Hoofdstuk 3 – Kinetica van een puntmassa: arbeid en energie

Eric Demeester

Overzicht H1 t.e.m. H8

H1 – H2 – H3 – H4 → Puntmassa's, waarvoor oriëntatie niet van belang is

H5 – H6 – H7 – H8 → Starre lichamen, waarvoor oriëntatie van belang is

Kinematica (H1 – H5)

$v = ds/dt$

$a = dv/dt$

$a \cdot ds = v \cdot dv$

Tweede wet van Newton (H2 – H6)

$\Sigma F = m \cdot a$

- momentopname

Arbeid en energie (H3 – H7)

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **plaats**:

$\Sigma \int F \cdot ds = m \cdot v_2^2 / 2 - m \cdot v_1^2 / 2$

- 2 discrete plaatsen
- Enkel conservatieve krachten => behoud van mechanische energie: $T1 + V1 = T2 + V2$

Stoot en hoeveelheid van beweging (H4 – H8)

Integreer $\Sigma F = m \cdot a$ nr **tijd** en gebruik $a = dv/dt$:

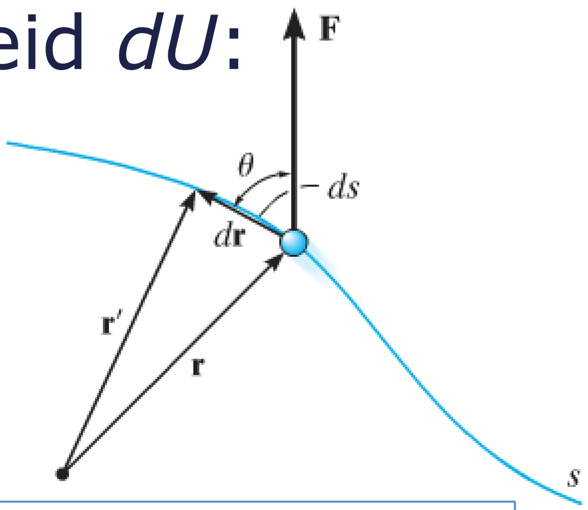
$\Sigma \int F \cdot dt = m \cdot v_2 - m \cdot v_1$

- 2 discrete tijdstippen
- Behoud van hoev. v. beweging:
  - Geen externe stoten
  - Botsingen en explosies

3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

- Definitie: elementaire arbeid *dU*:

$$dU = F\,ds\cos\theta$$



- Alternatieve schrijfwijze:

$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

"Scalair" of "inwendig" product;
$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = ?$

- Arbeid *U* t.g.v. een veranderlijke kracht:

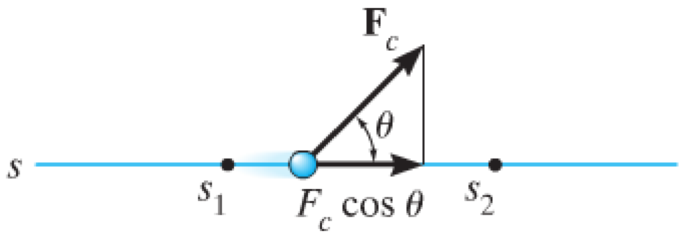
$$\boxed{U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\theta\,ds}$$

- Scalair of vectorieel?
- Altijd positief?
- Eenheid?

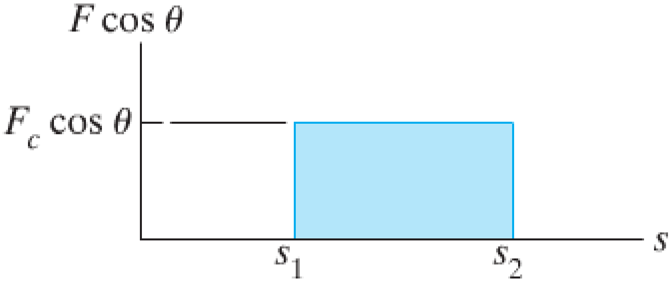
3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

- Speciaal geval 1: arbeid van constante kracht langs rechte lijn

$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos\theta \, ds$$



$$U_{1-2} = F_c \cos\theta \int_{s_1}^{s_2} ds$$



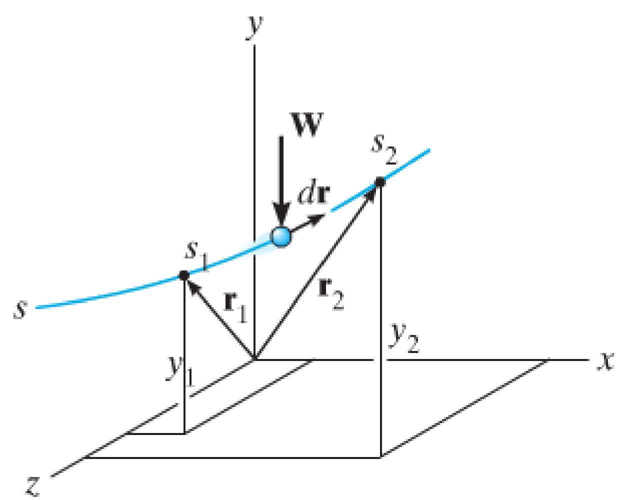
$$\boxed{U_{1-2} = F_c \cos\theta (s_2 - s_1)} \qquad (3.2)$$

3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

- Speciaal geval 2: arbeid van gewicht

$$U_{1-2} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} -W\,dy = -W(y_2 - y_1)$$



