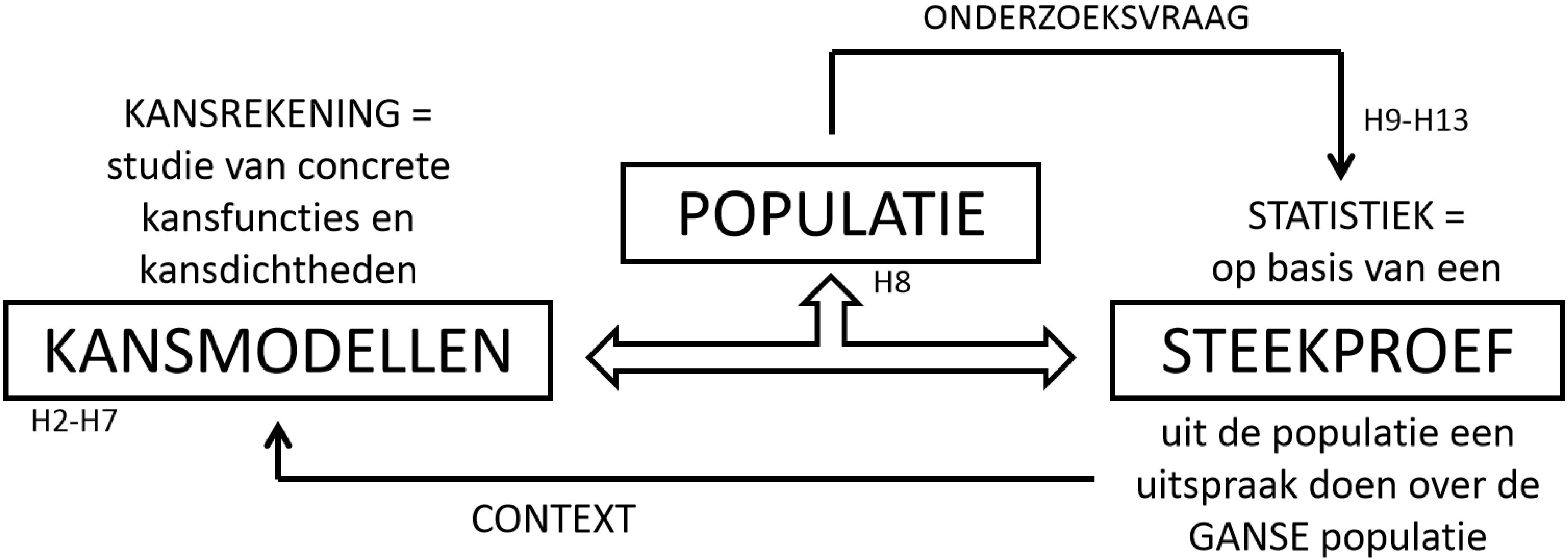
Statistiek: les 1

Cursusinformatie - Basisprincipes kansrekenen

Sabine Bertho sabine.bertho@kuleuven.be
Giovanni Vanroelen giovanni.vanroelen@uhasselt.be

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een
initiatief van UHasselt en KU Leuven.

Wat is statistiek?



ONDERZOEKSVRAAG

H9-H13

KANSREKENING =
studie van concrete
kansfuncties en
kansdichtheden

POPULATIE

H8

STATISTIEK =
op basis van een

KANSMODELLEN

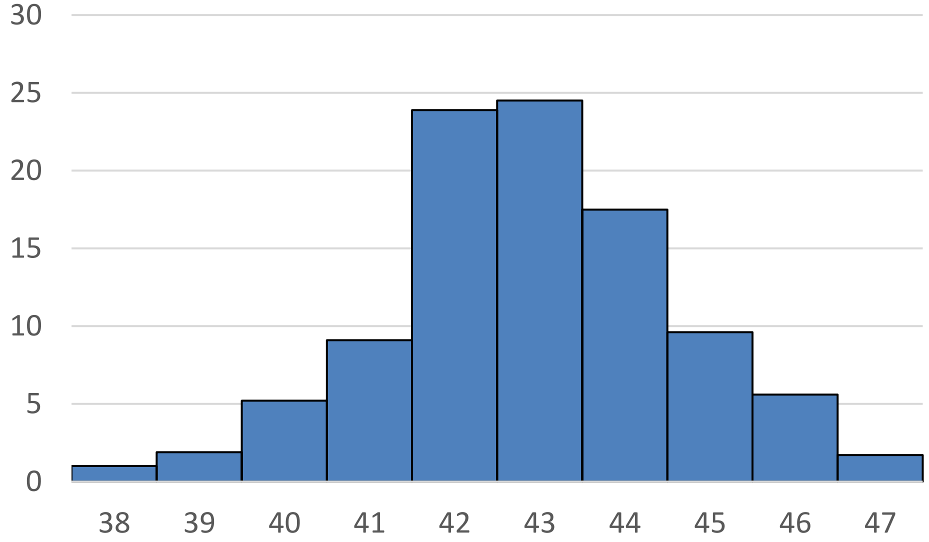
STEEKPROEF

H2-H7

uit de populatie een
uitspraak doen over de
GANSE populatie

CONTEXT

Wat is statistiek?



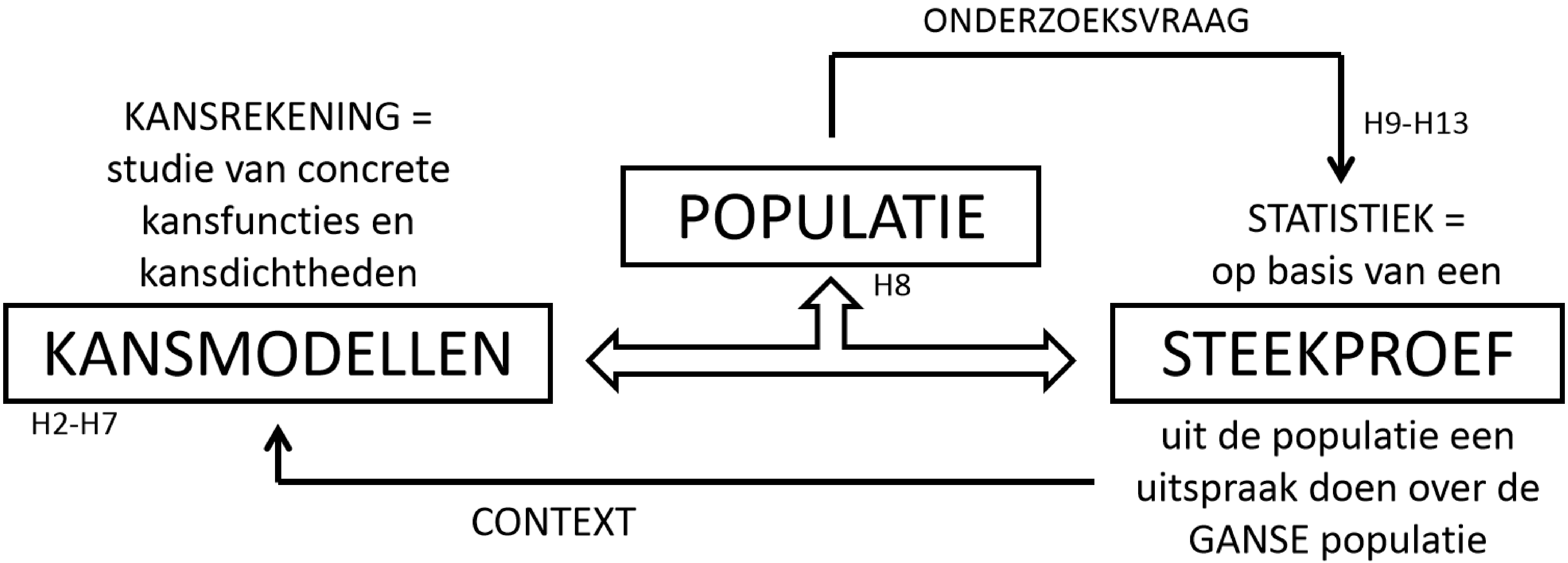
Maat 38: 1,0%
Maat 39: 1,9%
Maat 40: 5,2%
Maat 41: 9,1%
Maat 42: 23,9%
Maat 43: 24,5%
Maat 44: 17,5%
Maat 45: 9,6%
Maat 46: 5,6%
Maat 47: 1,7%

Wat is de gemiddelde schoenmaat van de Nederlandse man en hoe is deze verdeeld? Toen wij in 2009 onze webshop in schoenspanners begonnen was dit voor ons een belangrijke vraag. Het antwoord zou bepalen welke maten & hoeveelheden wij als eerste order in China zouden plaatsen. Helaas konden we het antwoord niet direct vinden. Nu zijn we 4 jaar verder en kunnen wij op basis van onze verkopen het antwoord bieden!

In de eerste jaren van ons bestaan hebben we schoenspanners verkocht met een dubbele maat zoals bijvoorbeeld maat 42-43. Door deze dubbele maatvoering kun je niet nauwkeurig een gemiddelde maat bepalen en hebben we besloten om deze verkopen niet in dit onderzoek mee te nemen. Sinds we zijn overgestapt op een enkele maatvoering kan dit wel. Hiervan hebben we nu al meer dan 3000 paar schoenspanners verkocht waarmee een solide basis is gecreëerd om dit onderzoek te publiceren.

https://www.persbericht.nu/schoenmaat-en-maatverdeling-van-de-nederlandse-man/

Wat is statistiek?



ONDERZOEKSVRAAG

KANSREKENING =
studie van concrete
kansfuncties en
kansdichtheden

KANSMODELLEN

H2-H7

POPULATIE

H8

H9-H13

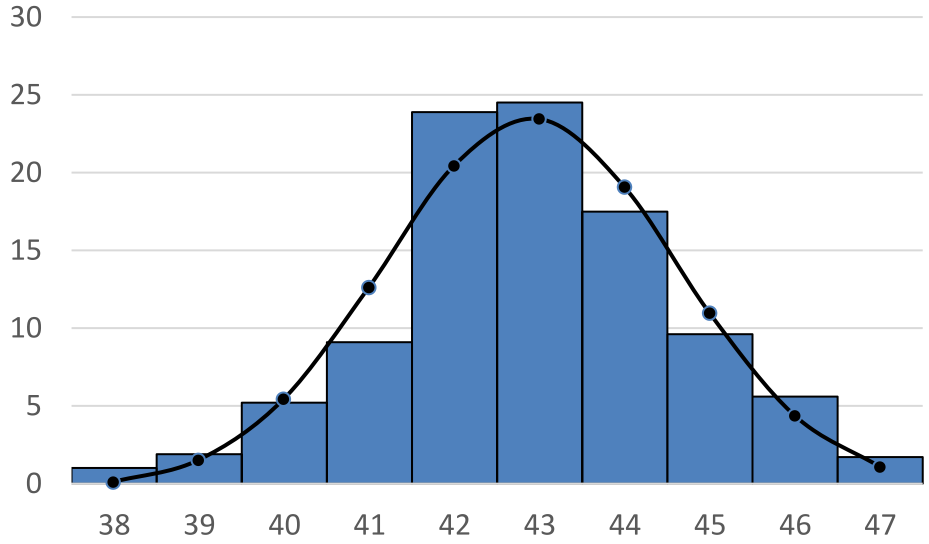
STATISTIEK =
op basis van een

STEEKPROEF

uit de populatie een
uitspraak doen over de
GANSE populatie

CONTEXT

Wat is statistiek?



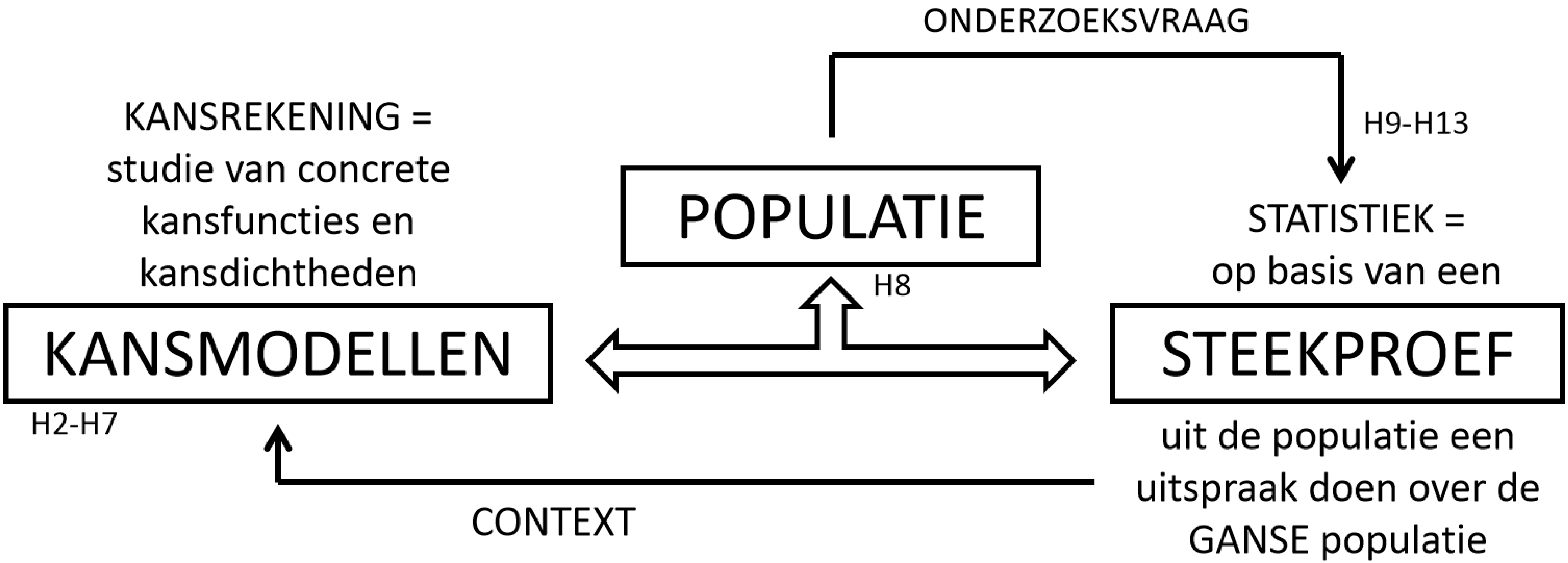
Maat 38: 1,0%
Maat 39: 1,9%
Maat 40: 5,2%
Maat 41: 9,1%
Maat 42: 23,9%
Maat 43: 24,5%
Maat 44: 17,5%
Maat 45: 9,6%
Maat 46: 5,6%
Maat 47: 1,7%

Wat is de gemiddelde schoenmaat van de Nederlandse man en hoe is deze verdeeld?
Toen wij in 2009 onze webshop in schoenspanners begonnen was dit voor ons een belangrijke vraag. Het antwoord zou bepalen welke maten & hoeveelheden wij als eerste order in China zouden plaatsen. Helaas konden we het antwoord niet direct vinden. Nu zijn we 4 jaar verder en kunnen wij op basis van onze verkopen het antwoord bieden!

In de eerste jaren van ons bestaan hebben we schoenspanners verkocht met een dubbele maat zoals bijvoorbeeld maat 42-43. Door deze dubbele maatvoering kun je niet nauwkeurig een gemiddelde maat bepalen en hebben we besloten om deze verkopen niet in dit onderzoek mee te nemen. Sinds we zijn overgestapt op een enkele maatvoering kan dit wel. Hiervan hebben we nu al meer dan 3000 paar schoenspanners verkocht waarmee een solide basis is gecreëerd om dit onderzoek te publiceren.

https://www.persbericht.nu/schoenmaat-en-maatverdeling-van-de-nederlandse-man/

Wat is statistiek?



ONDERZOEKSVRAAG

KANSREKENING =
studie van concrete
kansfuncties en
kansdichtheden

POPULATIE

H9-H13

STATISTIEK =
op basis van een

H8

KANSMODELLEN

STEEKPROEF

H2-H7

uit de populatie een
uitspraak doen over de
GANSE populatie

CONTEXT

Formularium (blz 2-5 van de oefenbundel) = samenvatting van de volledige cursus!

Wel in de cursus (zie Toledo) maar géén examenleerstof:

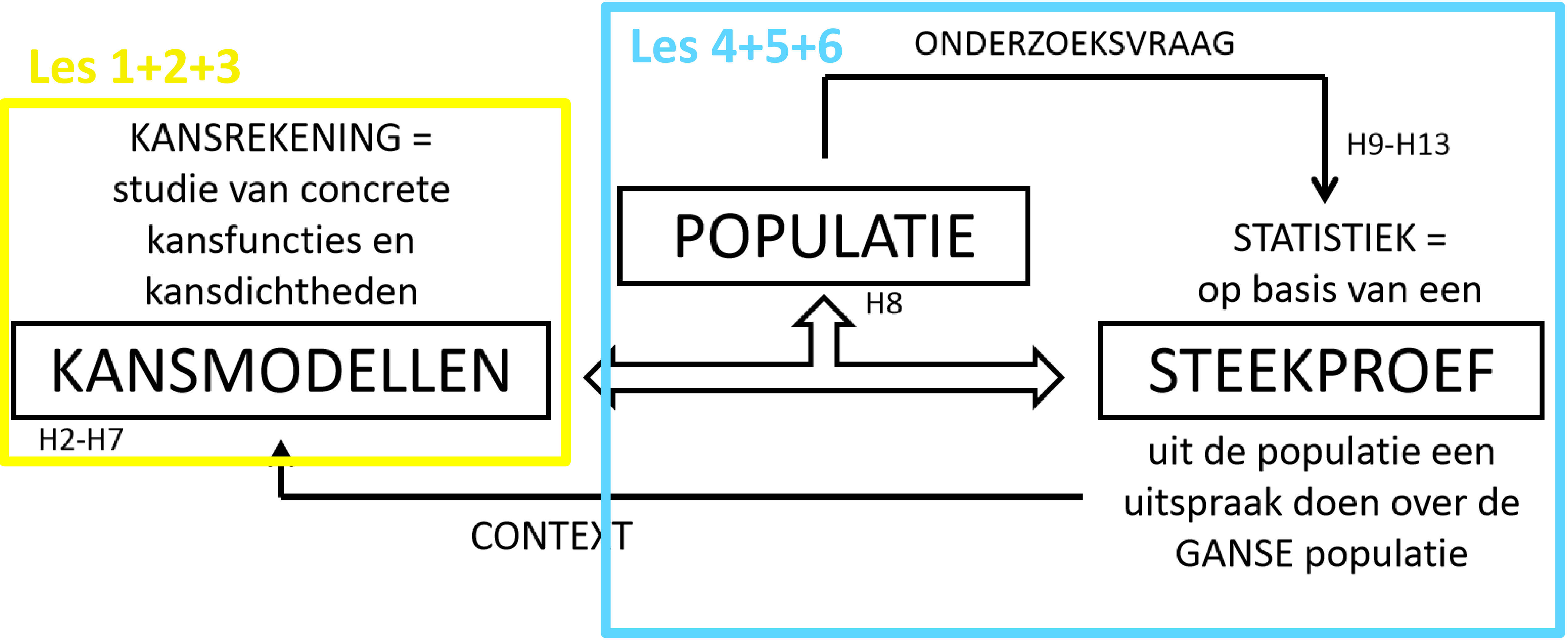
- 8.5: Statistische Kwaliteitscontrole
- 8.6: Acceptatie steekproef
- 13.2: Kruistabellen
- En verder nog alle bewijzen!

