# Toepassingen van Algebra oplossingen oefeningen

Pieter-Jan Coenen

December 2016

## 1 Oefenzitting 1

### 1.1 Vraag 1

Op $\mathbb{R}$ definiëren we de samenstellingswet $a\tau b = a + b + a^2b^2$

(a) Deze wet heeft een neutraal element. Welk?

(b) Ze is niet associatief. Ga na !

(c) Ze is commutatief. Waarom ?

**Oplossing** cursus deel I blz 79

(a) Voor de optelling is het neutraal element 0 voor de vermenigvuldiging is het neutraal element 1.
We proberen eerst of het toepassen van de samenstellingswet op 0 en $x \in \mathbb{R}$ terug resulteert in $x$.

$$0\tau x = 0 + x + 0^2x^2 = x$$

$$x\tau 0 = x + 0 + x^2 0^2 = x$$

0 is dus het neutraal element.

(b) Een samenstellingswet $\top$ is associatief $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : x\top(y\top z) = (x\top y)\top z)$. (I blz 80)
We kunnen dus met een tegenvoorbeeld aantonen dat deze samenstellingswet niet associatief is.
Bijvoorbeeld:

$$1\tau(2\tau 3) = 1\tau(2 + 3 + 4 * 9) = 1\tau 41 = 1 + 41 + 1^2 41^2 = 1723$$

$$(1\tau 2)\tau 3 = (1 + 2 + 1 * 4)\tau 3 = 7\tau 3 = 7 + 3 + 7^2 3^2 = 451$$

(c) $\top$ is commutatief als $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : x\top y = y\top x$ (I blz. 80)
Deze samenstellingswet maakt enkel gebruik van de operatoren "+" en "*". Aangezien dat deze beide commutatief zijn zal ook de samenstellingswet commutatief zijn.

$$\forall x, y \in A : x\tau y = x + y + x^2y^2 = x + y + y^2x^2 = y\tau x$$

## 1.2 Oefening 2

Bewijs dat in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ volgende relaties equivalentierelaties zijn:

$$G = \{((a,b),(c,d))|a^2 + b^2 = c^2 + d^2\}$$

$$H = \{((a,b),(c,d))|b - a = d - c\}$$

$$J = \{((a,b),(c,d))|a + b = c + d\}$$

Welke zijn de partities die hierdoor gedefinieerd worden? Welke partitie definieert $H \cap J$?

**Oplossingsmethode**
Een relatie $R \subseteq A \times A$ is een equivalentierelatie (I blz.58) $\Leftrightarrow$

1. $R$ is reflexief $\Leftrightarrow$ elk element staat in relatie met zichzelf (I blz 59) :

   $$\forall x \in A : (x,x) \in R \text{ of } \forall x \in A : xRx$$

   Voorbeeld hiervalnis bijvoorbeeld de "equals-relatie" elk element is gelijk aan zichzelf $x = x$.

2. $R$ is symmetrisch $\Leftrightarrow$ de relatie in twee richtingen geldt (I blz 59) :

   $$(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \text{ of } xRy \Rightarrow yRx$$

   De "equals-relatie" is bijvoorbeeld symmetrisch want als $x = y \Rightarrow y = x$. De kleiner dan relatie is bijvoorbeeld niet symmetrisch wat als $x < y \nRightarrow y < x$.

3. $R$ is transitief $\Leftrightarrow$ de relatie kan doorgegeven worden (erfelijk is). (I blz 60) :

   $$(x,y) \in R \text{ en } (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R \text{ of } xRy \text{ en } yRz \Rightarrow xRz$$

   De kleiner dan relatie is bijvoorbeeld transitief want als $x < y$ en $y < z \Rightarrow x < z$.

**Oplossing voor G**

1. $G$ is reflexief want

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

   dus geldt dat

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)G(x,y)$$

2. $G$ is symmetrisch want

   $$\forall (x,y),(z,q) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = z^2 + q^2 \Rightarrow z^2 + q^2 = x^2 + y^2$$

   dus geldt dat

   $$(x,y)G(z,q) \Rightarrow (z,q)G(x,y)$$

3. $G$ is transitief want

   $$\forall (x,y),(z,q),(v,w) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2 = z^2+q^2 \ \& \ z^2+q^2 = v^2+w^2) \Rightarrow x^2+y^2 = v^2+w^2$$

   dus geldt dat

   $$(x,y)G(z,q) \ \& \ (z,q)G(v,w) \Rightarrow (x,y)G(v,w)$$

Elke equivalentie relatie definieert een partitie (stelling 9.1 deel I blz 62). Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is $G$ een equivalentierelatie.

