

Toepassingen van Algebra oplossingen oefeningen

Pieter-Jan Coenen

December 2016

1 Oefenzitting 1

1.1 Vraag 1

Op \mathbb{R} definiëren we de samenstellingswet $a\tau b = a + b + a^2b^2$

- (a) Deze wet heeft een neutraal element. Welk?
- (b) Ze is niet associatief. Ga na !
- (c) Ze is commutatief. Waarom ?

Oplossing cursus deel I blz 79

- (a) Voor de optelling is het neutraal element 0 voor de vermenigvuldiging is het neutraal element 1.
We proberen eerst of het toepassen van de samenstellingswet op 0 en $x \in \mathbb{R}$ terug resulteert in x .

$$0\tau x = 0 + x + 0^2x^2 = x$$

$$x\tau 0 = x + 0 + x^20^2 = x$$

0 is dus het neutraal element.

- (b) Een samenstellingswet \top is associatief $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : x\top(y\top z) = (x\top y)\top z$.
(I blz 80)
We kunnen dus met een tegenvoorbeeld aantonen dat deze samenstellingswet niet associatief is.
Bijvoorbeeld:

$$1\tau(2\tau 3) = 1\tau(2 + 3 + 4 * 9) = 1\tau 41 = 1 + 41 + 1^241^2 = 1723$$

$$(1\tau 2)\tau 3 = (1 + 2 + 1 * 4)\tau 3 = 7\tau 3 = 7 + 3 + 7^23^2 = 451$$

- (c) \top is commutatief als $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : x\top y = y\top x$ (I blz. 80)
Deze samenstellingswet maakt enkel gebruik van de operatoren "+" en "*". Aangezien dat deze beide commutatief zijn zal ook de samenstellingswet commutatief zijn.

$$\forall x, y \in A : x\tau y = x + y + x^2y^2 = y + x + y^2x^2 = y\tau x$$

1.2 Oefening 2

Bewijs dat in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ volgende relaties equivalentierelaties zijn:

$$G = \{((a, b), (c, d)) | a^2 + b^2 = c^2 + d^2\}$$

$$H = \{((a, b), (c, d)) | b - a = d - c\}$$

$$J = \{((a, b), (c, d)) | a + b = c + d\}$$

Welke zijn de partities die hierdoor gedefinieerd worden? Welke partitie definieert $H \cap J$?

Oplossingsmethode

Een relatie $R \subseteq A \times A$ is een equivalentierelatie (I blz.58) \Leftrightarrow

1. R is reflexief \Leftrightarrow elk element staat in relatie met zichzelf (I blz 59) :

$$\forall x \in A : (x, x) \in R \text{ of } \forall x \in A : xRx$$

Voorbeeld hiervan bijvoorbeeld de "equals-relatie" elk element is gelijk aan zichzelf $x = x$.

2. R is symmetrisch \Leftrightarrow de relatie in twee richtingen geldt (I blz 59) :

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \text{ of } xRy \Rightarrow yRx$$

De "equals-relatie" is bijvoorbeeld symmetrisch want als $x = y \Rightarrow y = x$. De kleiner dan relatie is bijvoorbeeld niet symmetrisch want als $x < y \not\Rightarrow y < x$.

3. R is transitief \Leftrightarrow de relatie kan doorgegeven worden (erfelijk is). (I blz 60) :

$$(x, y) \in R \text{ en } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \text{ of } xRy \text{ en } yRz \Rightarrow xRz$$

De kleiner dan relatie is bijvoorbeeld transitief want als $x < y$ en $y < z \Rightarrow x < z$.

Oplossing voor G

1. G is reflexief want

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

dus geldt dat

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)G(x, y)$$

2. G is symmetrisch want

$$\forall (x, y), (z, q) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = z^2 + q^2 \Rightarrow z^2 + q^2 = x^2 + y^2$$

dus geldt dat

$$(x, y)G(z, q) \Rightarrow (z, q)G(x, y)$$

3. G is transitief want

$$\forall (x, y), (z, q), (v, w) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 = z^2 + q^2 \ \& \ z^2 + q^2 = v^2 + w^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = v^2 + w^2$$

dus geldt dat

$$(x, y)G(z, q) \ \& \ (z, q)G(v, w) \Rightarrow (x, y)G(v, w)$$

Elke equivalentie relatie definieert een partitie (stelling 9.1 deel I blz 62). Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is G een equivalentierelatie.

Oplossing voor H

1. H is reflexief want

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow y - x = y - x$$

dus geldt dat

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)H(x, y)$$

2. H is symmetrisch want

$$\forall (x, y), (z, q) \in \mathbb{R}^2 : y - x = q - z \Rightarrow q - z = y - x$$

dus geldt dat

$$(x, y)H(z, q) \Rightarrow (z, q)H(x, y)$$

3. H is transitief want

$$\forall (x, y), (z, q), (v, w) \in \mathbb{R}^2 : (y - x = q - z \ \& \ q - z = w - v) \Rightarrow y - x = w - v$$

dus geldt dat

$$(x, y)H(z, q) \ \& \ (z, q)H(v, w) \Rightarrow (x, y)H(v, w)$$

Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is H een equivalentierelatie.