Verloop examen

- PE test: regressie met Excel (08/05/2024)
  - 4/20
  - Zelfstudiebundel op Toledo
  - 3 werkzittingen (maar voorbereiding thuis nodig om rond te geraken!)
  - Voorbeeldtesten beschikbaar op Toledo

- Examen over de oefeningen op papier (examenperiode)
  - Geen theorie
  - Open vragen (12/20) en meerkeuzevragen (4/20)

Wat is statistiek?



Les 1+2+3

KANSREKENING =
studie van concrete
kansfuncties en
kansdichtheden

KANSMODELLEN

H2-H7

CONTEXT

Les 4+5+6

ONDERZOEKSVRAAG

H9-H13

POPULATIE

H8

STATISTIEK =
op basis van een

STEEKPROEF

uit de populatie een
uitspraak doen over de
GANSE populatie

Weekindeling

Week	Datum	Theorie		Onderwerp werkzitting
1	12/02	Basisprincipes van de kansrekening (H1-H2)		Basis kansrekenen
2	19/02	Discrete kansverdelingen (H3) - Continue kansverdelingen (H4) - Intro normale kansdichtheid (H6)		Continue en discrete verdelingen
3	26/02	Binomiale kansfunctie (H5) - Normale kansdichtheid (H6) - Poisson verdeling (H7)		Binomiaal - poisson - normaal - lineaire combinaties
4	4/03			
5	11/03	sigma gekend: BI en hypothesetoetsen (H9 - H10)		Beschrijvende statistiek (PC)
6	18/03	sigma onbekend: BI en hypothesetoetsen (H9 - H10), Proporties BI en hypothesetoetsen (H12)		Toetsen van gemiddelde
7	25/03	vergelijken van verwachtingen en varianties - gekoppelde paren (H11) - chikwadraat (H13)		Toetsen van proporties - chikwadraat
Paasvakantie (best beginnen aan regressie met Excel)				
8	15/04			Toetsen van proporties - chikwadraat
9	22/04			Regressie wz1 (deel A + B)
10	29/04			Regressie wz2 (deel C + vbtesten)
11	6/05	**PC-test**		
12	13/05	Facultatief herhalingsuurtje		Gemengde oefeningen H3
13	20/05			Gemengde oefeningen H3

Les 1a: Basisbegrippen en basisregels van de kansrekening

Les 1b: Combinatieleer

Les 1c: Afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen

Ga naar **wooclap.com** en gebruik de code **BESA**

Welke weddenschap zou je het liefst aangaan?

1	Je gooit met 2 dobbelstenen en beweert dat de som van de ogen 7 zal zijn.	41%	15
2	Je beweert dat in een groep van 30 studenten 2 personen op dezelfde dag jarig zijn.	19%	7
3	Je trekt 10 kaarten uit een kaartspel van 52 en beweert dat je hierbij juist 1 hebt.	41%	15

37 / 53

Basisbegrippen uit de kansrekening

Experiment	Uitkomst
Een munt opwerpen	Kop (K), munt (M)
Twee maal een munt opwerpen	KK, KM, MK, MM
Een onderdeel selecteren voor inspectie	Defect, niet defect
Een dobbelsteen werpen	1,2,3,4,5,6
Een voetbalwedstrijd spelen	Winnen, verliezen, gelijkspelen
Het aantal weekendongevallen in Limburg tellen	$0, 1, 2, \ldots$
De productietijd in dagen van een bepaald product nagaan	$1, 2, 3, \ldots$
De levensduur van een lamp bepalen	$0 \leq x$
Een willekeurig reëel getal tussen 0 en 1 kiezen	$0 \leq x \leq 1$

Uitkomstenverzameling $\mathcal{U}$

Experimenten en hun uitkomsten

Experiment	**Uitkomst**
Een munt opwerpen	Kop (K), munt (M)
Twee maal een munt opwerpen	KK, KM, MK, MM
Een onderdeel selecteren voor inspectie	Defect, niet defect
Een dobbelsteen werpen	1,2,3,4,5,6
Een voetbalwedstrijd spelen	Winnen, verliezen, gelijkspelen
Het aantal weekendongevallen in Limburg tellen	$0, 1, 2, \ldots$
De productietijd in dagen van een bepaald product nagaan	$1, 2, 3, \ldots$
De levensduur van een lamp bepalen	$0 \leq x$
Een willekeurig reëel getal tussen 0 en 1 kiezen	$0 \leq x \leq 1$

Eindige uitkomstenverzamelingen

Experimenten en hun uitkomsten

Experiment	**Uitkomst**
Een munt opwerpen	Kop (K), munt (M)
Twee maal een munt opwerpen	KK, KM, MK, MM
Een onderdeel selecteren voor inspectie	Defect, niet defect
Een dobbelsteen werpen	1,2,3,4,5,6
Een voetbalwedstrijd spelen	Winnen, verliezen, gelijkspelen
Het aantal weekendongevallen in Limburg tellen	$0, 1, 2, \ldots$
De productietijd in dagen van een bepaald product nagaan	$1, 2, 3, \ldots$
De levensduur van een lamp bepalen	$0 \leq x$
Een willekeurig reëel getal tussen 0 en 1 kiezen	$0 \leq x \leq 1$

Oneindige aftelbare uitkomstenverzamelingen

Experimenten en hun uitkomsten

Experiment	**Uitkomst**
Een munt opwerpen	Kop (K), munt (M)
Twee maal een munt opwerpen	KK, KM, MK, MM
Een onderdeel selecteren voor inspectie	Defect, niet defect
Een dobbelsteen werpen	1,2,3,4,5,6
Een voetbalwedstrijd spelen	Winnen, verliezen, gelijkspelen
Het aantal weekendongevallen in Limburg tellen	$0, 1, 2, \ldots$
De productietijd in dagen van een bepaald product nagaan	$1, 2, 3, \ldots$
De levensduur van een lamp bepalen	$0 \leq x$
Een willekeurig reëel getal tussen 0 en 1 kiezen	$0 \leq x \leq 1$

Oneindige niet aftelbare uitkomstenverzamelingen
(begrensd of onbegrensd)

Gebeurtenissen

Experiment	**Uitkomst**
Een munt opwerpen	Kop (K), munt (M)
Twee maal een munt opwerpen	KK, KM, MK, MM
Een onderdeel selecteren voor inspectie	Defect, niet defect
Een dobbelsteen werpen	$\boxed{1,2,3}$ 4,5,6
Een voetbalwedstrijd spelen	Winnen, verliezen, gelijkspelen
Het aantal weekendongevallen in Limburg tellen	$0, 1, 2, \ldots$
De productietijd in dagen van een bepaald product nagaan	$1, 2, 3, \ldots$
De levensduur van een lamp bepalen	$0 \leq x$
Een willekeurig reëel getal tussen 0 en 1 kiezen	$0 \leq x \leq 1$

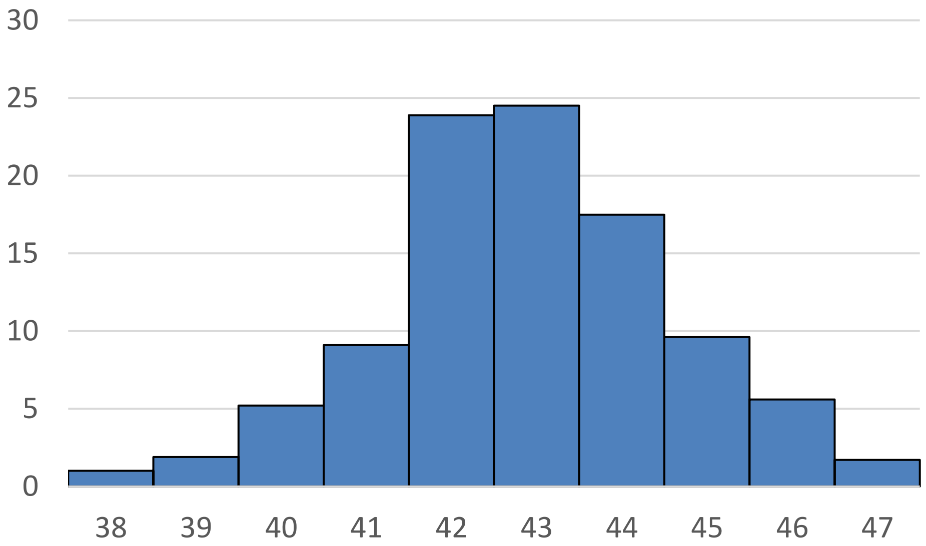
Gebeurtenis A: een getal gooien kleiner dan 4

A = deelverzameling van de uitkomstenverzameling

Complement van een gebeurtenis A^c : een getal gooien groter dan of gelijk aan 4

$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{4,5,6\}$

Schoen



- Experiment: schoenmaat bepalen
- Uitkomstenverzameling:

  $\{38, 39, 40, 41, \ldots, 47\}$
- Mogelijke gebeurtenissen:

  A = een schoenmaat groter dan 44 hebben, $A = \{45, 46, 47\}$

  B = een even schoenmaat hebben, $B = \{38, 40, 42, 44, 46\}$

OF

- Unie: $A \cup B = \{38, 40, 42, 44, 45, 46, 47\}$
- Doorsnede: $A \cap B = \{46\}$

EN

De kans op een gebeurtenis

1) Subjectieve kans:
   Bvb: Je beweert dat er 60% kans is dat de Rode Duivels wereldkampioen worden.

Ga naar **wooclap.com** en gebruik de code **BESA**

Stel dat je met volle overtuiging zegt: "Er is een grote kans dat ik ga slagen op Statistiek!" Wat bedoel je dan met "een grote kans"?

1	0% - 10%	5%	2
2	10% - 20%	0%	0
3	20% - 30%	0%	0
4	30% - 40%	3%	1
5	40% - 50%	0%	0
6	50% - 60%	3%	1
7	60% - 70%	15%	6
8	70% - 80%	54%	21
9	80% - 90%	15%	6
10	90% - 100%	5%	2

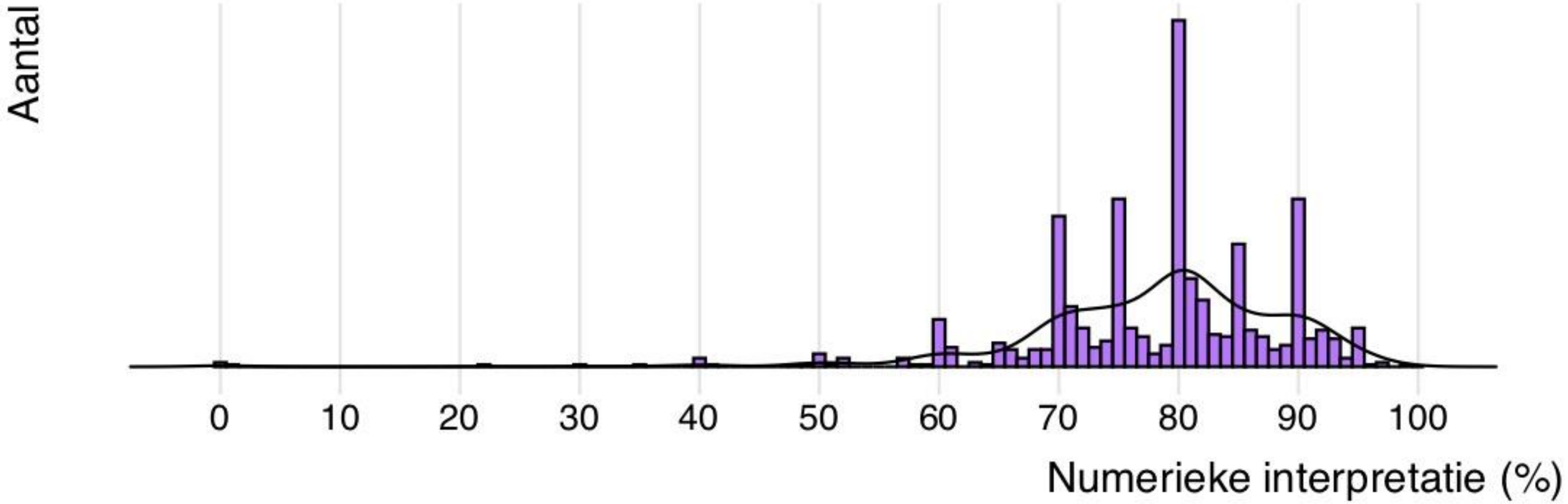
wooclap

100 %

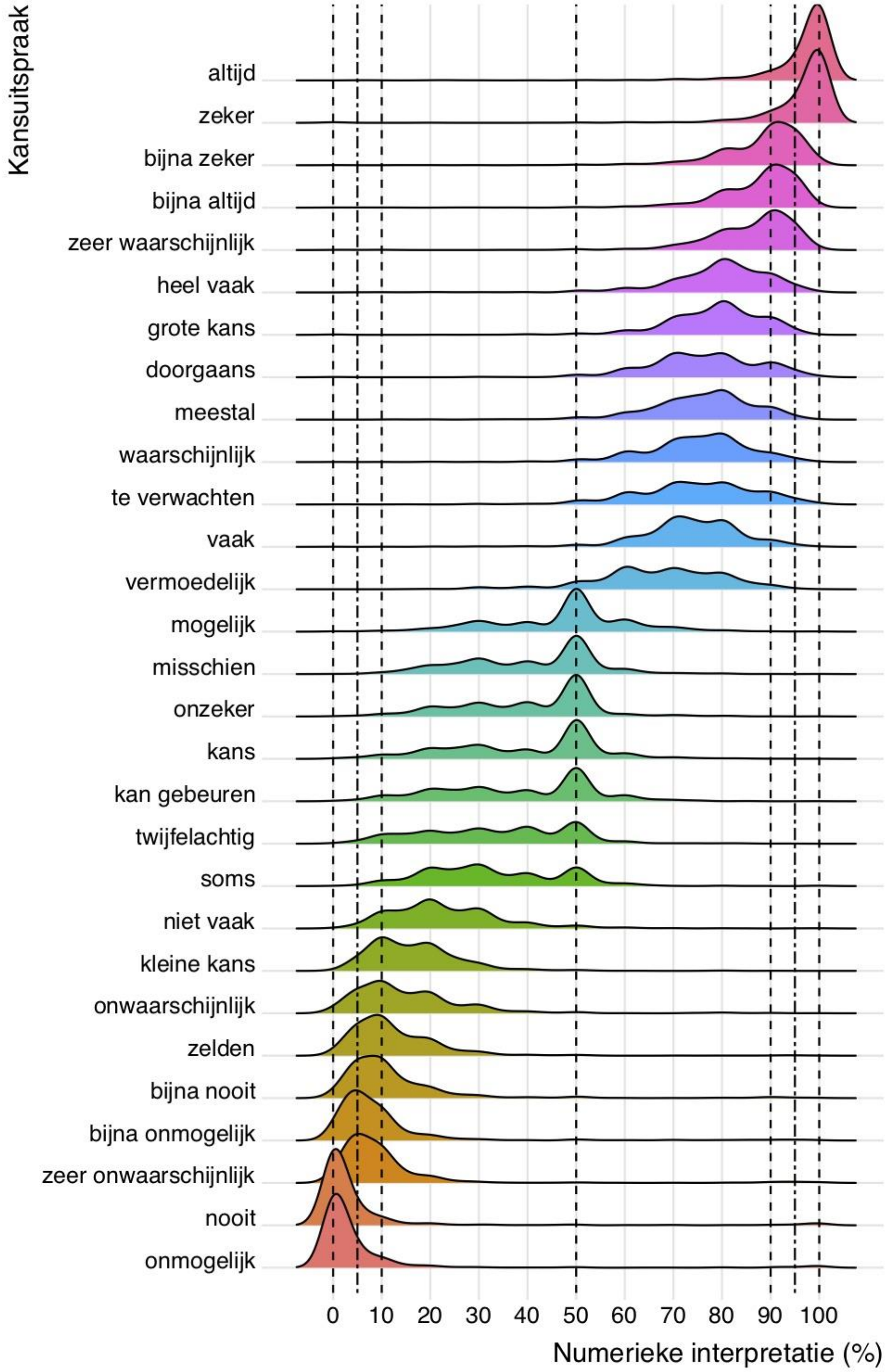
39 / 53

De kans op een gebeurtenis

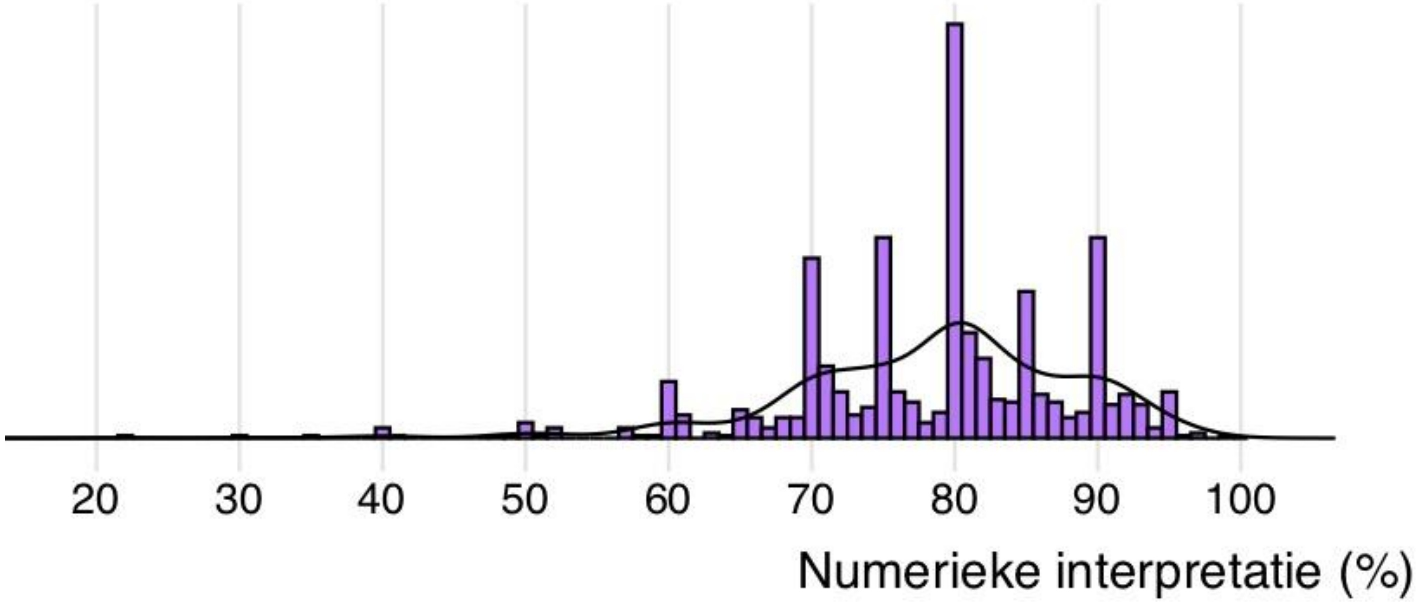
1) Subjectieve kans:
   "een grote kans" volgens https://onzetaal.nl/nieuws-en-dossiers/weblog/hoe-vaak-is-vaak



op een gebeurtenis



[ttps://onzetaal.nl/nieuws-en-
-is-vaak]()



