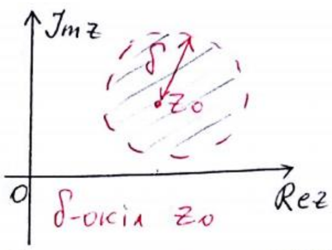
13 Функції компл змінної. Основні елементарні фкз. Область однолистості степеневої функції і її властивості

③. Означення

• δ-окіл точки z_0 $U_\delta(z_0)$: $|z-z_0|<\delta$

$$|(x-x_0)+i(y-y_0)|<\delta$$
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$



• Відкрита множина $\mathcal{D}$: складається лише з внутрішніх точок, тобто таких, що входять у мн. $\mathcal{D}$ разом з деяким околом.

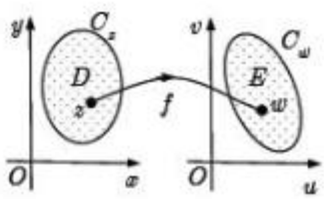
❶ ***Область.*** Зв'язну відкриту множину точок комплексної площини називають *областю*.	Область називають *однозв'язною*, якщо її межа є зв'язною множиною, інакше область називають *багатозв'язною*.

• $\Gamma_\mathcal{D}$ - границя мн. $\mathcal{D}$: множина точок, в кожному околі яких є точки, що $\in \mathcal{D}$ і точки, що $\notin \mathcal{D}$

• Замкнена множина $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}\cup\Gamma_\mathcal{D}$

• Зв'язна множина: кожні дві її точки можна з'єднати неперервною кривою, де кожна точка кривої $\in \mathcal{D}$.

• Контур - будь-яка замкнена крива без самоперетину

❹ ***Комплексна функція.*** Якщо кожному комплексному числу z, що належить області D, відповідає одне або кілька комплексних чисел w, то кажуть, що в області D означено *комплексну функцію* $$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$ $$z=x+iy\in D\subset\mathbb{C}$$	 $$u(x,y)=\operatorname{Re} f(z),$$ $$v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$$

якщо коротше то

$w=f(z)$ наз $f_{\text{відображ}}: \mathcal{D}\subset\mathbb{C}\to G\subset\mathbb{C}$

- $f(z)$ однозначна, якщо при $\forall z$ приймає єдине значення, наприклад $f(z)=|z|$; $f(z)=2z^2-z$

- $f(z)$ багатозначна, якщо точці z відповідає більше як одна точка w, наприклад $f(z)=\mathrm{Arg}\, z$.

- Задання комплекснозначної функції $w=f(z)$ рівносильно заданню системи двох дійсних функцій

$$u+iv=w=f(z)=\mathrm{Re}\, f(z)+\mathrm{Im}\, f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

$$\begin{cases} u=\mathrm{Re}\, f(z)=u(x,y) \\ v=\mathrm{Im}\, f(z)=v(x,y) \end{cases}$$

❺ ***Границя функції.*** Комплексне число A називають *границею функції* $w=f(z)$ в точці z_0 (коли $z\to z_0$), якщо для будь-якого ε-околу точки A можна вказати проколений δ-окіл точки z_0, такий що, коли $z\in U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}$, то $f(z)\in U_\varepsilon(A)$ і позначають $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$.*	❻ ***Неперервність функції.*** Нехай функція $w=f(z)$ означена в точці $z=z_0$ і в деякому її околі. Функцію $w=f(z)$ називають *неперервною в точці* z_0, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. Функція $f(z)$ *неперервна в області D*, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

2.5. Основні елементарні функції комплексної змінної

❶ ***Показникова*** функція	$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$
❷ ***Тригонометричні*** функції	$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$
❸ ***Гіперболічні*** функції	$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$
❹ ***Логарифмічна*** функція[*]	$\operatorname{Ln} z = \ln\lvert z\rvert + i(\arg z + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$
❺ ***Головне*** значення логарифма	$\ln z = \ln\lvert z\rvert + i\arg z$
❻ ***Узагальнені показникова*** і ***степенева*** функції	$a^z = e^{z\operatorname{Ln} a}, a \neq 0,\ \ z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$
❼ ***Арксинус***	$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$
❽ ***Арккосинус***	$\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
❾ ***Арктангенс***	$\operatorname{Arctg} z = -\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{i - z}{i + z}$
❿ ***Арккотангенс***	$\operatorname{Arcctg} z = \dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z - i}{z + i}$
⓫ ***Ареасинус***	$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$
⓬ ***Ареакосинус***	$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
⓭ ***Ареатангенс***	$\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1 + z}{1 - z}$
⓮ ***Ареакотангенс***	$\operatorname{Arcth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z + 1}{z - 1}$

