

# Toepassingen van Algebra oplossingen oefeningen

Pieter-Jan Coenen

December 2016

## Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Oefenzitting 1</b>	<b>2</b>
1.1	Oefening 1 . . . . .	2
1.2	Oefening 2 . . . . .	2
1.3	Oefening 3 . . . . .	5
1.4	Oefening 4 . . . . .	6
1.5	Oefening 5 . . . . .	8

# 1 Oefenzitting 1

## 1.1 Oefening 1

Op  $\mathbb{R}$  definiëren we de samenstellingswet  $a\tau b = a + b + a^2b^2$

- (a) Deze wet heeft een neutraal element. Welk?
- (b) Ze is niet associatief. Ga na !
- (c) Ze is commutatief. Waarom ?

**Oplossing** cursus deel I blz 79

- (a) Voor de optelling is het neutraal element 0 voor de vermenigvuldiging is het neutraal element 1.  
We proberen eerst of het toepassen van de samenstellingswet op 0 en  $x \in \mathbb{R}$  terug resulteert in  $x$ .

$$0\tau x = 0 + x + 0^2x^2 = x$$

$$x\tau 0 = x + 0 + x^20^2 = x$$

0 is dus het neutraal element.

- (b) Een samenstellingswet  $\top$  is associatief  $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : x\top(y\top z) = (x\top y)\top z$ . (I blz 80)  
We kunnen dus met een tegenvoorbeeld aantonen dat deze samenstellingswet niet associatief is.  
Bijvoorbeeld:

$$1\tau(2\tau 3) = 1\tau(2 + 3 + 4 * 9) = 1\tau 41 = 1 + 41 + 1^241^2 = 1723$$

$$(1\tau 2)\tau 3 = (1 + 2 + 1 * 4)\tau 3 = 7\tau 3 = 7 + 3 + 7^23^2 = 451$$

- (c)  $\top$  is commutatief als  $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : x\top y = y\top x$  (I blz. 80)  
Deze samenstellingswet maakt enkel gebruik van de operatoren ”+” en ”\*”. Aangezien dat deze beide commutatief zijn zal ook de samenstellingswet commutatief zijn.

$$\forall x, y \in A : x\tau y = x + y + x^2y^2 = y + x + y^2x^2 = y\tau x$$

## 1.2 Oefening 2

Bewijs dat in  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  volgende relaties equivalentierelaties zijn:

$$G = \{((a, b), (c, d)) | a^2 + b^2 = c^2 + d^2\}$$

$$H = \{((a, b), (c, d)) | b - a = d - c\}$$

$$J = \{((a, b), (c, d)) \mid a + b = c + d\}$$

Welke zijn de partities die hierdoor gedefinieerd worden? Welke partitie definieert  $H \cap J$ ?

### Oplossingsmethode

Een relatie  $R \subseteq A \times A$  is een equivalentierelatie (I blz.58)  $\Leftrightarrow$

1.  $R$  is reflexief  $\Leftrightarrow$  elk element staat in relatie met zichzelf (I blz 59) :

$$\forall x \in A : (x, x) \in R \text{ of } \forall x \in A : xRx$$

Voorbeeld hiervan bijvoorbeeld de equals-relatie elk element is gelijk aan zichzelf  $x = x$ .

2.  $R$  is symmetrisch  $\Leftrightarrow$  de relatie in twee richtingen geldt (I blz 59) :

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \text{ of } xRy \Rightarrow yRx$$

De equals-relatie is bijvoorbeeld symmetrisch want als  $x = y \Rightarrow y = x$ . De kleiner dan relatie is bijvoorbeeld niet symmetrisch want als  $x < y \nRightarrow y < x$ .

3.  $R$  is transitief  $\Leftrightarrow$  de relatie kan doorgegeven worden (erfelijk is). (I blz 60) :

$$(x, y) \in R \text{ en } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \text{ of } xRy \text{ en } yRz \Rightarrow xRz$$

De kleiner dan relatie is bijvoorbeeld transitief want als  $x < y$  en  $y < z \Rightarrow x < z$ .

