Toepassingen van Algebra oplossingen oefeningen

Pieter-Jan Coenen

December 2016

Inhoudsopgave

1 Oefenzitting 1

1.1 Oefening 1

Op $\mathbb{R}$ definiëren we de samenstellingswet $a\tau b = a + b + a^2b^2$

(a) Deze wet heeft een neutraal element. Welk?

(b) Ze is niet associatief. Ga na!

(c) Ze is commutatief. Waarom?

Oplossingsmethode

Ga al deze eigenschappen na voor de gegeven samenstellingswet. De eigenschappen kunnen worden gevonden in de cursus deel I blz 79.

Oplossing

(a) Een snelle intuïtieve methode om dit op te lossen is door te testen of het neutraal element voor de optelling (0) of het neutraal element voor de vermenigvuldiging (1) een neutraal element is voor deze samenstellingswet.
We proberen eerst of het toepassen van de samenstellingswet op 0 en $x \in \mathbb{R}$ terug resulteert in x.

$$0\tau x = 0 + x + 0^2x^2 = x$$

$$x\tau 0 = x + 0 + x^2 0^2 = x$$

0 is dus het neutraal element.

Tweede manier om dit op te lossen is door de uitdrukking $e\tau x$ uit te werken en op zoek gaan naar een waarde van e zodat het $e\tau x = x$

$$\begin{aligned} & e\tau x = x \\ \Leftrightarrow\, & e + x + e^2x^2 = x \\ \Leftrightarrow\, & e + e^2x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\, & e(1 + ex^2) = 0 \\ \Leftrightarrow\, & \begin{cases} e = 0 \\ e = \frac{-1}{x^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ook met deze mehode is dus duidelijk dat 0 het neutraal element is.

(b) Een samenstellingswet $\top$ is associatief $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : x\top(y\top z) = (x\top y)\top z)$. (I blz 80)
We kunnen dus met een tegenvoorbeeld aantonen dat deze samenstellingswet niet associatief is.
Bijvoorbeeld:

$$1\tau(2\tau 3) = 1\tau(2 + 3 + 4 * 9) = 1\tau 41 = 1 + 41 + 1^2 41^2 = 1723$$

$$(1\tau 2)\tau 3 = (1 + 2 + 1 * 4)\tau 3 = 7\tau 3 = 7 + 3 + 7^2 3^2 = 451$$

(c) $\top$ is commutatief als $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : x\top y = y\top x$ (I blz. 80)
Deze samenstellingswet maakt enkel gebruik van de operatoren "+" en "*". Aangezien dat deze beide commutatief zijn zal ook de samenstellingswet commutatief zijn.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\tau y = x + y + x^2 y^2 = y + x + y^2 x^2 = y\tau x$$

1.2 Oefening 2

Bewijs dat in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ volgende relaties equivalentierelaties zijn:

$$G = \{((a, b), (c, d))|a^2 + b^2 = c^2 + d^2\}$$

$$H = \{((a, b), (c, d))|b - a = d - c\}$$

$$J = \{((a, b), (c, d))|a + b = c + d\}$$

Welke zijn de partities die hierdoor gedefinieerd worden? Welke partitie definieert $H \cap J$?

Oplossingsmethode

Een relatie $R \subseteq A \times A$ is een equivalentierelatie (I blz.58) $\Leftrightarrow$

1. R is reflexief $\Leftrightarrow$ elk element staat in relatie met zichzelf (I blz 59) :

$$\forall x \in A : (x, x) \in R \text{ of } \forall x \in A : xRx$$

   Voorbeeld hiervan is de "equals-relatie" elk element is gelijk aan zichzelf $x = x$.

2. R is symmetrisch $\Leftrightarrow$ de relatie in twee richtingen geldt (I blz 59) :

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \text{ of } xRy \Rightarrow yRx$$

   De "equals-relatie" is bijvoorbeeld symmetrisch want als $x = y \Rightarrow y = x$. De kleiner dan relatie is bijvoorbeeld niet symmetrisch wat als $x < y \nRightarrow y < x$.

3. R is transitief $\Leftrightarrow$ de relatie kan doorgegeven worden (erfelijk is). (I blz 60) :

$$(x, y) \in R \text{ en } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \text{ of } xRy \text{ en } yRz \Rightarrow xRz$$

De kleiner dan relatie is bijvoorbeeld transitief want als $x < y$ en $y < z \Rightarrow x < z$.

