

# Toepassingen van Algebra oplossingen oefeningen

Pieter-Jan Coenen

December 2016

## Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Oefenzitting 1</b>	<b>2</b>
1.1	Oefening 1 . . . . .	2
1.2	Oefening 2 . . . . .	3
1.3	Oefening 3 . . . . .	6
1.4	Oefening 4 . . . . .	7
1.5	Oefening 5 . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Oefenzitting 2</b>	<b>11</b>
2.1	Oefening 1 . . . . .	11
2.2	Oefening 2 . . . . .	12

# 1 Oefenzitting 1

## 1.1 Oefening 1

Op  $\mathbb{R}$  definiëren we de samenstellingswet  $a\tau b = a + b + a^2b^2$

- (a) Deze wet heeft een neutraal element. Welk?
- (b) Ze is niet associatief. Ga na!
- (c) Ze is commutatief. Waarom?

### Oplossingsmethode

Ga al deze eigenschappen na voor de gegeven samenstellingswet. De eigenschappen kunnen worden gevonden in de cursus deel I blz 79.

### Oplossing

- (a) Een snelle intuïtieve methode om dit op te lossen is door te testen of het neutraal element voor de optelling (0) of het neutraal element voor de vermenigvuldiging (1) een neutraal element is voor deze samenstellingswet.

We proberen eerst of het toepassen van de samenstellingswet op 0 en  $x \in \mathbb{R}$  terug resulteert in  $x$ .

$$0\tau x = 0 + x + 0^2x^2 = x$$

$$x\tau 0 = x + 0 + x^20^2 = x$$

0 is dus het neutraal element.

Tweede manier om dit op te lossen is door de uitdrukking  $e\tau x$  uit te werken en op zoek gaan naar een waarde van  $e$  zodat het  $e\tau x = x$

$$\begin{aligned} e\tau x &= x \\ \Leftrightarrow e + x + e^2x^2 &= x \\ \Leftrightarrow e + e^2x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow e(1 + ex^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e = 0 \\ e = \frac{-1}{x^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ook met deze methode is dus duidelijk dat 0 het neutraal element is.

- (b) Een samenstellingswet  $\top$  is associatief  $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$ . (I blz 80).

We kunnen dus met een tegenvoorbeeld aantonen dat deze samenstellingswet niet associatief is.

Bijvoorbeeld:

$$1\tau(2\tau 3) = 1\tau(2 + 3 + 4 * 9) = 1\tau 41 = 1 + 41 + 1^2 41^2 = 1723$$

$$(1\tau 2)\tau 3 = (1 + 2 + 1 * 4)\tau 3 = 7\tau 3 = 7 + 3 + 7^2 3^2 = 451$$

- (c)  $\top$  is commutatief als  $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : x \top y = y \top x$  (I blz. 80).

Deze samenstellingswet maakt enkel gebruik van de operatoren "+" en "\*". Aangezien dat deze beide commutatief zijn zal ook de samenstellingswet commutatief zijn.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\tau y = x + y + x^2 y^2 = y + x + y^2 x^2 = y\tau x$$

## 1.2 Oefening 2

Bewijs dat in  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  volgende relaties equivalentierelaties zijn:

$$G = \{((a, b), (c, d)) | a^2 + b^2 = c^2 + d^2\}$$

$$H = \{((a, b), (c, d)) | b - a = d - c\}$$

$$J = \{((a, b), (c, d)) | a + b = c + d\}$$

Welke zijn de partities die hierdoor gedefinieerd worden? Welke partitie definieert  $H \cap J$ ?

## Oplossingsmethode

Een relatie  $R \subseteq A \times A$  is een equivalentierelatie (I blz.58)  $\Leftrightarrow$

1.  $R$  is reflexief  $\Leftrightarrow$  elk element staat in relatie met zichzelf (I blz 59) :

$$\forall x \in A : (x, x) \in R \text{ of } \forall x \in A : xRx$$

Voorbeeld hiervan is de "equals-relatie" elk element is gelijk aan zichzelf  $x = x$ .

