El problema de los n-cuerpos

Carlos Manuel Rodríguez, Román Perdomo, José Ramón Palacios

2 de diciembre de 2011

1. Resumen

En este texto se aborda el problema gravitatorio de los n-cuerpos. Este es un problema físico-matemático cuya solución analítica tardó varios siglos en llegar. El problema puede ser aproximado mediante métodos numéricos. Se implementó una simulación en *GNU Octave* & un visualizador en *Python*.

2. Objetivo

Plantear y resolver el problema de los n-cuerpos mediante 2 métodos aproximados para ecuaciones diferenciales de primer orden: Euler y Runge-Kutta.

3. Introducción

Considere el problema de describir el movimiento de un sistema de n cuerpos interactuando mediante la fuerza de gravedad de Newton. Johann Bernoulli resolvió el problema para n = 2 en 1710, y 2 siglos después, en 1907, Karl Sundman hizo lo propio para n = 3. Diferentes soluciones particulares fueron obtenidas a lo largo de la historia, de las cuales, la debida a J.L. Lagrange es una de las más memorables. En el proceso de resolver este problema, se descubrieron ideas que establecieron la ruta hacia nuevas teorías mecánicas[1]. No fue sino hasta 1991, cuando Quidong Wang resolvió el problema general.
La solución general[2] es inaccesible para nuestro nivel matemático actual; y recurrimos a un método numérico para obtener información acerca de las trayectorias de los cuerpos.

4. Planteamiento del problema

La interacción entre los n cuerpos está dada por[1]:

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r_i}}{dt^2} = \sum_{j \neq i}^{n} G \frac{m_i m_j (\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r_j})}{|\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r_j}|^3}$$

Que se puede convertir a un sistema de primer orden mediante un cambio de variable:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

El sistema a resolver:

[1] Tal es el caso Heri Poincaré y la teoría del Caos.

$$\frac{d\boldsymbol{v_i}}{dt} = \sum_{j \neq i}^{n} G \frac{m_j(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r_j})}{|\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r_j}|^3} \tag{1}$$

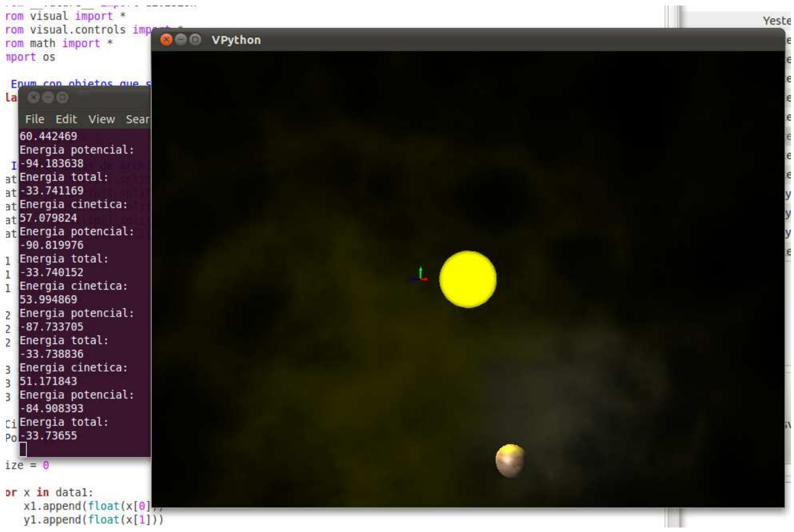
Todo lo que resta es resolver el sistema (1), es decir, obtener las velocidades de cada cuerpo al k-ésimo paso de tiempo.

5. Simulación

Se escribieron programas en *GNU Octave* para resolver el problema mediante 2 método numéricos: Euler y Runge-Kutta. En términos generales las simulaciones adjuntas[2] hacen lo siguiente:

- Ajustar condiciones inciales (paso de tiempo, posiciones y velocidades)
- Actualizar posición de cada cuerpo utilizando su velocidad instantánea y el paso de tiempo escogido.
- Calcular la nueva velocidad resolviendo el sistema (1) mediante el método de euler/runge-kutta
- Calcular la energía potencial para la configuración
- Calcular la energía cinética total (suma de las energías cinéticas de cada cuerpo)
- Guardar a un archivo las posiciones para cada cuerpo, así como los cálculos de la energía.

