Subiectul I.1
PROGRESII

ARITMETICE	GEOMETRICE
Notații	
$\div (a_n)_{n\geq 1} \Leftrightarrow \div\ a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ $a_n = \begin{cases} termenul\ general\ al\ progresiei \\ sau \\ termenul\ de\ rang\ n \end{cases}$	$\div (b_n)_{n\geq 1} \Leftrightarrow \div\ b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ $b_n = \begin{cases} termenul\ general\ al\ progresiei \\ sau \\ termenul\ de\ rang\ n \end{cases}$
Exemplu	
$\div 2, 5, 8, 11, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 3 \end{cases}$ $\Updownarrow$ $\div 2^{+3}, 5^{+3}, 8^{+3}, 11^{+3}, \dots$	$\div 2, 6, 18, 54, \dots \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ q = 3 \end{cases}$ $\Updownarrow$ $\div 2^{\cdot 3}, 6^{\cdot 3}, 18^{\cdot 3}, 54^{\cdot 3}, \dots$

Definiție (Formula de recurență)	
$a_{n+1} = a_n + r, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$	$b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
Rația unei progresii	
$r = a_{n+1} - a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$	$q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}\ (b_n \neq 0)\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

CELE MAI UTILIZATE FORMULE

Formula termenului general	
$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)r}, \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$	$\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}, \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$
Suma primilor *n* termeni ai progresiei	
$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$	$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ $S_n = \begin{cases} \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, dacă\ q \neq 1 \\ n \cdot b_1, dacă\ q = 1 \end{cases}$
Condiția ca trei numere să fie termeni consecutivi ai unei progresii	
$\div A, B, C \Leftrightarrow 2B = A + C$	$\div A, B, C \Leftrightarrow B^2 = A \cdot C$

LOGARITMI

Definiție
$\boldsymbol{a^x = N \Rightarrow x = \log_a N}, unde\ a > 0, a \neq 1, N > 0$
Condițiile de existență ale logaritmului
$\log_a N : \begin{cases} \boldsymbol{a > 0}\ (baza\ > 0) \\ \boldsymbol{a \neq 1}\ (baza \neq 1) \\ \boldsymbol{N > 0}\ (cantitatea\ > 0) \end{cases}$

Logaritmul zecimal	**Logaritmul natural**
$\lg x = \log_{\boldsymbol{10}} x$	$\ln x = \log_{\boldsymbol{e}} x, unde\ e \simeq 2{,}71\ (numărul\ lui\ Euler)$

Proprietăți ale logaritmilor			
1.	$\log_a 1 = 0$	**2.**	$\log_a a = 1$
3.	$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$	**4.**	$a^{\log_a x} = x$
5.	$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$	**6.**	$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$

7.	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$		
Formule de schimbare a bazei logaritmului			
8.	$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$	**9.**	$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
10.	$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$	**11.**	$\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c$

Monotonia funcției logaritmice
$f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
I. Dacă $\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}) \Rightarrow f\ este\ strict\ descrescătoare$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a(x_1) > \log_a(x_2)$
II. Dacă $\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{1}, \infty) \Rightarrow f\ este\ strict\ crescătoare$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a(x_1) < \log_a(x_2)$
Monotonia funcției exponențiale
$f: \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$
I. Dacă $\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}) \Rightarrow f\ este\ strict\ descrescătoare$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
II. Dacă $\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{1}, \infty) \Rightarrow f\ este\ strict\ crescătoare$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

PUTERI ȘI RADICALI

PUTERI			
Definiție putere			
$\boldsymbol{a^n} = \underbrace{\boldsymbol{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{\boldsymbol{de\ n\ ori}}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ $\boldsymbol{a^n} = \begin{cases} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{baza}\ puterii \\ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{exponentul}\ puterii \end{cases}$			
Proprietăți puteri			
1.	$a^0 = 1$	**2.**	$1^n = 1$
3.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	**4.**	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5.	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	**6.**	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
7.	$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m}$	**8.**	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
9.	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	**10.**	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

RADICALI		
Radicalul de ordin 2		**Radicalul de ordin 3**
Condiții de existență ale radicalului de ordin 2 (de ordin par)		***Condiții de existență ale radicalului de ordin 3 (de ordin impar)***
$\sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$ $(expresia\ de\ sub\ semnul\ radical\ \geq 0)$		*Nu există*
Proprietăți ale radicalilor		
1.	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$
2.	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$
3.	$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$
4.	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
5.	$\sqrt[n]{x^q} = x^{\frac{q}{n}}$	

NUMERE COMPLEXE ($\mathbb{C}$)– forma algebrică

Definiție	
$\boldsymbol{z = a + bi}, a, b \in \mathbb{R}$	
Notații	
a = partea reală a numărului complex z ***a = Re(z)*** *– realul lui z*	*bi = partea imaginară a numărului complex z* ***b = Im(z)*** *– imaginarul lui z*
$\boldsymbol{i^2 = -1}$ *i = unitate imaginară*	
Proprietăți	
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow b = 0$	$z = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} (Re(z) = 0 \text{ și } Im(z) = 0) \\ (a = 0 \text{ și } b = 0) \end{matrix}$
Egalitatea a două numere complexe	
$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ și } b_1 = b_2$	
Conjugatul lui *z*	**Modulul lui *z***
$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$	$\lvert z\rvert = \lvert a + bi\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$

Proprietăți (cele mai utilizate)

1.	$\lvert z\rvert = \lvert\bar{z}\rvert$	**4.**	$\lvert z_1 \cdot z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert$
2.	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	**5.**	$\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}, z_2 \neq 0$
3.	$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$	**6.**	$\lvert z\rvert^2 = z \cdot \bar{z}$

Raportul a două numere complexe

= se calculează prin amplificarea lui (raportului) cu conjugatul numitorului

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \underbrace{\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}}_{Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + \underbrace{\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}}_{Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} i$$

Puterile lui *i*

$i^1 = i$	$i^{4n+1} = i$	$i^2 = -1$	$i^{4n+2} = -1$
$i^3 = -i$	$i^{4n+3} = -i$	$i^4 = 1$	$i^{4n} = 1$

Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuației de grad II cu coeficienți reali

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac, \Delta < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$$x^2 = a, a < 0 \Rightarrow x = \pm i\sqrt{-a}$$

FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$
$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

PARTEA ÎNTREAGĂ ȘI PARTEA FRACTIONARĂ
A UNUI NUMĂR REAL

Partea întreagă a unui număr real x			
Notație		**Definiție**	
$[x] = partea\ întreagă\ a\ lui\ x$		$[x] = cel\ mai\ mare\ întreg\ mai\ mic\ decât\ x$ $[x] = n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \leq x < n+1$	
Partea fracționară a numărului real x			
Notație		**Definiție**	
$\{x\} = partea\ fracționară\ a\ lui\ x$		$\{x\} = x - [x]$	
Proprietăți			
1.	$x - 1 < [x] \leq x$	**3.**	$\{x\} \in [0, 1)$
2.	$[x+n] = [x] + n, n \in \mathbb{Z}$	**4.**	$\{x+n\} = \{x\}, n \in \mathbb{Z}$
5.	$x = [x] + \{x\}$		

MODULUL UNUI NUMĂR REAL

Definiție	$\lvert x \rvert = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$
Proprietăți	$\boldsymbol{\lvert x \rvert \leq A \Leftrightarrow -A \leq x \leq A}, A \in \mathbb{R}_+$
	$\boldsymbol{\lvert x \rvert \geq A \Leftrightarrow x \leq -A}$ **sau** $\boldsymbol{x \geq A}, A \in \mathbb{R}_+$