2.  $R$  is symmetrisch  $\Leftrightarrow$  de relatie in twee richtingen geldt (I blz 59) :

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \text{ of } xRy \Rightarrow yRx$$

De "equals-relatie" is bijvoorbeeld symmetrisch want als  $x = y \Rightarrow y = x$ . De kleiner dan relatie is bijvoorbeeld niet symmetrisch wat als  $x < y \not\Rightarrow y < x$ .

3.  $R$  is transitief  $\Leftrightarrow$  de relatie kan doorgegeven worden (erfelijk is). (I blz 60) :

$$(x, y) \in R \text{ en } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \text{ of } xRy \text{ en } yRz \Rightarrow xRz$$

De kleiner dan relatie is bijvoorbeeld transitief want als  $x < y$  en  $y < z \Rightarrow x < z$ .

### Oplossing voor G

1.  $G$  is reflexief want

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

dus geldt dat

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)G(x, y)$$

2.  $G$  is symmetrisch want

$$\forall (x, y), (z, q) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = z^2 + q^2 \Rightarrow z^2 + q^2 = x^2 + y^2$$

dus geldt dat

$$(x, y)G(z, q) \Rightarrow (z, q)G(x, y)$$

3.  $G$  is transitief want

$$\forall (x, y), (z, q), (v, w) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 = z^2 + q^2 \ \& \ z^2 + q^2 = v^2 + w^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = v^2 + w^2$$

dus geldt dat

$$(x, y)G(z, q) \ \& \ (z, q)G(v, w) \Rightarrow (x, y)G(v, w)$$

Elke equivalentie relatie definieert een partitie (stelling 9.1 deel I blz 62). Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is  $G$  een equivalentierelatie.

### Oplossing voor H

1.  $H$  is reflexief want

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow y - x = y - x$$

dus geldt dat

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)H(x, y)$$

2.  $H$  is symmetrisch want

$$\forall (x, y), (z, q) \in \mathbb{R}^2 : y - x = q - z \Rightarrow q - z = y - x$$

dus geldt dat

$$(x, y)H(z, q) \Rightarrow (z, q)H(x, y)$$

3.  $H$  is transitief want

$$\forall (x, y), (z, q), (v, w) \in \mathbb{R}^2 : (y-x = q-z \ \& \ q-z = w-v) \Rightarrow y-x = w-v$$

dus geldt dat

$$(x, y)H(z, q) \ \& \ (z, q)H(v, w) \Rightarrow (x, y)H(v, w)$$

Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is  $H$  een equivalentierelatie.

### Oplossing voor J

1.  $J$  is reflexief want

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x + y = x + y$$

dus geldt dat

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)J(x, y)$$

2.  $J$  is symmetrisch want

$$\forall (x, y), (z, q) \in \mathbb{R}^2 : x + y = z + q \Rightarrow q + z = x + y$$

dus geldt dat

$$(x, y)J(z, q) \Rightarrow (z, q)J(x, y)$$

3.  $J$  is transitief want

$$\forall (x, y), (z, q), (v, w) \in \mathbb{R}^2 : (x+y = z+q \ \& \ z+q = v+w) \Rightarrow x+y = v+w$$

dus geldt dat

$$(x, y)J(z, q) \ \& \ (z, q)J(v, w) \Rightarrow (x, y)J(v, w)$$

Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is  $J$  een equivalentierelatie.

### Oplossing bijvragen

Aangezien  $G$ ,  $H$  en  $J$  alle drie equivalentierelaties zijn definiëren ze ook alle drie een partitie (zie stelling 9.1 deel I blz 62).