  - Onafhankelijk van de gevolgde baan, enkel van Δy

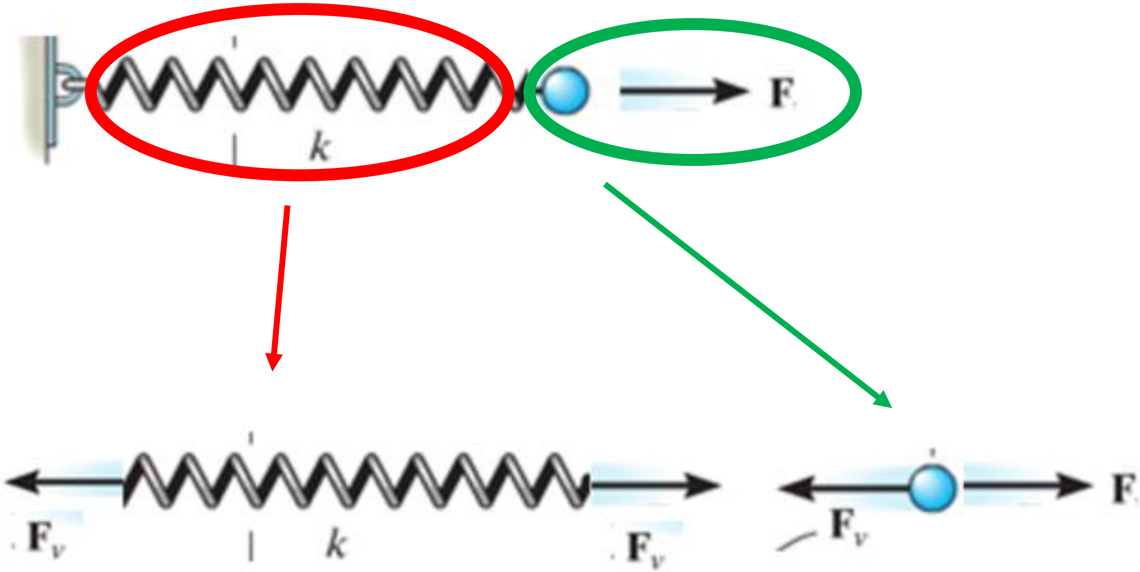
$$\boxed{U_{1-2} = -W\,\Delta y}$$

Levert het gewicht pos./neg. arbeid als we van beneden naar boven bewegen?

Achterliggende veronderstelling?

3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

- Speciaal geval 3: kracht van een veer F_v



- Lineaire (ideale) veer: $F_v = k \cdot (l - l_0) = k \cdot s$
  - Met l_0 de rustlengte van de veer

3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

- Kracht van een veer

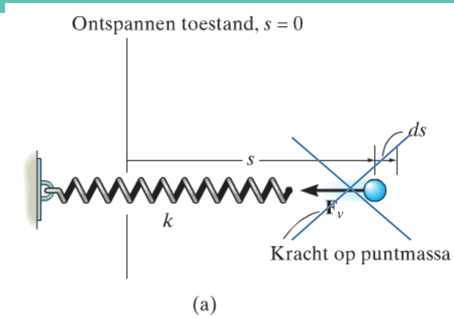


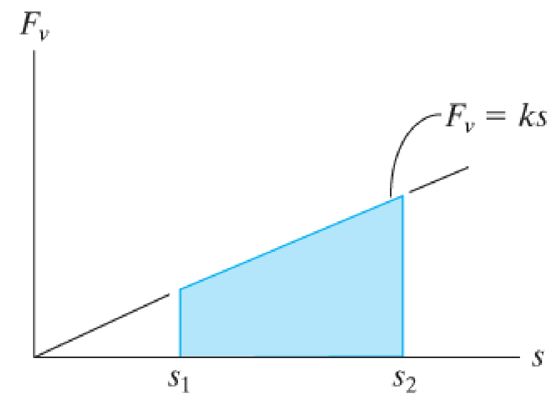
Fig. 3.5

- Arbeid door F_v op puntmassa: $dU = -F_v \,.\, ds$
- Grootte van de veerkracht $F_v = k.s$ (met s=0 de rusttoestand van de veer)

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} -F_v\, ds = \int_{s_1}^{s_2} -ks\, ds$$

$$\boxed{U_{1-2} = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)}$$

Onafhankelijk van de gevolgde baan



3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

$dU?$	$ds \geq 0$	$ds \leq 0$
$s \geq 0$ Veer is uitgerokken	$-k \cdot s \cdot ds$	$-k \cdot s \cdot ds$
$s \leq 0$ Veer is ingeduwd	$-k \cdot s \cdot ds$	$-k \cdot s \cdot ds$

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} -F_v\, ds = \int_{s_1}^{s_2} -ks\, ds \qquad (3.4)$$

$$\boxed{U_{1-2} = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)}$$

UHASSELT KU LEUVEN

3.2 Principe van arbeid en energie

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$ Vectorvergelijking

In tangentiële richting: $\sum F_t = ma_t$ en $a_t = v\,\frac{dv}{ds}$

Algebraïsche vergelijking

$$\sum F_t = mv\,\frac{dv}{ds}$$

$$\sum F_t\,ds = mv\,dv$$

$$\sum \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = \int_{v_1}^{v_2} mv\;dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

$$\sum U_{1-2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + \sum U_{1-2} = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\boxed{T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2}$$