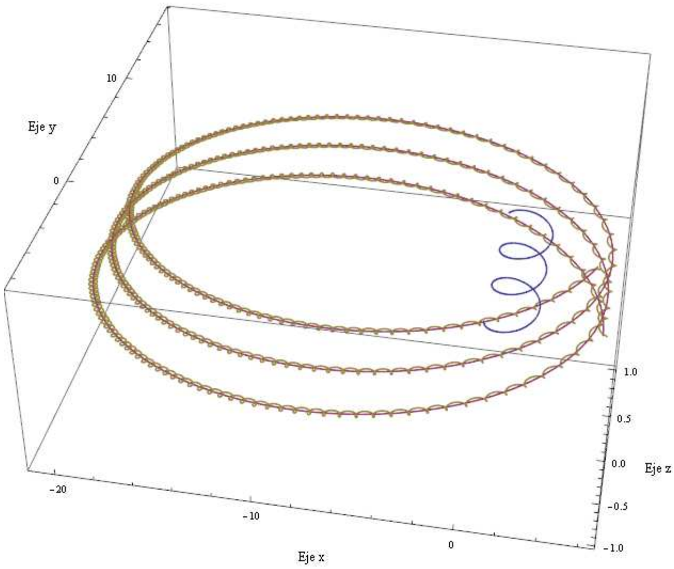
Los archivos generados (para el caso N = 3) son leídos por un visualizador programado en python. Las gráficas presentadas más adelante se generaron con los datos de las simulaciones y software adicional (*Mathematica*).

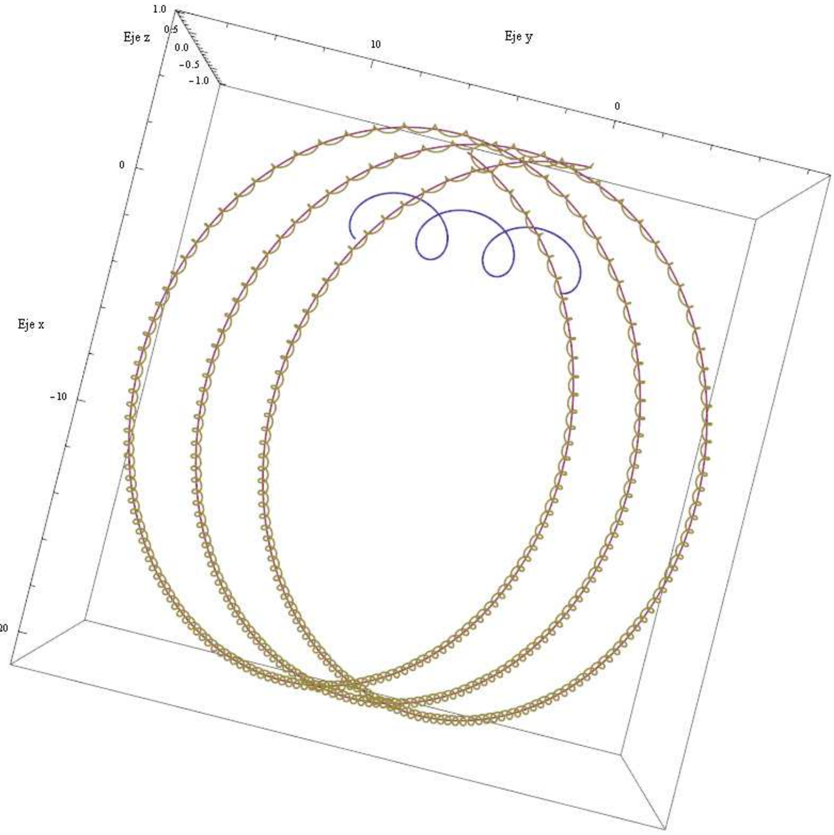


[2]euler.m & rungekutta.m

6. Resultados

El siguiente es un caso *estable* para un sistema similar al Sol-Tierra-Luna. La palabra *estable* se utiliza con cierta reserva, puesto que no tenemos manera de determinar si las configuración mantiene sus características para valores grandes de t.