UHASSELT

KU LEUVEN

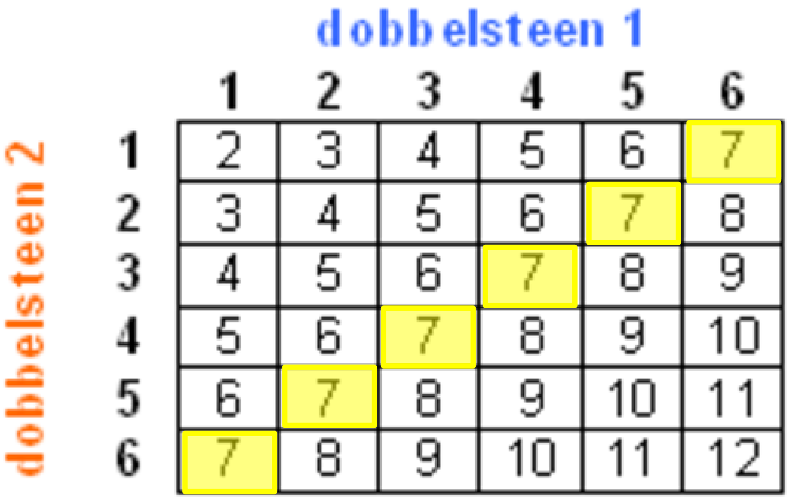
De kans op een gebeurtenis

1) Subjectieve kans:
2) Methode van Laplace:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten voor } A}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$$

Bvb: de kans op een 7 bij
het gooien met 2 dobbelstenen

$$\mathrm{P}(7) = \frac{6}{36} = 0{,}1667$$



dobbelsteen 1

dobbelsteen 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

De kans op een gebeurtenis

1) Subjectieve kans:

2) Methode van Laplace:

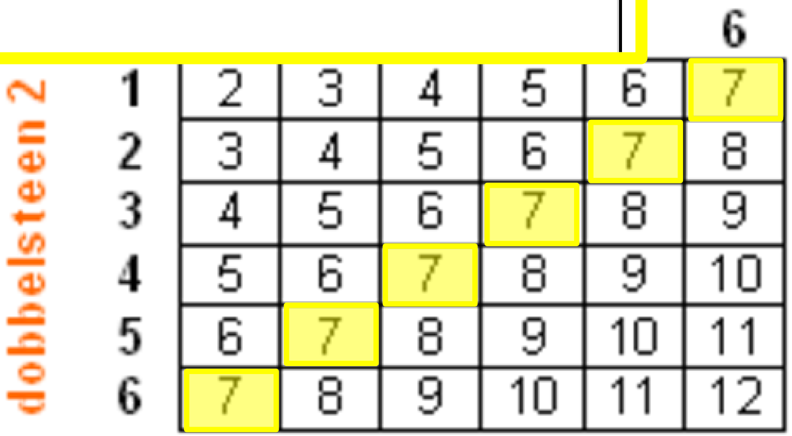
$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten voor } A}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$$

BASISREGELS:

- Regel van Laplace: $P(A) = \frac{\#\text{ gunstige gevallen}}{\#\text{ mogelijke gevallen}}$

FORMULARIUM

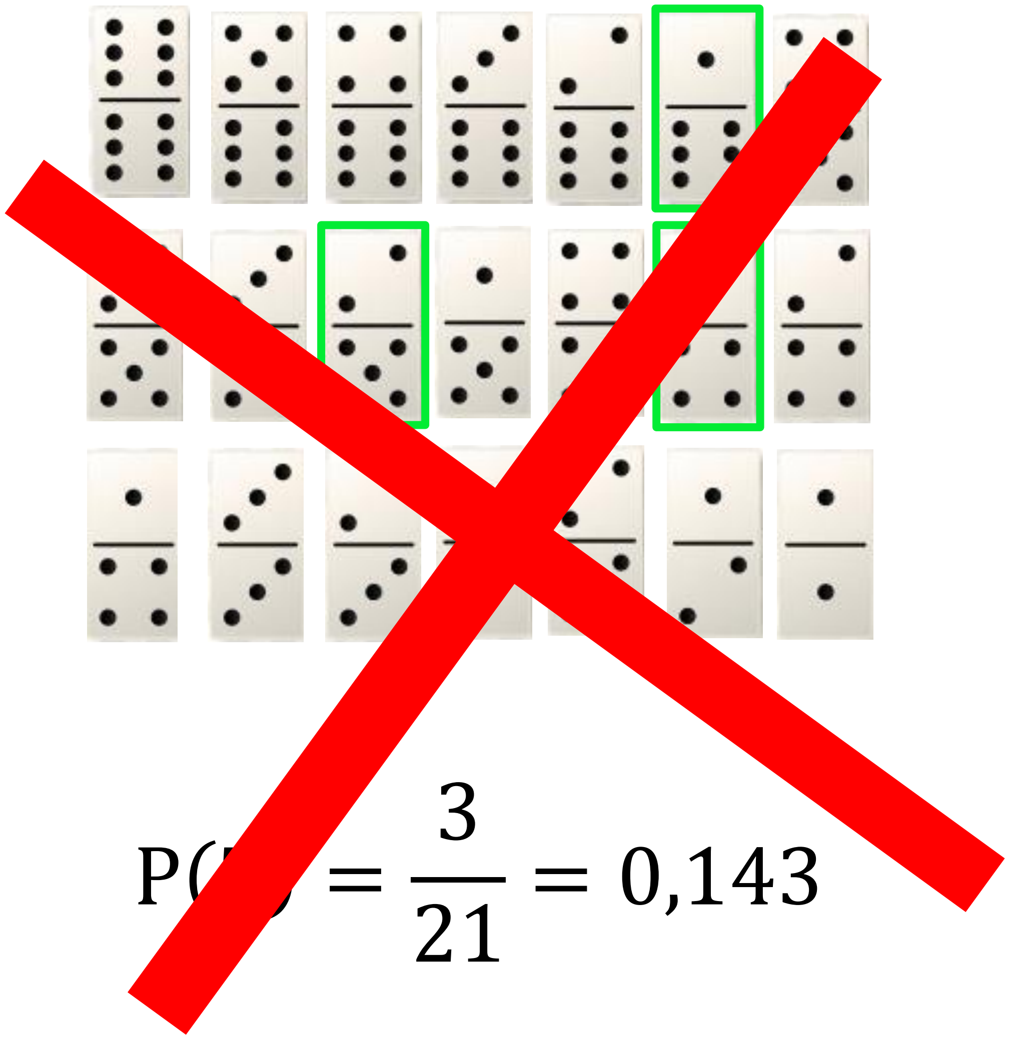
$$\mathrm{P}(7) = \frac{6}{36} = 0{,}1667$$



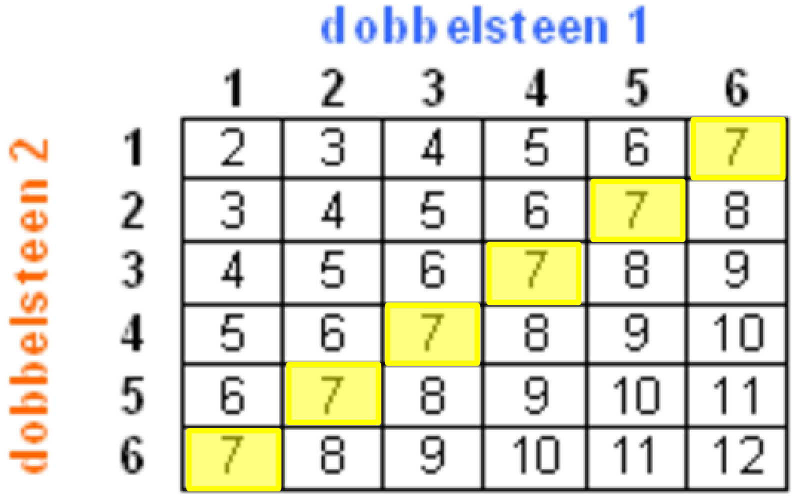
dobbelsteen 2

						6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Waar zit de fout?



$$P(7) = \frac{3}{21} = 0,143$$



	dobbelsteen 1					
dobbelsteen 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(7) = \frac{6}{36} = 0,1667$$

$$P(A) = \frac{\#\ \text{gunstige gevallen}}{\#\ \text{mogelijke gevallen}}$$

De kans op een gebeurtenis

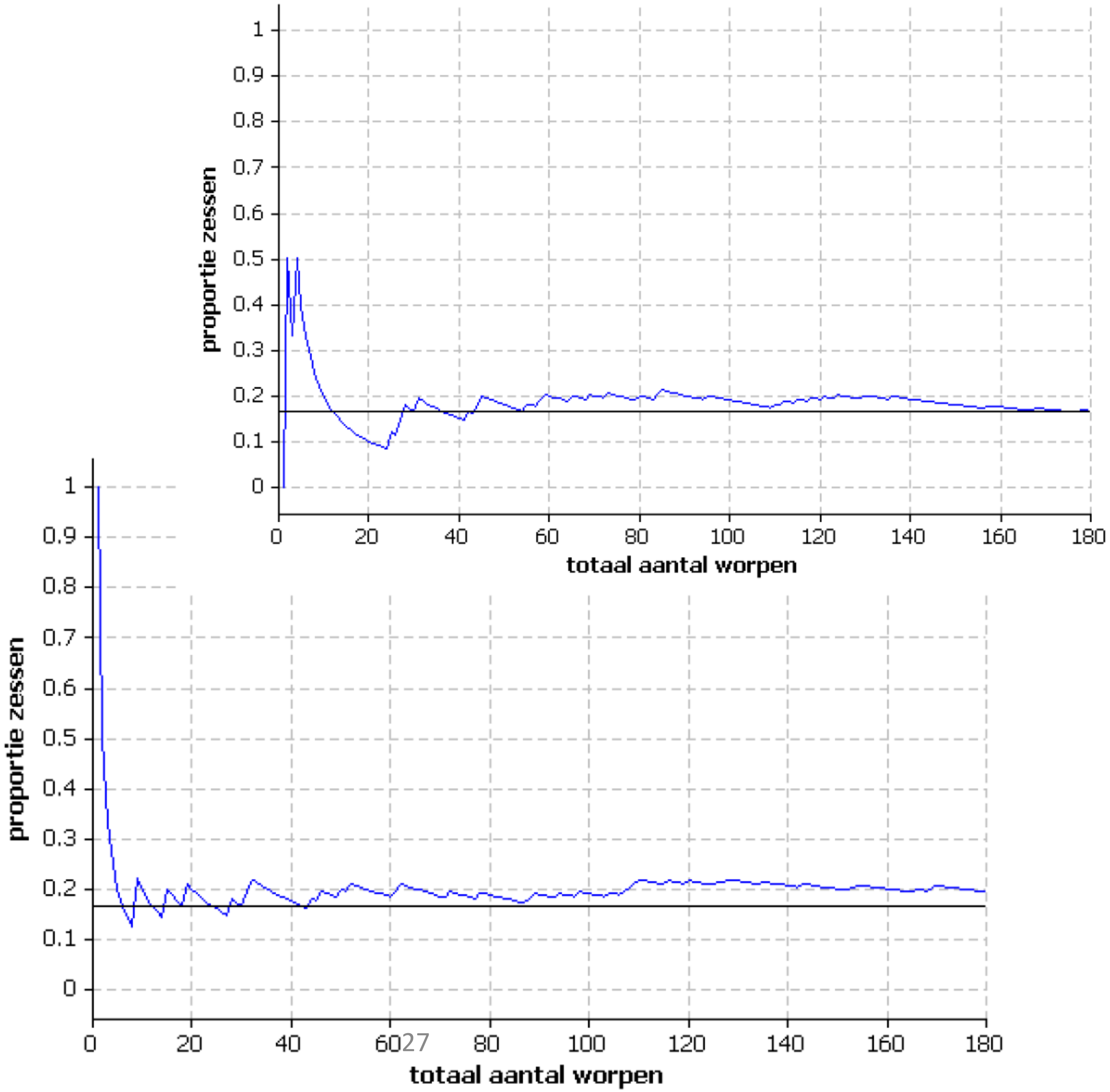
1) Subjectieve kans
2) Methode van Laplace
3) Frequentiemethode

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n\to\infty} f_{A,n}$$

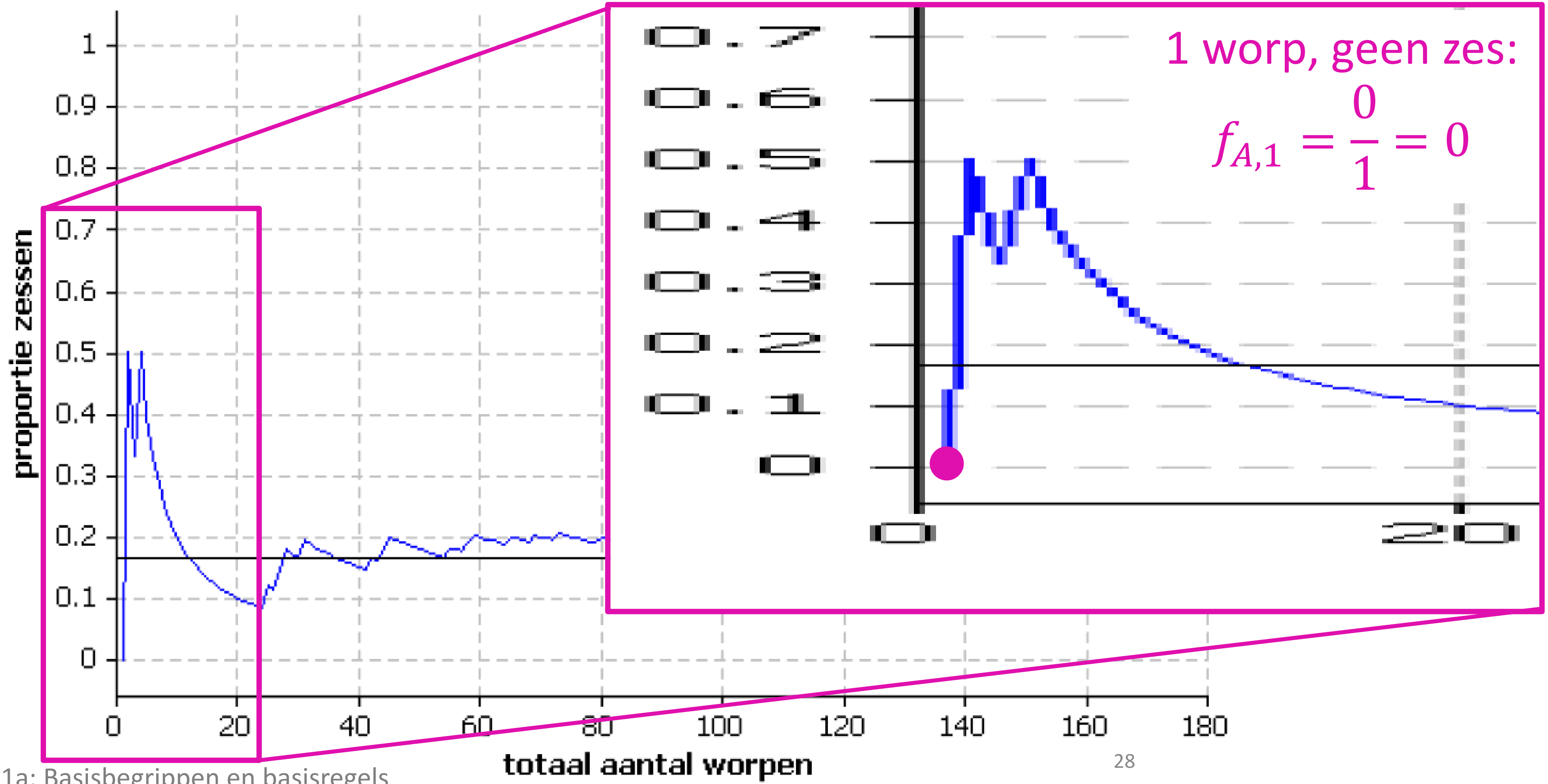
Bvb: Wat is de kans om een 6 te gooien met een eerlijke dobbelsteen?