Algebraïsche vergelijking

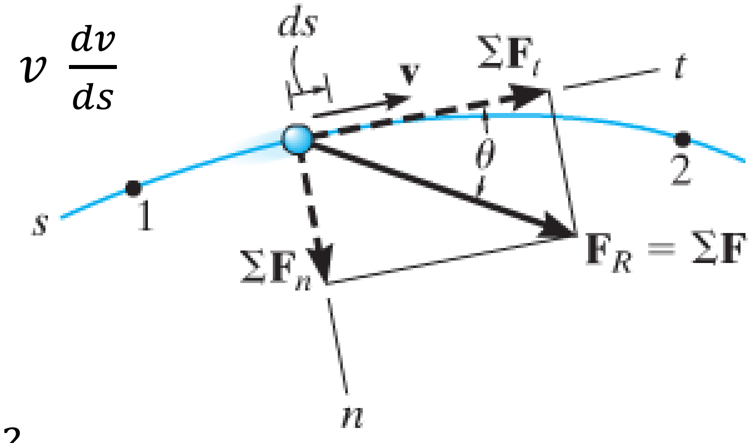


Fig. 3.7

Waarom bekijken we enkel de tangentiële richting, en niet de normale of binormale richting?

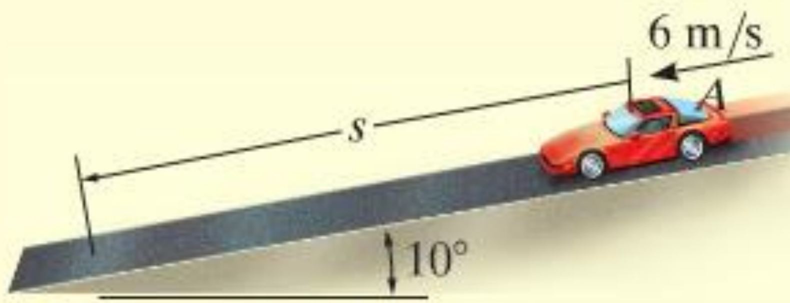
Kinetische energie $T = \frac{mv^2}{2}$

UHASSELT KU LEUVEN

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2

De wagen van ~~17,5 kN~~ (≈ 1750 kg) die in fig. 3.10*a* wordt afgebeeld, rijdt met een snelheid van 6 m/s over een weg met een helling van 10° naar beneden. De bestuurder trapt hard op de rem en de wielen blokkeren. Bepaal de afstand *s* waarover de banden over de weg slippen. De kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen de wielen en de weg is $\mu_k = 0{,}5$.



(a)

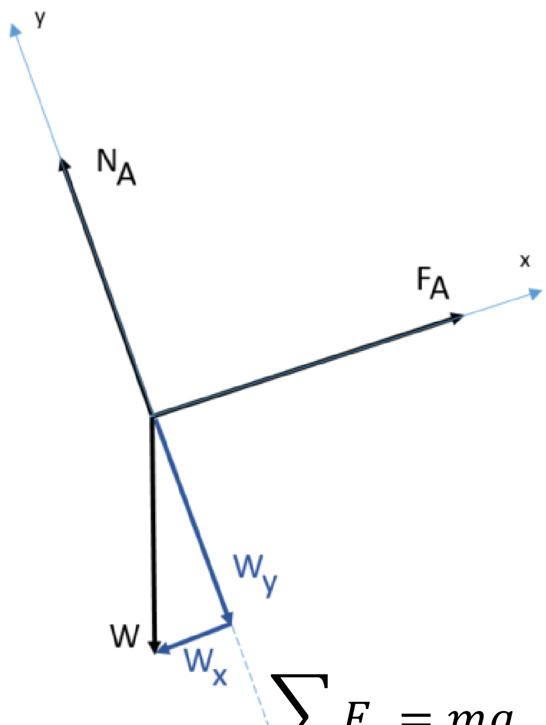
Fig. 3.10

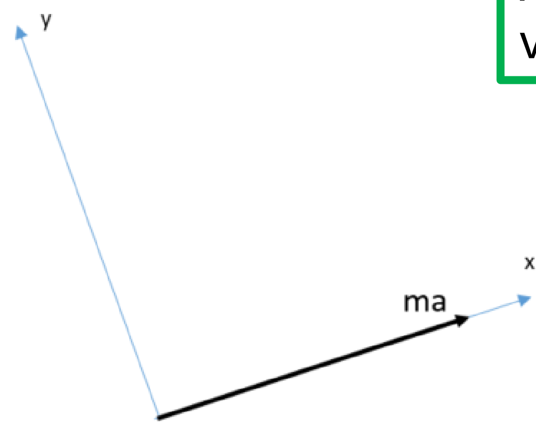
- Geg
  - m=1750kg
  - v_1=6m/s
  - μ_k=0,5
  - Wielen blokkeren
- Gevr
  - Afstand s tot stilstand

UHASSELT KU LEUVEN

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2





Aanpak via tweede wet van Newton (hoofdstuk 2)

- Onbekenden?
- Bijkomende vergelijkingen nodig?