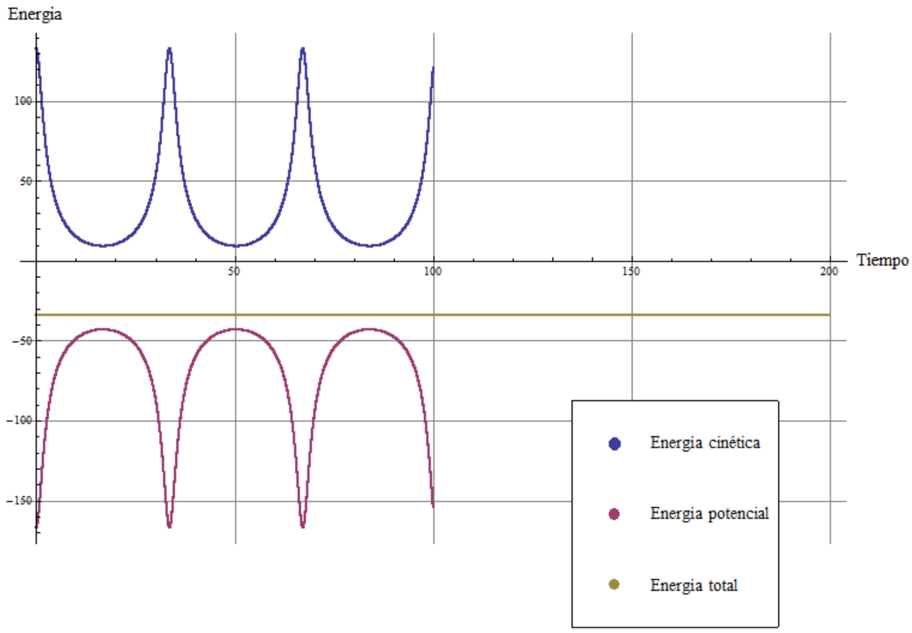




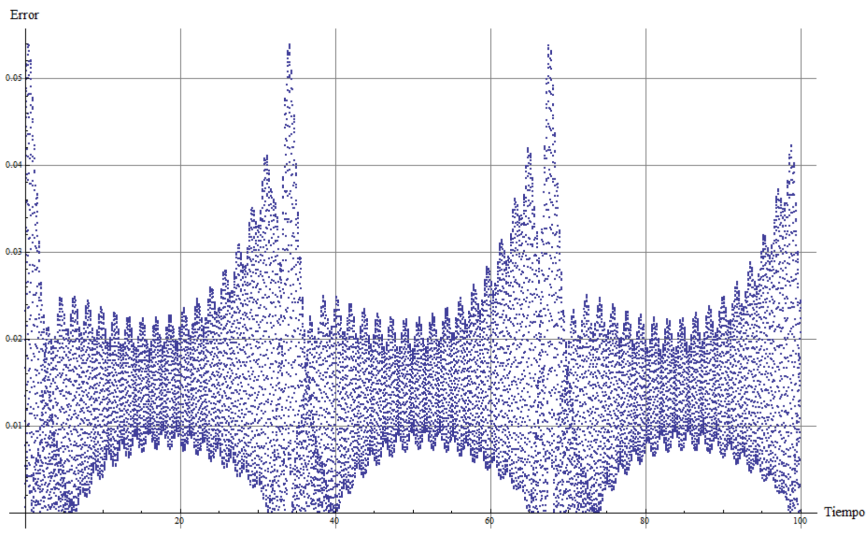
Con condiciones iniciales:

```
N = 3;

r(1,:) = [0 0 0];
r(2,:) = [6 0 0];
r(3,:) = [6.2 0 0];

v(1,:) = [0 -0.4 0];
v(2,:) = [0 5 0];
v(3,:) = [0 0 0];

m(1) = 100;
m(2) = 10;
m(3) = 0.001;

G = 1;
h = 0.001;
tmin = 0;
tmax = 100;
```

Es difícil estimar el error en el cálculo numérico al no contar con una solución exacta. Sin embargo, monitoreando la energía total obtenemos una buena referencia de lo confiable -físicamente- de nuestros cálculos. Únicamente consideramos las energías cinética traslacional y potencial instantáneas. Graficamos las energías y su suma para el mismo sistema de 3 cuerpos y las mismas condiciones iniciales:

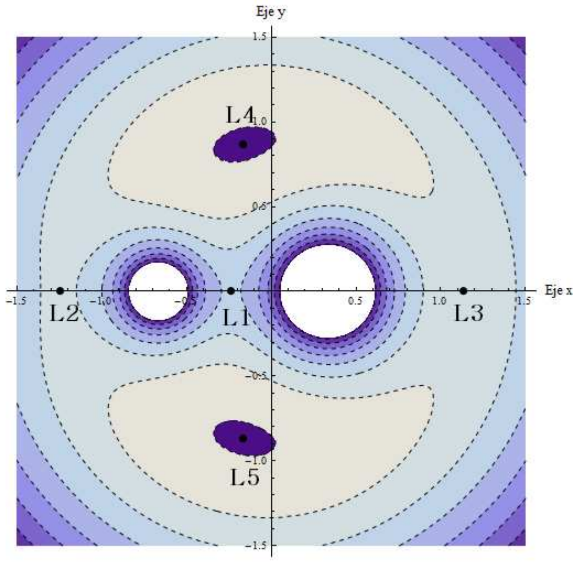


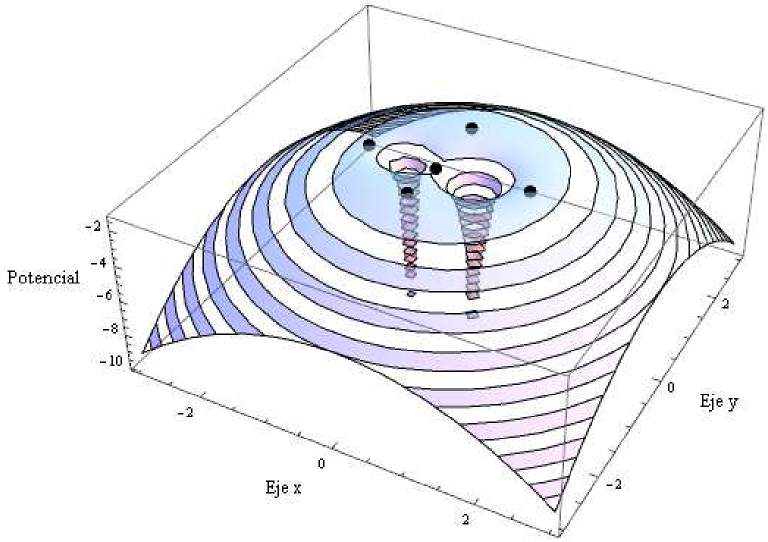
La energía total parece conservarse. Un acercamiento en el dominio revela una pequeña oscilación respecto al valor inicial (se grafica el error abosoluto):



7. Los puntos de Lagrange

Existen diversas soluciones para el problema restringido de los 3 cuerpos. La debida al científico italo-francés J.L. Lagrange consiste en 2 cuerpos masivos (Sol + Tierra) y un tercero de masa despreciable (una nave llena de simios curiosos) situados en los vértices de un triangulo equilátero. El movimiento se describe desde un marco no-incercial con origen en el centro de masas del sistema. En estas condiciones, el potencial del sistema cuenta con 5 puntos críticos donde la sumatoria de fuerzas (incluyendo las 2 debidas a la rotación) da cero. Como se muestra en los siguientes digramas, 3 de los puntos están sobre la línea que une a los 2 cuerpos masivos. Los restantes 2 ocurren debido las llamadas fuerzas ficticias. En L4 y L5 la sumatoria de fuerzas de (coriolis, centrípeta y gravitatoria) suman cero:





Los mapas de contorno fueron generados con la función potencial:

$$U(x,y,a,\epsilon) = -\frac{1}{2a^2}(x^2+y^2) + \frac{-1+\epsilon}{\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+(\frac{x}{a}-\epsilon)^2}} - \frac{\epsilon}{\sqrt{\frac{y^2}{a^2}+(1+\frac{x}{a}-\epsilon)^2}}$$

Los puntos de Lagrange[3] L1 & L2 son puntos silla dinámicamente inestables [3]. Sin embargo, no lo suficiente como para impedir estacionar un satélite provisto de impulsores que hagan pequeñas correcciones su velocidad periódicamente. De hecho, existen 6 observatorios astronómicos activos[4] situados en L1 & L2. Respecto a L3, también es un punto silla inestable que por su posición *privilegiada* (oculto detrás del Sol) ha aparecido en la literatura de ciencia ficción. En los puntos L4 & L5 se observan los llamados *asteroides troyanos*.