Subiectul I.2

FUNCȚII – definiții și proprietăți

Notații	
$f: A \to B, x \to f(x)$	*A = domeniul funcției* *B = codomeniul funcției* *f(x)= legea de corespondență a funcției*
$\boldsymbol{A(x,y) \in Gf \Leftrightarrow f(x) = y}$ $\boldsymbol{f(prima\ coordonat}ă\boldsymbol{) = a\ doua\ coordonat}ă$ ***x* (prima coordonată) = abscisa punctului** ***y* (a doua coordonată) = ordonata punctului**	

Intersecția cu axele de coordonate ale *Gf*
$Intersecția\ cu\ axa\ absciselor\ (cu\ Ox)$ $Gf \cap O_x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ $Intersecția\ cu\ axa\ ordonatelor\ (cu\ Oy)$ $Gf \cap O_y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(0)$

Determinarea coordonatelor punctelor de intersecție a două grafice (*Gf* și *Gg*)
1. *Se rezolvă ecuația* $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ *pentru determinarea* ***abscisei*** 2. *Se determină* ***ordonata*** *punctului*

Compunerea funcțiilor
$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$

FUNCȚII – definiții și proprietăți

Funcții pare. Funcții impare

$f: A \to \mathbb{R}$, $A -$ *mulțime simetrică* $(-x \in A, \forall x \in A)$

$f - pară \Leftrightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in A$	$f - impară \Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in A$

Funcții periodice

$f: D \to \mathbb{R}$ *este periodică cu perioada T dacă* $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$ *și* $x + T \in D$

Cea mai mică perioadă nenulă pozitivă (dacă există) s.n. perioadă principală

Imaginea unei funcții (mulțimea de valori a funcției)

$f: A \to B$

$Imf = \{y \in B | \exists x \in A\ a.î.\ f(x) = y\}$ *sau* $Imf = f(A) = \{f(x) | x \in A\}$

Funcții injective – definiții

$f: A \to B$ *este funcție* ***injectiv****ă dacă*:

1.	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\ [x_1, x_2 \in A\ fixați]$
2.	$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\ [x_1, x_2 \in A\ fixați]$
3.	*f este strict monotonă (Analiză matematică)*
Obs.	$f: A \to B$ ***nu*** *este funcție* ***injectiv****ă dacă*: $\exists\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$ *și* $f(x_1) = f(x_2)$

Funcții surjective – definiții

$f: A \to B$ *este funcție* ***surjectiv****ă dacă*:

1.	$[\forall y \in B \exists x \in A\ a.î.\ f(x) = y] \Leftrightarrow$ [*pentru* $\forall y \in B$ *ecuația* $f(x) = y$ *are cel puțin o soluție în* A]
2.	$Imf = B$

Funcții bijective – definiții

$f: A \to B$ *este funcție* ***bijectiv****ă dacă*:

1.	*f este injectivă și surjectivă*
2.	$[\forall y \in B\ \exists!\, x \in A\ a.î.\ f(x) = y] \Leftrightarrow$ [*pentru* $\forall y \in B$ *ecuația* $f(x) = y$ *are soluție unică în* A]

Funcții inversabile

$f: A \to B$ *este funcție* ***inversabil****ă dacă*:

f este bijectivă

Inversa unei funcții

$f: A \to B$, *funcție bijectivă, are* ***inversa***:

$f^{-1}: B \to A$ *cu proprietatea* $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), x \in A, y \in B$

$f\left(f^{-1}(x)\right) = x, x \in B$ *și* $f^{-1}\left(f(x)\right) = x, x \in A$

Funcții monotone

$f: D \to \mathbb{R}$ *este* ***monoton crescătoare*** *dacă* $\forall\ x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$f: D \to \mathbb{R}$ *este* ***monoton descrescătoare*** *dacă* $\forall\ x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$f: D \to \mathbb{R}$ *este* ***strict crescătoare*** *dacă* $\forall\ x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$f: D \to \mathbb{R}$ *este* ***strict descrescătoare*** *dacă* $\forall\ x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

FUNCȚIA DE GRADUL I

Forma generală a funcției	
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$	
Monotonia funcției	
1.	Dacă $a < 0$ atunci f este *strict descrescătoare*
2.	Dacă $a > 0$ atunci f este *strict crescătoare*
Semnul funcției	
Se rezolvă ecuația $f(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$	

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		*semn contrar a*	0	*semn a*	

FUNCȚIA DE GRADUL al II – lea

Forma generală a funcției

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Ecuația de gradul al doilea

$ax^2 + bx + c = 0,, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

Cazul I	Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} ecuația\ are\ două\ soluții\ reale\ distincte\ (\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2) \\ x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ și\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$
Cazul II	Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} ecuația\ are\ două\ soluții\ reale\ egale\ (\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 = x_2) \\ x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} \end{cases}$
Cazul III	Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow ecuația\ nu\ are\ soluții\ reale\ (\nexists x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

Semnul funcției de gradul al doilea

Cazul I

Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow ecuația\ are\ două\ soluții\ reale\ distincte\ (\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, pp\ x_1 < x_2)$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	*Semn a*	*0*	*Semn contrar a*	*0*	*Semn a*

Cazul II

Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow ecuația\ are\ două\ soluții\ reale\ egale\ (\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 = x_2)$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f(x)$	*semn a*	0	*semn a*

Cazul III

Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow ecuația\ nu\ are\ soluții\ reale\ (\nexists x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	*semn a*	

Relațiile lui Viete

$ax^2 + bx + c = 0,, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, x_1, x_2\ rădăcinile\ ecuației$

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}\ (suma\ rădăcinilor)$	$P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}\ (produsul\ rădăcinilor)$

Suma pătratelor rădăcinilor

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = S^2 - 2P$$

Formarea ecuației de gradul al doilea cu rădăcinile x_1, x_2

Se calculează $\boldsymbol{S = x_1 + x_2}$ *și* $\boldsymbol{P = x_1 \cdot x_2}$ **.** *Ecuația cu rădăcinile* x_1, x_2 *este:* $\boldsymbol{x^2 - Sx + P = 0}$

Graficul funcției de gradul al doilea	
Se numește ***parabolă***. *Parabola are un punct de extrem, numit* ***vârf*** *și notat cu* ***V***.	
Coordonatele vârfului **:** $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$	
Dacă $a < 0 \Longrightarrow$	*funcția admite maxim* (V este *punct de maxim*) ***valoarea maximă a funcției*** sau ***maximul funcției*** este $\boldsymbol{f_{max}} = -\frac{\Delta}{4a}$
Dacă $a > 0 \Longrightarrow$	*funcția admite minim* (V este *punct de minim*) ***valoarea minimă a funcției*** sau ***minimul funcției*** este $\boldsymbol{f_{min}} = -\frac{\Delta}{4a}$
Ecuația axei de simetrie a parabolei este: $x = -\frac{b}{2a}$	
Poziția parabolei (graficului funcției de grad II) față de axa Ox	
Parabola intersectează axa Ox în două puncte distincte (Ox este secantă parabolei)	$\Leftrightarrow \Delta > 0$
Parabola este tangentă axei Ox	$\Leftrightarrow \Delta = 0$
Parabola nu intersectează axa Ox (parabola este situată deasupra axei Ox ($a > 0$) sau este situată sub axa Ox ($a > 0$))	$\Leftrightarrow \Delta < 0$