[*] Областю означення логарифмічної функції є $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1) $W = z^n$

2) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad z \in \mathbb{C}$

3) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$

4) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$

5) $\cosh z \quad 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$

6) $\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$

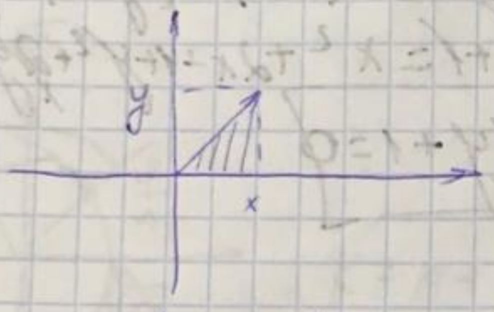
Визначення однолистості

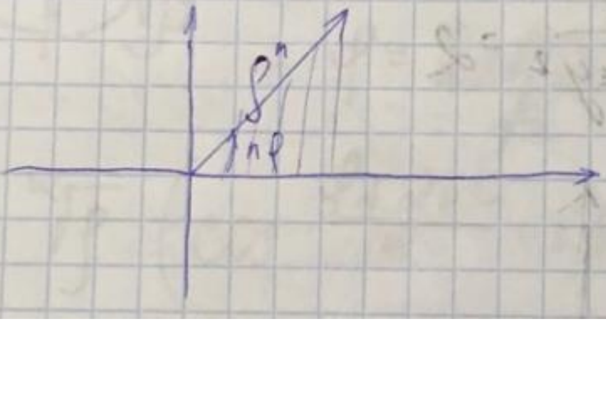
Функц $f(z)$ наз. однолистою на множині $D \subset \mathbb{C}$, якщо $\forall z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

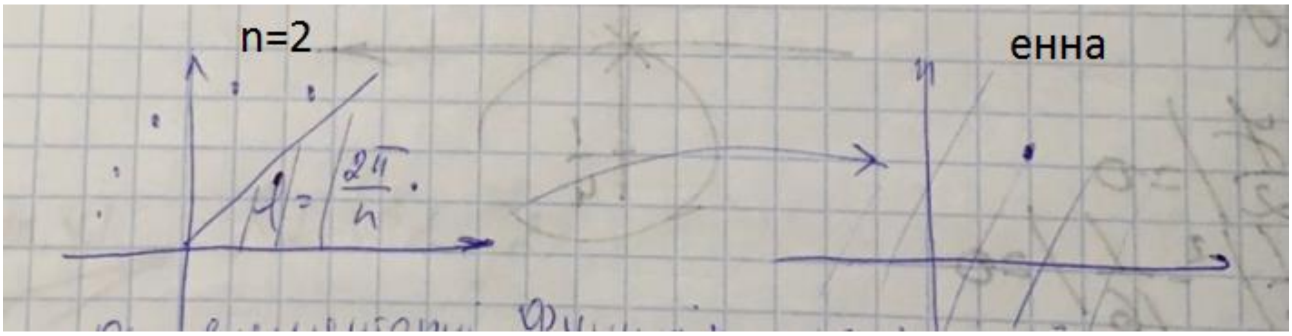
Область однолистості

$w = z^n$ $\quad z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$







Властивості

5) Степенева функція

- $w = z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
- $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ $\quad k=0,1,\dots,n-1.$
- $w = z^{\alpha} = e^{\operatorname{Ln} z^{\alpha}} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$

$$w = z^n \longleftrightarrow z = \sqrt[n]{w} \xleftrightarrow{z \leftrightarrow w} w = \sqrt[n]{z}$$