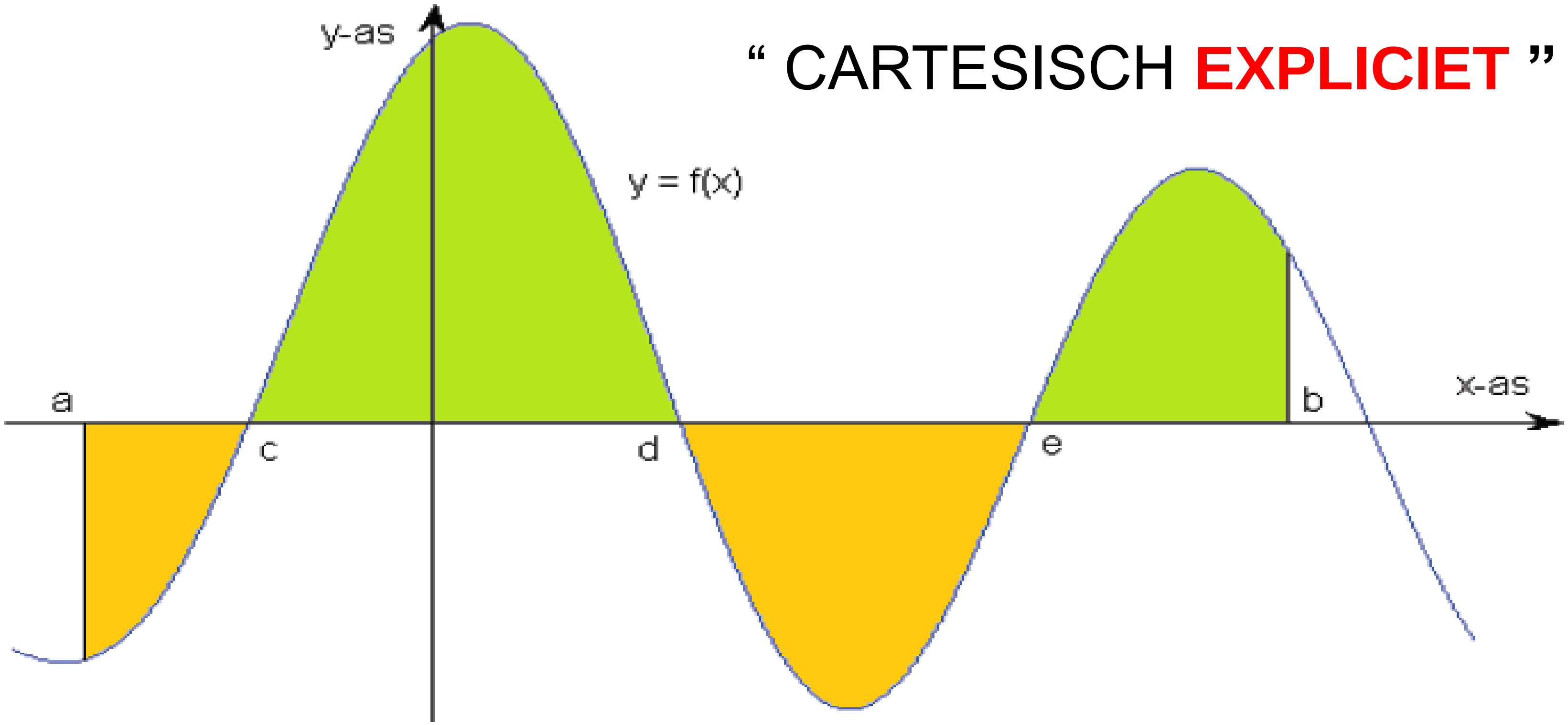
∞ som — opp. inf. strook



UHASSELT KU LEUVEN

Toepassing: oppervlakte cartesisch gebied

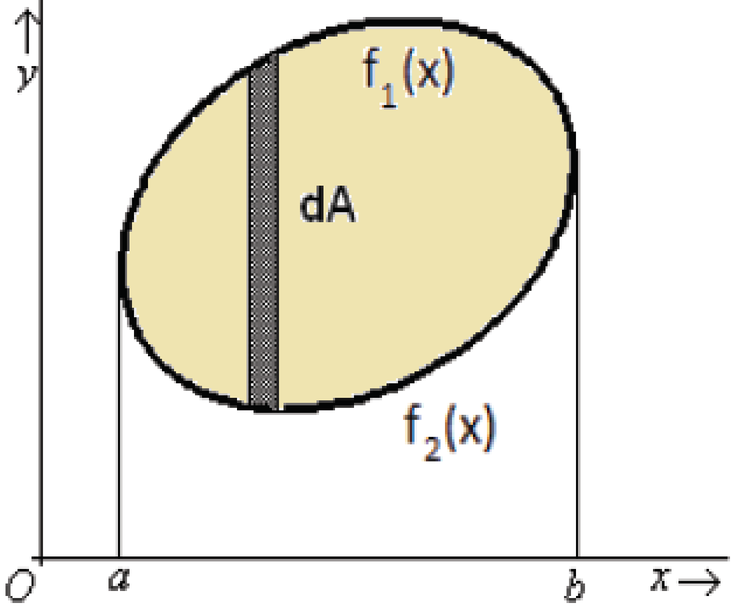
" CARTESISCH **EXPLICIET** "