Monotonia și imaginea funcției de gradul al doilea	
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$	
Se calculează coordonatele vârfului $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$	
Dacă $a < 0 \Longrightarrow$ V este punct de maxim	
f *este strict crescătoare pe* $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$	f *este strict descrescătoare pe* $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ *max*	$\searrow\searrow$

$$Imf = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$$

Dacă $a > 0 \Longrightarrow$ V este punct de minim	
f *este strict descrescătoare pe* $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$	f *este strict crescătoare pe* $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ *min*	$\nearrow\nearrow$

$$Imf = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$$

Subiectul I.3
ECUAȚII

Ecuații iraționale	
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$
1. Se pun condiții de existență	
$C.E. \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$	$Nu\ există\ C.E.$
Eliminarea radicalului (prin ridicarea la putere) și rezolvarea ecuației obținute	
$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 = \left(g(x)\right)^2 \Rightarrow f(x) = \left(g(x)\right)^2$	$\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^3 = \left(g(x)\right)^3 \Rightarrow f(x) = \left(g(x)\right)^3$
Verificarea soluției	

Ecuații exponențiale			
1.	$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$	**2.**	$a^{f(x)} = b \Rightarrow f(x) = \log_a b$
3.	Cu ajutorul notațiilor și a proprietăților puterilor		

Ecuații logaritmice	
1.	$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$ $C.E. \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$
2.	$\log_a f(x) = N \Rightarrow f(x) = a^N$ $C.E. \begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$
3.	Cu ajutorul notațiilor

Ecuații trigonometrice
Ecuații trigonometrice fundamentale
$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}, a\in[-1,1] \Rightarrow \boldsymbol{x}=(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{k}}\cdot\mathbf{arcsin}\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k\pi},\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}$
$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}, a\in[-1,1] \Rightarrow \boldsymbol{x}=\pm\,\mathbf{arccos}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{2}\boldsymbol{k\pi},\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}$
$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}, a\in\mathbb{R} \Rightarrow \boldsymbol{x}=\mathbf{arctg}\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k\pi},\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}$
$\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}, a\in\mathbb{R} \Rightarrow \boldsymbol{x}=\mathbf{arcctg}\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k\pi},\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}$
Ecuații trigonometrice de forma $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{sin}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{cos}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ ***și*** $\mathbf{tg}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{tg}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{sin}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow f(x)=(-1)^k\cdot g(x)+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{cos}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow f(x)=\pm g(x)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ $\mathbf{tg}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{tg}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow f(x)=g(x)+k\pi, k\in\mathbb{Z}, \cos f(x)\neq 0, \cos g(x)\neq 0$
Ecuații trigonometrice care se rezolvă cu ajutorul unor ecuații din algebră (notații)
Cele mai utilizate formule trigonometrice sunt: $\mathbf{sin^2}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{cos^2}\,\boldsymbol{x}=\mathbf{1}, \forall x\in\mathbb{R}$ și $\mathbf{cos}\,\mathbf{2}\boldsymbol{x}=\mathbf{2}\,\mathbf{cos^2}\,\boldsymbol{x}-\mathbf{1}=\mathbf{1}-\mathbf{2}\,\mathbf{sin^2}\,\boldsymbol{x}, \forall x\in\mathbb{R}$
Ecuații de forma $\boldsymbol{a}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}, \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$
(O metodă) Prin utilizarea substituției $\boldsymbol{tg}\,\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}=\boldsymbol{t}$ și a formulelor trigonometrice $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ *și* $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ *Observație!* Funcția trigonometrică *tg* nu este definită pe întreaga mulțime a numerelor reale (ℝ) ducând astfel la pierderea unor eventuale soluții de forma $(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$. Prin urmare este necesară verificarea valorilor de forma $x=(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$

Subiectul I.4

METODE DE NUMĂRARE

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, n \in \mathbb{N}$ $n!$ *se citește „n factorial"* $0! = 1$
Permutări = numără câte mulțimi ordonate se pot forma cu *n* elemente distincte
$\boldsymbol{P_n = n!}$
Aranjamente = numără câte submulțimi ordonate de *k* elemente se pot forma cu *n* elemente distincte
$\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}, 0 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{N}$
Combinări = numără câte submulțimi de *k* elemente se pot forma cu *n* elemente distincte
$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}, 0 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{N}$

Binomul lui Newton	
$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n$ $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n = coeficienți\ binomiali$	
Formula termenului general	
$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k, 0 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{N}$	
Suma coeficienților binomiali	
$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$	
Suma coeficienților binomiali de rang par	**Suma coeficienților binomiali de rang impar**
$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$	$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$

Formule de numărare
Numărul submulțimilor unei mulțimi cu *n* elemente este 2^n
Numărul funcțiilor $f: A \to B$ este $card\ B^{card\ A}$
Numărul funcțiilor bijective $f: A \to A$ este $(card\ A)!$
Ne amintim! *Card A* =numărul de elemente al mulțimii A

PROBABILITĂȚI

$P = \frac{nr.cazurilor\ favorabile}{nr.cazurilor\ posibile}$

MATEMATICI FINANCIARE

Procente		
$p\%\ din\ x = \frac{p}{100} \cdot x$		
	Scumpirea prețului unui produs	*Reducerea prețului unui produs*
Datele problemei	*x* = prețul inițial al produsului p = procentul cu care se scumpește p_{final}= prețul după scumpire	*x* = prețul inițial al produsului p = procentul cu care se reduce p_{final}= prețul după reducere
Formulă	$\boldsymbol{x + \frac{p}{100} \cdot x = p_{final}}$	$\boldsymbol{x - \frac{p}{100} \cdot x = p_{final}}$

T.V.A. = taxa pe valoarea adăugată	
Datele problemei	*x* = prețul inițial (de producție) al produsului p = procentul T.V.A. p_v= prețul de vânzare al produsului
Formule	$\boldsymbol{x + \frac{p}{100} \cdot x = p_v}$
	$\boldsymbol{T.V.A. = p_v - x}$

Dobânda simplă	
Datele problemei	*D* = dobânda obținută la finalul perioadei de timp (în lei) *S* = suma depusă inițial la bancă (in lei) *r* = rata dobânzii (%) *n* = perioada de timp (în ani) $S_{finală}$ = suma obținută după perioada de timp (în lei)
Formule	$D = S \cdot \frac{r}{100} \cdot n$
	$S_{finală} = S + D$

Dobânda compusă	
Datele problemei	*D* = dobânda obținută la finalul perioadei de timp (în lei) *S* = suma depusă inițial la bancă (in lei) *r* = rata dobânzii (%) *n* = perioada de timp (în ani) $S_{finală}$ = suma obținută după perioada de timp (în lei)
Formule	$D = S \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$
	$S_{finală} = S + D = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

Subiectul I.5
GEOMETRIE ANALITICĂ

I. Distanța dintre două puncte (Lungimea unui segment)	
Datele problemei	*Formulă*
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
II. Coordonatele mijlocului unui segment	
Datele problemei	*Formulă*
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$	$M(x_M, y_M)$ *mijlocul segmentului* AB, *unde* $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ și $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