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow +F_A - W_x = m(+a)$$

$$\sum F_y = ma_y \Leftrightarrow +N_A - W_y = 0 \Leftrightarrow N_A = mg\cos 10° = 16907N$$

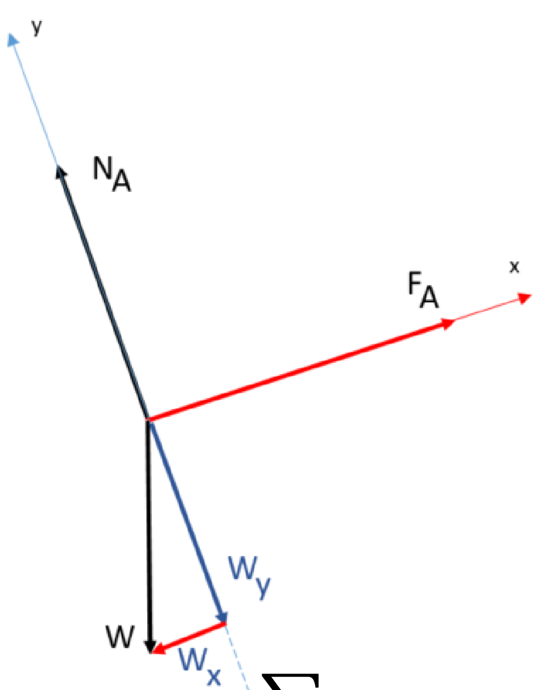
Dynamische wrijving: $F_A = \mu_k N_A$ =0.5 . 16907N = 8453N

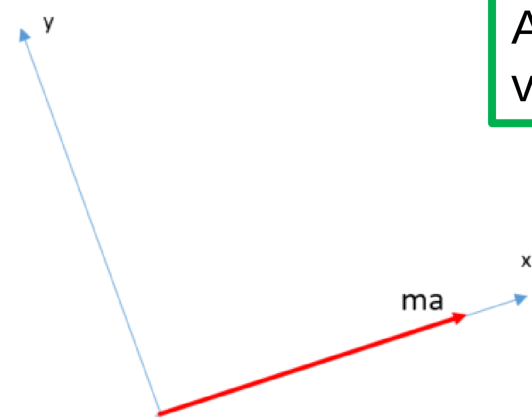
UHASSELT KU LEUVEN

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2

Aanpak via tweede wet van Newton (hoofdstuk 2)





Opgelet!
Vectorvergelijking met krachten en versnellingen.
Tekens volgen uit keuze van assenstelsel

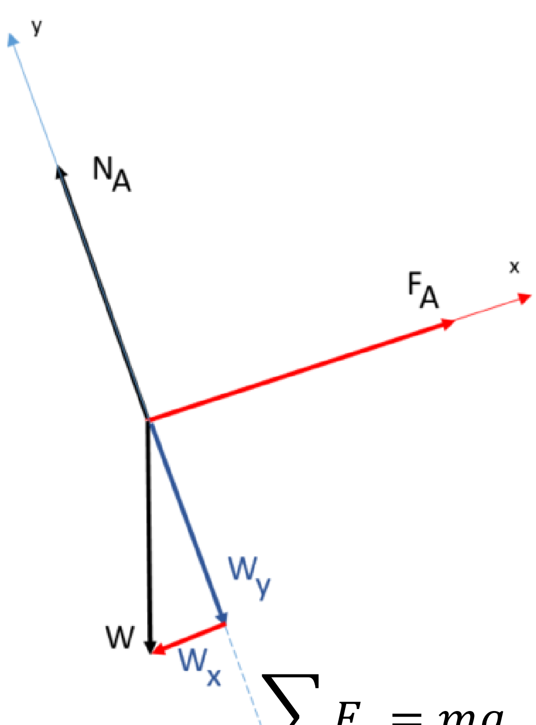
$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow +F_A - W_x = m(+a)$$

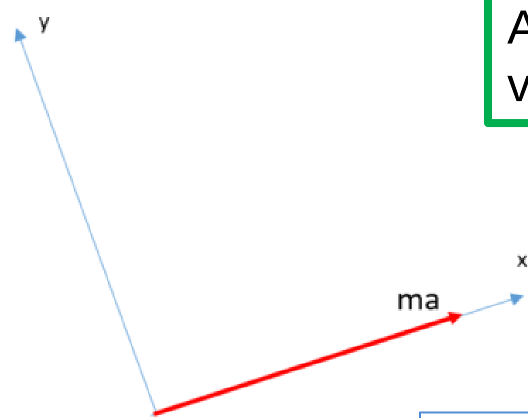
$$\sum F_y = ma_y \Leftrightarrow +N_A - W_y = 0 \Leftrightarrow N_A = mg\cos 10° = 16907N$$

Dynamische wrijving: $F_A = \mu_k N_A$ =0.5 . 16907N = 8453N

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2





Aanpak via tweede wet van Newton (hoofdstuk 2)

Is het vraagstuk nu opgelost?

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow +F_A - W_x = m(+a)$$

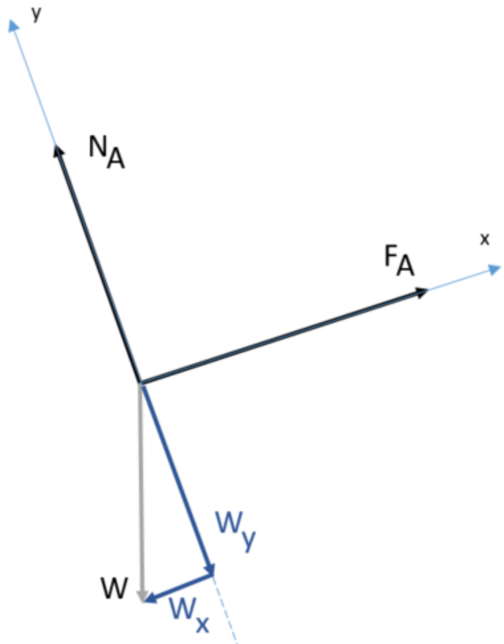
$$\sum F_y = ma_y \Leftrightarrow +N_A - W_y = 0 \Leftrightarrow N_A = mg\cos 10° = 16907N$$