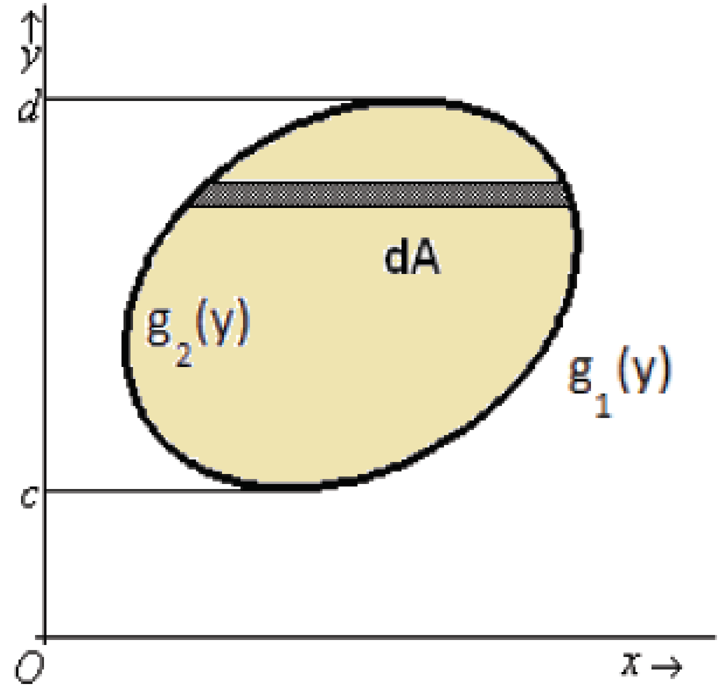


$$\text{Opp} = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^e f(x)dx + \int_e^b f(x)dx$$

Toepassing: oppervlakte cartesisch gebied

" CARTESISCH **IMPLICIET** "





$$A = \int_a^b \underbrace{(f_1(x) - f_2(x))}_{= L(x)} \, dx \quad \text{en} \quad A = \int_c^d \underbrace{(g_1(y) - g_2(y))}_{= L(y)} \, dy$$

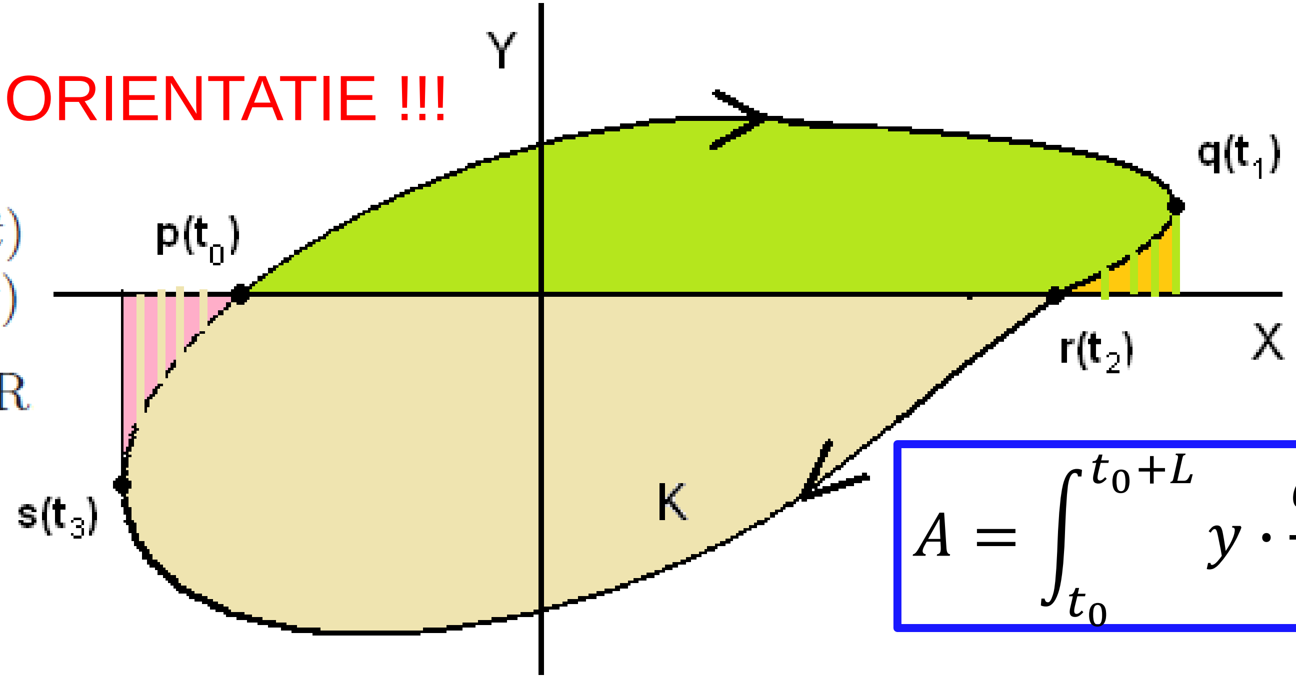
L van LENGTE !!