III. Panta unei drepte (m)	
Datele problemei	*Formulă*
$\alpha = \sphericalangle$ format de dreapta d cu axa Ox	$m_d = \operatorname{tg} \alpha$ (*coeficient unghiular*)
Ecuația generală a dreptei: $d: ax + by + c = 0, b \neq 0$	$m_d = -\frac{a}{b}$
Ecuația explicită a dreptei $d: y = mx + n$	$m_d = m$ (*coeficientul lui* x)
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$	$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, x_B \neq x_A$

IV. Determinarea ecuației unei drepte	
Datele problemei	*Formulă*
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$	$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$
	$AB: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, x_B \neq x_A, y_B \neq y_A$ $AB: x = x_A$, *dacă* $x_B = x_A$ $AB: y = y_A$, *dacă* $y_B = y_A$
$A(x_A, y_A)$ și panta dreptei d m_d	$d: y - y_A = m_d(x - x_A)$

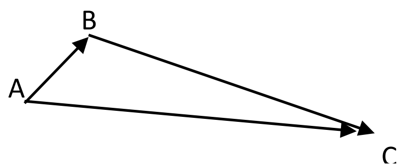
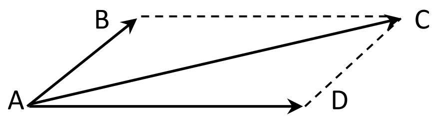
Să ne amintim!	***Mediatoarea*** unui segment este perpendiculara dusă prin mijlocul segmentului
	Înălțimea este perpendiculara dusă dintr-un vârf al triunghiului pe latura opusă
	Mediana este segmentul care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse

V. Pozițiile relative a două drepte	
$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2}$	$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1$
SAU	
$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$	$d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$
d_1, d_2drepte concurente $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ *Observație!* ***Coordonatele punctului de intersecție*** a două drepte reprezintă soluția sistemul format din ecuațiile celor două drepte.	
$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$	$d_1 = d_2\ (d_1, d_2 coincid) \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

VI. Aria unui triunghi	
Datele problemei	*Formulă*
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$	$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \lvert\Delta\rvert, unde$ $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$
VII. Coliniaritatea a trei puncte distincte în plan	
Datele problemei	*Formulă*
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$	$A, B, C\ coliniare \Leftrightarrow \Delta = 0, unde$ $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

VIII. Distanța de la un punct la o dreaptă	
Datele problemei	*Formulă*
Coordonatele punctului $A(x_A, y_A)$ Ecuația generală a dreptei $d: ax + by + c = 0$	$d(A, d) = \frac{\lvert ax_A + by_A + c\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Aplicație!	Determinarea ***lungimii unei înălțimi***
	$A(x_A, y_A) \in d \Leftrightarrow ax_A + by_A + c = 0$
IX. Coordonatele centrului de greutate al unui triunghi	
Datele problemei	*Formulă*
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$	$G(x_G, y_G)\ centrul\ de\ greutate\ al\ \Delta ABC, unde$ $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ și $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$
Să ne amintim!	Centrul de greutate al unui Δ *(G)* reprezintă punctul de intersecție al medianelor unui Δ.

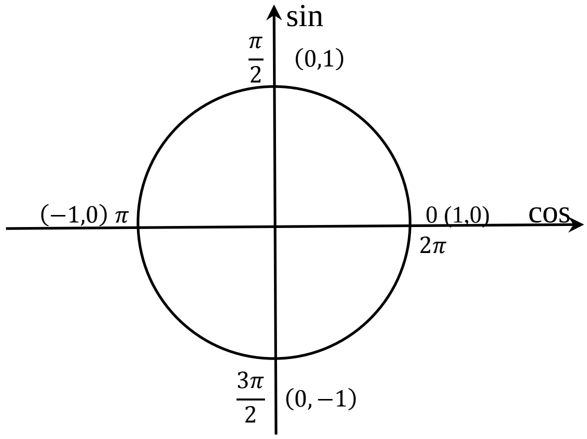
VECTORI

<table>
<tr><td colspan="2">Definiții și notații</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vector = mărime fizică, caracterizată prin direcție, sens, lungime</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\overrightarrow{AB}$
$A = originea\ vectorului;$
$B = extremitatea\ vectorului;$
$dreapta\ AB = dreapta\ suport\ a\ vectorului$
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB\ (lungimea\ vectorului\ \overrightarrow{AB})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Doi vectori au aceeași direcție dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Doi vectori au același sens dacă extremitățile lor sunt de aceeași parte a dreptei determinată de originile vectorilor.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Doi vectori sunt egali dacă au aceeași direcție, lungime și același sens.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Doi vectori sunt opuși dacă au aceeași direcție, lungime și sensuri opuse. Notăm: $\vec{v} = -\vec{u}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vectorul nul este vectorul cu lungime 0. Notăm: $\vec{0} = vectorul\ nul$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{\left|\overrightarrow{AA}\right| = \left|\vec{0}\right| = 0}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Doi vectori sunt coliniari dacă au aceeași direcție.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\vec{u}, \vec{v}\ coliniari \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}^*\ a.î.\ \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}\ , \vec{v} \neq \vec{0}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Adunarea vectorilor necoliniari</td></tr>
<tr><td>Regula triunghiului</td><td>Regula paralelogramului</td></tr>
<tr><td>$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$</td><td>$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, unde\ ABCD\ paralelogram$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vectorul de poziției al mijlocului unui segment</td></tr>
<tr><td colspan="2">$M\ mijlocul\ lui\ AB \implies \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}, pentru\ orice\ punct\ O\ din\ plan$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vectori în reper cartezian</td></tr>
<tr><td>$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \iff \vec{v}(x, y)$</td><td>$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$</td></tr>
<tr><td>$\overrightarrow{v_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$</td><td>$\overrightarrow{v_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\ coliniari \iff \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Produsul scalar</td></tr>
<tr><td>$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$</td><td>$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = |\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}| \cdot \cos\left(\sphericalangle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2} \iff \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$</td></tr>
</table>

Subiectul I.6

ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

Cercul trigonometric



	0	$\frac{\pi}{2}=90^\circ$	$\pi=180^\circ$	$\frac{3\pi}{2}=270^\circ$	$2\pi=360^\circ$
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1

	$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{\pi}{4}=45^\circ$	$\frac{\pi}{3}=60^\circ$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Semnul funcțiilor trigonometrice

$x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $[x \sphericalangle\ ascuțit]$ *Cadran I*	$\sin x > 0$ $\cos x > 0$	$x \in \left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ *Cadran III*	$\sin x < 0$ $\cos x < 0$
$x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ $[x \sphericalangle\ obtuz]$ *Cadran II*	$\sin x > 0$ $\cos x < 0$	$x \in \left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ *Cadran IV*	$\sin x < 0$ $\cos x > 0$

Proprietăți ale funcțiilor trigonometrice	
Mărginirea	
$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$	$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
Paritatea	
$\sin(-x) = -\sin x$	$tg\ (-x) = -tg\ x$
$\cos(-x) = \cos x$	$ctg\ (-x) = -ctg\ x$
Observație! ***cos*** este funcției pară, ***sin, tg, ctg*** funcții impare	
Periodicitatea	
$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$	$\text{tg}(x + k\pi) = \text{tg}\, x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$	$\text{ctg}(x + k\pi) = \text{ctg}\, x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}\pi), k \in \mathbb{Z}$

Formule trigonometrice	
Formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$	
$\sin(90° - x) = \cos x$	$\sin(180° - x) = \sin x$
$\cos(90° - x) = \sin x$	$\cos(180° - x) = -\cos x$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
$tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$ctg\ x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$tg\ (a + b) = \frac{tg\ a + tg\ b}{1 - tga\ tgb}$	$tg\ (a - b) = \frac{tg\ a - tg\ b}{1 + tga\ tgb}$
$tg\ 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$	$tg\ \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$	$\cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$
Transformarea unor sume în produs	
$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$	$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$
$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{a-b}{2}$