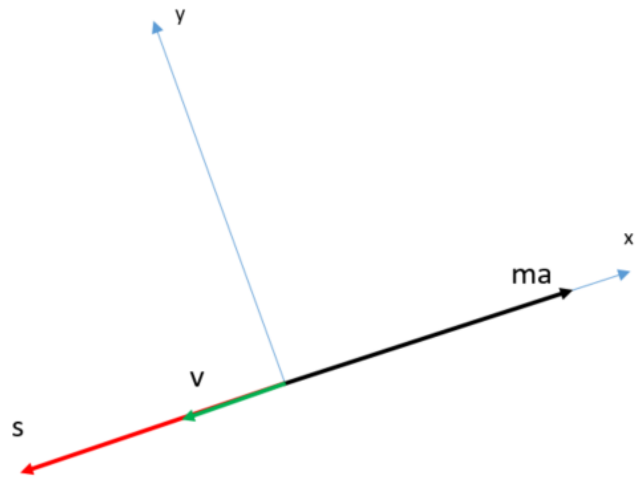
Dynamische wrijving: $F_A = \mu_k N_A$ =0.5 . 16907N = 8453N

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2

Aanpak via energie-methode (hoofdstuk 3)

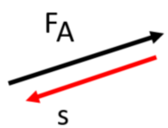


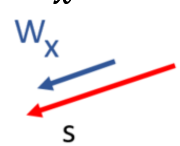


$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + F_A\, s\cos 180° + N_A\, s\cos 90° + W_x\, s\cos 0° + W_y\, s\cos 90° = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - F_A\, s + 0 + W_x\, s + 0 = \frac{mv_2^2}{2}$$



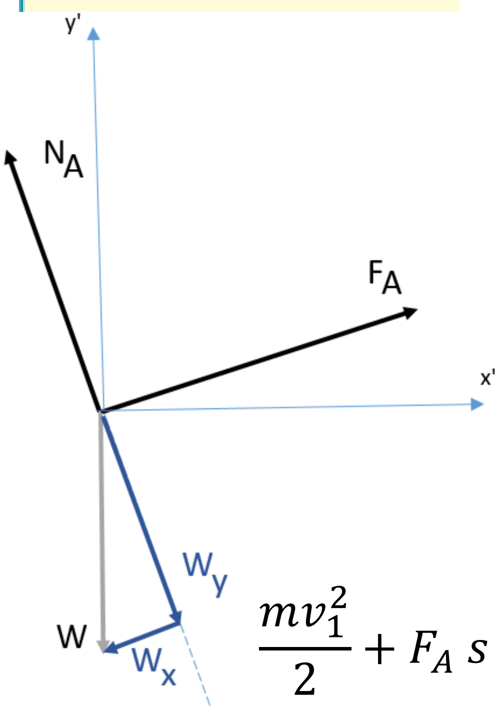


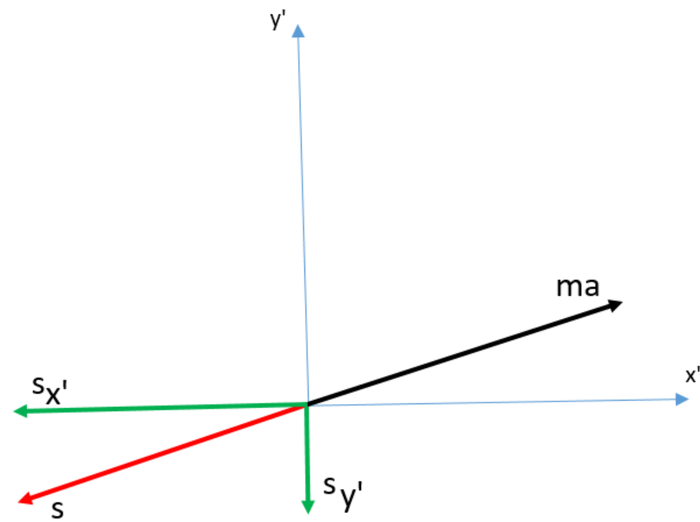
$$\frac{mv_1^2}{2} - F_A\, s + 0 + (W\sin 10°)\, s + 0 = \frac{mv_2^2}{2}$$

Opgelet! Energievergelijking
Tekens volgen uit definitie positieve vs negatieve energie

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2





Alternatief:
Niet *W* maar wel
Δy ontbinden

$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + F_A\, s\cos 180° + N_A\, s\cos 90° + W_x\, s\cos 0° + W_y\, s\cos 90° = \frac{mv_2^2}{2}$$

(-W Δy)

$$\frac{mv_1^2}{2} + F_A\, s\cos 180° + N_A\, s\cos 90° - W(-s_{y'}) = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - F_A\, s + 0 + W(s\ \sin 10°) = \frac{mv_2^2}{2}$$

UHASSELT KU LEUVEN

3.2 Principe van arbeid en energie

Voorbeeld 3.2

$$\frac{mv_1^2}{2} - F_A\, s + W(s \sin 10°) = \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\frac{1750\,.\,6^2}{2} - 8453{,}35\, s + 1750\,.\,9.81(s \sin 10°) = 0$$