Volgens Laplace:

$$\mathrm{P}(6) = \frac{1}{6} = 0{,}1667$$



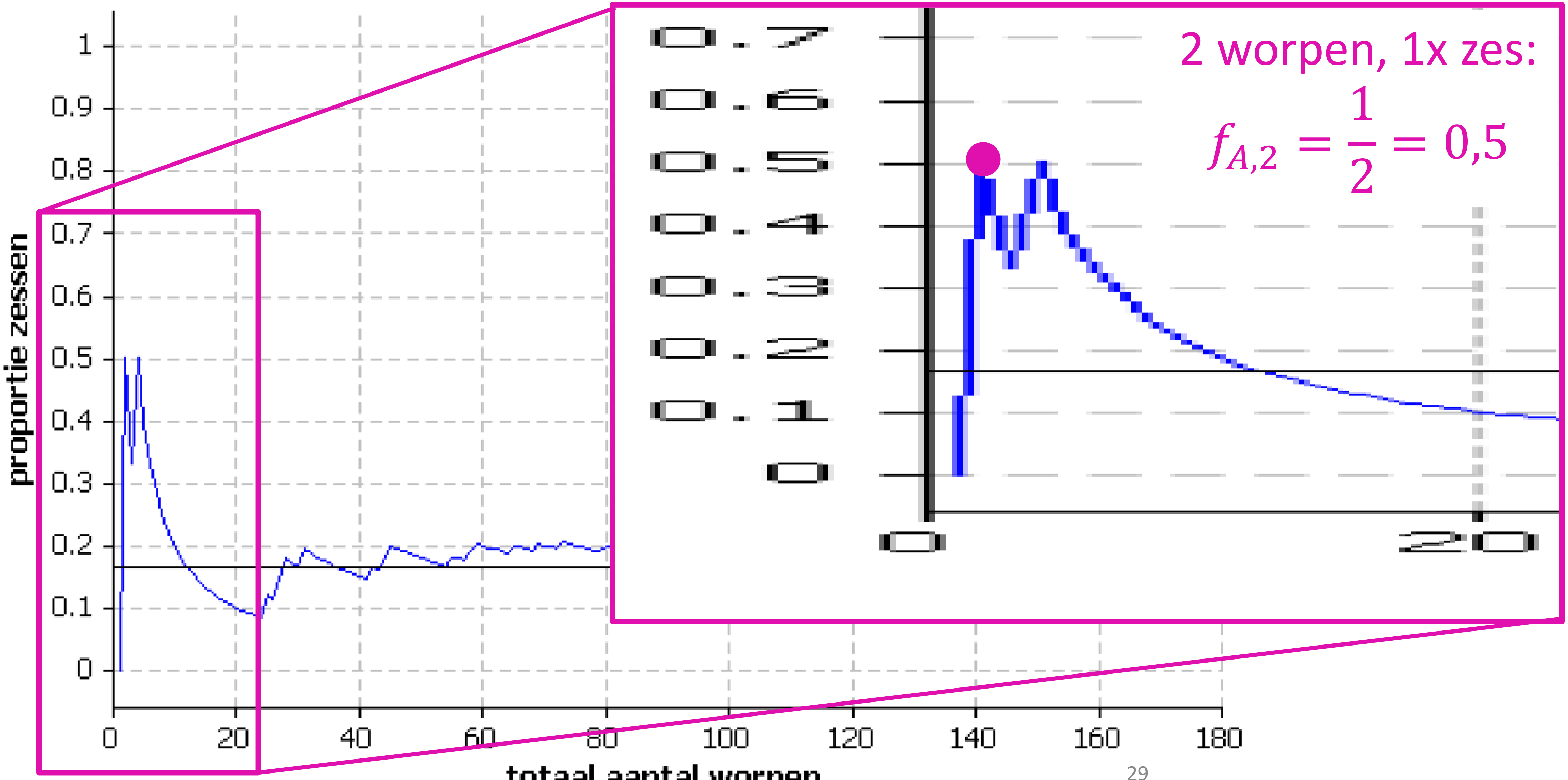
De kans op een gebeurtenis: frequentiemethode



1 worp, geen zes:

$$f_{A,1} = \frac{0}{1} = 0$$

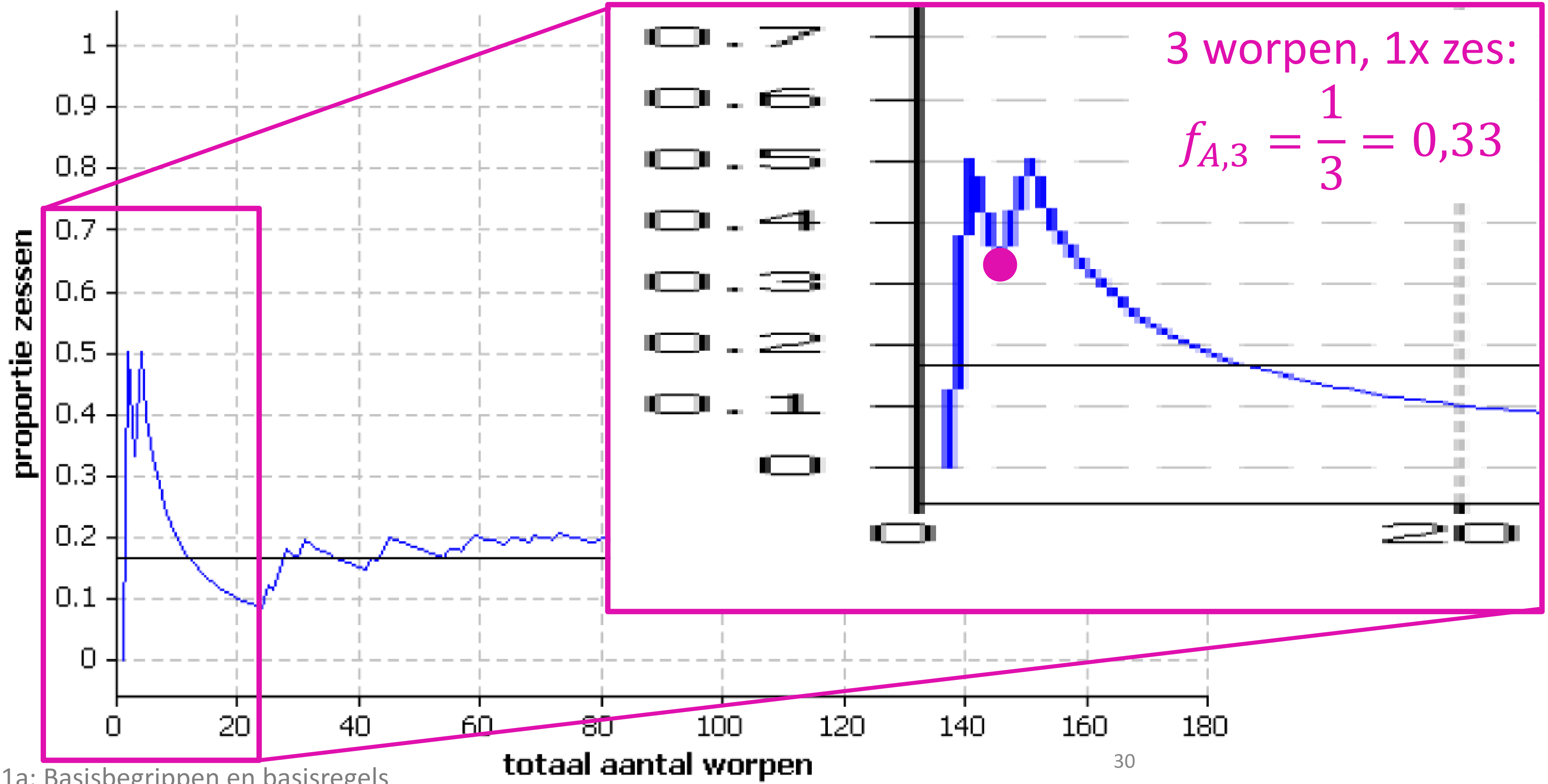
De kans op een gebeurtenis: frequentiemethode



2 worpen, 1x zes:

$$f_{A,2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

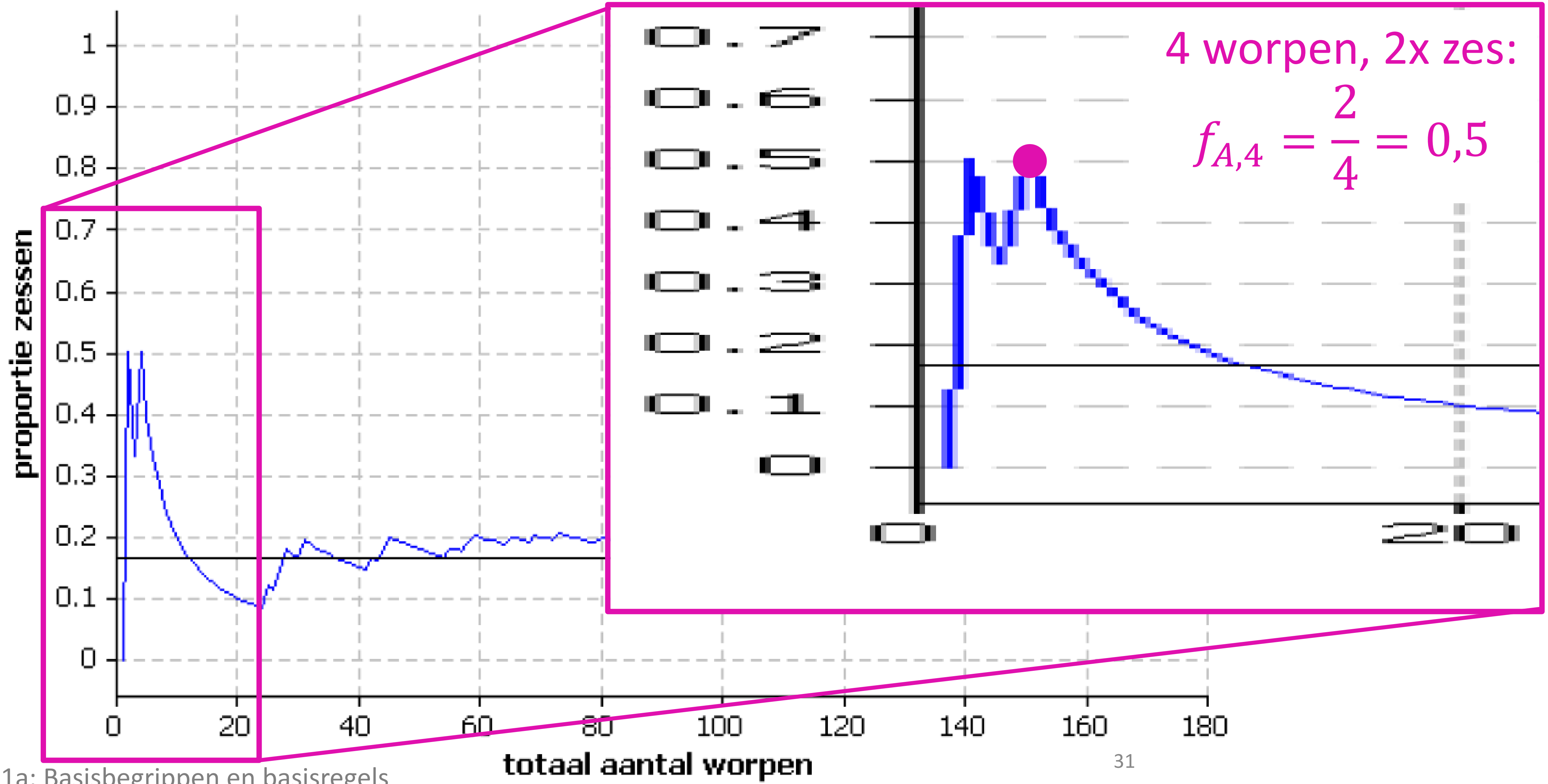
De kans op een gebeurtenis: frequentiemethode



3 worpen, 1x zes:

$$f_{A,3} = \frac{1}{3} = 0,33$$

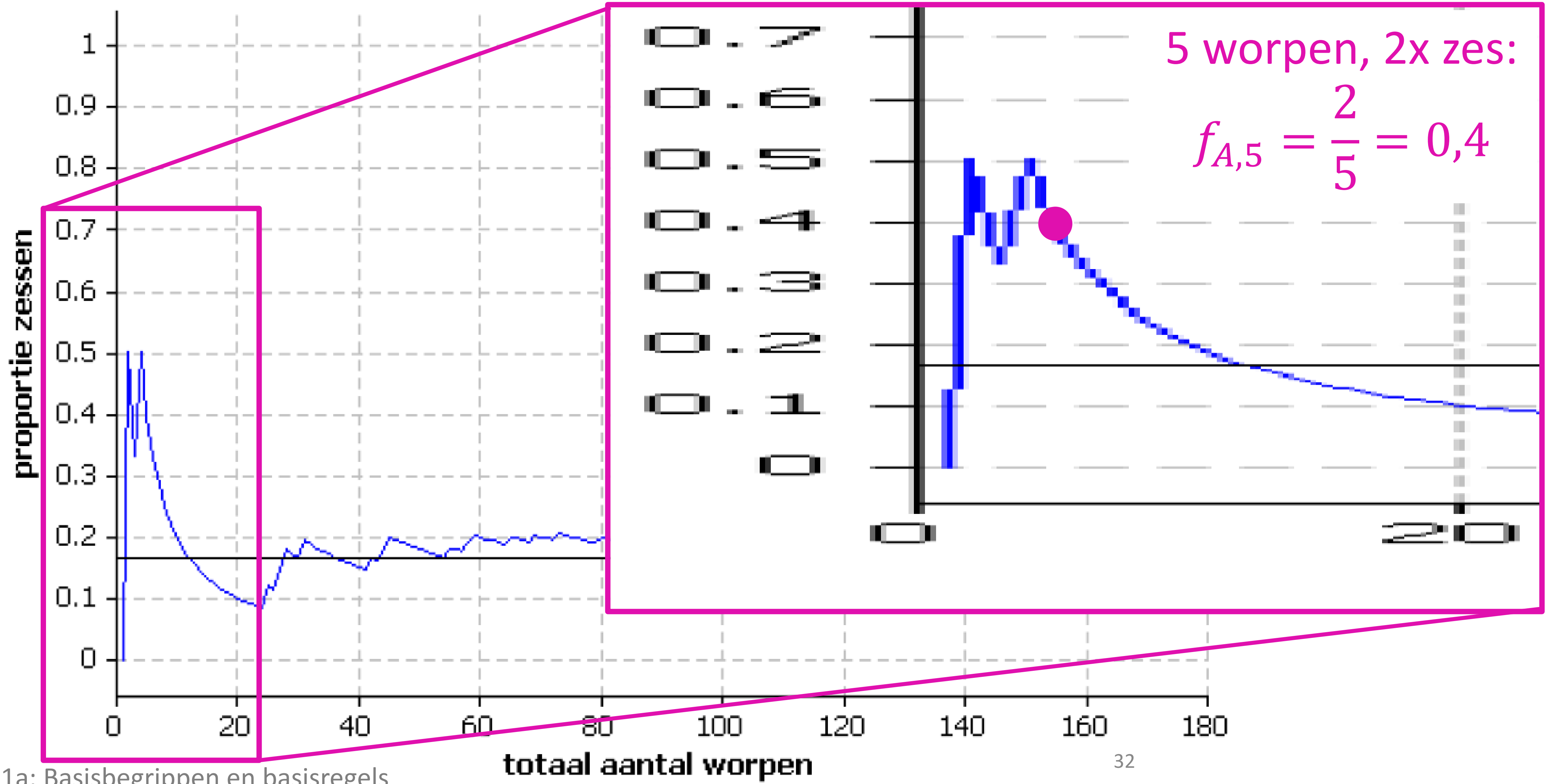
De kans op een gebeurtenis: frequentiemethode



4 worpen, 2x zes:

$$f_{A,4} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

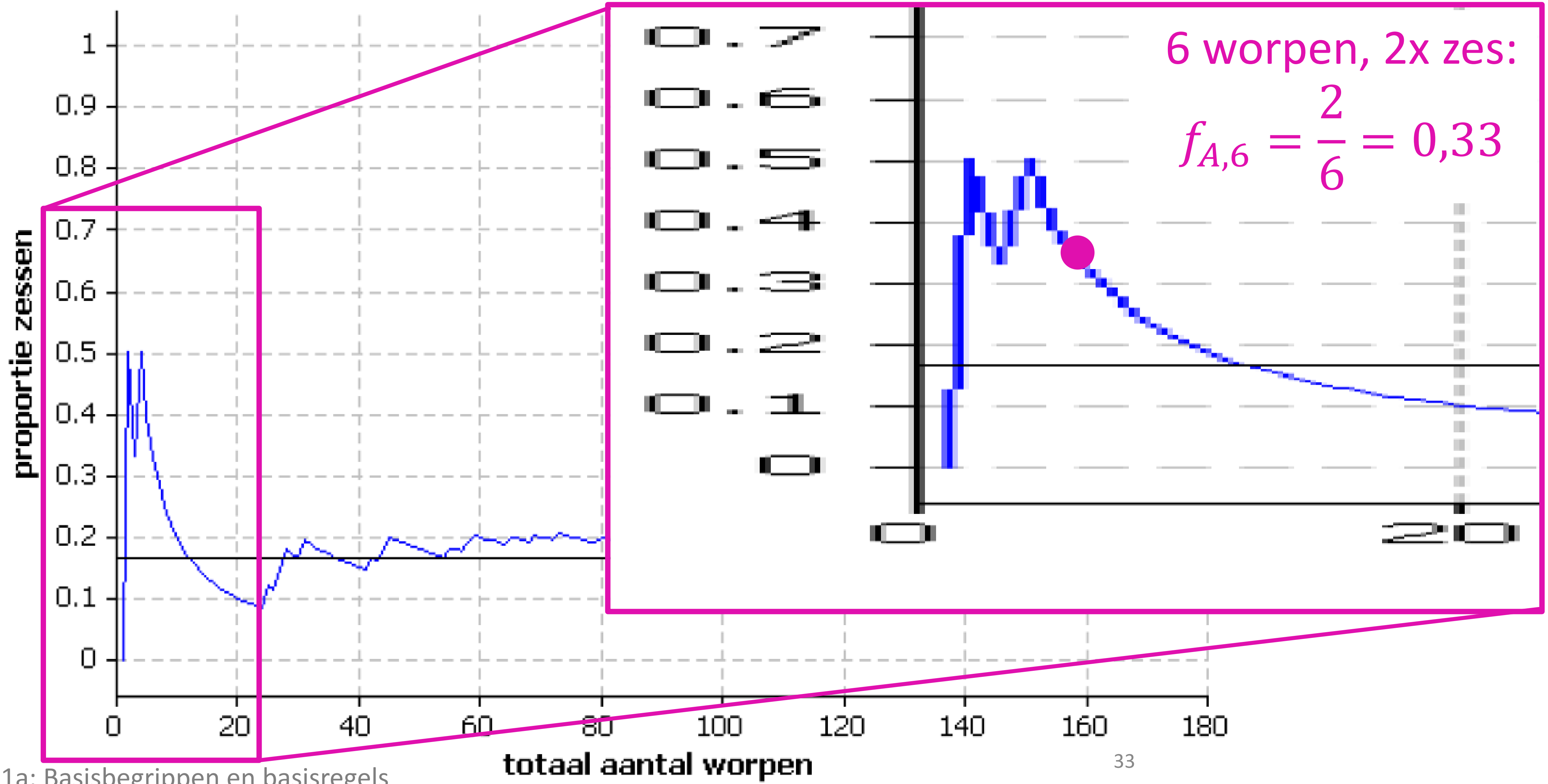
De kans op een gebeurtenis: frequentiemethode