Funcții trigonometrice inverse	
$\mathbf{arcsin}\,\boldsymbol{x}:[\mathbf{-1},\mathbf{1}]\to\left[-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}},\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$ $\arcsin(\sin x)=x,\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin(\arcsin x)=x,\forall x\in[-1,1]$ $\mathbf{arcsin}(-\boldsymbol{x})=-\mathbf{arcsin}\,\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in[\mathbf{-1},\mathbf{1}]$	$\mathbf{arctg}\,\boldsymbol{x}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}},\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=x,\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x,\forall x\in[-1,1]$ $\mathbf{arctg}(-\boldsymbol{x})=-\mathbf{arctg}\,\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$
$\mathbf{arccos}\,\boldsymbol{x}:[\mathbf{-1},\mathbf{1}]\to[\mathbf{0},\boldsymbol{\pi}]$ $\arccos(\cos x)=x,\forall x\in[\mathbf{0},\boldsymbol{\pi}]$ $\cos(\arccos x)=x,\forall x\in[-1,1]$ $\mathbf{arccos}(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\pi}-\mathbf{arccos}\,\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in[\mathbf{-1},\mathbf{1}]$	$\mathbf{arcctg}\,\boldsymbol{x}:\mathbb{R}\to(\mathbf{0},\boldsymbol{\pi})$ $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x)=x,\forall x\in(0,\pi)$ $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x)=x,\forall x\in[-1,1]$ $\mathbf{arcctg}(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\pi}-\mathbf{arcctg}\,\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$

APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

Teorema cosinusului

$\Delta ABC \; oarecare$

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$$

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC}$$

Teorema sinusurilor

$\Delta ABC \; oarecare$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$$

$R = raza \; cercului \; circumscris \; \Delta ABC$

Observație! Aplic ***teorema cosinusului*** dacă

Ipoteză	*Concluzie*
Toate laturile triunghiului	$\sphericalangle \; sau \cos \sphericalangle$
2 laturi și $\sphericalangle$ dintre ele	a 3 –a latură

altfel aplic ***teorema sinusurilor***.

Aria unui triunghi oarecare

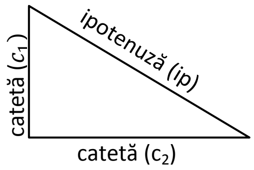
$$A_\Delta = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\sphericalangle\alpha)}{2}, \sphericalangle\alpha = \sphericalangle \; format \; de \; l_1 și \; l_2$$

$$A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_\Delta = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}, a, b, c \; laturile \; \Delta$$

Raza cercului circumscris Δ	Raza cercului înscris în Δ
$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A_\Delta}$	$r = \frac{A_\Delta}{p}$

Triunghiul dreptunghic	
	***Teorema lui Pitagora*** $ip^2 = c_1^2 + c_2^2$
Aria triunghiului $A_\Delta = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$	***Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei*** $h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}$
Mediana corespunzătoare ipotenuzei $mediana = \frac{ip}{2}$	***Raza cercului circumscris Δ*** $R = \frac{ip}{2}$
Funcții trigonometrice	
$\sin\alpha = \frac{cateta\ opus\breve{a} \sphericalangle\alpha}{ip}$	$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{cateta\ opus\breve{a} \sphericalangle\alpha}{cateta\ al\breve{a}turat\breve{a} \sphericalangle\alpha}$
$\cos\alpha = \frac{cateta\ al\breve{a}turat\breve{a} \sphericalangle\alpha}{ip}$	$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{cateta\ al\breve{a}turat\breve{a} \sphericalangle\alpha}{cateta\ opus\breve{a} \sphericalangle\alpha}$

Triunghiul echilateral		
are toate laturile egale; are toate ∢ de 60°		
$P = 3 \cdot l$	$A_\Delta = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Subiectul II.1
ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

PERMUTĂRI

Permutare de grad n - *definiție*	$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(k) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$
Permutarea identică de gradul n	$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots k & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots k & \cdots & n \end{pmatrix}$
Transpoziție	$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & \boldsymbol{i} & i+1 \cdots & k & \cdots j-1 & \boldsymbol{j} & j+1 \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i-1 & \boldsymbol{j} & i+1 \cdots & k & \cdots j-1 & \boldsymbol{i} & i+1 \cdots & n \end{pmatrix}$
Inversa unei permutări	$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(k) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \end{pmatrix}$ apoi se ordonează prima linie
Compunerea permutărilor	$\sigma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(\delta(1)) & \sigma(\delta(2)) & \cdots & \sigma(\delta(n)) \end{pmatrix}$
Inversiune a unei permutări	Perechea (i,j) cu $i<j$ se numește **inversiune** a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$ $m(\sigma)$= **numărul inversiunilor** permutării σ
Semnul (**signatura**) unei permutări – *definiție*	$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$
Semnul (**signatura**) unei permutări – *proprietăți*	$\varepsilon(\sigma\delta) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\delta)$ și $\varepsilon(\sigma^n) = \big(\varepsilon(\sigma)\big)^n$
Permutare pară	σ este **permutare pară** dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$
Permutare impară	σ este **permutare impară** dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$

MATRICE. DETERMINANȚI

Matrice pătratică de ordin n	Matrice cu n linii și n coloane
Matricea unitate de ordin n - *definiție*	$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Matricea unitate de ordin n – *proprietate*	$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I_n} = \boldsymbol{I_n} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Matricea nulă de tipul (m, n)	$O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
Urma unei matrice pătratice	$\boldsymbol{tr(A)}$ = suma elementelor de pe diagonala principală
Transpusa unei matrice – *definiție*	$\boldsymbol{A^t}$ = se obține din matricea A prin transformarea liniilor în coloane și a coloanelor în linii
Transpusa unei matrice – *proprietate*	$(\boldsymbol{AB})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{B^t A^t}$
Relația lui Hamilton - Cayley	$\boldsymbol{X^2 - tr(X) \cdot X + \mathbf{det}(X) \cdot I_2 = O_2}$
Determinantul de ordin 2	$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
Proprietăți ale determinanților	Un determinant cu elementele unei linii/coloane nule are valoarea 0.
	Un determinant cu două linii/coloane identice are valoarea 0.
	$\det(A^t) = \det(A)$
	$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
	$\det(A^n) = (\det A)^n$
	Dacă la elementele unui linii/coloane se adună elementele altei linii/coloane înmulțite eventual cu același număr, atunci valoarea determinantului nu se modifică.

