Corrigé feuille 4

Exercice 2 :

(1) $\begin{cases} x+y+z=11 & \dots\dots L_1 \\ 2x-y+z=5 & \dots\dots L_2 \\ 3x+2y+z=24 & \dots\dots L_3 \end{cases}$

Dans le but d'éliminer x, on a (1) est équivalent à :

$$\begin{cases} 6x+6y+6z=66 & \dots\dots L_1 \leftarrow 6\times L_1 \\ 6x-3y+3z=15 & \dots\dots L_2 \leftarrow 3\times L_2 \\ 6x+4y+2z=48 & \dots\dots L_3 \leftarrow 2\times L_3 \end{cases}$$

Les opérations L_1-L_2 et L_1-L_3 donnent :

$$\begin{cases} 9y+3z=51 \\ 2y+4z=18 \end{cases}$$

Résolvons ce système pour trouver y et z :

$$\begin{cases} 9y+3z=51 & \dots L_1 \\ 2y+4z=18 & \dots L_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{simplification}} \begin{cases} 3y+z=17 & \dots L_1 \leftarrow \frac{L_1}{3} \\ y+2z=9 & \dots L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2} \end{cases}$$

Dans le but d'éliminer y, on a :

$$\begin{cases} \cancel{3y}+z=17 & \dots L_1 \\ \cancel{3y}+6z=27 & \dots L_2 \leftarrow L_2\times 3 \end{cases}$$

L_1-L_2 donne $z-6z=17-27$

$-5z=-10$ donc $z=\frac{-10}{-5}$ et $\boxed{z=2}$

En remplaçant dans L_1 on obtient :

$3y+2=17$ donc $y=\frac{17-2}{3}=\frac{15}{3}=5$

$\boxed{y=5}$

Ces valeurs de y et z, mises dans l'une des équations proposées du système (1) donnent : (avec la première)

$x=11-y-z=11-5-2=4$. Donc $\boxed{x=4}$

Lundi 2/11/2020

(2) $\begin{cases} 5x + y + 3z = 6 & \dots\dots L_1 \\ 4x + 3y - z = 4 & \dots\dots L_2 \\ x - 2y + 4z = 5 & \dots\dots L_3 \end{cases}$

Choisissons d'éliminer y :

$$\begin{cases} 30x + 6y + 18z = 36 & \dots\dots L_1 \leftarrow 6L_1 \\ 8x + 6y - 2z = 8 & \dots\dots L_2 \leftarrow 2L_2 \\ -3x + 6y - 12z = -15 & \dots\dots L_3 \leftarrow -3L_3 \end{cases}$$

Les opérations $L_1 - L_2$ et $L_1 - L_3$ donnent :

$$\begin{cases} 22x + 20z = 28 \\ 33x + 30z = 51 \end{cases}$$

Résolvons ce système pour trouver x et z :

$$\begin{cases} 22x + 20z = 28 & \dots\dots L_1 \\ 33x + 30z = 51 & \dots\dots L_2 \end{cases} \xrightarrow[\text{Simplification}]{} \begin{cases} 11x + 10z = 14 & \dots\dots \frac{L_1}{2} \\ 11x + 10z = 17 & \dots\dots \frac{L_2}{3} \end{cases}$$

En retranchant la 1ère ligne de la seconde, on a :

$$0.x + 0.z = 3 \quad \text{Impossibilité !}$$

Cette équation est impossible. Il en est de même du système (2).

(3) $\begin{cases} 6x - 4y + 2z = 15 & \dots\dots L_1 \\ 4x + y + z = 8 & \dots\dots L_2 \\ 2x - 5y + z = 7 & \dots\dots L_3 \end{cases}$

Choisissons d'éliminer z :

$$\begin{cases} 6x - 4y + 2z = 15 & \dots\dots L_1 \\ 8x + 2y + 2z = 16 & \dots\dots L_2 \leftarrow L_2 \times 2 \\ 4x - 10y + 2z = 14 & \dots\dots L_3 \leftarrow L_2 \times 2 \end{cases}$$

Les opérations $L_1 - L_2$ et $L_1 - L_3$ donnent : $\begin{cases} -2x - 6y = -1 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$

par addition des deux équations, on obtient : $0.x + 0.y = 0$

Cette équation est indéterminée. Il en est de même du système (3). Indétermination.

(4) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 7 & \text{------- } L_1 \\ x + 2z = 8 & \text{------- } L_2 \\ z - y = 2 & \text{------- } L_3 \end{cases}$

Les deux dernières équations contenant l'inconnue z, nous pouvons immédiatement exprimer x et y en fonction de z :

$\begin{cases} x = 8 - 2z & \text{----- } L_2 \\ y = z - 2 & \text{----- } L_3 \end{cases}$

En remplaçant dans L_1, on obtient :

$$3(8-2z) - 2(z-2) + z = 7$$

$$24 - 6z - 2z + 4 + z = 7$$

$$-7z = -21$$

$$\boxed{z = 3}.$$

En portant cette valeur dans les équations L_2 et L_3, on a : $\begin{cases} x = 8 - 2 \times 3 = \boxed{2} \\ y = 3 - 2 = \boxed{1} \end{cases}$

Donc (4) admet une unique solution : $\boxed{(x, y, z) = (2, 1, 3)}$

Problèmes à plusieurs inconnues

Exercice 3: Soit p : le nombre de places dans chaque voiture

v : le nombre de voyageurs.

