MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA EN UN MEDIO RESISTENTE ($\boldsymbol{F_R} = km\boldsymbol{v}$)

1. Resumen

En este texto se presenta y resuelve el problema del movimiento de una partícula en 2 dimensiones. El cuerpo es lanzado con condiciones iniciales conocidas y es sometido a la aceleración de la gravedad en una de las direcciones, y una fuerza resistente proporcional a la velocidad de la partícula en todas direcciones. Adicional a la obtención y solución de las ecuaciones de movimiento, se presenta un breve análisis a partir de los resultados obtenidos; así como una simulación interactiva que reproduce las ecuaciones aquí derivadas.

2. Planteamiento del problema

Una partícula es lanzada con velocidad inicial v_0 y un ángulo ϕ. Se mueve en un medio resistente cuya fuerza asociada esta dada por: $\boldsymbol{F_R} = km\boldsymbol{v}$. Las condiciones iniciales se detallan en la siguiente tabla y el diagrama de cuerpo libre:

Posición	Velocidad
$x(0) = 0$	$\dot{x}(0) = v_0 \cos\phi$
$y(0) = 0$	$\dot{y}(0) = v_0 \sin\phi$

Tabla 1: Condiciones iniciales

[DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE AQUÍ]

De la figura tenemos que:

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F_R}$$
$$\sum \boldsymbol{F} = -kmv_0 \cos\phi \hat{\boldsymbol{\imath}} - (mg + kmv_0 \sin\phi)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Reescribiendo la última expresión en función de la posición y sus derivadas extraemos las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\ddot{x} + k\dot{x} = 0 \tag{1}$$
$$\ddot{y} + k\dot{y} = -g \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) & (2) son las ecuaciones de movimiento del sistema. Su solución está dada por 2 funciones dependientes del tiempo.

3. Solución de las ecuaciones de movimiento

Resolvemos la ecuación (1) mediante el método de coeficientes indeterminados (citar Zill). La ecuación relacionada a la EDO (1) es:

$$m^2 + km = 0$$

Cuyas soluciones son: $m_1 = 0, m_2 = -k$. Escribimos entonces la solución complementaria de (1) como:

$$x_c(t) = C_1 e^{-kt} + C_2$$

Debido a que la EDO (1) es una ecuación homogénea, su solución es $x_c(t)$. Ahora, aplicando las condiciones iniciales del problema, obtenemos los valores para los parámetros C_1 & C_2:

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 e^0 + C_2 \\ 0 &= C_1 + C_2 \\ C_1 &= -C_2 \end{aligned}$$

Derivando la ecuación (1) aplicamos la segunda condición:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -KC_1 e^{-kt} \\ \dot{x}(0) &= -KC_1 \\ C_1 &= -\frac{v_0}{k} cos\phi \end{aligned}$$

Usando los resultados recién obtenidos, reescribimos (1) como:

$$x(t) = \frac{v_0}{k} \cos\phi \left(1 - e^{-kt}\right) \tag{3}$$

La ecuación (3) es la solución de (1). Para comprobarlo, derive (3) y sustituya apropiadamente en (1) y obtendrá una igualdad.

Pasemos ahora a la ecuación (2). Esta ecuación es no-homogénea y su solución general estará formada por la superposición de 2 funciones. La solución complementaria se obtiene resolviendo la EDO homogénea $\ddot{y} + k\dot{y} = 0$, mientras que la solución particular se puede obtener haciendo una suposición informada. La solución complementaria es:

$$y_c(t) = C_3 e^{-kt} + C_4 \tag{4}$$

Para la solución particular proponemos la siguiente función:

$$y_p = At \tag{5}$$

Derivando (5) y sustituyendo en (2)

$$0 + kA = -g$$
$$A = -\frac{g}{k}$$

La solución general de (2) está dada por la superposición de las soluciones $y(t) = y_c + y_p$:

$$y(t) = C_3 e^{-kt} + C_4 - \frac{g}{k}t \tag{6}$$

Para determinar el valor de los parámetros C_3, C_4 aplicamos las condiciones iniciales correspondientes y obtenemos:

$$C_4 = -\left(\frac{v_0 k \sin\phi + g}{k^2}\right)$$
$$C_5 = -C_4$$

Reescribimos (6) como:

$$y(t) = \frac{v_0 k \sin\phi + g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t \tag{7}$$

Las ecuaciones (3) & (7) son las soluciones a las ecuaciones de movimiento.

4. Ecuación de trayectoria

Partimos de la ecuación (7) y hacemos $y(\tau) = 0$. Es decir, resolvemos para τ, el instante en el cual la partícula toca el suelo:

$$\tau = \frac{kv_0 \sin\phi + g}{gk}\left(1 - e^{-k\tau}\right) \tag{8}$$

La primera solución, $\tau = 0$, corresponde al instante inicial. Para obtener el instante correspondiente al final de la trayectoria habrá que recurrir a un método numérico. El código adjunto resuelve la ecuación para distintos ángulos iniciales y grafica los resultados. En la figura 4 se muestran dos de estas gráficas para valores distintos de k.

La gráfica se generaró en Python resolviendo la ecuación (8) mediante el método del punto fijo. La simulación implementa las ecuaciones (3) & (7) y permite visualizar las trayectorias de un proyectil lanzado en un medio con & sin fuerza resistente.

5. Referencias

[1] Zill, D. "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado", Thomson, 8va Edición (2007). Cap 4.

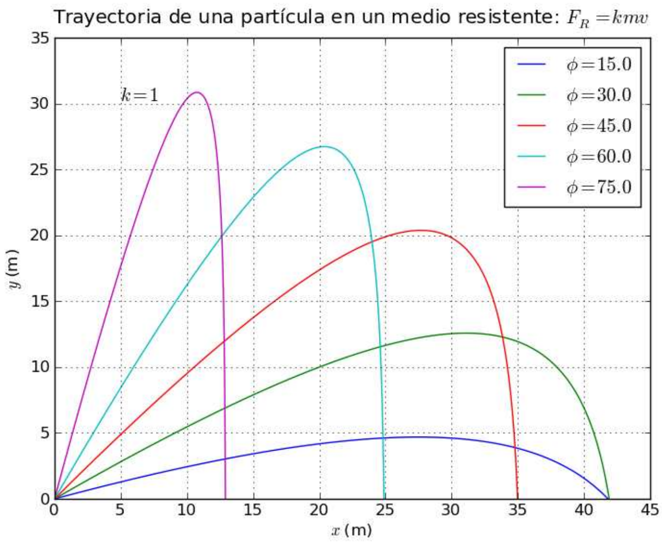

Figura 1: Trayectorias para distintos ángulos inciales