Oplossing voor J

1. J is reflexief want

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x + y = x + y$$

dus geldt dat

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)J(x, y)$$

2. J is symmetrisch want

$$\forall (x, y), (z, q) \in \mathbb{R}^2 : x + y = z + q \Rightarrow q + z = x + y$$

dus geldt dat

$$(x, y)J(z, q) \Rightarrow (z, q)J(x, y)$$

3. J is transitief want

$$\forall (x, y), (z, q), (v, w) \in \mathbb{R}^2 : (x + y = z + q \ \& \ z + q = v + w) \Rightarrow x + y = v + w$$

dus geldt dat

$$(x, y)J(z, q) \ \& \ (z, q)J(v, w) \Rightarrow (x, y)J(v, w)$$

Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is J een equivalentierelatie.

Oplossing bijvraag

$H \cap J$ zijn dus alle koppels uit \mathbb{R}^2 die behoren tot zowel H als J .

Dit geeft de volgende formele beschrijving:

$$H \cap J = \{((a, b), (c, d)) | b - a = d - c \ \& \ a + b = c + d\}$$

We kunnen dit verder uitwerken door dit in een stelsel te gieten:

$$\begin{cases} b - a = d - c \\ a + b = c + d \end{cases}$$

Als we dit stelsel verder uitwerken krijgen we:

$$\begin{cases} b - a = d - c \\ a + b = c + d \end{cases} = \begin{cases} 2b = 2d \\ a + b = c + d \end{cases} = \begin{cases} b = d \\ a = c \end{cases}$$

Nu kunnen we $H \cap J$ schrijven als:

$$H \cap J = \{((a, b), (c, d)) | a = c \ \& \ b = d\}$$

1.3 Oefening 3

Los het volgende stelsel op in (mod 7):

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Oplossingsmethode

Zie volledig uitgewerkt voorbeeld in deel I blz. 85.

Je kan beter geen deling gebruiken, want in sommige omstandigheden zorgt dit voor fouten. In plaats van een getal x dus te delen door x om een 1 te bekomen moet je opzoek gaan naar een getal y zodat $x * y = 1$.

Bijvoorbeeld in modulo 5, om van 2 naar 1 te gaan doe je $2 * 3 = 6 \bmod 5 = 1$.

Oplossing

We zetten dit stelsel eerst om naar een matrix

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_1=R_1*5} \left[\begin{array}{ccc|c} 15 & -10 & 30 & 20 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1=R_1 \bmod 5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow[\underline{R_3=R_3-2*R_1}]{\underline{R_2=R_2-4*R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & -15 & -7 & -24 \\ 0 & -7 & -2 & -13 \end{array} \right] \xrightarrow[\underline{R_3=R_3 \bmod 7}]{\underline{R_2=R_2 \bmod 7}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow[\underline{R_3=R_3*3}]{\underline{R_2=R_2*6}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Dit resulteert in

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_1 + 18 \pmod{7} = x_1 + 4 = 6 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

1.4 Oefening 4

Bepaal de isometrieën van een gelijkzijdige driehoek. Stel voor deze isometrieën de bewerkingstabel op, onder de samenstellingswet \circ .

Oplossingsmethode

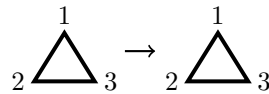
Volledig uitgewerkt voorbeeld is te vinden in de cursus deel I op blz 94-95.

Als alle n zijden dezelfde lengte hebben, dan geldt dat het aantal isometrieën gelijk is aan $2n$.

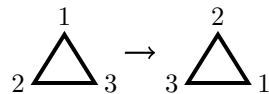
Oplossing

Bij een gelijkzijdige driehoek hebben we dus $3 * 2 = 6$ isometrieën.

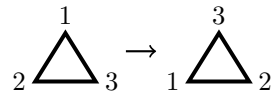
1. e : de identieke afbeelding



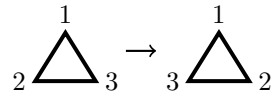
2. r_1 : rotatie om het middelpunt over 90° in wijzerzin



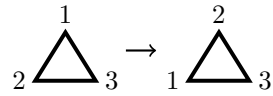
3. r_2 : rotatie om het middelpunt over 180° in wijzerzin



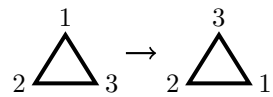
4. m_1 : spiegeling in de middellijn door bovenste hoekpunt



5. m_2 : spiegeling in de diagonaal door hoekpunt rechtsonder



6. m_3 : spiegeling in de diagonaal door hoekpunt linksonder



Dit geeft ons de volgende bewerkingstabel:

\circ	e	r_1	r_2	m_1	m_2	m_3
e	e	r_1	r_2	m_1	m_2	m_3
r_1	r_1	r_2	e	m_3	m_1	m_2
r_2	r_2	e	r_1	m_2	m_3	m_1
m_1	m_1	m_2	m_3	e	r_1	r_2
m_2	m_2	m_3	m_1	r_2	e	r_1
m_3	m_3	m_1	m_2	r_1	r_2	e

Deze tabel is duidelijk niet symmetrisch, dit betekend dat niet alle samenstellingen commutatief zijn.