5 worpen, 2x zes:

$$f_{A,5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

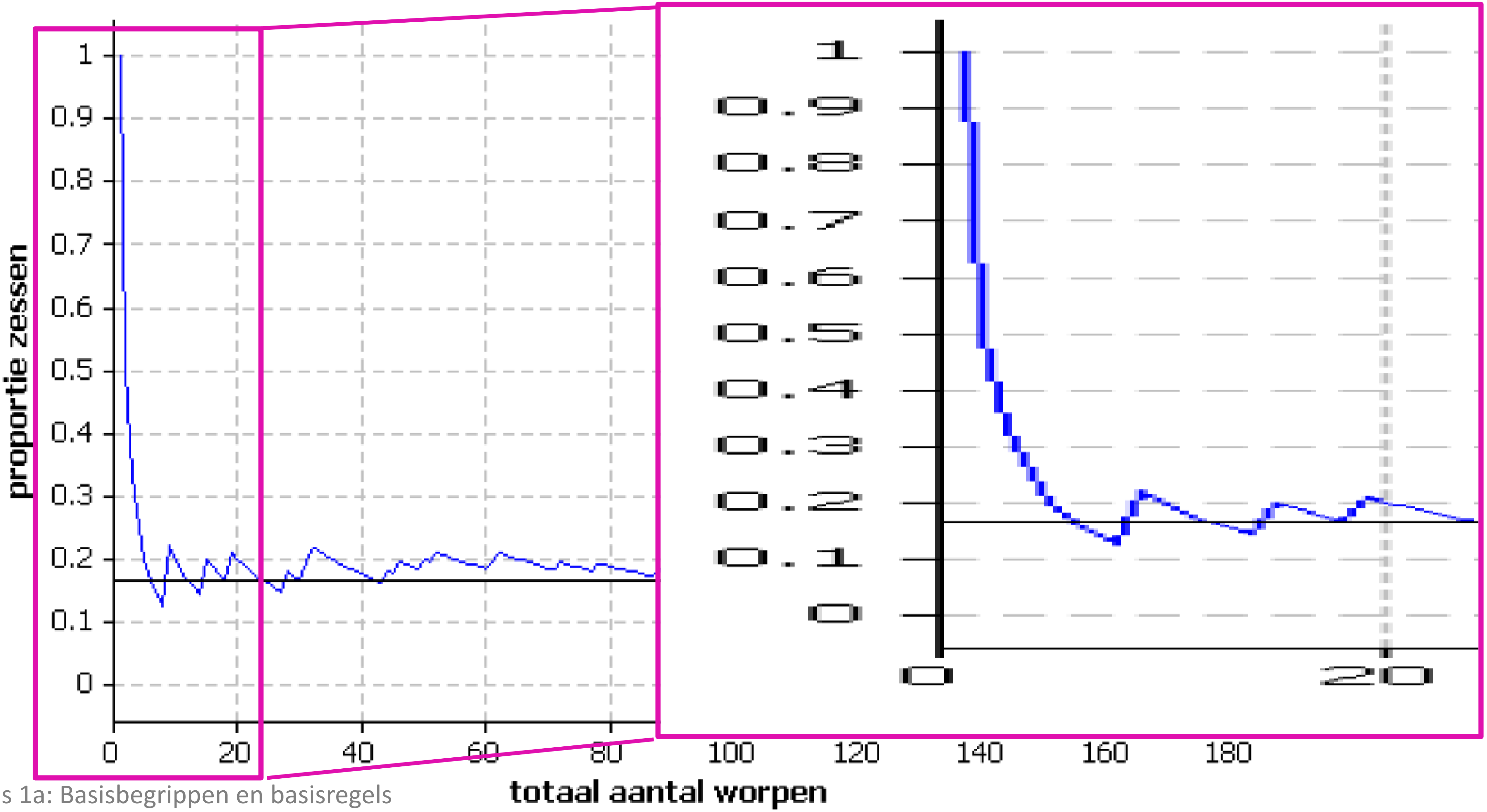
De kans op een gebeurtenis: frequentiemethode



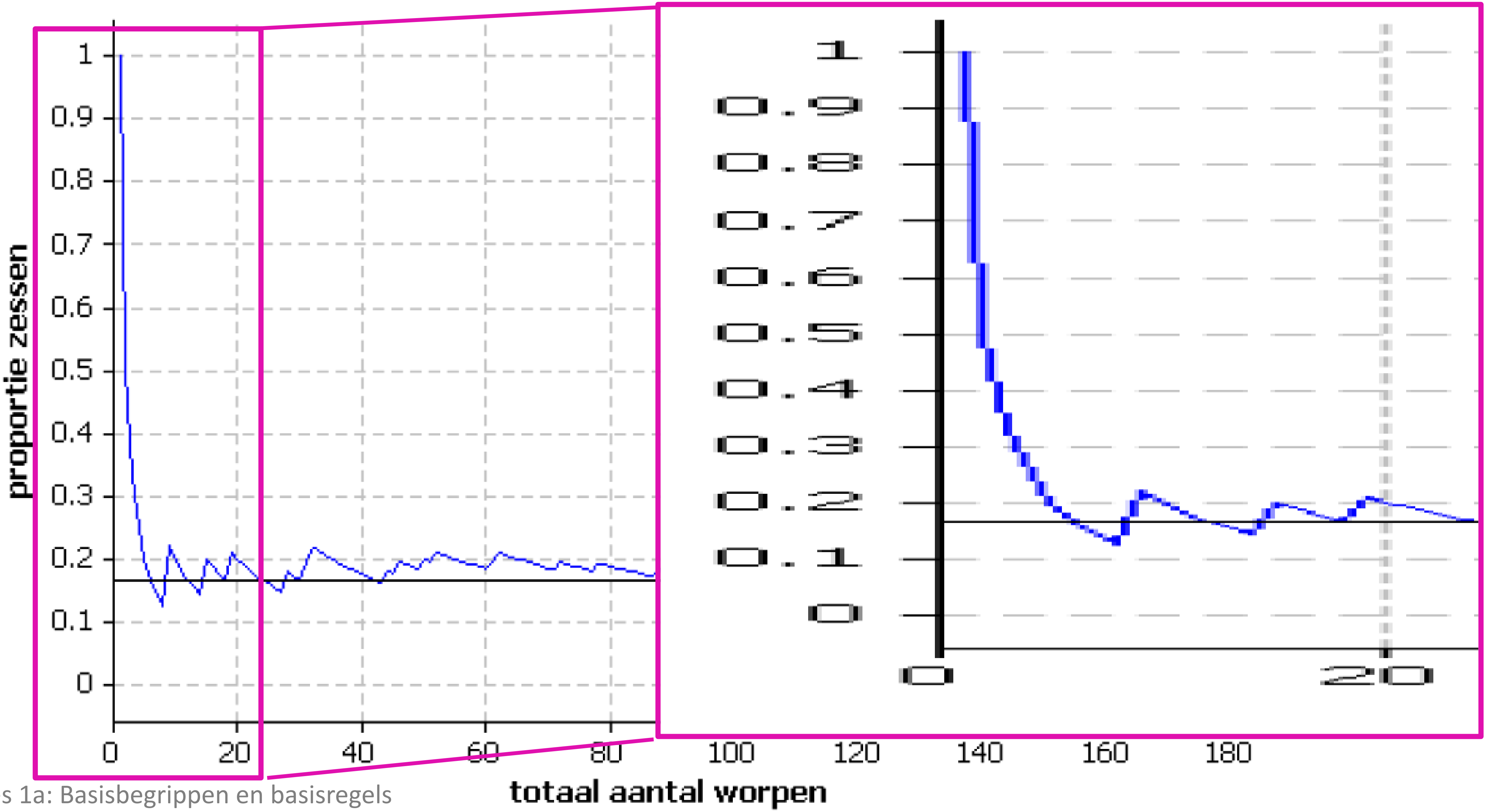
6 worpen, 2x zes:

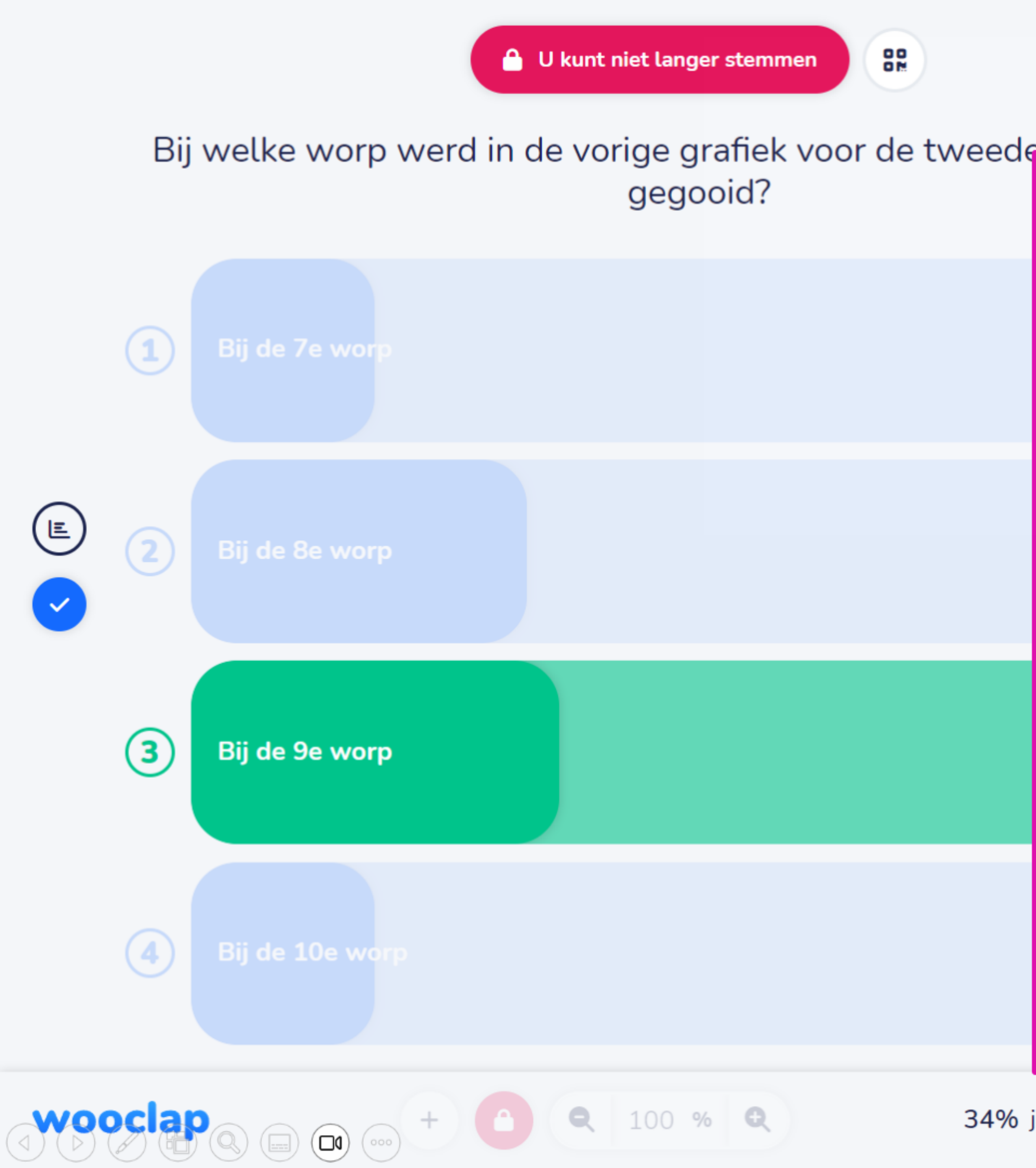
$$f_{A,6} = \frac{2}{6} = 0,33$$

Bij welke worp gooit men hier voor de 2^{e} keer een zes?



Bij welke worp gooit men hier voor de 2^e keer een zes?



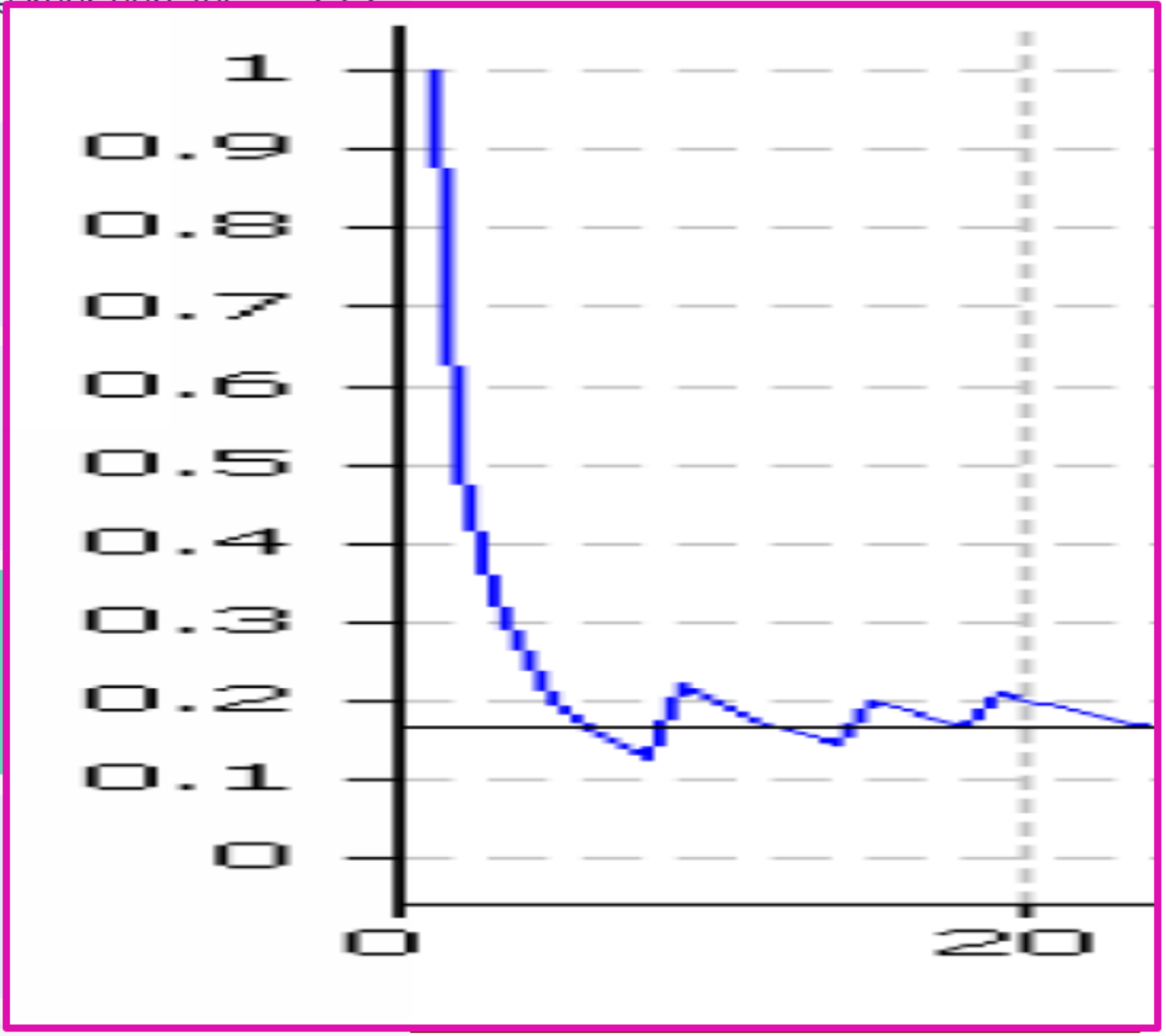


🔒 U kunt niet langer stemmen

Bij welke worp werd in de vorige grafiek voor de tweede keer een zes gegooid?

1. Bij de 7e worp
2. Bij de 8e worp
3. Bij de 9e worp ✓
4. Bij de 10e worp

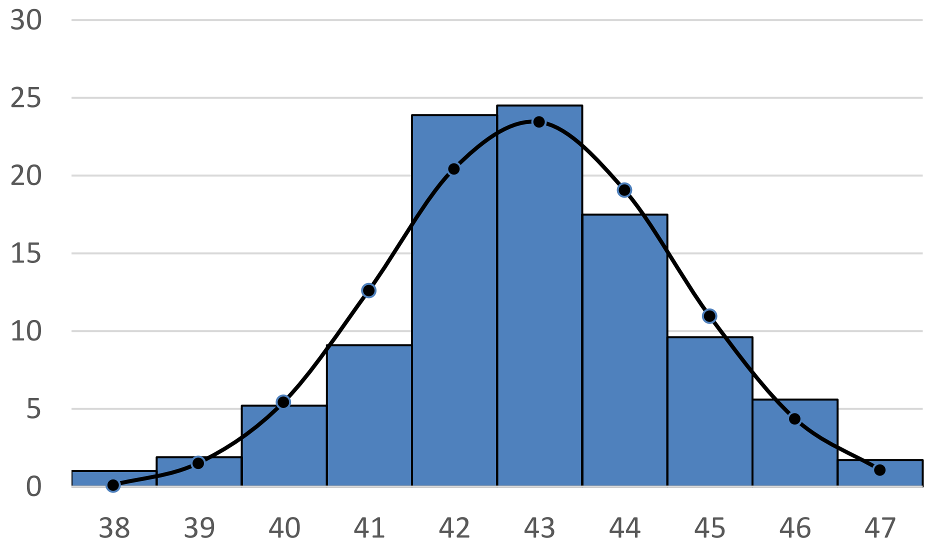
34% juist 29 / 53



Schoen

Maat 38: 1,0%
Maat 39: 1,9%
Maat 40: 5,2%
Maat 41: 9,1%
Maat 42: 23,9%
Maat 43: 24,5%
Maat 44: 17,5%
Maat 45: 9,6%
Maat 46: 5,6%
Maat 47: 1,7%

- P(40) = 0,052 = 5,2%



Basisregels voor kansen

De kans dat een gebeurtenis optreedt, moet liggen tussen 0 en 1:

- **Regel 1:** $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$.