8. Extra: Sistema Solar

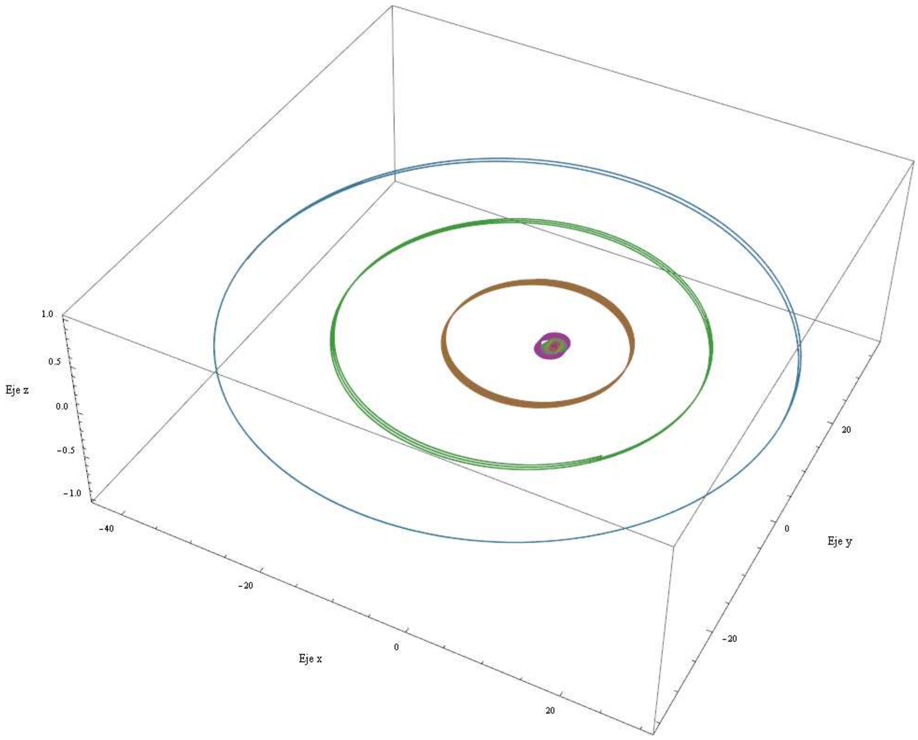
La siguiente simulación se realizó con condiciones similares a las de nuestro sistema solar y unidades apropiadas. Para este caso particular, resolvimos el sistema (1) utilizando el método de Runge-Kutta con los siguientes datos:

```
N = 9;

%Distancia: 1 = 1 AU
```

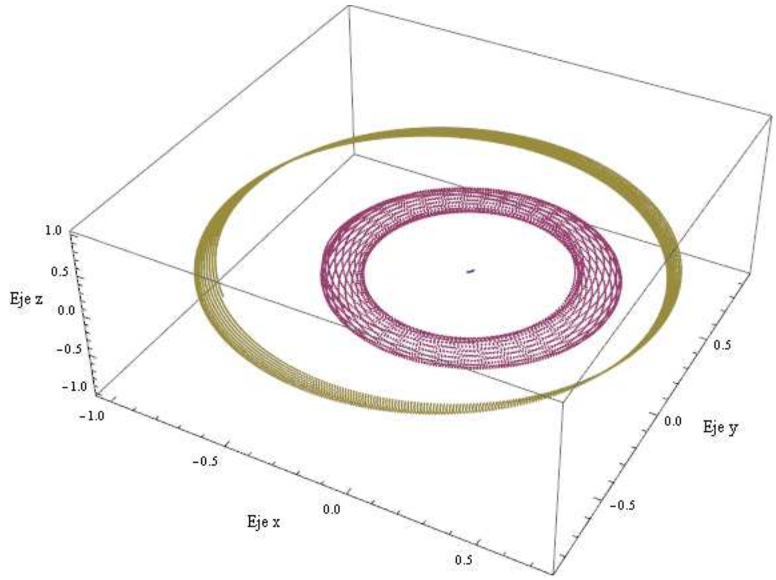
[3]Zonas de Lagrange suena apropiado, dado el comportamiento del sistema.