Toepassing: oppervlakte parametervorm gebied

WIJZERZIN ORIENTATIE !!!

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & f(t) \\ y & = & g(t) \end{array}\right.$$

met $t \in V \subset \mathbb{R}$



$$\boxed{A = \int_{t_0}^{t_0+L} y \cdot \frac{dx}{dt}\, dt}$$

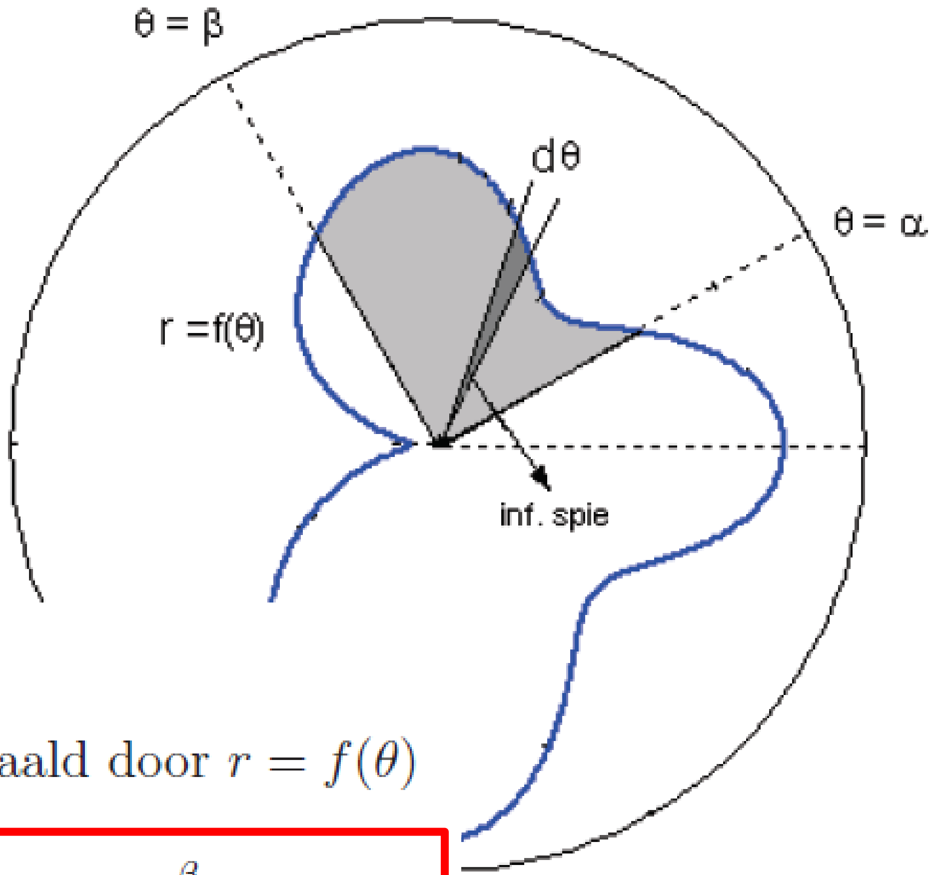
MOTIVATIE

$$A = \boxed{\int_{t_0}^{t_1} g(t) f'(t) dt} - \boxed{\int_{t_2}^{t_1} g(t) f'(t) dt} + \boxed{\int_{t_3}^{t_2} -g(t) f'(t) dt} - \boxed{\int_{t_3}^{t_0+L} -g(t) f'(t) dt}$$

$$\Rightarrow \quad A = \int_{t_0}^{t_1} y \cdot \frac{dx}{dt}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} y \cdot \frac{dx}{dt}\, dt + \int_{t_2}^{t_3} y \cdot \frac{dx}{dt}\, dt + \int_{t_3}^{t_0+L} y \cdot \frac{dx}{dt}\, dt$$

Toepassing: oppervlakte polair gebied

In tegenstelling tot bij afleiden, is nu een rechtstreekse "polaire aanpak" mogelijk !!



Basisformule poolkrommen

De oppervlakte van het gebied bepaald door $r = f(\theta)$ met $\alpha < \theta < \beta$ is gelijk aan

$$\boxed{\text{Opp} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta}$$

Toepassing: booglengte

Booglengteformule in cartesische coördinaten

De *booglengte* van de kromme $y = f(x)$ tussen de punten p en q is gelijk aan

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [y']^2}\, dx}$$

met $p(a, f(a))$ en $q(b, f(b))$ en $a < b$.

ALGEMEEN

$$s = \int_{\dots}^{\dots} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$