Matrice inversabile	A este **inversabilă** $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
	$\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$
	Inversa unei matrice **Pas 1.** Se calculează $\det A \neq 0$ **Pas 2.** Se determină matricea *transpusă* A^t **Pas 3.** Se determină matricea *adjunctă* $A^* = \left(\delta_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot$ determinantul obținut din A^t prin eliminarea linie $\boldsymbol{i}$ și coloanei $\boldsymbol{j}$ **Pas 4.** Se calculează *inversa* matricei $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*}$
Ecuații matriceale	$A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$, $\det A \neq 0$
	$X \cdot A = B \Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1}$, $\det A \neq 0$
	$A \cdot X \cdot C = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$, $\det A \neq 0$, $\det C \neq 0$

SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Rangul unei matrice	$rang\ A = r \Leftrightarrow \exists$ un minor de ordin r al lui A nenul $(\neq 0)$ și toți minorii de ordin $r+1$ sunt nuli (0)

Stabilirea compatibilității unui sistem liniar și rezolvarea lui

A – matricea sistemului

A – matrice pătratică

<table>
<tr><th colspan="2">Stabilirea compatibilității</th></tr>
<tr><td colspan="2">Se calculează $\det A$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\det A \neq 0 \Longrightarrow$
sistem compatibil determinat/
sistem cu soluție unică/
sistem de tip Cramer</td><td>$\det A = 0$</td></tr>
<tr><td>1. Se determină $rang(A) \Longrightarrow \boldsymbol{m_p}$ (minorul principal)</td></tr>
<tr><td>2. Se calculează minorii caracteristici $\boldsymbol{m_c}$
Numărul m_c = numărul ecuațiilor secundare</td></tr>
<tr><td>3. Dacă $\exists\ m_c \neq 0 \Longrightarrow$ ***sistem incompatibil***
Dacă toți $m_c = 0 \Longrightarrow$ ***sistem compatibil nedeterminat (o infinitate de soluții)***</td></tr>
<tr><th colspan="2">Rezolvarea sistemului</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$x = \dfrac{\Delta_x}{\det A}$ $\qquad y = \dfrac{\Delta_y}{\det A}$ $\qquad z = \dfrac{\Delta_z}{\det A}$</td><td>Se stabilesc ecuațiile principale și secundare</td></tr>
<tr><td>Se stabilesc necunoscutele principale și secundare
Necunoscute secundare $= \alpha, \beta \ldots$</td></tr>
<tr><td>*Un sistem cu o necunoscută secundară = sistem compatibil simplu nedeterminat*
Un sistem cu două necunoscute secundare = sistem compatibil dublu nedeterminat</td></tr>
<tr><td>Se rezolvă sistemul format din ecuațiile principale</td></tr>
</table>

A – nu este matrice pătratică

$\bar{A}$ – matricea extinsă a sistemului

Stabilirea compatibilității
1. Se determină $rang(A) \Longrightarrow \boldsymbol{m_p}$ (minorul principal)
2. Se calculează minorii caracteristici $\boldsymbol{m_c}$ Numărul m_c = numărul ecuațiilor secundare
3. Dacă $\exists\ m_c \neq 0 \Longrightarrow$ ***sistem incompatibil*** Dacă toți $m_c = 0 \Longrightarrow$ ***sistem compatibil*** Dacă $\nexists\ m_c \Longrightarrow rang\ A = rang\ \bar{A} \overset{K.C.}{\Longrightarrow}$ **sistem compatibil**
Rezolvarea sistemului
Se stabilesc ecuațiile principale și secundare
Se stabilesc necunoscutele principale și secundare Necunoscute secundare $= \alpha, \beta \dots$ Dacă $\exists$ necunoscute secundare $\Longrightarrow$ sistem compatibil nedeterminat Dacă $\nexists$ necunoscute secundare $\Longrightarrow$ sistem compatibil determinat
Un sistem cu o necunoscută secundară = sistem compatibil simplu nedeterminat *Un sistem cu două necunoscute secundare = sistem compatibil dublu nedeterminat*
Se rezolvă sistemul format din ecuațiile principale

Subiectul II.2

LEGI DE COMPOZIȚIE PE O MULȚIME

Proprietățile legilor de compoziție $(M \neq \emptyset)$	
Parte stabilă	$\boldsymbol{x \circ y \in M, \forall x, y \in M}$
Asociativitate	$(\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y}) \circ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \circ (\boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{z}), \forall x, y, z \in M$
Comutativitate	$\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{x}, \forall x, y \in M$
Element neutru	$\exists e \in M\ a.î. \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \forall x \in M$
Elemente simetrizabile	$x \in M$ *element simetrizabil* dacă $\exists x' \in M a.î.\ \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x'} \circ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}$ $x' = simetricul$ elementului x $\mathcal{U}(M) =$ mulțimea elementelor simetrizabile din M în raport cu legea „ $\circ$ ”

Structuri algebrice	
Monoid	$(\boldsymbol{M},\circ)$ **monoid** ***comutativ (abelian)*** **dacă** 1. M este parte stabilă în raport cu legea „ $\circ$ ” 2. „ $\circ$ ” este asociativă 3. „ $\circ$ ” admite element neutru *4. „ $\circ$ ” este comutativă*
Grup	$(\boldsymbol{G},\circ)$ **grup** ***comutativ (abelian)*** **dacă** 1. G este parte stabilă în raport cu legea „ $\circ$ ” 2. „ $\circ$ ” este asociativă 3. „ $\circ$ ” admite element neutru 4. $\mathcal{U}(G) = G$ 5. „ $\circ$ ” *este comutativă*
Inel	$(\boldsymbol{A},\circ,*)$ **inel** ***comutativ*** **dacă** 1. $(A,\circ)$ este grup comutativ 2. $(A,*)$ este monoid *comutativ* 3. Distributivitatea operației „ $*$ ” față de „ $\circ$ ” $D_s: x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z), \forall x, y, z \in M$ $D_d: (x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z), \forall x, y, z \in M$
Corp	$(\boldsymbol{A},\circ,*)$ **corp** ***comutativ*** **dacă** 1. $(A,\circ)$ este grup comutativ ($e_\circ =$ element neutru) 2. $(A - \{e_\circ\},*)$ este grup *comutativ* 3. Distributivitatea operației „ $*$ ” față de „ $\circ$ ” $D_s: x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z), \forall x, y, z \in M$ $D_d: (x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z), \forall x, y, z \in M$

Morfisme de grupuri	
Fie $(G_1,\circ)$ ***și*** $(G_2,*)$ ***două grupuri***	$f: G_1 \to G_2$ este *izomorfism* de grupuri dacă 1. f este *morfism* de grupuri dacă $f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G_1$ 2. f bijectivă
	Proprietate: $f(e_1) = e_2$
Morfisme de inele	
Fie $(G_1,*,\circ)$ ***și*** $(G_2,\perp,\top)$ ***două inele***	$f: G_1 \to G_2$ este *izomorfism* de inele dacă 1. f este *morfism* de inele dacă **a.** $f(x * y) = f(x) \perp f(y), \forall x, y \in G_1$ **b.** $f(x \circ y) = f(x) \top f(y), \forall x, y \in G_1$ **c.** $f(e_\circ) = e_\top$ 2. f bijectivă
	Proprietate: $f(e_*) = e_\perp$
Subgrupuri	
Fie $(G,\circ)$ ***și*** $H \subset G$	$(H,\circ)$ este *subgrup* al lui G dacă $\forall x, y \in H \Longrightarrow x \circ y' \in H$ *sau* 1. $\forall x, y \in H \Longrightarrow x \circ y \in H$ 2. $\forall x \in H \Longrightarrow x' \in H$