### Oplossing voor G

1.  $G$  is reflexief want

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

dus geldt dat

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)G(x, y)$$

2.  $G$  is symmetrisch want

$$\forall (x, y), (z, q) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = z^2 + q^2 \Rightarrow z^2 + q^2 = x^2 + y^2$$

dus geldt dat

$$(x, y)G(z, q) \Rightarrow (z, q)G(x, y)$$

3.  $G$  is transitief want

$$\forall (x, y), (z, q), (v, w) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 = z^2 + q^2 \ \& \ z^2 + q^2 = v^2 + w^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = v^2 + w^2$$

dus geldt dat

$$(x, y)G(z, q) \ \& \ (z, q)G(v, w) \Rightarrow (x, y)G(v, w)$$

Elke equivalentie relatie definieert een partitie (stelling 9.1 deel I blz 62).  
Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is  $G$  een equivalentierelatie.

### Oplossing voor H

1.  $H$  is reflexief want

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow y - x = y - x$$

dus geldt dat

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)H(x, y)$$

2.  $H$  is symmetrisch want

$$\forall (x, y), (z, q) \in \mathbb{R}^2 : y - x = q - z \Rightarrow q - z = y - x$$

dus geldt dat

$$(x, y)H(z, q) \Rightarrow (z, q)H(x, y)$$

3.  $H$  is transitief want

$$\forall (x, y), (z, q), (v, w) \in \mathbb{R}^2 : (y - x = q - z \ \& \ q - z = w - v) \Rightarrow y - x = w - v$$

dus geldt dat

$$(x, y)H(z, q) \ \& \ (z, q)H(v, w) \Rightarrow (x, y)H(v, w)$$

Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is  $H$  een equivalentierelatie.

### Oplossing voor J

1.  $J$  is reflexief want

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x + y = x + y$$

dus geldt dat

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)J(x, y)$$

2.  $J$  is symmetrisch want

$$\forall (x, y), (z, q) \in \mathbb{R}^2 : x + y = z + q \Rightarrow q + z = x + y$$

dus geldt dat

$$(x, y)J(z, q) \Rightarrow (z, q)J(x, y)$$

3.  $J$  is transitief want

$$\forall (x, y), (z, q), (v, w) \in \mathbb{R}^2 : (x + y = z + q \ \& \ z + q = v + w) \Rightarrow x + y = v + w$$

dus geldt dat

$$(x, y)J(z, q) \ \& \ (z, q)J(v, w) \Rightarrow (x, y)J(v, w)$$

Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is  $J$  een equivalentierelatie.

### Oplossing bijvraag

$H \cap J$  zijn dus alle koppels uit  $\mathbb{R}^2$  die behoren tot zowel  $H$  als  $J$ .

Dit geeft de volgende formele beschrijving:

$$H \cap J = \{((a, b), (c, d)) | b - a = d - c \ \& \ a + b = c + d\}$$

We kunnen dit verder uitwerken door dit in een stelsel te gieten:

$$\begin{cases} b - a = d - c \\ a + b = c + d \end{cases}$$

Als we dit stelsel verder uitwerken krijgen we:

$$\begin{cases} b - a = d - c \\ a + b = c + d \end{cases} = \begin{cases} 2b = 2d \\ a + b = c + d \end{cases} = \begin{cases} b = d \\ a = c \end{cases}$$

Nu kunnen we  $H \cap J$  schrijven als:

$$H \cap J = \{((a, b), (c, d)) | a = c \ \& \ b = d\}$$

## 1.3 Oefening 3

Los het volgende stelsel op in (mod 7):

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

### Oplossingsmethode

Zie volledig uitgewerkt voorbeeld in deel I blz. 85.

Je kan beter geen deling gebruiken, want in sommige omstandigheden zorgt dit voor fouten. In plaats van een getal  $x$  dus te delen door  $x$  om een 1 te bekomen moet je opzoek gaan naar een getal  $y$  zodat  $x * y = 1$ . Bijvoorbeeld in modulo 5, om van 2 naar 1 te gaan doe je  $2 * 3 = 6 \bmod 5 = 1$ .