De totale kans is 1:

- **Regel 2:** $\mathrm{P}(\mathcal{U}) = 1$.

Gebeurtenissen kunnen we voorstellen als verzamelingen in een Venn-diagram. Hieruit kunnen we de volgende regels afleiden:

- **Regel 3 (Somregel voor disjuncte gebeurtenissen):** Als A en B disjuncte gebeurtenissen zijn ($A \cap B = \emptyset$), dan

$$\mathrm{P}(A \text{ of } B) = \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

- **Regel 4 (Algemene somregel):**

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

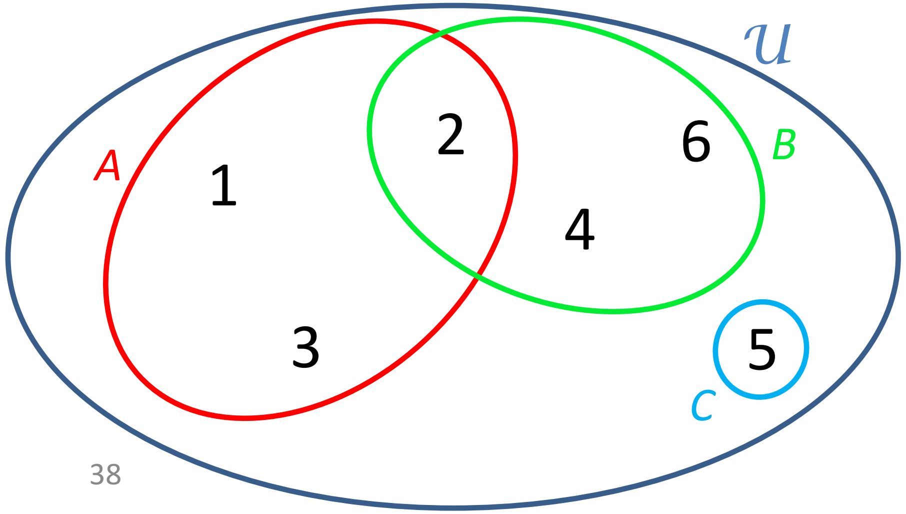
- **Regel 5 (Complementregel):** $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

Gooien met een dobbelsteen:

A = een getal gooien kleiner dan 4

B = een even getal gooien

C = een 5 gooien



Basisregels voor kansen

BASISREGELS:

FORMULARIUM

- Regel van Laplace: $P(A) = \dfrac{\#\,\text{gunstige gevallen}}{\#\,\text{mogelijke gevallen}}$
- Complementregel: $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Somregel voor 2 gebeurtenissen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

De kans dat een ge

- **Regel 1:** 0

De totale kans is 1

- **Regel 2:** $\mathrm{P}(\mathcal{U}) = 1$.

Gebeurtenissen kunnen we voorstellen als verzamelingen in een Venn-diagram. Hieruit kunnen we de volgende regels afleiden:

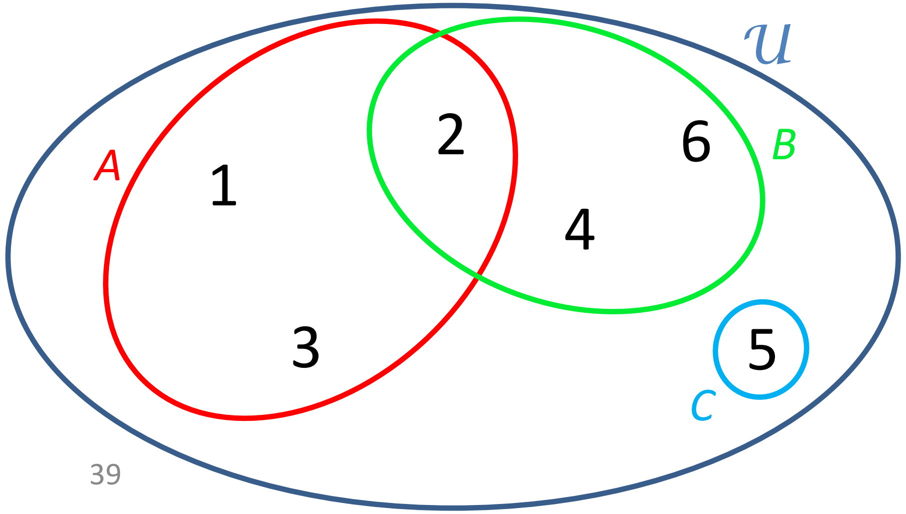
- **Regel 3 (Somregel voor disjuncte gebeurtenissen):** Als A en B disjuncte gebeurtenissen zijn ($A \cap B = \emptyset$), dan

$$\mathrm{P}(A \text{ of } B) = \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

- **Regel 4 (Algemene somregel):**

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

- **Regel 5 (Complementregel):** $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$.



Variaties, permutaties, combinaties

Regel van Laplace:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten voor } A}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$$

Bvb. Je trekt 10 willekeurige kaarten uit een kaartspel van 52. Wat is de kans dat je hierbij juist 1 aas trekt?

Variaties, permutaties, combinaties

A B C D E

Variaties voorbeeld:

We hebben 5 kaarten. Op hoeveel verschillende manieren kunnen we 3 van de 5 kaarten op tafel leggen?

5 mogelijkheden	4 mogelijkheden	3 mogelijkheden

→ $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ manieren

Volgorde is belangrijk! A B C ≠ B A C ≠ C B A

Variaties, permutaties, combinaties

A	B	C	D	E

Permutaties voorbeeld:

We hebben 5 kaarten. Op hoeveel verschillende manieren kunnen we deze 5 kaarten op tafel leggen?

5 mogelijkheden	4 mogelijkheden	3 mogelijkheden	2 mogelijkheden	1 mogelijkheid

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120 \text{ manieren}$$

Volgorde is belangrijk! $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C} \neq \boxed{B}\boxed{A}\boxed{C} \neq \boxed{C}\boxed{B}\boxed{A}$

Variaties, permutaties, combinaties

$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}\boxed{E}$

Combinaties voorbeeld:

We hebben 5 kaarten. Op hoeveel verschillende manieren kunnen we hier 3 kaarten uit kiezen? <u>Volgorde is NIET belangrijk!</u>

5 mogelijkheden	4 mogelijkheden	3 mogelijkheden

→ $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ variaties}$

Volgorde is niet belangrijk dus $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C} = \boxed{B}\boxed{A}\boxed{C} = \boxed{C}\boxed{B}\boxed{A} = \ldots$

2

3 kaarten kunnen op 3! = 6 manieren (permutatie) naast elkaar gelegd worden dus we kunnen $\frac{60}{6}$ = 10 combinaties van 3 kaarten uit 5 kiezen.

Variaties, permutaties, combinaties met de TI-Nspire

✓ Faculteit (notatie !)

menu – 5: kansen – 1: Faculteit (!)

✓ Combinatie (notatie C_5^3 ofwel $\binom{5}{3}$ voor het voorbeeld van 3 kaarten uit 5)

menu – 5: kansen – 3: Combinaties – nCr(5,3) = 10

✓ Variaties en permutaties (TI-Nspire gebruikt hetzelfde commando voor beiden)

menu – 5: kansen – 2: Permutaties

– nPr(5,3) voor een variatie van 3 kaarten uit 5

– nPr(5,5) voor een permutatie van 5 kaarten

Variaties, permutaties, combinaties en regel van Laplace

Voorbeeld: Je trekt willekeurige 10 kaarten uit een kaartspel van 52.
Wat is de kans dat je hierbij juist 1 aas trekt?

4 azen	48 rest

Gewenste combinaties

$$P(1\text{ aas}) = \frac{C_4^1 \cdot C_{48}^9}{C_{52}^{10}} = \frac{\text{nCr}(4{,}1) \cdot \text{nCr}(48{,}9)}{\text{nCr}(52{,}10)} = 0{,}424$$

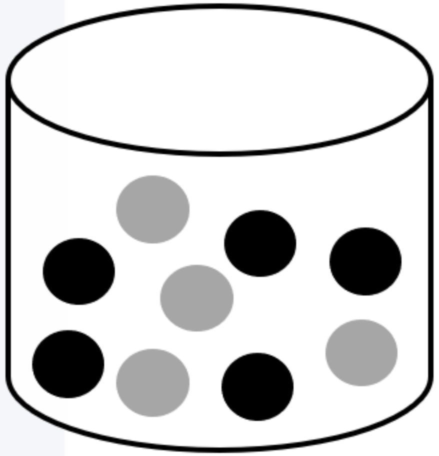
Alle mogelijke combinaties

Oude examenvraag

Ga naar **wooclap.com** en gebruik de code **BESA**

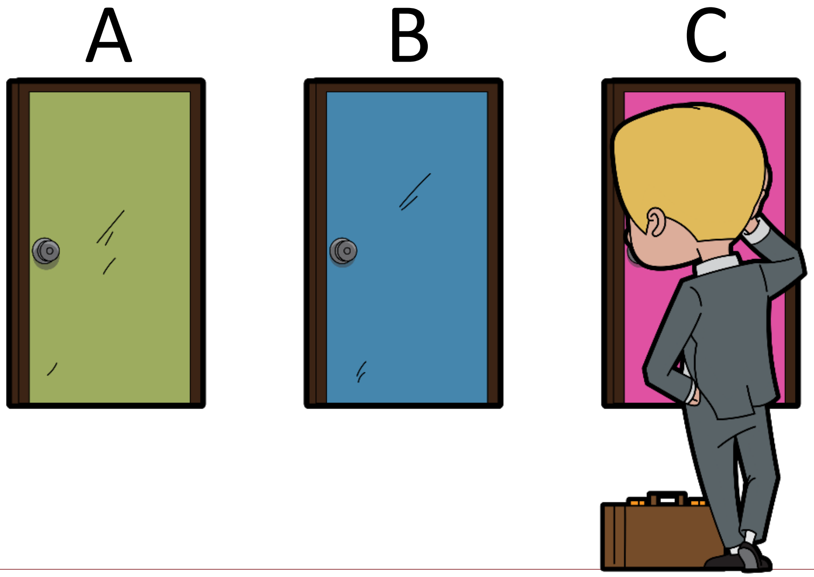
5 ballen worden zonder teruglegging uit een vaas genomen waarin 5 zwarte en 4 grijze ballen zitten. Wat is de kans om hoogstens 2 zwarte ballen te nemen?

①	0.0794	14%	1
②	0.1190	43%	3
③	0.3175	43%	3
④	0.3571	0%	0



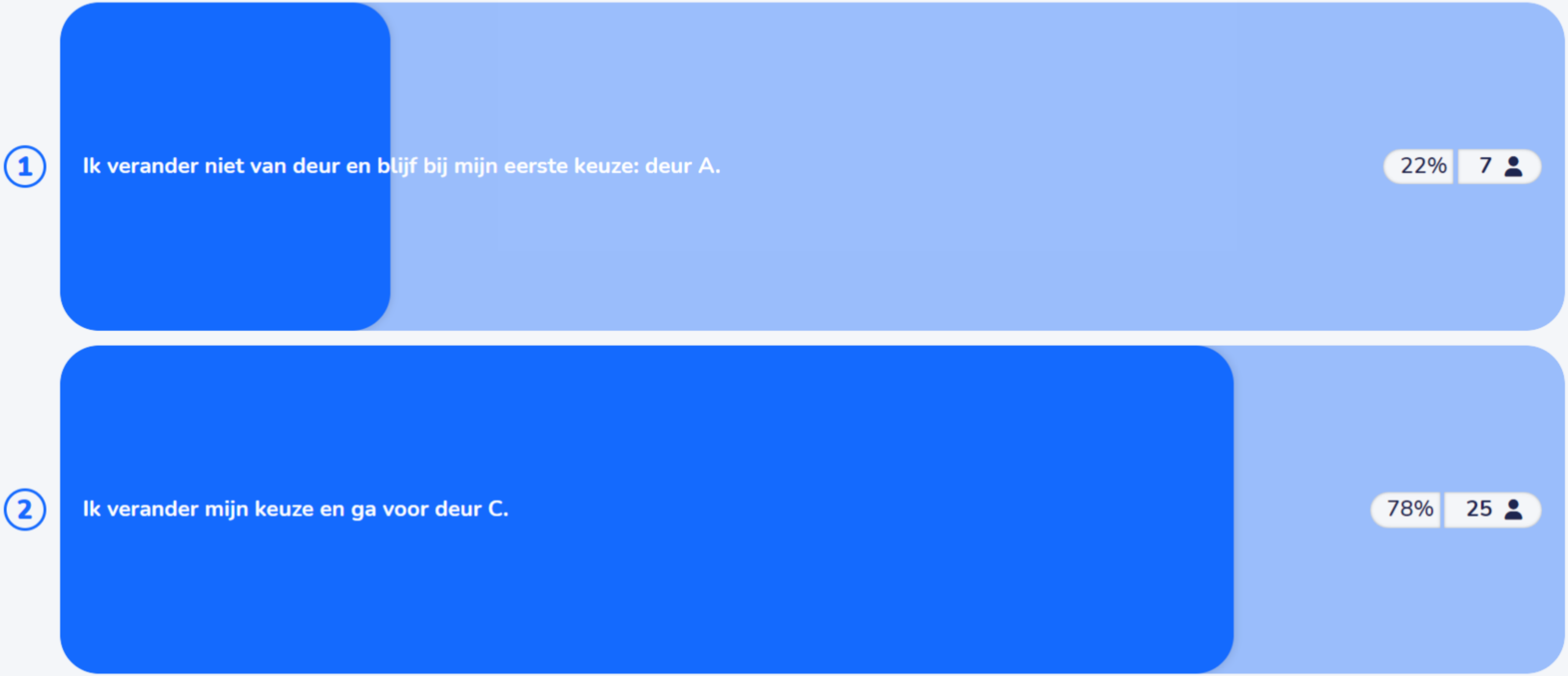
Voorwaardelijke kans: Dilemma

Je doet mee aan een quiz en mag op een bepaald moment kiezen tussen 3 deuren. Achter 1 deur zit een prijs. Jij kiest voor deur A. De quizmaster opent deze deur niet. De quizmaster opent nu deur B, hierachter blijkt geen prijs te zitten. Wat doe je? Ga je veranderen naar deur C of blijf je bij je eerste gedacht en ga je voor deur A? Wanneer heb je het meeste kans om de prijs te winnen?



Ga naar **wooclap.com** en gebruik de code **BESA**

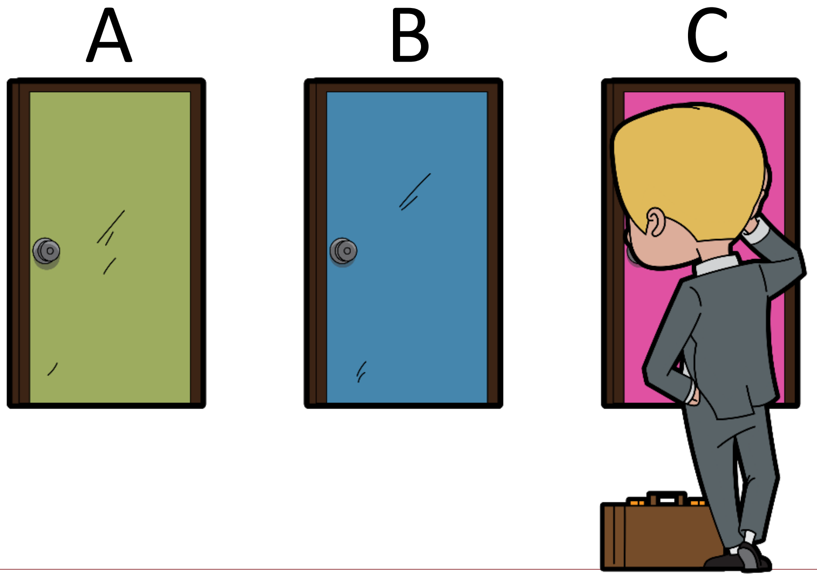
Wat doe je?



1. Ik verander niet van deur en blijf bij mijn eerste keuze: deur A. 22% 7
2. Ik verander mijn keuze en ga voor deur C. 78% 25

Dilemma

Je doet mee aan een quiz en mag op een bepaald moment kiezen tussen 3 deuren. Achter 1 deur zit een prijs. Jij kiest voor deur A. De quizmaster opent deze deur <u>niet</u>. De quizmaster opent nu deur B, hierachter blijkt geen prijs te zitten. Wat doe je? Ga je veranderen naar deur C of blijf je bij je eerste gedacht en ga je voor deur A? Wanneer heb je het meeste kans om de prijs te winnen?