Subiectul III.1

ELEMENETE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ CLASA a XI – a

Derivatele funcțiilor elementare

Nr. Crt.	Derivate simple	Derivate compuse
1	$c' = 0$	
2	$x' = 1$	
3	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u(x)^n)' = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot \big(u(x)\big)'$
4	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot \big(u(x)\big)'$
5	$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\left(\sqrt[3]{u(x)}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{\big(u(x)\big)^2}} \cdot \big(u(x)\big)'$
6	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{\big(u(x)\big)^{n-1}}} \cdot \big(u(x)\big)'$
7	$(a^x)' = a^x \ln a$	$\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \ln a \cdot \big(u(x)\big)'$
8	$(e^x)' = e^x$	$\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} \cdot \big(u(x)\big)'$
9	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)} \cdot \big(u(x)\big)'$
10	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u(x))' = \frac{1}{u(x) \ln a} \cdot \big(u(x)\big)'$
11	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot \big(u(x)\big)'$
12	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u(x))' = -\sin u(x) \cdot \big(u(x)\big)'$
13	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u(x))' = \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot \big(u(x)\big)'$
14	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(c\operatorname{tg} u(x))' = -\frac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot \big(u(x)\big)'$
15	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}} \cdot \big(u(x)\big)'$
16	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}} \cdot \big(u(x)\big)'$
17	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{1}{1+u(x)^2} \cdot \big(u(x)\big)'$
18	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u(x))' = -\frac{1}{1+u(x)^2} \cdot \big(u(x)\big)'$

Reguli de derivare
$(f \pm g)' = f' \pm g'$
$(c \cdot f)' = c \cdot f'$
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, y_0 = f(x_0)$

Șiruri

Mărginire și monotonie	
Mărginire	$(a_n)_{n\geq 1}$ *mărginit inferior* dacă $\exists$ m $\in \mathbb{R}$ a.î. $a_n \geq$ m, $\forall n \geq 1$
	$(a_n)_{n\geq 1}$ *mărginit superior* dacă $\exists$ M $\in \mathbb{R}$ a.î. $a_n \leq$ M, $\forall n \geq 1$
	$(a_n)_{n\geq 1}$ *mărginit* dacă șirul este mărginit inferior și superior
Monotonie	$(a_n)_{n\geq 1}$ *monoton crescător* dacă $a_{n+1} - a_n \geq 0, \forall n \geq 1$ SAU $(a_n)_{n\geq 1}$cu $a_n > 0, \forall n \geq 1$ este *monoton crescător* dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \geq 1$
	$(a_n)_{n\geq 1}$ *monoton descrescător* dacă $a_{n+1} - a_n \leq 0, \forall n \geq 1$ SAU $(a_n)_{n\geq 1}$cu $a_n > 0, \forall n \geq 1$ este *monoton descrescător* dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \forall n \geq 1$
	$(a_n)_{n\geq 1}$ *strict crescător* dacă $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \geq 1$ SAU $(a_n)_{n\geq 1}$cu $a_n > 0, \forall n \geq 1$ este *strict crescător* dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \forall n \geq 1$
	$(a_n)_{n\geq 1}$ *strict descrescător* dacă $a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \geq 1$ SAU $(a_n)_{n\geq 1}$cu $a_n > 0, \forall n \geq 1$ este *strict descrescător* dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \forall n \geq 1$

Convergența	Un șir este *convergent* dacă acesta are limita finită. Un șir este *divergent* dacă are limita $\pm\infty$ sau nu au limită ($\nexists$lim). Un șir este convergent dacă este monoton și mărginit. (Proprietatea lui Weierstrass)
Limite de șiruri – cazuri de nedeterminare (idei de rezolvare)	
Cazul $\frac{\infty}{\infty}$	**Factor comun forțat** $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \nexists, & dacă\ q \leq -1 \\ 0, & dacă\ q \in (-1,1) \\ 1, & dacă\ q = 1 \\ \infty, & dacă\ q > 1 \end{cases}$ **Lema lui Stolz – Cesaro** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, unde $(b_n)_{n\geq 1}$ șir strict crescător, nemărginit și cu termeni pozitivi **Criteriul raportului** $(a_n)_{n\geq 1}$cu termeni strict pozitivi. Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci: 1) $l \in [0,1)$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 2) $l \in (1,\infty)$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ 3) $l = 1$ atunci nu putem afirma nimic despre limita șirului **Regula lui l'Hospital** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $și\ f(n) = a_n$ Se calculează $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ cu regula lui l'Hospital . $\xRightarrow{T\ Heine}$ Pentru $x_n = n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = l$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$
Cazul $\infty - \infty$	**Factor comun forțat** SAU **Amplificarea cu expresia conjugată (la limitele cu radicali)** SAU **Proprietățile logaritmilor (la limitele cu ln)** $\ln a_n - \ln b_n = \ln \frac{a_n}{b_n}$

<table>
<tr><td>Cazul $\frac{0}{0}$</td><td rowspan="2">Limite remarcabile
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1$ sau $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n}=1$ sau $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arcsin a_n}{a_n}=1$ sau $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} a_n}{a_n}=1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^{a_n}-1}{a_n}=\ln b$
unde $a_n\to 0$</td></tr>
<tr><td>Cazul $\infty\cdot 0$</td></tr>
<tr><td>Cazul 1^∞</td><td>$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}=e$, unde $a_n\to 0$</td></tr>
<tr><td>Cazul 0^0 sau ∞^0</td><td>$\lim\limits_{n\to\infty}{a_n}^{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln {a_n}^{b_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{b_n\ln a_n}$
Criteriul radicalului
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$,
$(a_n)_{n\geq 1}$cu termeni strict pozitivi</td></tr>
</table>

Funcții

<table>
<tr><td colspan="2">Limite de funcții</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Limite laterale</td><td>$l_s(x_0)=f(x_0-0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}f(x)$</td></tr>
<tr><td>$l_d(x_0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}f(x)$</td></tr>
<tr><td>$\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\iff l_s(x_0)=l_d(x_0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cazuri de nedeterminare (idei de rezolvare)</td></tr>
<tr><td>Cazul $\frac{\infty}{\infty}$</td><td>Factor comun forțat
Regula lui l'Hospital
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\left(f(x)\right)'}{\left(g(x)\right)'}$</td></tr>
<tr><td>Cazul $\infty-\infty$</td><td>Factor comun forțat
SAU
Amplificarea cu expresia conjugată (la limitele cu radicali)
SAU
Proprietățile logaritmilor (la limitele cu ln)
$\ln f(x)-\ln g(x)=\ln\frac{f(x)}{g(x)}$</td></tr>
</table>

Cazul $\frac{0}{0}$	**Limite remarcabile** $\lim_{x\to x_0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ sau $\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)}=1$ sau $\lim_{x\to x_0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1\ =1$ sau $\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{arctg} u(x)}{u(x)}=1$ $\lim_{x\to x_0}\frac{\ln\left(1+u(x)\right)}{u(x)}=1$ $\lim_{x\to x_0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a$ unde $u(x)\to 0$ **Regula lui l'Hospital**
Cazul $\infty\cdot 0$	**Limite remarcabile** **Regula lui l'Hospital** $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(f(x)\right)'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}$ sau $=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(g(x)\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}$
Cazul 1^{∞}	$\lim_{x\to x_0}\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}=e$, unde $u(x)\to 0$
Cazul 0^0 sau ∞^0	$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}$
Asimptote	
Asimptote orizontale la $\pm\infty$	$y=m, m$ finit $m=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$
Asimptote oblice la $\pm\infty$	$y=mx+n, m$ finit și nenul și n finit $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ $n=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]$
Asimptote verticale	$x=x_0$ este *asimptotă verticală* dacă cel puțin o limită laterală a funcției f în punctul x_0 este infinită
Câteva rezultate utile în calcularea limitelor!	$\frac{1}{0_+}=+\infty$; $\frac{1}{0_-}=-\infty$; $\frac{\text{nr}}{\pm\infty}=0$ $\ln 0=-\infty$; $\ln\infty=\infty$ $e^{-\infty}=0$; $e^{\infty}=\infty$ $\operatorname{arctg}\infty=\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$