Uitkomst: s=5.76m

31500J – 48658J + 17159J = 0J (Energiebalans)

3.3 Principe van arbeid en energie

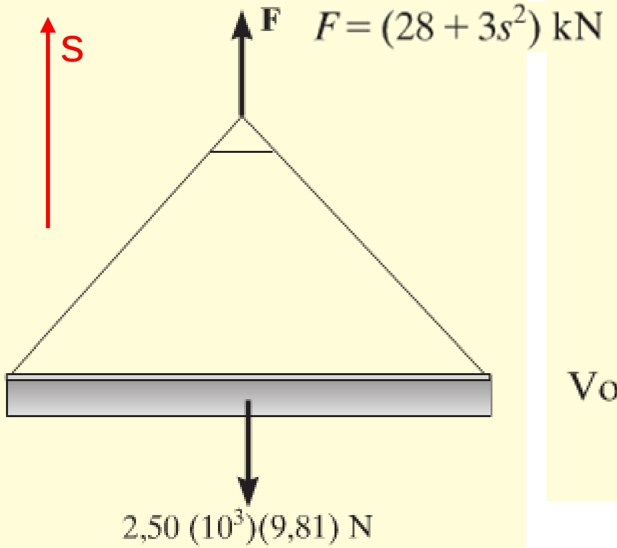
Voorbeeld 3.3

De kraan in fig. 3.11*a* tilt de balk met een gewicht van 2500 kg gedurende korte tijd op met een kracht $F = (28 + 3s^2)$ kN. Bepaal de snelheid van de balk wanneer deze een hoogte van $s = 3$ m bereikt heeft. Hoe lang duurt het om die hoogte vanuit rust te bereiken?

Waarom hier het principe van arbeid en energie gebruiken?

Wat is de eerste stap bij het oplossen?

3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's



(b)

Fig. 3.11

Principes van arbeid en energie

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$0 + \int_0^s (28 + 3s^2)(10^3)\,ds - (2{,}50)(10^3)(9{,}81)s = \tfrac{1}{2}(2{,}50)(10^3)v^2$$

$$28(10^3)s + (10^3)s^3 - 24{,}525(10^3)s = 1{,}25(10^3)v^2$$

$$v = (2{,}78s + 0{,}8s^3)^{\frac{1}{2}}$$

Voor $s = 3$ m,

$$v = 5{,}47 \text{ m/s} \qquad (1)$$ *Antw.*

3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

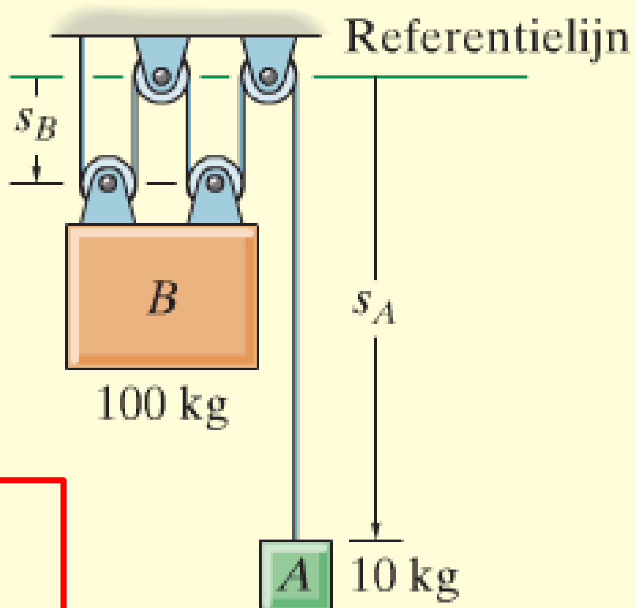
$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2 \tag{3.8}$$

- Definieer correct en consequent het stelsel (=vrijlichaamsschema) van de puntmassa's waarop je de energievergelijking toepast !

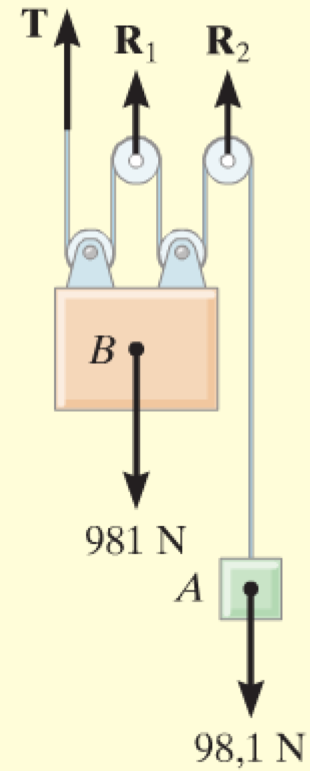
3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

Voorbeeld 3.6

Blok A en blok B in fig. 3.14a hebben respectievelijk een massa van 10 kg en 100 kg. Bepaal de afstand die B aflegt wanneer het vanuit rust wordt losgelaten tot het punt dat het een snelheid van 2 m/s bereikt.



(a)



(b)

Fig. 3.14

Stelsel = puntmassa A en B
Alle krachten op totale stelsel
en totale energie van hele stelsel!

