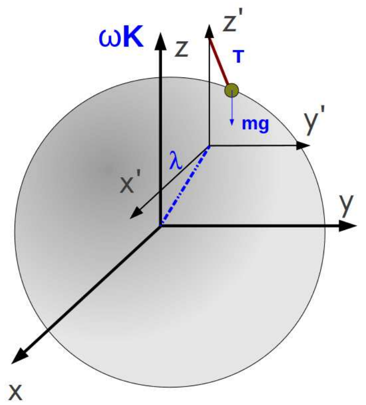
El Péndulo de Focault

1. Resumen

Se plantea y resuleve el problema del Péndulo de Focault (péndulo simple oscilando sobre la superficie de una esfera que gira a velocidad angular constante). Se obtiene una solución analítica aproximada y una solución numérica. Al final se comparan ambas aproximaciones y se implementa una simulación en Python.

2. Planteamiento del problema

Considere un péndulo simple (masa puntual colgando de una cuerda con masa despreciable) cuyo movimiento está restringido sobre un plano (xy). Despreciamos la aceleración que ocurre en dirección normal a este plano. Se desea descibir el movimiento del péndulo si este se encuentra sobre la superficie de una esfera rotando con velocidad angular constante (ω).



Este problema utiliza la descripción estándar para sistemas de referencia no-inerciales. Si usted no está familiarizado con este tipo de observadores/marcos, le sugerimos leer al respecto en cualquier libro de mecánica analítica/teórica.[1]

Comenzamos por escribir la 2da ley de Newton para un sistema no-incercial:

$$\sum \boldsymbol{F}' = \sum \boldsymbol{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - m\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}' \tag{1}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - m\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}' \tag{2}$$

De aquí en adelante omitimos la notación primada para simplificar el trabajo. Las ecuaciones que obtengamos al final, correspoderán a la descripción para un observador en el sistema primado (en movimiento). Revisemos los últimos tres términos de la ecuación (2) para simplificar antes de extraer las ecuaciones de movimiento. El último término[2] es igual a cero, debido a que el marco de referencia gira a velocidad constante $|\boldsymbol{\alpha}| = 0$. El penúltimo término[3]:

[1] *"Mecánica"* Symon, *"Dinámica de sistemas..."* Marion, *"Mecánica Teórica"* Spiegel

[2] Fuerza de Euler

[3] Fuerza centrífuga

$$-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = m\left(x\omega^2\hat{\boldsymbol{\imath}} - y\omega^2\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)$$

Considere lo siguiente:

$$\omega = \frac{2\pi}{24h} = 7.3 \times 10^{-5}\frac{rad}{s}$$

Claramente, ω^2 es un término despreciable aún utilizando un péndulo con una masa del orden de toneladas.

Del diagrama de cuerpo libre:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} &= \left(\boldsymbol{K}\cdot\hat{\boldsymbol{\imath}}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(\boldsymbol{K}\cdot\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \left(\boldsymbol{K}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}\right)\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= (-\operatorname{sen}\lambda)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + 0\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (\cos\lambda)\,\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

Considere:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{K}$$

Y expandamos el antepenúltimo término de la ecuación (2):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\omega}\times\left(\dot{x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dot{y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \dot{z}\hat{\boldsymbol{k}}\right) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ -\omega\operatorname{sen}\lambda & 0 & \omega\cos\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \\ &= (-\dot{y}\omega\cos\lambda)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\dot{x}\omega\cos\lambda + \dot{z}\omega\operatorname{sen}\lambda)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} - (\dot{y}\omega\operatorname{sen}\lambda)\,\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

Expandimos la tensión, donde α, β, γ son los ángulos que ésta forma con los ejes coordenados primados:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= \left(\boldsymbol{T}\cdot\hat{\boldsymbol{\imath}}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(\boldsymbol{T}\cdot\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \left(\boldsymbol{T}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}\right)\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= T\cos\alpha\hat{\boldsymbol{\imath}} + T\cos\beta\hat{\boldsymbol{\jmath}} + T\cos\gamma\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= -T\left(\frac{x}{l}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} - T\left(\frac{y}{l}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + T\left(\frac{l-z}{l}\right)\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