<table>
<tr><td colspan="2">Funcții continue</td></tr>
<tr><td colspan="2">f continuă în $x_0 \iff l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$</td></tr>
<tr><td>Proprietate lui Cauchy - Bolzano</td><td>$\left.\begin{array}{c} f: I \to R \text{ o funcție continuă pe } I \text{ și } a, b \in I, a < b \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array}\right| \Rightarrow$ ecuația
$f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul (a, b)</td></tr>
<tr><td>Semnul unei funcții continue</td><td>O funcție continuă are același semn pe un intervalul în care nu are zerouri.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Funcții derivabile</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = x_0$</td><td>$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$</td></tr>
<tr><td>$m_{tg} = f'(x_0)$ – panta tangentei</td></tr>
<tr><td colspan="2">f derivabilă în $x_0 \iff f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ finite</td></tr>
<tr><td colspan="2">f are derivată în $x_0 \iff f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$</td></tr>
<tr><td>Puncte de întoarcere</td><td>x_0 este punct de întoarcere al funcției f dacă f este continuă în x_0 și $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ infinite</td></tr>
<tr><td>Puncte unghiulare</td><td>x_0 este punct unghiular al funcției f dacă f este continuă în x_0 și $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ și cel puțin o derivată laterală este finită</td></tr>
<tr><td>Teorema lui Fermat</td><td>$f: [a, b] \to R, x_0 \in (a, b)$ un punct de extrem al funcției. Dacă f este derivabilă în punctul x_0 atunci $f'(x_0) = 0$</td></tr>
<tr><td>Teorema lui Lagrange</td><td>$\left.\begin{array}{c} f \text{ continuă pe } [a, b] \\ f \text{ derivabilă pe } (a, b) \end{array}\right| \Rightarrow \exists\, c \in (a, b) \text{ a.î. } \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$</td></tr>
<tr><td>Teorema lui Rolle</td><td>$\left.\begin{array}{c} f \text{ continuă pe } [a, b] \\ f \text{ derivabilă pe } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right| \Rightarrow \exists\, c \in (a, b) \text{ a.î. } f'(c) = 0$</td></tr>
<tr><td>Șirul lui Rolle</td><td>Se aplică pentru determinarea numărului de soluții reale ale ecuației $f(x) = 0$
Etape:
1) Se determină $f'(x)$
2) Se rezolvă $f'(x) = 0$
3)
<table><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr><tr><td>Ș.R.</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">Rolul derivatei I</td><td>$f'(x) \geq 0, \forall x \in I \Longrightarrow f$ este (monoton) crescătoare pe I
$f'(x) \leq 0, \forall x \in I \Longrightarrow f$ este (monoton) descrescătoare pe I</td></tr>
<tr><td>Determinarea intervalelor de monotonie și a punctelor de extrem
Etape:
Se determină $f'(x)$
Se rezolvă $f'(x) = 0$
<table><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Enunțuri care se rezolvă cu derivata I
✓ Să se determinarea intervalelor de monotonie
✓ Să se determinarea punctelor de extrem
✓ Să se demonstreze că f este (strict) crescătoare/descrescătoare
✓ Să se demonstreze inegalități cu ajutorul punctelor de extrem
✓ Să se determine imaginea(mulțimea de valori) unei funcții
✓ Să se demonstreze că o funcție este mărginită
✓ Să se demonstreze bijectivitatea unei funcții
○ f injectivă $\Leftrightarrow f$ strict monotonă pe domeniu
○ f surjectivă $\Leftrightarrow \mathrm{Im}f =$ codomeniu</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Rolul derivatei a II –a</td><td>$f''(x) \geq 0, \forall x \in I \Longrightarrow f$ este convexă pe I
$f''(x) \leq 0, \forall x \in I \Longrightarrow f$ este concavă pe I</td></tr>
<tr><td>$x = x_0$ punct de inflexiune dacă
✓ f continuă în x_0
✓ f are derivată în x_0
✓ f este concavă de o parte a lui x_0 și convexă de cealaltă parte a lui x_0.</td></tr>
<tr><td>Determinarea intervalelor de concavitate/convexitate și a punctelor de inflexiune
Etape:
Se determină $f''(x)$
Se rezolvă $f''(x) = 0$
<table><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>$f''(x)$</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

Subiectul III.2

ELEMENETE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ CLASA a XII – a

Primitive

Definiție	F este primitivă a funcției f dacă 1. F derivabilă pe D 2. $F'(x) = f(x), \forall x \in D$
Pentru **a determina/a calcula** primitiva unei funcții se folosește $\boldsymbol{F(x) = \int f(x)dx}$.	
Pentru **a demonstra/a arăta** enunțuri care implică primitive se folosește **definiția primitivei**.	
Pentru a demonstra că **o funcție admite primitive** pe D se arată că funcția este continuă pe D.	
Metoda integrării prin părți $\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$	

Integrale definite

Formula lui Leibniz - Newton	$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\|_a^b = F(b) - F(a)$
Proprietăți	$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, dacă f impară și $a > 0$
	$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, dacă f pară și $a > 0$
	$\int_a^a f(x)dx = 0, a \in \mathbb{R}$
Teorema de medie	$f: [a,b] \to R$ este o funcție continuă $\Longrightarrow \exists \xi \in [a,b]$ a.î. $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)$
Proprietatea de pozitivitate	$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$
Proprietatea de monotonie	$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b] \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
Proprietatea de aditivitate la interval	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,, c \in [a,b]$
Metoda integrării prin părți	$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x)\|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$

Integrale nedefinite

1	$\int 1\ dx = \int dx = x + C$	
2	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int u^n(x) \cdot u'(x) dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C$
3	$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\int e^{u(x)} \cdot u'(x) dx = e^{u(x)} + C$
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{u(x)} \cdot u'(x) dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$
5	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)\, dx = \ln u(x) + C$
6	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$	$\int \frac{1}{u^2(x) - a^2} \cdot u'(x) dx = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{u(x)-a}{u(x)+a} \right\rvert + C$
7	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{1}{u^2(x) + a^2} \cdot u'(x) dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u(x)}{a} + C$
8	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2} \right\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{u^2(x) - a^2}} \cdot u'(x) dx = \ln \left\lvert u(x) + \sqrt{u^2(x) - a^2} \right\rvert + C$
9	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{u^2(x) + a^2}} \cdot u'(x) dx = \ln \left(u(x) + \sqrt{u^2(x) + a^2} \right) + C$
10	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2(x)}} \cdot u'(x) dx = \arcsin \frac{u(x)}{a} + C$
11	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$\int \sin u(x) \cdot u'(x)\, dx = -\cos u(x) + C$
12	$\int \cos x\ dx = \sin x + C$	$\int \cos u(x)\ \cdot u'(x) dx = \sin u(x) + C$
13	$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \operatorname{tg} u(x) \cdot u'(x)\, dx = -\ln\lvert\cos u(x)\rvert + C$
14	$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int \operatorname{ctg} u(x) \cdot u'(x)\, dx = \ln\lvert\sin u(x)\rvert + C$
15	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x) dx = -\operatorname{ctg} u(x) + C$
16	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x)\, dx = \operatorname{tg} u(x) + C$