$H \cap J$  zijn dus alle koppels uit  $\mathbb{R}^2$  die behoren tot zowel  $H$  als  $J$ .  
Dit geeft de volgende formele beschrijving:

$$H \cap J = \{((a, b), (c, d)) | b - a = d - c \ \& \ a + b = c + d\}$$

We kunnen dit verder uitwerken door dit in een stelsel te gieten:

$$\begin{cases} b - a = d - c \\ a + b = c + d \end{cases}$$

Als we dit stelsel verder uitwerken krijgen we:

$$\begin{cases} b - a = d - c \\ a + b = c + d \end{cases} = \begin{cases} 2b = 2d \\ a + b = c + d \end{cases} = \begin{cases} b = d \\ a = c \end{cases}$$

Nu kunnen we  $H \cap J$  schrijven als:

$$\begin{aligned} H \cap J &= \{((a, b), (c, d)) | a = c \text{ \& } b = d\} \\ &= \{(x, y) | x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^2, x = y\} \\ &= \{(x, x) | x \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

### 1.3 Oefening 3

Los het volgende stelsel op in (mod 7):

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

### Oplossingsmethode

Zie volledig uitgewerkt voorbeeld in deel I blz. 85.

Je kan beter geen deling gebruiken, want in sommige omstandigheden zorgt dit voor fouten. In plaats van een getal  $x$  dus te delen door  $x$  om een 1 te bekomen moet je opzoek gaan naar een getal  $y$  zodat  $x * y = 1$ .

Bijvoorbeeld in modulo 5, om van 2 naar 1 te gaan doe je  $2 * 3 = 6 \text{ mod } 5 = 1$ .

Let op als je een gelijkaardige opgave krijgt met (mod  $k$ ) waarbij  $k$  geen priemgetal is, meer info zie blz 86 voorbeeld 14.5.

### Oplossing

We zetten dit stelsel eerst om naar een matrix

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1=R_1*5} \left[ \begin{array}{ccc|c} 15 & -10 & 30 & 20 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{ccc}
\frac{R_1=R_1 \bmod 7}{\rightarrow} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] & \begin{array}{c} \frac{R_2=R_2-4*R_1}{\rightarrow} \\ \frac{R_3=R_3-2*R_1}{\rightarrow} \end{array} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & -15 & -7 & -24 \\ 0 & -7 & -2 & -13 \end{array} \right] \\
\\
\frac{R_2=R_2 \bmod 7}{\rightarrow} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{c} \frac{R_2=R_2*6 \pmod{7}}{\rightarrow} \\ \frac{R_3=R_3*3 \pmod{7}}{\rightarrow} \end{array} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]
\end{array}$$

Dit resulteert in

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 18 \pmod{7} = x_1 + 4 = 6 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

#### 1.4 Oefening 4

Bepaal de isometrieën van een gelijkzijdige driehoek. Stel voor deze isometrieën de bewerkingstabel op, onder de samenstellingswet  $\circ$ .

##### Oplossingsmethode

Volledig uitgewerkt voorbeeld is te vinden in de cursus deel I op blz 94-95.

Als alle  $n$  zijden dezelfde lengte hebben, dan geldt dat het aantal isometrieën gelijk is aan  $2n$ .

##### Oplossing

Bij een gelijkzijdige driehoek hebben we dus  $3 * 2 = 6$  isometrieën.

1.  $e$  : de identieke afbeelding

$$\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array}$$

2.  $r_1$  : rotatie om het middelpunt over  $90^\circ$  in wijzerzin

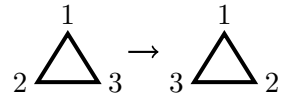
$$\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \triangle \\ 3 \quad 1 \end{array}$$

3.  $r_2$  : rotatie om het middelpunt over  $180^\circ$  in wijzerzin

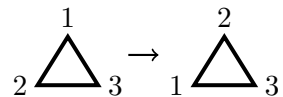
$$\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 1 \quad 2 \end{array}$$



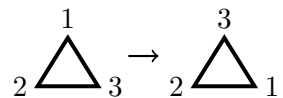
4.  $m_1$  : spiegeling in de middellijn door bovenste hoekpunt



5.  $m_2$  : spiegeling in de diagonaal door hoekpunt rechtsonder



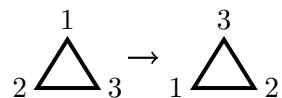
6.  $m_3$  : spiegeling in de diagonaal door hoekpunt linksonder



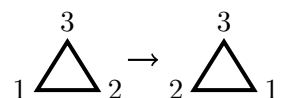
Dit geeft ons de volgende bewerkingstabel:

$\circ$	$e$	$r_1$	$r_2$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
$e$	$e$	$r_1$	$r_2$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
$r_1$	$r_1$	$r_2$	$e$	$m_3$	$m_1$	$m_2$
$r_2$	$r_2$	$e$	$r_1$	$m_2$	$m_3$	$m_1$
$m_1$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$e$	$r_1$	$r_2$
$m_2$	$m_2$	$m_3$	$m_1$	$r_2$	$e$	$r_1$
$m_3$	$m_3$	$m_1$	$m_2$	$r_1$	$r_2$	$e$

$m_3$  wordt bijvoorbeeld bekomen door eerst  $r_2$  toe te passen



op dit resultaat passen we nu  $m_1$  toe



Het toepassen van " $m_1 \circ r_2$ " is dus hetzelfde als het toepassen van  $m_3$ .

De verkregen tabel is duidelijk niet symmetrisch, dit betekend dat niet alle samenstellingen commutatief zijn en dus dat  $\circ$  niet commutatief is.

## 1.5 Oefening 5

Een latijns vierkant is een  $n \times n$  tabel waarin slechts  $n$  verschillende elementen voorkomen.

In elke rij en elke kolom komt namelijk elk element juist eenmaal voor.

- (a) Bewijs dat de bewerkingstabel voor een eindige groep steeds een Latijns vierkant is.
- (b) Is dit ook een voldoende voorwaarde om een groep te hebben? Bepaal of volgend Latijns vierkant de bewerkingstabel van een groep is:

$\tau$	a	b	c	d	e	f
a	c	e	a	b	f	d
b	f	c	b	a	d	e
c	a	b	c	d	e	f
d	e	a	d	f	c	b
e	d	f	e	c	b	a
f	b	d	f	e	a	c

### Oplossingsmethode

Definitie 2.1 (deel I blz. 93) : Een groep is een monoïde waarvoor elk element symmetriseerbaar is. Dus  $\langle A, * \rangle$  is een groep als :

- $*$  is overal bepaald
- $x * (y * z) = (x * y) * z$  (associatief)
- $\exists e \in A : \forall x \in A : x * e = e * x = x$  (neutraal element)
- $\forall x : \exists x^{-1} \in A : x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$  (symmetriseerbaar)

### Oplossing

- (a) Een groep is overal bepaald, dus de tabel is volledig ingevuld.

Nu bewijzen we dat elk element maar één keer voorkomt op elke rij. Dit doen we door te veronderstellen dat een element twee keer voorkomt op één rij en zo een contradictie te bekomen.

*Bewijs.* Een element komt twee keer voor op één rij als er een rij bestaat met rij element  $a$  en er twee verschillende kolommen bestaan met elementen  $x$  en  $y$  waarbij  $x$  en  $y$  verschillend zijn zodat  $a\tau x = a\tau y$

Nu vinden we :

$$\begin{aligned}
a\tau x &= a\tau y \\
\Leftrightarrow a^{-1}\tau(a\tau x) &= a^{-1}\tau(a\tau y) \\
\Leftrightarrow (a^{-1}\tau a)\tau x &= (a^{-1}\tau a)\tau y \\
\Leftrightarrow e\tau x &= e\tau y \\
\Leftrightarrow x &= y
\end{aligned}$$

Aangezien dat  $x$  verschillend is van  $y$  kan dit dus niet en hebben we een contradictie.  $\square$

Merk op dat we in het bovenstaande bewijs gebruik maken van het feit dat een groep associatief en symmetrisch is en neutraal element heeft.

Om te bewijzen dat er geen element twee keer voorkomt in een kolom is het bewijs analoog.