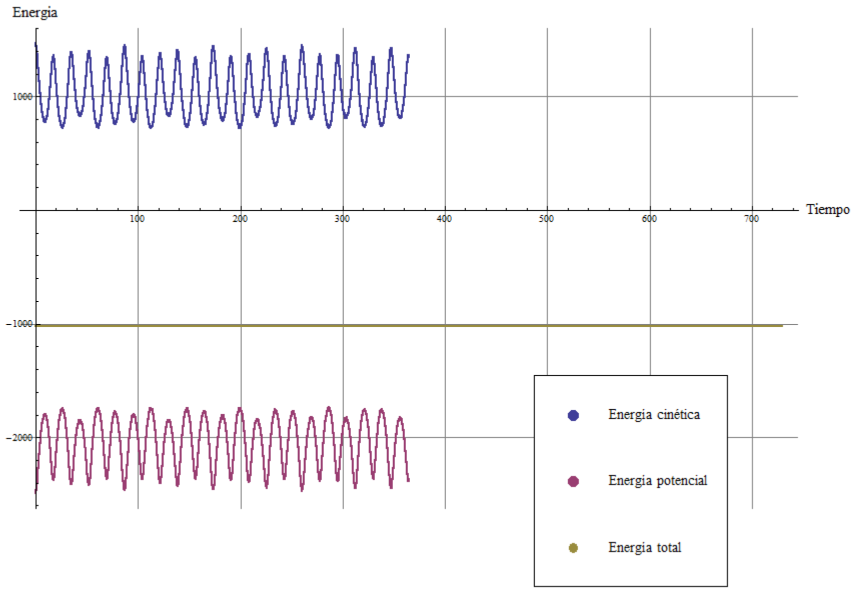
```
r(1,:) = [0 0 0];
r(2,:) = [0.34 0 0];
r(3,:) = [0.72 0 0];
r(4,:) = [1 0 0];
r(5,:) = [1.52 0 0];
r(6,:) = [5.2 0 0];
r(7,:) = [9.55 0 0];
r(8,:) = [19.22 0 0];
r(9,:) = [30 0 0];

% Sólo Vy > 0, para los 9 cuerpos.
v(1,:) = [0 0.001 0]; %etc...

G = 1;
h = 0.00005;
```

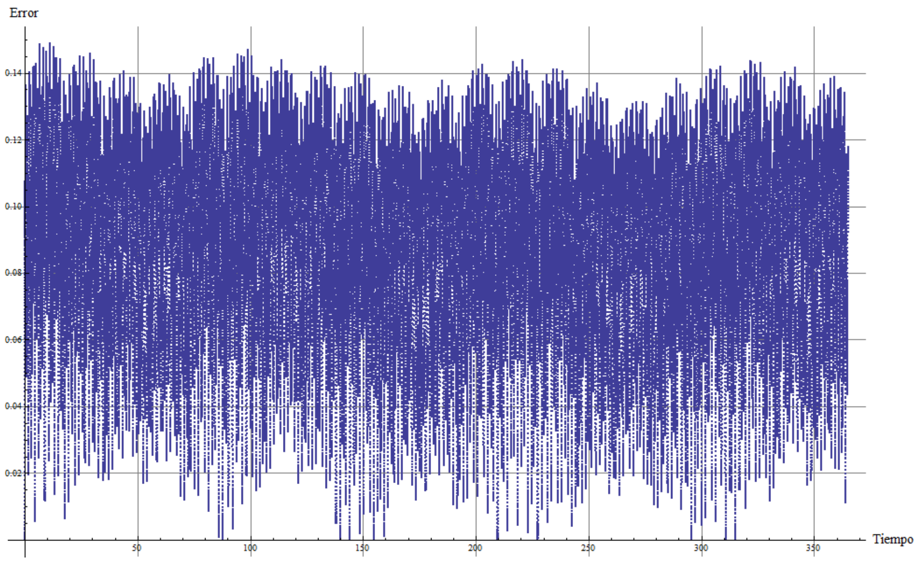
Para este caso, se utilizó el método de Runge-Kutta (método de segundo orden, donde el error escala como h^4). Obtuvimos un error absoluto máximo de 0.15:



Un acercamiento a los datos (para el Sol, Mercurio y Venus):


1.0
0.5
Eje z
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
Eje x
0.0
0.5
0.5
0.0
Eje y
−0.5


Energia
1000
100
200
300
400
500
600
700
Tiempo
−1000
−2000
Energia cinética
Energia potencial
Energia total



9. Referencias

[1] Diacu, F. "The solution of the n-body Problem", The Mathematical Intelligencer, 1996, Vol. 18, No. 3, p. 66–70.

[2] Wang, Qiudong " The global solution of the n-body problem" Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, vol. 50, no. 1, 1991, p. 73–88

[3] Cornish, N. Notas: Deducción y análisis de estabilidad para puntos de Lagrange: http://www.physics.montana.edu/faculty/cornish/lagrange.pdf Consultada el: 30/11/2011.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_objects_at_Lagrangian_points Consultada el: 1/12/2011