Recordando que restringimos el movimiento al plano XY:

$$\ddot{z} = \dot{z} = \Delta z = 0$$

Sustituimos en la ecuación (2) y despejamos la tensión:

$$T = mg - 2m\omega\dot{y}\operatorname{sen}\lambda \tag{3}$$

Utilizando este resultado, sustituímos en la ecuación (2) para las coordenadas x & y:

$$\ddot{x} = -\frac{gx}{l} + \frac{2x\omega\dot{y}\operatorname{sen}\lambda}{l} + 2\omega\dot{y}\cos\lambda \tag{4}$$
$$\ddot{y} = -\frac{gy}{l} + \frac{2y\omega\dot{y}\operatorname{sen}\lambda}{l} - 2\omega\dot{x}\cos\lambda \tag{5}$$

Con el fin de obtener una solución analítica aproximada, en las ecucuaciones (4) & (5) despreciamos los términos que contienen $x\dot{y}$ & $y\dot{y}$ respectivamente. Más adelante retomamos estas 2 ecuaciones para resolver mediante métodos numéricos.

$$\ddot{x} = -\frac{gx}{l} + 2\omega\dot{y}\cos\lambda \tag{6}$$
$$\ddot{y} = -\frac{gy}{l} - 2\omega\dot{x}\cos\lambda \tag{7}$$

Las ecuaciones (6) & (7) son las EDM del sistema.

3. Solución a las ecuaciones de movimiento

Las siguientes son las condiciones del sistema en $t = 0$:

Posición	Velocidad
$x(0) = 0$	$\dot{x}(0) = 0$
$y(0) = y_0$	$\dot{y}(0) = 0$

Por conveniencia definimos: $k^2 = \frac{g}{l}, \alpha = \omega\cos\lambda$ y reescribimos las ecuaciones (6) & (7):

$$\ddot{x} = -k^2 x + 2\alpha\dot{y}$$
$$\ddot{y} = -k^2 y - 2\alpha\dot{x}$$

Ahora, multiplicamos la segunda ecuación por i y sumamos con la primera:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + i\ddot{y} &= -k^2\left(x + iy\right) + 2\alpha\left(\dot{y} - i\dot{x}\right)\\ &= -k^2\left(x + iy\right) - 2\alpha i\left(\dot{x} + i\dot{y}\right)\end{aligned}$$

Proponemos el siguiente cambio de variable:

$$u = x + iy$$
$$\dot{u} = \dot{x} + i\dot{y}$$
$$\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y}$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} + i\ddot{y} &= -k^2 (x + iy) - 2\alpha i (\dot{x} + i\dot{y}) \\
\ddot{u} &= -k^2 u - 2i\alpha \dot{u} \\
\ddot{u} + 2i\alpha\dot{u} + k^2 u &= 0
\end{aligned}
$$

Ecuación que podemos resolver mediante el método de coeficientes constantes [2]. Sea $u = e^{\gamma t}$, resolvemos la ecuación relacionada:

$$\gamma^2 + 2i\alpha\gamma + k^2 = 0$$

Que, aplicando la fórmula general, resulta:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{2}\left(-2i\alpha \pm \sqrt{-4\alpha^2 - 4k^2}\right) \\
&= -i\alpha \pm i\sqrt{\alpha^2 + k^2}
\end{aligned}
$$

La solución general (con coeficientes complejos) queda de la siguiente manera:

$$u = (c_1 + ic_2)\, e^{-it(\alpha - k)} + (c_3 + ic_4)\, e^{-it(\alpha + k)}$$

Sustituimos u y aplicamos la fórmula de Euler al lado derecho de la igualdad:

$$
\begin{aligned}
x + iy = (c_1 + ic_2) &\left[\cos t (\alpha - k) - i \operatorname{sen} t (\alpha - k)\right] \\
+ (c_3 + ic_4) &\left[\cos t (\alpha + k) - i \operatorname{sen} t (\alpha + k)\, t\right]
\end{aligned}
$$

Separamos las partes reales e imaginarias:

$$x = c_1 \cos t (\alpha - k) + c_2 \operatorname{sen} t (\alpha - k) + c_3 \cos t (\alpha + k) + c_4 \operatorname{sen} t (\alpha + k) \tag{8}$$

$$y = -c_1 \operatorname{sen} t (\alpha - k) + c_2 t \cos (\alpha - k) + c_3 \operatorname{sen} t (\alpha + k) + c_4 \cos t (\alpha + k) \tag{9}$$