Eerste keuze:

P(A) = 1/3

= voorwaarde
= extra informatie die we gekregen hebben

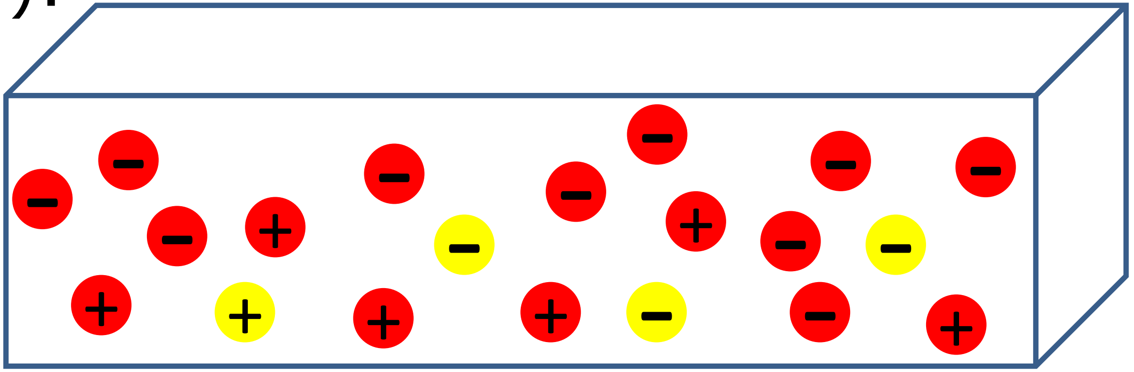
Nieuwe keuze:

P(A | deur B geopend na je eerste keuze) =

P(C | deur B geopend na je eerste keuze) =

Voorwaardelijke kans

Doos met 100 schroeven (oef 15 p10):



20 schroeven met *A*-draad:
- 5 platte kop +
- 15 bolle kop −

80 schroeven met *B*-draad:
- 30 platte kop +
- 50 bolle kop −

Als je uit de doos een schroef neemt, wat is dan de kans dat de schroef een *A*-draad heeft?

$$\mathrm{P}(A\mathrm{-draad}) = \frac{20}{100} = 0{,}20$$

Als je een schroef neemt en je ziet dat deze een platte kop heeft, wat is dan de kans dat de schroef een *A*-draad heeft?

$$\mathrm{P}(A\mathrm{-draad} \mid \mathrm{platte\ kop}) = \frac{5}{35} = 0{,}14$$

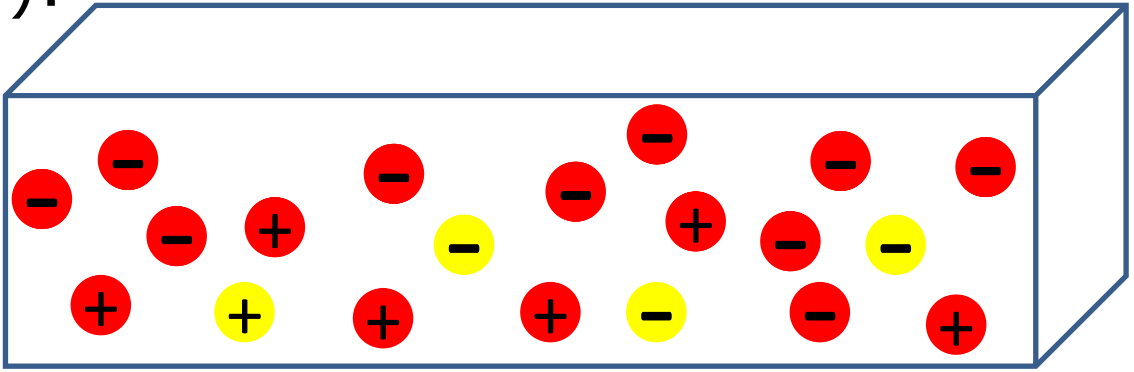
Voorwaardelijke kans

Productregel en voorwaardelijke kans

Doos met 100 schroeven (oef 15 p10):

20 schroeven met *A*-draad:
- 5 platte kop +
- 15 bolle kop −

80 schroeven met *B*-draad:
- 30 platte kop +
- 50 bolle kop −



Als je een schroef neemt en je ziet dat deze een platte kop heeft, wat is dan de kans dat de schroef een *A*-draad heeft?

$$\mathrm{P}(A\mathrm{-draad} \mid \mathrm{platte\ kop}) = \frac{5}{35} = 0{,}14 \qquad \mathrm{P}(\mathrm{platte\ kop})$$

Als je een willekeurige schroef neemt, wat is dan de kans dat deze een platte kop én een *A*-draad heeft?

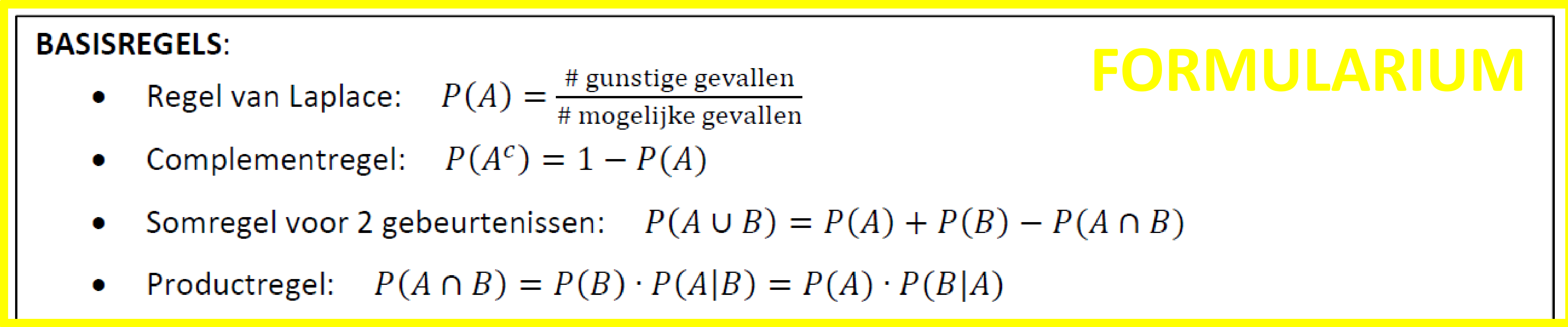
$$\mathrm{P}(A\mathrm{-draad} \cap \mathrm{platte\ kop}) = \frac{5}{100} = \frac{5}{35} \cdot \frac{35}{100}$$

Productregel en voorwaardelijke kans

Doos met 100 schroeven (oef 15 p10):

20 schroeven met *A*-draad:
- 5 platte kop
- 15 bolle ko

80 schroeven met
- 30 platte k
- 50 bolle ko



BASISREGELS:

FORMULARIUM

- Regel van Laplace: $P(A) = \frac{\#\text{ gunstige gevallen}}{\#\text{ mogelijke gevallen}}$
- Complementregel: $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Somregel voor 2 gebeurtenissen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Productregel: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Als je een sc
is dan de kans dat de schroef een *A*-draad heeft?

$$\mathrm{P}(A\text{−draad} \mid \text{platte kop}) = \frac{5}{35} = 0{,}14 \qquad \mathrm{P}(\text{platte kop})$$

Als je een willekeurige schroef neemt, wat is dan de kans dat deze een platte kop én een *A*-draad heeft?

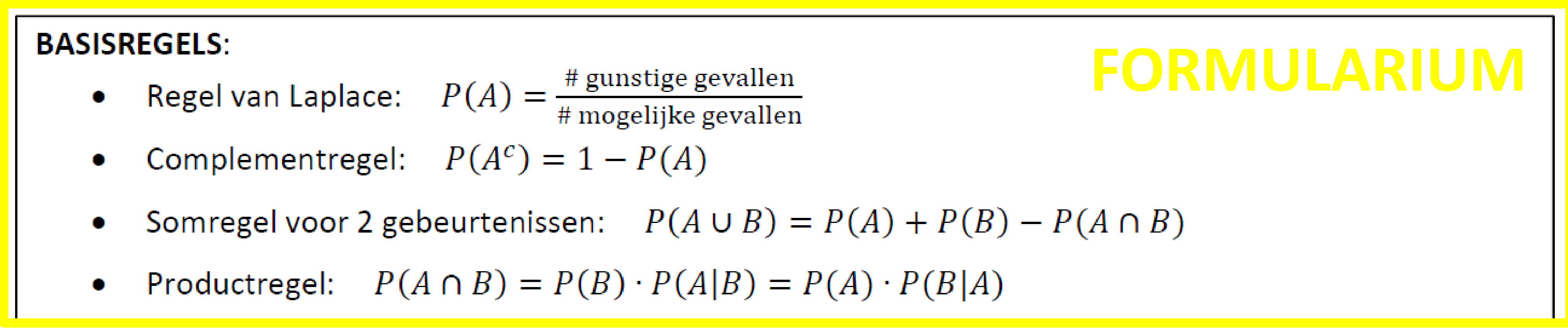
$$\mathrm{P}(A\text{−draad } \cap \text{ platte kop}) = \frac{5}{100} = \frac{5}{35} \cdot \frac{35}{100}$$

Productregel en voorwaardelijke kans

Doos met 100 schroeven (oef 15 p10):

20 schroeven met *A*-draad:
- 5 platte kop
- 15 bolle ko

80 schroeven met
- 30 platte k
- 50 bolle ko



BASISREGELS:

FORMULARIUM

- Regel van Laplace: $P(A) = \frac{\#\text{ gunstige gevallen}}{\#\text{ mogelijke gevallen}}$
- Complementregel: $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Somregel voor 2 gebeurtenissen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Productregel: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$

$$\text{P(platte kop} \mid A\text{−draad}) = \frac{5}{20}$$

$$\text{P}(A - \text{draad})$$

Als je een willekeurige schroef neemt, wat is dan de kans dat deze een platte kop én een *A*-draad heeft?

$$\text{P}(A\text{−draad } \cap \text{ platte kop}) = \frac{5}{100} = \frac{5}{20} \cdot \frac{20}{100}$$

Productregel

Bij een kwaliteitscontrole van een elektronica bedrijf inspecteert men een lot van 3000 geproduceerde USB-sticks waarvan er in realiteit 20 defect zijn. Als men 2 USB-sticks controleert, wat is dan de kans dat deze allebei defect zijn?

Gebeurtenis A: de 1^{e} USB-stick is defect

Gebeurtenis B: de 2^{e} USB-stick is defect

Gevraagd: $\mathrm{P}(A \cap B) = \underbrace{\frac{20}{3000}}_{\mathrm{P}(A)} \cdot \underbrace{\frac{19}{2999}}_{\mathrm{P}(B|A)} = 4{,}2 \cdot 10^{-5}$

Onafhankelijke gebeurtenissen

Definitie 2.7 *A en B zijn* **onafhankelijke gebeurtenissen** *als en slechts als*

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A).$$

Bvb. Telkens opnieuw gooien met een dobbelsteen. De kans om een 6 te gooien is voor elke worp opnieuw 1/6.

Volgens de productregel geldt: $\mathrm{P}(A \cap B) \quad = \quad \underline{\mathrm{P}(A|B)} \cdot \mathrm{P}(B)$

En dus voor onafhankelijke gebeurtenissen:

$$\mathrm{P}(A \text{ en } B) = \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

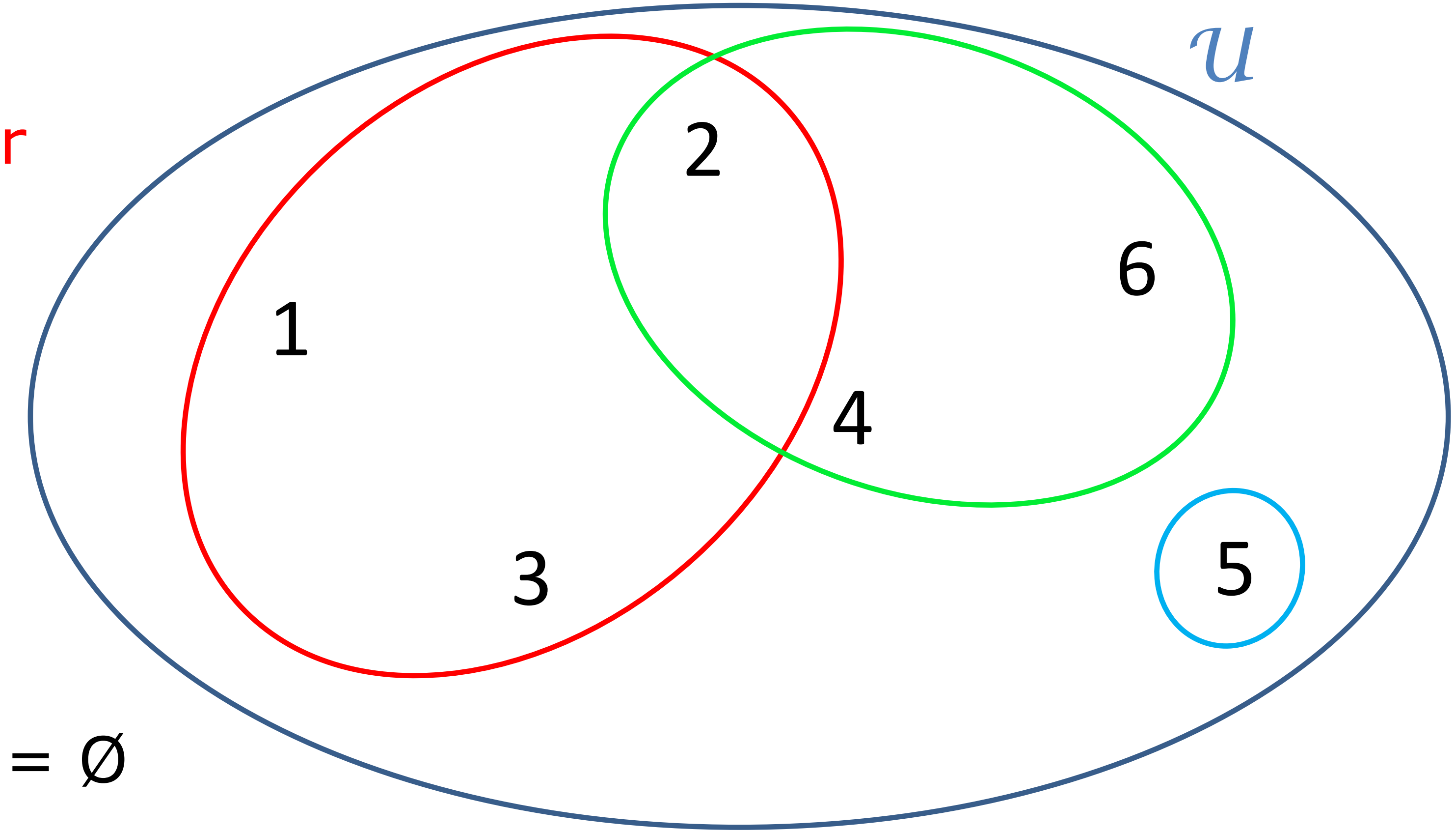
Onafhankelijke gebeurtenissen bij een dobbelsteen?

Gooien met een dobbelsteen:

A = een getal gooien kleiner dan 4

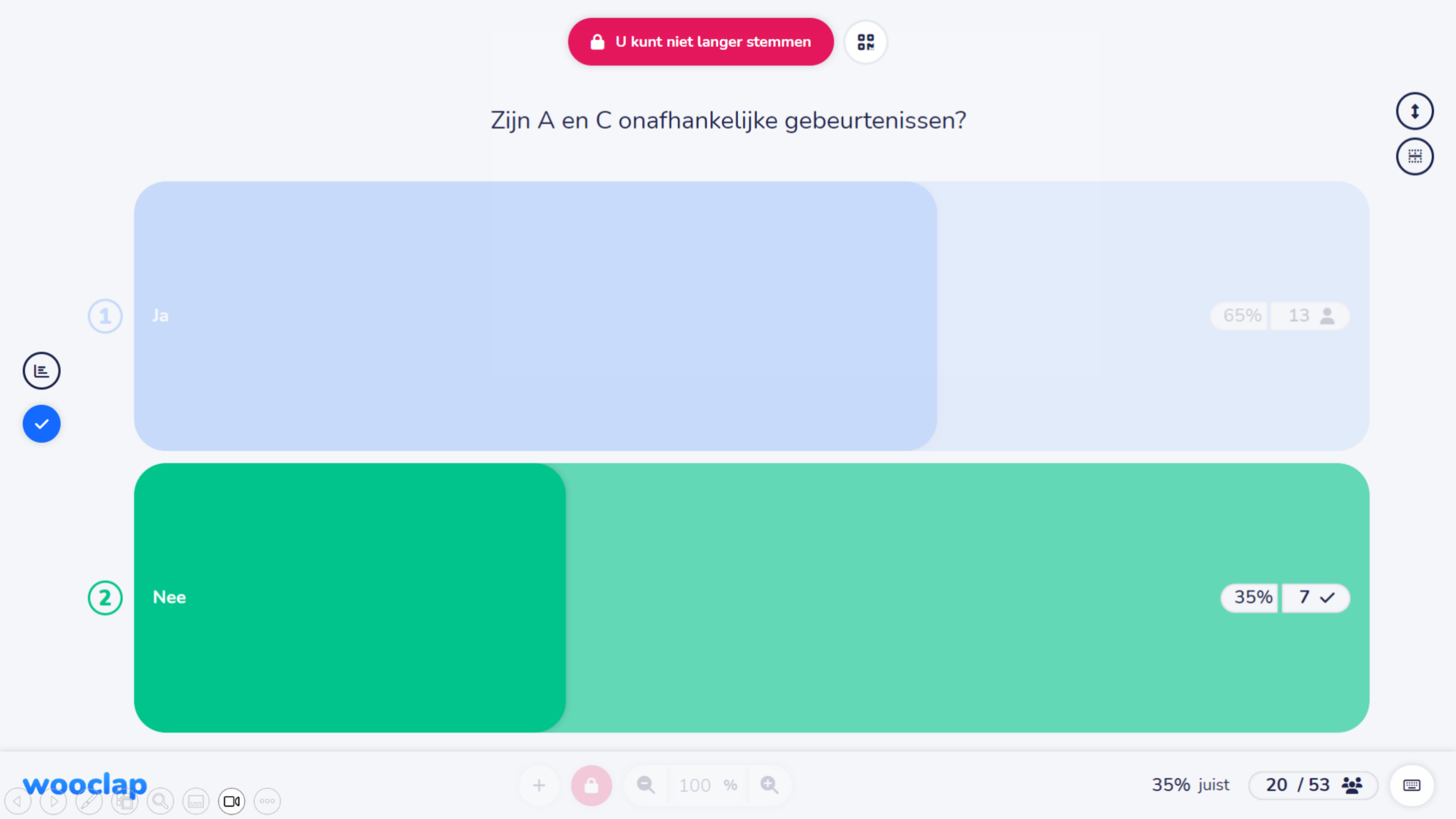
B = een even getal gooien

C = een 5 gooien



A en C zijn disjuncte gebeurtenissen want $A \cap C = \emptyset$

Zijn A en C onafhankelijke gebeurtenissen?



Zijn A en C onafhankelijke gebeurtenissen?

1	Ja	65%	13
2	Nee	35%	7 ✓

Basisregels voor kans

Voorbeeld:

In een groep van 30 personen: wat is de kans dat er 2 personen op dezelfde dag jarig zijn?