3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

Voorbeeld 3.6

Principe van arbeid en energie Ervan uitgaande dat de blokken vanuit rust worden losgelaten, volgt:

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_1^2\right\} + \{W_A\,\Delta s_A + W_B\,\Delta s_B\} = \left\{\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_2^2\right\}$$

$$\{0 + 0\} + \{98{,}1\text{ N}\,(\Delta s_A) + 981\text{ N}\,(\Delta s_B)\} = \left\{\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}(100\text{ kg})(2\text{ m/s})^2\right\} \quad (1)$$

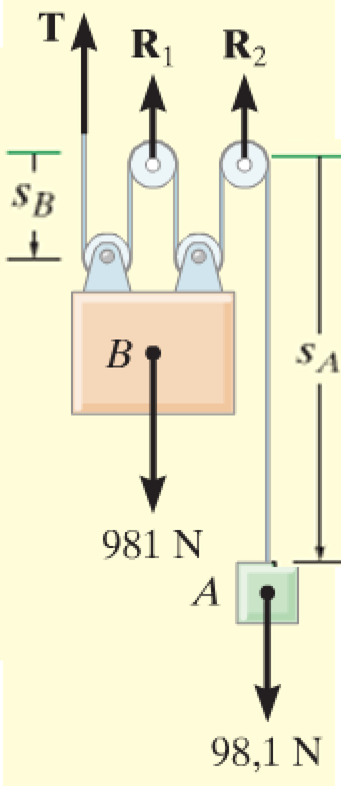


Fig. 3.14

Katrol-vergelijking

$$\Delta s_A + 4\,\Delta s_B = 0 \quad (2)$$

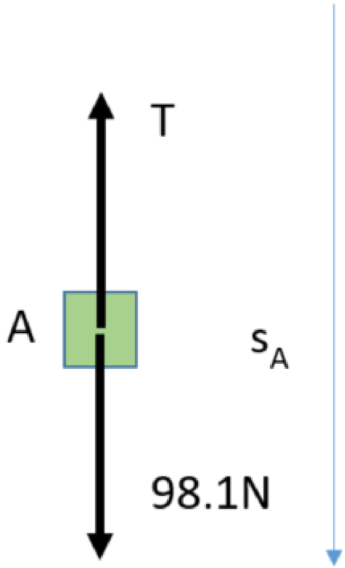
$$v_A = -4v_B = -4(2\text{ m/s}) = -8\text{ m/s}$$

3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

Voorbeeld 3.6

Stelsel = puntmassa A
Alle krachten op totale stelsel !

T=inwendige kracht, wel in dit vrijlichaamsschema !
T verplaatst dus levert arbeid !



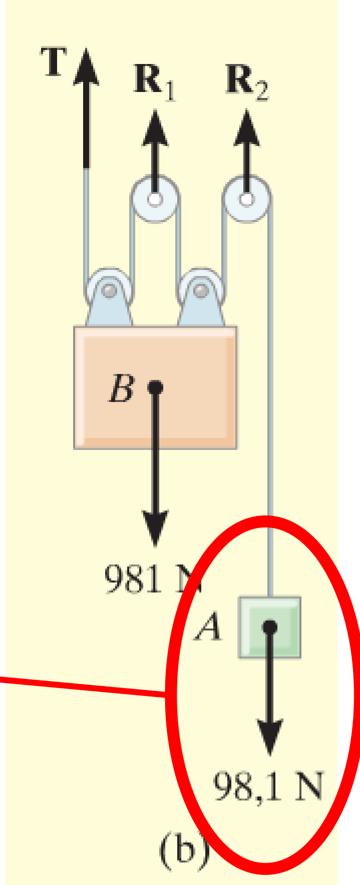


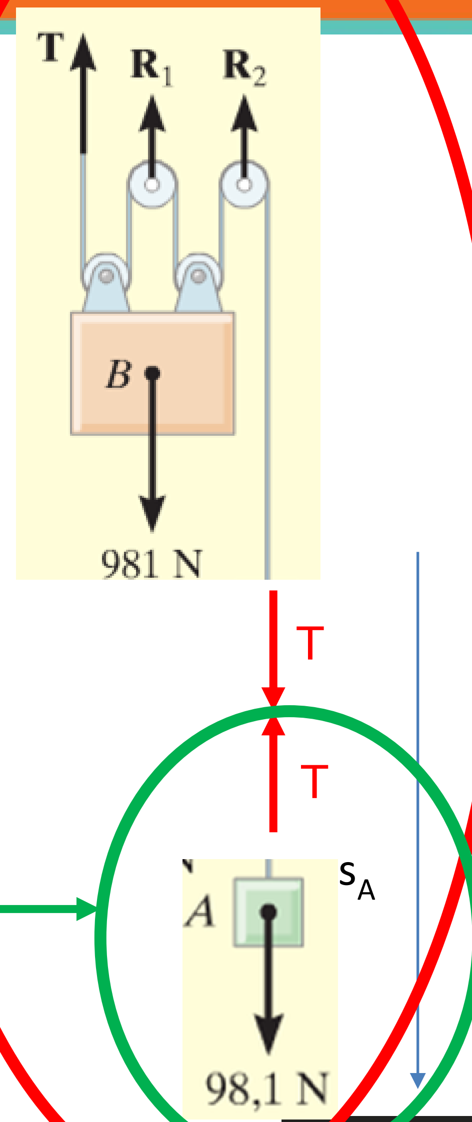
Fig. 3.14

Definieer en teken het gebruikte stelsel (vrijlichaamsschema) !

3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

Voorbeeld 3.6

- Arbeid door T
- Stelsel A+B
  - Arbeid=$-T.s_A + T.s_A = 0$
  - T = inwendige kracht, <u>levert geen arbeid</u>
- Stelsel A
  - Arbeid= $- T.s_A \neq 0$
  - T=uitwendige kracht, levert arbeid!