Oplossing voor G

1. G is reflexief want

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

dus geldt dat

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)G(x, y)$$

2. G is symmetrisch want

$$\forall (x, y), (z, q) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = z^2 + q^2 \Rightarrow z^2 + q^2 = x^2 + y^2$$

dus geldt dat

$$(x, y)G(z, q) \Rightarrow (z, q)G(x, y)$$

3. G is transitief want

$$\forall (x, y), (z, q), (v, w) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2 = z^2+q^2 \ \& \ z^2+q^2 = v^2+w^2) \Rightarrow x^2+y^2 = v^2+w^2$$

dus geldt dat

$$(x, y)G(z, q) \ \& \ (z, q)G(v, w) \Rightarrow (x, y)G(v, w)$$

Elke equivalentie relatie definieert een partitie (stelling 9.1 deel I blz 62). Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is G een equivalentierelatie.

Oplossing voor H

1. H is reflexief want

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow y - x = y - x$$

dus geldt dat

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)H(x, y)$$

2. H is symmetrisch want

$$\forall (x, y), (z, q) \in \mathbb{R}^2 : y - x = q - z \Rightarrow q - z = y - x$$

dus geldt dat

$$(x, y)H(z, q) \Rightarrow (z, q)H(x, y)$$

3. H is transitief want

$$\forall(x,y),(z,q),(v,w) \in \mathbb{R}^2 : (y-x = q-z \ \&\ q-z = w-v) \Rightarrow y-x = w-v$$

dus geldt dat

$$(x,y)H(z,q) \ \&\ (z,q)H(v,w) \Rightarrow (x,y)H(v,w)$$

Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is H een equivalentierelatie.

Oplossing voor J

1. J is reflexief want

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x+y = x+y$$

dus geldt dat

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)J(x,y)$$

2. J is symmetrisch want

$$\forall(x,y),(z,q) \in \mathbb{R}^2 : x+y = z+q \Rightarrow q+z = x+y$$

dus geldt dat

$$(x,y)J(z,q) \Rightarrow (z,q)J(x,y)$$

3. J is transitief want

$$\forall(x,y),(z,q),(v,w) \in \mathbb{R}^2 : (x+y = z+q \ \&\ z+q = v+w) \Rightarrow x+y = v+w$$

dus geldt dat

$$(x,y)J(z,q) \ \&\ (z,q)J(v,w) \Rightarrow (x,y)J(v,w)$$

Aangezien dat aan alle voorwaarden is voldaan, is J een equivalentierelatie.

Oplossing bijvraag

$H \cap J$ zijn dus alle koppels uit $\mathbb{R}^2$ die behoren tot zowel H als J.
Dit geeft de volgende formele beschrijving:

$$H \cap J = \{((a,b),(c,d)) | b-a = d-c \ \&\ a+b = c+d\}$$

We kunnen dit verder uitwerken door dit in een stelsel te gieten:

$$\begin{cases} b-a = d-c \\ a+b = c+d \end{cases}$$

Als we dit stelsel verder uitwerken krijgen we:

$$\begin{cases} b - a = d - c \\ a + b = c + d \end{cases} = \begin{cases} 2b = 2d \\ a + b = c + d \end{cases} = \begin{cases} b = d \\ a = c \end{cases}$$

Nu kunnen we $H \cap J$ schrijven als:

$$\begin{aligned} H \cap J &= \{((a, b), (c, d)) | a = c \ \& \ b = d\} \\ &= \{(x, y) | x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^2, x = y\} \\ &= \{(x, x) | x \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

1.3 Oefening 3

Los het volgende stelsel op in (mod 7):

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Oplossingsmethode

Zie volledig uitgewerkt voorbeeld in deel I blz. 85.
Je kan beter geen deling gebruiken, want in sommige omstandigheden zorgt dit voor fouten. In plaats van een getal x dus te delen door x om een 1 te bekomen moet je opzoek gaan naar een getal y zodat $x * y = 1$.
Bijvoorbeeld in modulo 5, om van 2 naar 1 te gaan doe je $2*3 = 6 \bmod 5 = 1$.

Let op als je een gelijkaardige opgave krijgt met (mod k) waarbij k geen priemgetal is, meer info zie blz 86 voorbeeld 14.5.

Oplossing

We zetten dit stelsel eerst om naar een matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 = R_1 * 5} \left[\begin{array}{ccc|c} 15 & -10 & 30 & 20 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 = R_1 \bmod 7} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{R_2 = R_2 - 4 * R_1} \\ \xrightarrow{R_3 = R_3 - 2 * R_1} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & -15 & -7 & -24 \\ 0 & -7 & -2 & -13 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{R_2 = R_2 \bmod 7} \\ \xrightarrow{R_3 = R_3 \bmod 7} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{R_2 = R_2 * 6 \ (mod \ 7)} \\ \xrightarrow{R_3 = R_3 * 3 \ (mod \ 7)} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Dit resulteert in

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 18 \pmod 7 = x_1 + 4 = 6 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

1.4 Oefening 4

Bepaal de isometrieën van een gelijkzijdige driehoek. Stel voor deze isometrieën de bewerkingstabel op, onder de samenstellingswet $\circ$.