(b) We kijken of deze tabel voldoet aan alle eigenschappen van een groep:

- Deze bewerking is duidelijk overal bepaald, want de tabel is volledig ingevuld.
- Associativiteit is niet zo heel eenvoudig om na te kijken. Daarom proberen we dit systematisch rij per rij te doen.  
We gaan altijd  $x\tau(y\tau[a, b, c, d, e, f])$  berekenen en kijken of dit gelijk is aan  $(x\tau y)\tau[a, b, c, d, e, f]$ .  
Op die manier vinden we het volgende tegenvoorbeeld:  
 $a\tau(b\tau b) = a$  en  $(a\tau b)\tau b = f$

- Om het neutraal element te zoeken in deze tabel zijn we dus opzoek naar een rij en kolom waar elk element op zichzelf wordt afgebeeld.  
Het is duidelijk dat voor "c" elk element op zichzelf wordt afgebeeld. "c" is dus het neutraal element.
- Deze bewerking is duidelijk symmetriseerbaar want voor elk element kunnen we een symmetrisch element vinden.  
"a", "b", "c" en "f" zijn zelf het symmetrisch element voor zichzelf. Want bijvoorbeeld  $b\tau b = b\tau b = c$ , dit klopt want "c" is het neutraal element.  
Het symmetrisch element voor "d" is "e" en het symmetrisch element voor "e" is dus "d" want  $d\tau e = e\tau d = c$ .

Het Latijns vierkant kan dus geen bewerkingstabel zijn van een groep, want het is niet associatief.

## 2 Oefenzitting 2

### 2.1 Oefening 1

Bewijs dat  $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$  voorzien van de samenstellingswet  $((a, b), (c, d)) \mapsto (ac, bc + d)$  een groep is. Is hij abels?

#### Oplossingsmethode

Definitie 2.1 (deel I blz. 93) : Een groep is een monoïde waarvoor elk element symmetriseerbaar is. Dus  $\langle A, * \rangle$  is een groep als :

- $*$  is overal bepaald
- $x * (y * z) = (x * y) * z$  (associatief)
- $\exists e \in A : \forall x \in A : x * e = e * x = x$  (neutraal element)
- $\forall x : \exists x^{-1} \in A : x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$  (symmetriseerbaar)

Als  $*$  commutatief is, dan is de groep abels.

#### Oplossing

- $*$  is overal bepaald in  $\mathbb{R}_0$ , dus  $ac \in \mathbb{R}_0$   
 $*$  en  $+$  zijn ook overal bepaald in  $\mathbb{R}$ , dus  $bc + d \in \mathbb{R}$ .

De bewerking is dus overal bepaald.

- Associatief want

$$((x, y), ((i, j), (u, v))) = ((x, y), (iu, ju + v)) = (xiu, yiu + ju + v)$$

en

$$(((x, y), (i, j)), (u, v)) = ((xi, yi + j), (u, v)) = (xiu, yiu + ju + v)$$

- Voor het neutraal element  $(e_1, e_2)$  moet gelden dat :

$$\begin{cases} ((x, y), (e_1, e_2)) = (x, y) \\ ((e_1, e_2), (x, y)) = (x, y) \end{cases}$$

Dus moet gelden dat

$$\begin{cases} ((x, y), (e_1, e_2)) = (xe_1, ye_1 + e_2) = (x, y) \\ ((e_1, e_2), (x, y)) = (e_1x, e_2x + y) = (x, y) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} xe_1 = x \\ e_1x = x \\ ye_1 + e_2 = y \\ e_2x + y = y \end{cases}$$

Dus dan zal

$$\begin{cases} e_1 = 1 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

$(1, 0)$  is dus het neutraal element.

- Symmetriseerbaarheid:

$$\begin{aligned} ((x, y), (x^{-1}, y^{-1})) = (1, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} xx^{-1} = 1 \\ yx^{-1} + y^{-1} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^{-1} = \frac{1}{x} \\ y^{-1} = -\frac{y}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

Het symmetrisch element voor  $(x, y)$  is dus  $(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x})$

Aangezien dat aan alle eigenschappen van een groep zijn voldaan, is dit dus duidelijk een groep.

Een groep is abels als de bewerking commutatief is, we testen dit even uit:

$$((x, y), (v, w)) = (xv, yv + w)$$

$$((v, w), (x, y)) = (vx, wx + y)$$

Het is duidelijk dat de bovenstaande bewerkingen niet aan elkaar gelijk zijn en de groep dus niet commutatief (of abels) is.

## 2.2 Oefening 2