Exercice 9 :

Supposons que $A \cup B = B \cap C$.

. On a $A \subset A \cup B = B \cap C \subset B$, donc $A \subset B$.

. On a $B \subset A \cup B = B \cap C \subset C$, donc $B \subset C$.

Ainsi $A \subset B \subset C$

Exercice 12 :

Sur $\mathbb{R}^2$, $(x,y) R (x',y') \iff x < x'$ ou $(x = x'$ et $y \leq y')$

- Réflexivité : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}$.

  On a $x = x$ et $y \leq y$, donc $(x,y) R (x',y')$

- Antisymétrie : Soient $(x,y) \in \mathbb{R}$ et $(x',y') \in \mathbb{R}$ tels que

$\times (x,y) R (x',y')$ [i.e $x < x'$ ou $(x = x'$ et $y \leq y')$]

et

$\times (x',y') R (x,y)$ [i.e $x' < x$ ou $(x' = x$ et $y' \leq y)$].

Forcément $(x = x'$ et $y \leq y')$ et $(x' = x$ et $y' \leq y)$.

- En effet, si $x < x'$ (resp $x' < x$) alors $x' \leq x < x'$ (resp. $x \leq x' < x$) une contradiction

Ainsi $x = x'$ et $y \leq y' \leq y$, donc $x = x'$ et $y = y'$.

D'où $(x,y) = (x',y')$

- Transitivité :

  Soient (x,y), (x',y') et (x'',y'') tels que

  . $(x,y) R (x',y')$ [i.e $x < x'$ ou $(x = x'$ et $y \leq y')$]

  . $(x',y') R (x'',y'')$ [i.e $x' < x''$ ou $(x' = x''$ et $y' \leq y'')$]

1er cas : Si $x < x'$ ou $x' < x''$, alors $x < x''$, Donc $(x,y) R (x'',y'')$

2ème cas : Si $(x = x'$ et $y \leq y')$ et $(x' = x''$ et $y' \leq y'')$, alors

$x = x' = x''$ et $y \leq y' \leq y''$.

Ainsi $x = x''$ et $y = y''$. D'où $(x, y) = (x'', y'')$ et $(x, y) \, R \, (x'', y'')$