**Oplossing voor H**

1. $H$ is reflexief want

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow y-x = y-x$$

   dus geldt dat

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)H(x,y)$$

2. $H$ is symmetrisch want

   $$\forall (x,y),(z,q) \in \mathbb{R}^2 : y-x = q-z \Rightarrow q-z = y-x$$

   dus geldt dat

   $$(x,y)H(z,q) \Rightarrow (z,q)H(x,y)$$

3. $H$ is transitief want

   $$\forall (x,y),(z,q),(v,w) \in \mathbb{R}^2 : (y-x = q-z \ \& \ q-z = w-v) \Rightarrow y-x = w-v$$

   dus geldt dat

   $$(x,y)H(z,q) \ \& \ (z,q)H(v,w) \Rightarrow (x,y)H(v,w)$$

Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is $H$ een equivalentierelatie.

**Oplossing voor J**

1. $J$ is reflexief want

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x+y = x+y$$

   dus geldt dat

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)J(x,y)$$

2. $J$ is symmetrisch want

   $$\forall (x,y),(z,q) \in \mathbb{R}^2 : x+y = z+q \Rightarrow q+z = x+y$$

   dus geldt dat

   $$(x,y)J(z,q) \Rightarrow (z,q)J(x,y)$$

3. $J$ is transitief want

   $$\forall (x,y),(z,q),(v,w) \in \mathbb{R}^2 : (x+y = z+q \ \& \ z+q = v+w) \Rightarrow x+y = v+w$$

   dus geldt dat

   $$(x,y)J(z,q) \ \& \ (z,q)J(v,w) \Rightarrow (x,y)J(v,w)$$

Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is $J$ een equivalentierelatie.

**Oplossing bijvraag**
$H \cap J$ zijn dus alle koppels uit $\mathbb{R}^2$ die behoren tot zowel H als J.
Dit geeft de volgende formele beschrijving:

$$H \cap J = \{((a,b),(c,d)) | b - a = d - c \ \& \ a + b = c + d\}$$

We kunnen dit verder uitwerken door dit in een stelsel te gieten:

$$\begin{cases} b - a = d - c \\ a + b = c + d \end{cases}$$

Als we dit stelsel verder uitwerken krijgen we:

$$\begin{cases} b - a = d - c \\ a + b = c + d \end{cases} = \begin{cases} 2b = 2d \\ a + b = c + d \end{cases} = \begin{cases} b = d \\ a = c \end{cases}$$

Nu kunnen we $H \cap J$ schrijven als:

$$H \cap J = \{((a,b),(c,d)) | a = c \ \& \ b = d\}$$

## 1.3 Oefening 3

Los het volgende stelsel op in (mod 7):

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

**Oplossingsmethode**
Zie volledig uitgewerkt voorbeeld in deel I blz. 85.
Je kan beter geen deling gebruiken, want in sommige omstandigheden zorgt dit voor fouten. In plaats van een getal $x$ dus te delen door $x$ om een 1 te bekomen moet je opzoek gaan naar een getal $y$ zodat $x * y = 1$.
Bijvoorbeeld in modulo 5, om van 2 naar 1 te gaan doe je $2 * 3 = 6 \bmod 5 = 1$.

**Oplossing**
We zetten dit stelsel eerst om naar een matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1=R_1*5} \left[\begin{array}{ccc|c} 15 & -10 & 30 & 20 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1=R_1 \bmod 5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2=R_2-4*R_1} \atop \xrightarrow{R_3=R_3-2*R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & -15 & -7 & -24 \\ 0 & -7 & -2 & -13 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2=R_2 \bmod 7} \atop \xrightarrow{R_3=R_3 \bmod 7} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2=R_2*6} \atop \xrightarrow{R_3=R_3*3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Dit resulteert in

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_1 + 18 \pmod 7 = x_1 + 4 = 6 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$