Aplicamos las condiciones iniciales a la ecuación (8):

$$
\begin{aligned}
0 &= c_1 + c_3 \\
c_1 &= -c_3
\end{aligned}
$$

Derivando (8) aplicamos la siguiente condición ($\dot{x}(0) = 0$):

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -c_1\,(\alpha - k)\operatorname{sen} t\,(\alpha - k) + c_2\,(\alpha - k)\cos t\,(\alpha - k) \\
&\quad - c_3\,(\alpha + k)\operatorname{sen} t\,(\alpha + k) + c_4\,(\alpha + k)\cos t\,(\alpha + k) \\
0 &= c_2\,(\alpha - k) + c_4\,(\alpha + k) \\
c_4 &= -c_3 \frac{\alpha - k}{\alpha + k} \\
&= c_2 \frac{k - \alpha}{k + \alpha} \\
&= c_2 \frac{\sqrt{\frac{g}{l}} - \omega \cos\lambda}{\sqrt{\frac{g}{l}} + \omega \cos\lambda}
\end{aligned}
$$

Recordando que $\sqrt{\frac{g}{l}}$ es mucho mayor que $\omega \cos\lambda$, aproximamos $c_4 = c_2$.

$$
x = c_1 \cos t\,(\alpha - k) + c_2 \operatorname{sen} t\,(\alpha - k) + c_1 \cos t\,(\alpha + k) + c_2 \operatorname{sen} t\,(\alpha + k) \quad (10)
$$
$$
y = -c_1 \operatorname{sen} t\,(\alpha - k) + c_2 t \cos(\alpha - k) + c_1 \operatorname{sen} t\,(\alpha + k) + c_2 \cos t\,(\alpha + k) \quad (11)
$$

Ahora repetimos el proceso para las condiciones iniciales en la coordenada y y la ecuación (11):

$$
\begin{aligned}
y(0) &= y_0 \\
y_0 &= c_2 + c_2 \\
c_2 &= \frac{y_o}{2}
\end{aligned}
$$

Derivamos y sustituímos:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(0) &= -c_1\,(\alpha - k) + c_1\,(\alpha + k) \\
0 &= -c_1\,(\alpha - k) + c_1\,(\alpha + k) \\
0 &= -c_1 \alpha + c_1 k + c_1 \alpha + c_1 k \\
0 &= 2 c_1 k
\end{aligned}
$$

Y como $k \neq 0$, $c_1 = 0$. Reescribimos las ecuaciones (10) & (11):

$$
x = \frac{y_0}{2} \operatorname{sen} t\,(\alpha - k) + \frac{y_0}{2} \operatorname{sen} t\,(\alpha + k) \quad (12)
$$
$$
y = \frac{y_0}{2} \cos t\,(\alpha - k) + \frac{y_0}{2} \cos t\,(\alpha + k) \quad (13)
$$

Aplicamos las identidades trigonométricas para suma de ángulos:

$$
\begin{aligned}
x &= y_0 \operatorname{sen} \alpha t \cos kt \\
y &= y_0 \cos kt \cos \alpha t
\end{aligned}
$$

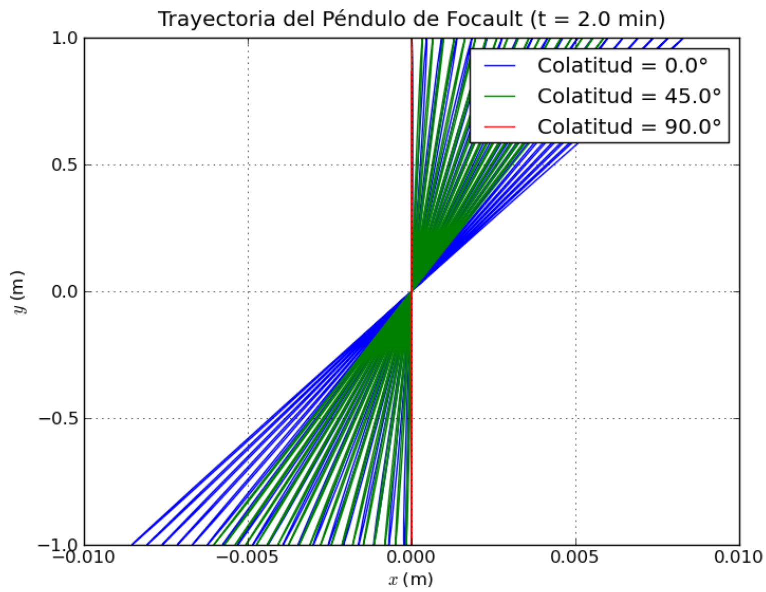
Y sustituyendo los valores de α & k obtenemos:

$$x = y_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) \operatorname{sen}\left(\omega t \cos\lambda\right) \tag{14}$$

$$y = y_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) \cos\left(\omega t \cos\lambda\right) \tag{15}$$

Las ecuaciones (14) & (15) representan la solución analítica aproximada para este problema.

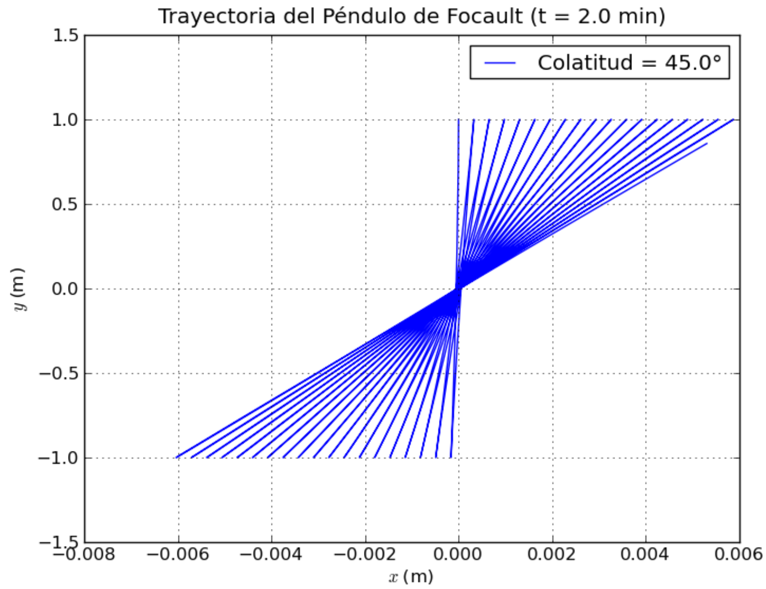
Utilizando datos realistas (ver simulación para detalles) graficamos la trayectoria del péndulo para los primeros 2 mins:



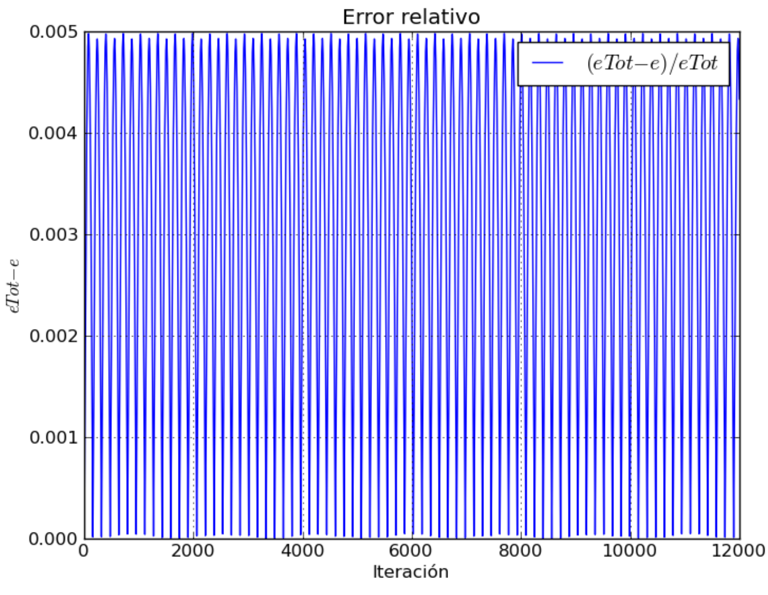
El péndulo presenta un movimiento de precesión. Observe que el desplazamiento es en el orden de milímetros. En el ecuador ($\lambda = \frac{\pi}{2}$) no se observa este efecto.