### Oplossing

We zetten dit stelsel eerst om naar een matrix

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1=R_1*5} \left[ \begin{array}{ccc|c} 15 & -10 & 30 & 20 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1=R_1 \bmod 5} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[\begin{array}{l} R_2=R_2-4*R_1 \\ R_3=R_3-2*R_1 \end{array}]{\begin{array}{l} R_2=R_2-4*R_1 \\ R_3=R_3-2*R_1 \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & -15 & -7 & -24 \\ 0 & -7 & -2 & -13 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{l} R_2=R_2 \bmod 7 \\ R_3=R_3 \bmod 7 \end{array}]{\begin{array}{l} R_2=R_2 \bmod 7 \\ R_3=R_3 \bmod 7 \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[\begin{array}{l} R_2=R_2*6 \\ R_3=R_3*3 \end{array}]{\begin{array}{l} R_2=R_2*6 \\ R_3=R_3*3 \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Dit resulteert in

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_1 + 18 \pmod{7} = x_1 + 4 = 6 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

## 1.4 Oefening 4

Bepaal de isometrieën van een gelijkzijdige driehoek. Stel voor deze isometrieën de bewerkingstabel op, onder de samenstellingswet  $\circ$ .

### Oplossingsmethode

Volledig uitgewerkt voorbeeld is te vinden in de cursus deel I op blz 94-95.

Als alle  $n$  zijden dezelfde lengte hebben, dan geldt dat het aantal isometrieën gelijk is aan  $2n$ .

### Oplossing

Bij een gelijkzijdige driehoek hebben we dus  $3 * 2 = 6$  isometrieën.

1.  $e$  : de identieke afbeelding

$$\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array}$$

2.  $r_1$  : rotatie om het middelpunt over  $90^\circ$  in wijzerzin

$$\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \triangle \\ 3 \quad 1 \end{array}$$

3.  $r_2$  : rotatie om het middelpunt over  $180^\circ$  in wijzerzin

$$\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 1 \quad 2 \end{array}$$

4.  $m_1$  : spiegeling in de middellijn door bovenste hoekpunt

$$\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 3 \quad 2 \end{array}$$

5.  $m_2$  : spiegeling in de diagonaal door hoekpunt rechtsonder

$$\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \triangle \\ 1 \quad 3 \end{array}$$

6.  $m_3$  : spiegeling in de diagonaal door hoekpunt linksonder

$$\begin{array}{c} 1 \\ \triangle \\ 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

Dit geeft ons de volgende bewerkingstabel:

$\circ$	$e$	$r_1$	$r_2$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
$e$	$e$	$r_1$	$r_2$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
$r_1$	$r_1$	$r_2$	$e$	$m_3$	$m_1$	$m_2$
$r_2$	$r_2$	$e$	$r_1$	$m_2$	$m_3$	$m_1$
$m_1$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$e$	$r_1$	$r_2$
$m_2$	$m_2$	$m_3$	$m_1$	$r_2$	$e$	$r_1$
$m_3$	$m_3$	$m_1$	$m_2$	$r_1$	$r_2$	$e$

Deze tabel is duidelijk niet symmetrisch, dit betekend dat niet alle samenstellingen commutatief zijn.



## 1.5 Oefening 5

Een latijns vierkant is een  $n \times n$  tabel waarin slechts  $n$  verschillende elementen voorkomen.

In elke rij en elke kolom komt namelijk elk element juist eenmaal voor.

- (a) Bewijs dat de bewerkingstabel voor een eindige groep steeds een Latijns vierkant is.
- (b) Is dit ook een voldoende voorwaarde om een groep te hebben? Bepaal of volgend Latijns vierkant de bewerkingstabel van een groep is:

$\tau$	a	b	c	d	e	f
a	c	e	a	b	f	d
b	f	c	b	a	d	e
c	a	b	c	d	e	f
d	e	a	d	f	c	b
e	d	f	e	c	b	a
f	b	d	f	e	a	c

### Oplossingsmethode