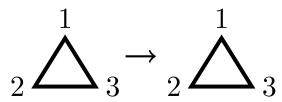
Oplossingsmethode

Volledig uitgewerkt voorbeeld is te vinden in de cursus deel I op blz 94-95.
Als alle n zijden dezelfde lengte hebben, dan geldt dat het aantal isometrieën gelijk is aan $2n$.

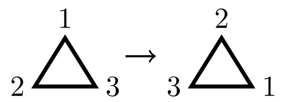
Oplossing

Bij een gelijkzijdige driehoek hebben we dus $3 * 2 = 6$ isometrieën.

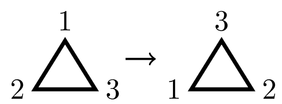
1. e : de identieke afbeelding



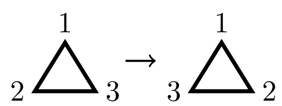
2. r_1 : rotatie om het middelpunt over 90° in wijzerzin



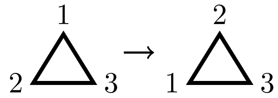
3. r_2 : rotatie om het middelpunt over 180° in wijzerzin



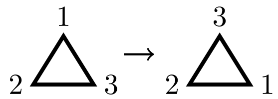
4. m_1 : spiegeling in de middellijn door bovenste hoekpunt



5. m_2 : spiegeling in de diagonaal door hoekpunt rechtsonder



6. m_3 : spiegeling in de diagonaal door hoekpunt linksonder



Dit geeft ons de volgende bewerkingstabel:

$\circ$	e	r_1	r_2	m_1	m_2	m_3
e	e	r_1	r_2	m_1	m_2	m_3
r_1	r_1	r_2	e	m_3	m_1	m_2
r_2	r_2	e	r_1	m_2	m_3	m_1
m_1	m_1	m_2	m_3	e	r_1	r_2
m_2	m_2	m_3	m_1	r_2	e	r_1
m_3	m_3	m_1	m_2	r_1	r_2	e

Deze tabel is duidelijk niet symetrisch, dit betekend dat niet alle samenstellingen commutatief zijn, dit betekent dat $\circ$ niet commutatief is.

1.5 Oefening 5

Een latijns vierkant is een n×n tabel waarin slechts n verschillende elementen voorkomen.
In elke rij en elke kolom komt namelijk elk element juist eenmaal voor.

(a) Bewijs dat de bewerkingstabel voor een eindige groep steeds een Latijns vierkant is.

(b) Is dit ook een voldoende voorwaarde om een groep te hebben? Bepaal of volgend Latijns vierkant de bewerkingstabel van een groep is:

τ	a	b	c	d	e	f
a	c	e	a	b	f	d
b	f	c	b	a	d	e
c	a	b	c	d	e	f
d	e	a	d	f	c	b
e	d	f	e	c	b	a
f	b	d	f	e	a	c

oplossing voor eerste deel

Een eindige groep $\langle A, * \rangle$ heeft als eigenschappen (I p93):

- $*$ is overal bepaald $\rightarrow$ heel onze bewerkingstabel in ingevuld
- $*$ is associatief
- neutraal element
- symmetriseerbaar

//TODO

oplossing voor tweede deel

- We kijken eerst na of er een neutraal element bestaat. Dus we zijn op zoek naar een element x zodat $\forall y : x\tau y = y$ (en ook $y\tau x = y$) In een bewerkingstabel zien we dit doordat de rij en kolom bij c alle elementen afbeelden op zichzelf.
- Dan kijken we na of elke element een inverse heeft. Voor elk element x moet er een element y bestaan zodat $x\tau y = c$. En dat is hier het geval! (controleer maar).
- τ is overal bepaald want de gehele bewerkingstabel is ingevuld.
- associativiteit is niet zo heel eenvoudig om na te kijken. Daarom proberen we dit systematisch rij per rij te doen.
  We gaan altijd $x\tau(y\tau[a, b, c, d, e, f])$ berekenen en kijken of dit gelijk is aan $(x\tau y)\tau[a, b, c, d, e, f]$.
  Op die manier vinden we een tegenvoorbeeld:
  $a\tau(b\tau b) = a$ en $(a\tau b)\tau b = f \rightarrow$ niet associatief.