4. Solución numérica

Las ecuaciones (4) & (5) forman un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado. Este sistema se puede convertir a uno de primer grado mediante el cambio de variable $v = \frac{dr}{dt}$. Utilizamos el método de Euler y resolvemos para la velocidad del péndulo.

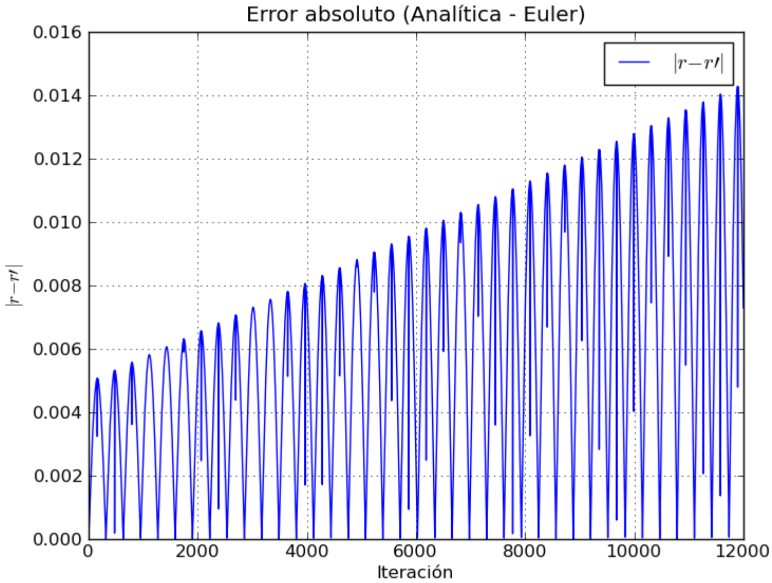


Cuando se utiliza un método numérico, es conveniente graficar alguna cantidad conocida o calculable del sistema. Para este caso graficamos la energía total del péndulo en forma de error relativo (cociente entre error absouluto y la energía total):



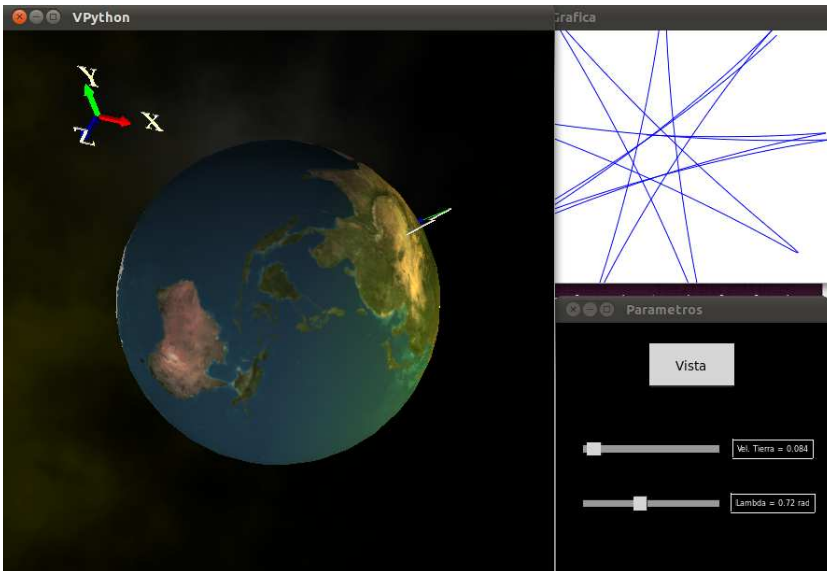
El comportamiento de esta cantidad nos dice algo acerca de la estabilidad del método numérico utilizado. La oscilación está acotada y podemos concluir que el método es estable.

La diferencia entre ambas soluciones es del orden de 10^{-2}. La siguiente gráfica muestra esta diferencia:



5. Simulación

La simulación implementa las ecuaciones (14) & (15) y permite modificar ω & λ para observar los cambios en la trayectoria del péndulo.



6. Referencias

[1] Spiegel, M. "Mecánica Teórica". McGraw-Hill (1976), Traducción de 1era edición. Cap 6.

[2] Zill, D. "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado", Thomson, 8va Edición (2007). Cap 4.