Basisregels voor kans

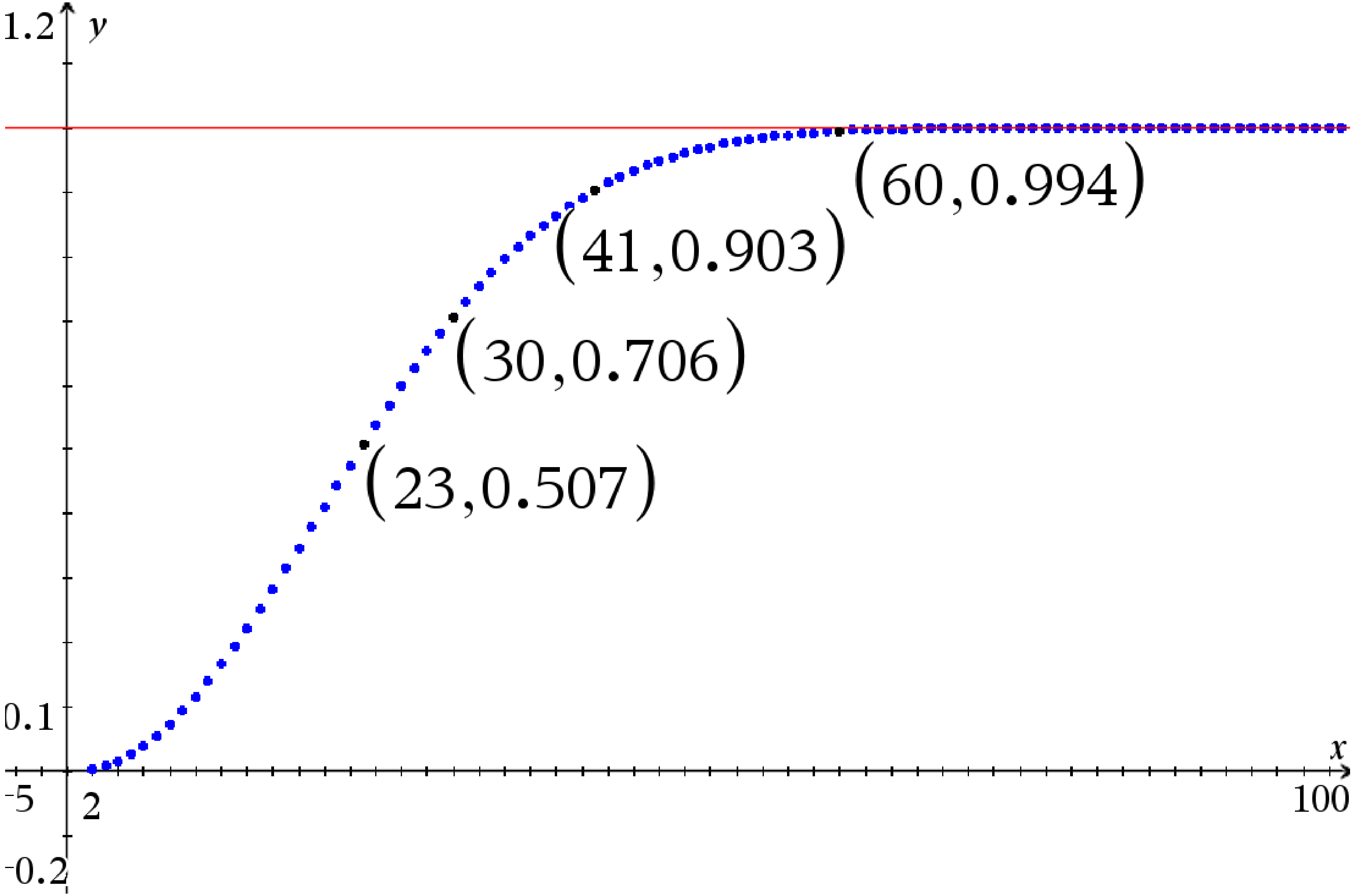
In een groep van 30 personen: wat is de kans dat er 2 personen op dezelfde dag jarig zijn?

- ➢ Gemakkelijker om te bereken wat de kans is dat ze <u>niet</u> op dezelfde dag jarig zijn:

$$\mathrm{P(iedereen\ andere\ verjaardag)} = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{336}{365}$$
$$= \frac{364!}{335! \cdot 365^{29}} = 0{,}2937$$

$$\mathrm{P(2\ dezelfde\ verjaardag)} = 1 - 0{,}2937 = 0{,}7063$$

Verjaardagsparadox



Ga naar **wooclap.com** en gebruik de code **BESA**

Op welke dag ben je jarig? Antwoord in de vorm dd/mm

Welke weddenschap zou je het liefst aangaan?

Je gooit met 2 dobbelstenen en beweert dat de som van de ogen 7 zal zijn

0,1667

Je beweert dat in een groep van 30 studenten 2 personen op dezelfde dag jarig zijn

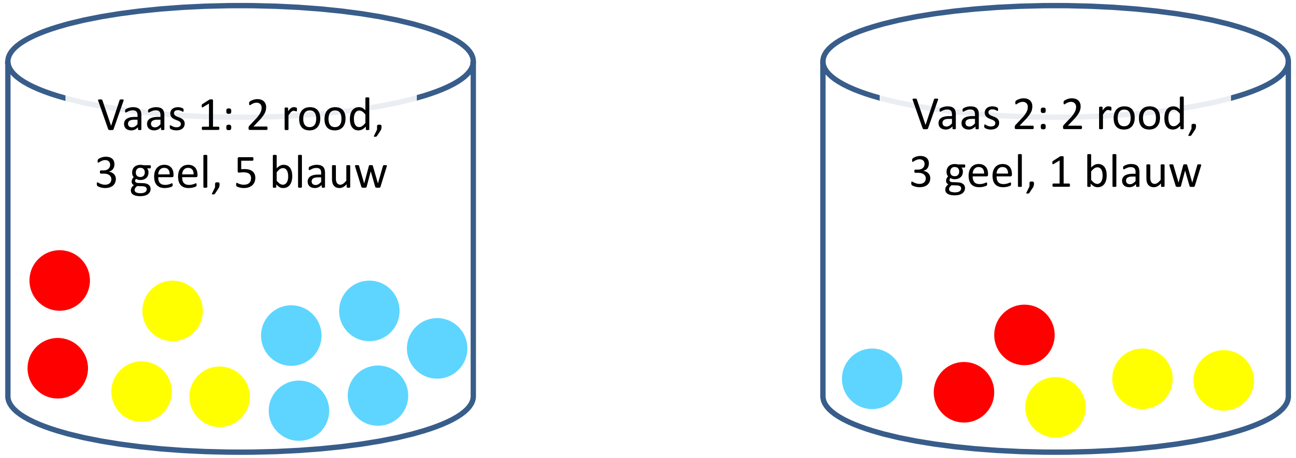
0,7063

Je trekt 10 kaarten uit een kaartspel van 52 en beweert dat je hierbij juist 1 aas hebt getrokken

0,424

Wet der totale kans

2 vazen gevuld met gekleurde ballen:



Als je geblinddoekt een bal uit 1 van de vazen neemt (je weet niet welke vaas), wat is dan de kans dat deze bal rood is?

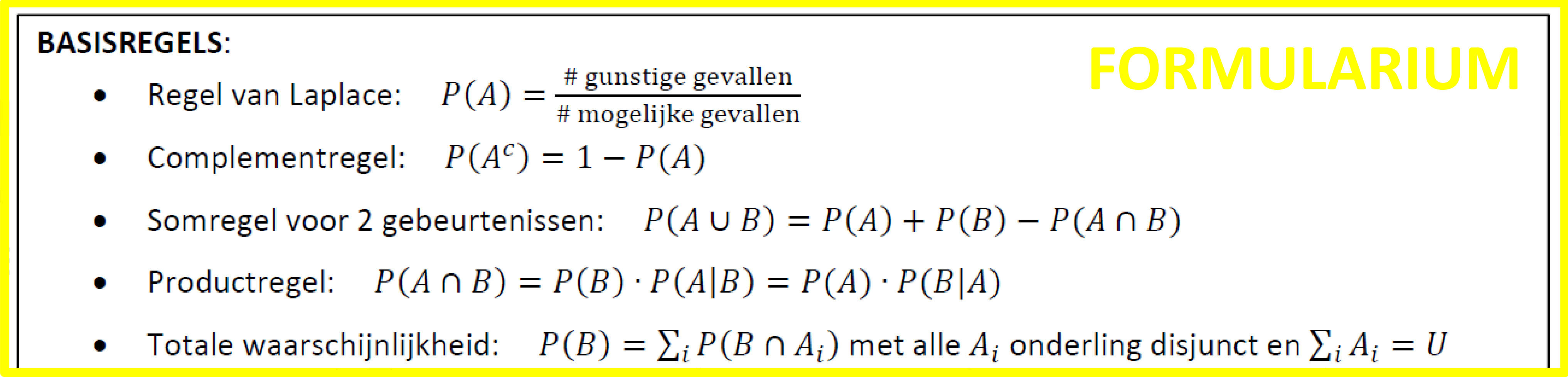
$$\mathrm{P(rood)} = \mathrm{P(rood\ en\ vaas\ 1)} + \mathrm{P(rood\ en\ vaas\ 2)}$$

$$= \mathrm{P(vaas\ 1)} \cdot \mathrm{P(rood\ |\ vaas\ 1)} + \mathrm{P(vaas\ 2)} \cdot \mathrm{P(rood\ |\ vaas\ 2)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{15} \neq \frac{4}{16}$$

We mogen hier dus niet gewoon de 2 vazen bij elkaar gooien!

2 vazen gev
gekleurde b



BASISREGELS:

FORMULARIUM

- Regel van Laplace: $P(A) = \frac{\#\text{ gunstige gevallen}}{\#\text{ mogelijke gevallen}}$
- Complementregel: $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Somregel voor 2 gebeurtenissen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Productregel: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- Totale waarschijnlijkheid: $P(B) = \sum_i P(B \cap A_i)$ met alle A_i onderling disjunct en $\sum_i A_i = U$

Als je geblinddoekt een bal uit 1 van de vazen neemt (je weet niet welke vaas), wat is dan de kans dat deze bal rood is?

$$\begin{aligned} \mathrm{P(rood)} &= \mathrm{P(rood\ en\ vaas\ 1)} + \mathrm{P(rood\ en\ vaas\ 2)} \\ &= \mathrm{P(vaas\ 1)} \cdot \mathrm{P(rood\ |\ vaas\ 1)} + \mathrm{P(vaas\ 2)} \cdot \mathrm{P(rood\ |\ vaas\ 2)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{15} \neq \frac{4}{16} \end{aligned}$$

We mogen hier dus niet gewoon de 2 vazen bij elkaar gooien!

Regel van Bayes

Productregel: $P(A \cap B) = \boxed{P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)}$

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A) \cdot \mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$$

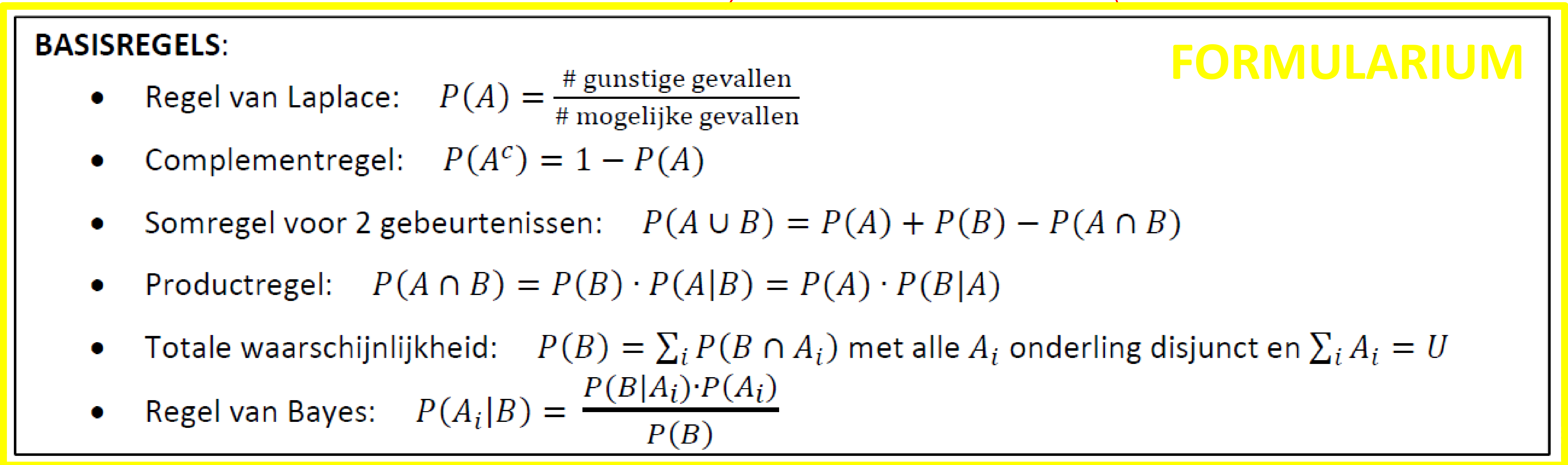
$\mathrm{P}(\text{vaas } 1|\text{rood})$

$\mathrm{P}(\text{rood}|\text{vaas } 1)$

Regel van Bayes

Productregel: $P(A \cap B) = \boxed{P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)}$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$



BASISREGELS:

FORMULARIUM

- Regel van Laplace: $P(A) = \frac{\text{\# gunstige gevallen}}{\text{\# mogelijke gevallen}}$
- Complementregel: $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Somregel voor 2 gebeurtenissen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Productregel: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- Totale waarschijnlijkheid: $P(B) = \sum_i P(B \cap A_i)$ met alle A_i onderling disjunct en $\sum_i A_i = U$
- Regel van Bayes: $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$

Regel van Bayes

- Regel van Bayes: $P(A_i|B) = \dfrac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$

Voorbeeld: lengte van studenten

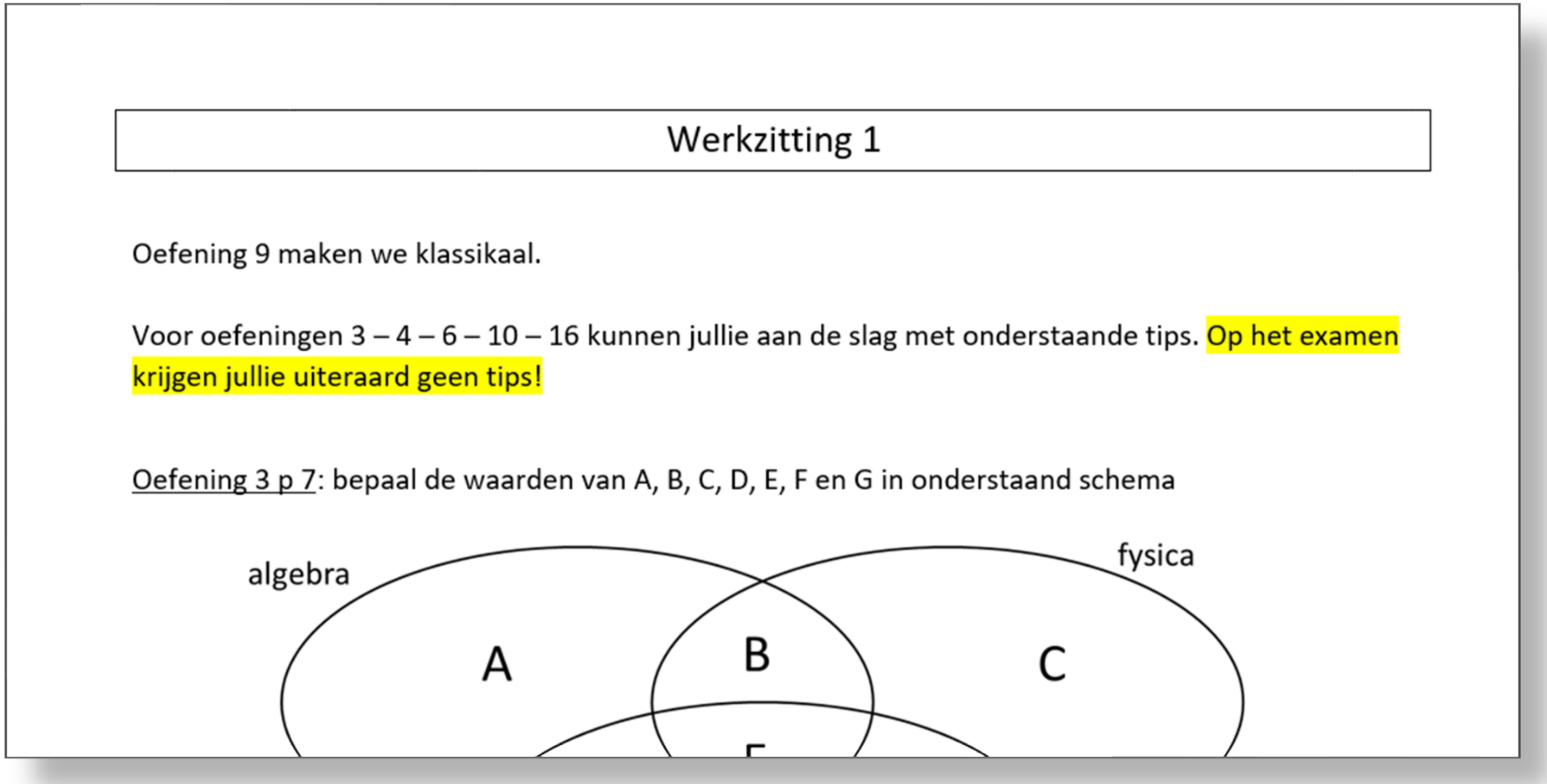
	Klein (< 1,75 m)	Groot (>1,75 m)
Man	36	24
Vrouw	8	2

Als we een willekeurige <u>kleine</u> student uit de groep kiezen, wat is dan de kans dat dit een man is?

$$\mathrm{P}(\mathrm{man}|K) = \frac{\mathrm{P}(K|\mathrm{man}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{man})}{\mathrm{P}(K)} = \frac{\frac{36}{60} \cdot \frac{60}{70}}{\frac{44}{70}} = \frac{36}{44}$$

Eerste werkzitting

Zie Toledo voor planning en blad met tips om de oefeningen op te lossen!



Werkzitting 1

Oefening 9 maken we klassikaal.

Voor oefeningen 3 – 4 – 6 – 10 – 16 kunnen jullie aan de slag met onderstaande tips. Op het examen krijgen jullie uiteraard geen tips!

<u>Oefening 3 p 7</u>: bepaal de waarden van A, B, C, D, E, F en G in onderstaand schema