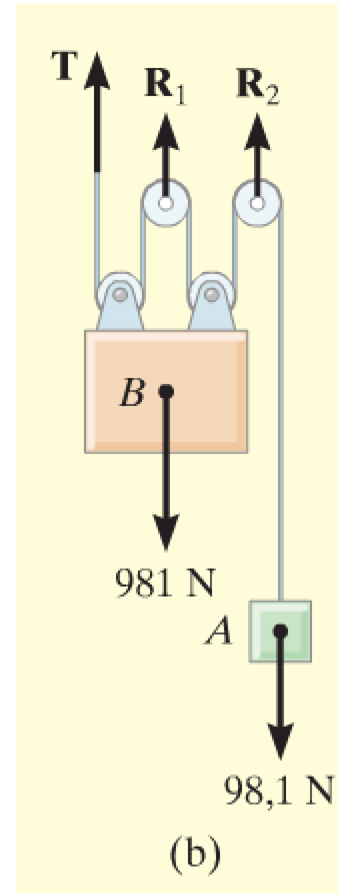


Fig. 3.14

3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

- Is het principe van arbeid en energie geldig wanneer lichamen botsen of exploderen? (dus tijdens de botsing of tijdens de explosie) Waarom wel of waarom niet?

3.4 Vermogen en rendement

$$\boxed{P = \frac{dU}{dt}} \qquad (3.9)$$

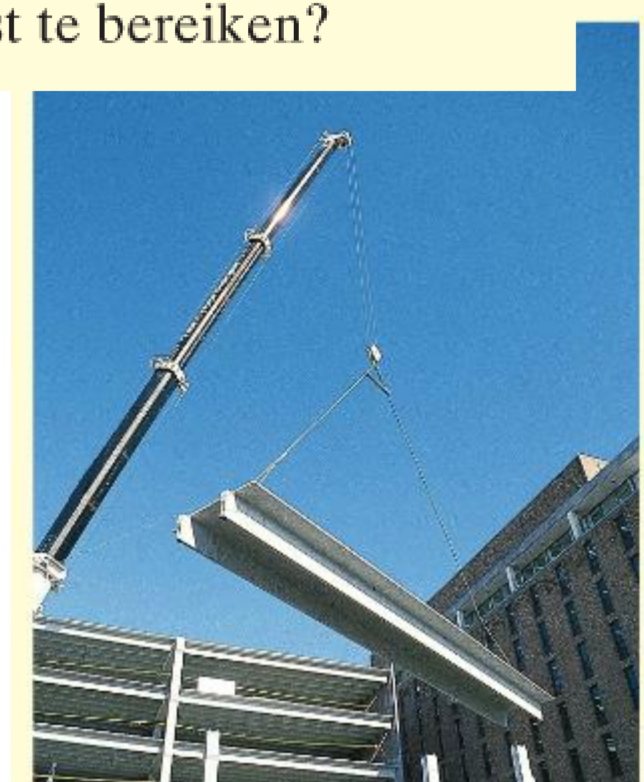
$$\boxed{P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}} \qquad (3.10)$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\text{uitgaand vermogen}}{\text{ingaand vermogen}}} \qquad \boxed{\varepsilon = \frac{\text{uitgaande energie}}{\text{ingaande energie}}} \qquad (3.12)$$

3.4 Vermogen en rendement

Voorbeeld 3.3

De kraan in fig. 3.11*a* tilt de balk met een gewicht van 2500 kg gedurende korte tijd op met een kracht $F = (28 + 3s^2)$ kN. Bepaal de snelheid van de balk wanneer deze een hoogte van $s = 3$ m bereikt heeft. Hoe lang duurt het om die hoogte vanuit rust te bereiken?



Gevraagd: Welk vermogen levert de motor als de balk een hoogte van S=3m bereikt ?

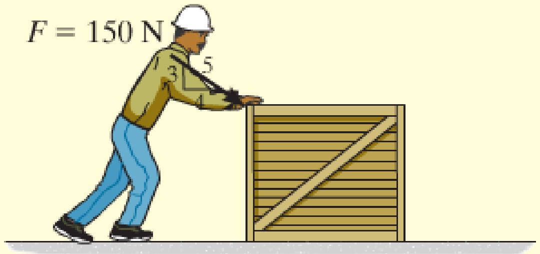
Oplossing:
v=5,47m/s
F=(28+3s²)=28+3*3²=55kN

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F.v.\cos(\theta) = 55000.5{,}47.\cos(0°)$$
$$P = 300850W = 301kW$$

3.4 Vermogen en rendement

Voorbeeld 3.7

De man in fig. 3.15*a* drukt met een kracht $F = 150$ N tegen de kist van 50 kg. Bereken het vermogen dat de man levert op $t = 4$ s. De kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen de kist en het vlak $\mu_k = 0{,}2$. In eerste instantie is de kist in rust.



OPLOSSING

Redenering:

1/ Gevraagd: P = ?

2/ P = F . v (scalair product)

F is gekend, snelheid v is niet gekend

3/ Snelheid v berekenen uit 2e wet van Newton: daarmee kunnen we de versnelling berekenen, en daarmee dan de snelheid

- VLS maken
- 2e wet van Newton toepassen:

Hieruit: N en a bepalen;

Met a kan je snelheid na 4 s berekenen: v = 0 + a . t met t = 4s.

4/ P = F (4/5) . v = …

UHASSELT KU LEUVEN