- Si les voyageurs sont répartis sur 5 voitures, il reste 20 personnes non placées ; cela donne l'équation

$5 \times p + 20 = v$ --------- (1)

- Si les voyageurs sont répartis sur 6 voitures, 10 places sont inoccupées ; cela donne l'équation :

$6 \times p - v = 10$ -------- (2)

L'équation (1) et (2) donnent le système suivant

$$\begin{cases} 5p - v = -20 & \ldots\ldots L_1 \\ 6p - v = 10 & \ldots\ldots L_2 \end{cases}$$

Les inconnues ici sont p et v.

c'est un système façile à résoudre, il suffit de

de soustraire L_1 et L_2, on obtient :

$L_2 - L_1$: $\overset{6p-5p}{p} = 10-(-20) = 10+20 = 30$

$\boxed{p=30}$

→ Il y a donc 30 places dans chaque voiture.

En remplaçant dans L_2, on obtient :

$6 \times 30 - v = 10$

$180 - v = 10$ donc $-v = 10 - 180$

$-v = -170$

$\boxed{v = 170}$

→ Il y a donc 170 voyageurs.

Exercice 4: soit x : le premier nombre

y : le deuscième nombre

on a d'après l'énoncé : $\begin{cases} 2x - 3y = 15 & \ldots\ldots L_1 \\ 4x - 6y = 42 & \ldots\ldots L_2 \end{cases}$

En simplifiant L_2, on obtient :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 15 & \ldots\ldots L_1 \\ 2x - 3y = 21 & \ldots\ldots L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2} \end{cases}$$ (simplification de L_2)

$L_1 - L_2$ donne : $0.x + 0.y = 15 - 21 = -6$

$0.x + 0.y = -6$ Impossibilité

Remarque: on dit que L_1 et L_2 sont <u>incompatibles</u>

Lundi 2/11/2020

Exercice 5 : Soit x : le chiffre des dizaines
y : le chiffre des unités. 5/7

Le nombre cherché s'écrit sous la forme :

$10x + y$ (par exemple $32 = 10 \times \underset{x}{3} + \underset{y}{2}$)

le nombre renversé est $10y + x$ (ici 23 est le nombre renversé de 32)

on aura donc les deux équations :

(1) .... $x + y = 10$ (car d'après l'énoncé la somme du chiffre des dizaines et du chiffre d'unité est 10)

et
$$10y + x = 3(10x + y) - 2$$
$$= 30x + 3y - 2$$
$$10y + x = 30x + 3y - 2$$
$$10y - 3y + x - 30x = -2$$

(2) ...... $7y - 29x = -2$,

on obtient donc le système : $\begin{cases} x + y = 10 & \text{......} L_1 \\ -29x + 7y = -2 & \text{....} L_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 7x + \cancel{7y} = 70 & \text{....} L_1 \leftarrow 7L_1 \\ -29x + \cancel{7y} = -2 & \text{......} L_2 \end{cases}$$

$L_1 - L_2$ donne : $7x - (-29x) + 0.y = 70 - (-2)$
$$7x + 29x = 70 + 2$$
$$36x = 72 \text{ et } x = \frac{72}{36} = 2.$$

donc $\boxed{x = 2}$. En remplaçant dans L_1, on trouve :
$$y = 10 - x = 10 - 2 = 8$$

donc $\boxed{y = 8}$

Le nombre cherché est $\boxed{28}$

Exercice 6 : un nombre à trois chiffres
a un chiffre des centaines noté "c"
un chiffre des dizaines noté "d"
un chiffre des unités noté : "u"

(1) .... L'énoncé donne : $c + d + u = 14$.

- la demi-somme des chiffres des centaines et des unités est donnée par : $\dfrac{c+u}{2}$
- d'après l'énoncé, le chiffre des dizaines est égal au tiers de cette demi-somme donc on a :

(2) .... $d = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{c+u}{2}\right) = \dfrac{c+u}{6} \Leftrightarrow 6d = c + u$

- Si le nombre cherché est $100c + 10d + u$,

Ce nombre renversé devient : $100u + 10d + c$

(par exemple si on a un nombre $\underset{c}{5}\underset{d}{8}\underset{u}{4}$
alors on obtient $\underset{c}{4}\underset{d}{8}\underset{u}{5}$ comme
nombre renversé)

d'après l'énoncé, ce nombre renversé dépasse le nombre cherché de 594, cela veut dire que la différence entre les deux est 594.

Donc on obtient l'équation :

$$(100u + 10d + c) - (100c + 10d + u) = 594$$

$$100u + \cancel{10d} + c - 100c - \cancel{10d} - u = 594$$

$$99u - 99c = 594$$

$$99(u - c) = 594 \quad \text{et} \quad u - c = \frac{594}{99} = 6$$

d'où on a l'équation simplifiée :

(3) .... $u - c = 6$

Lundi 2/11/2020

Les équations (1), (2) et (3) donnent le système suivant :

$$\begin{cases} c + d + u = 14 & \text{.......... } L_1 \\ c - 6d + u = 0 & \text{.......... } L_2 \\ -c + u = 6 & \text{.......... } L_3 \end{cases}$$

Ici le plus simple est d'éliminer u (ou bien c).
Comme on a déjà les mêmes coefficients pour u dans les trois équations, on n'a pas d'opérations à faire sur les lignes.

$L_1 - L_2$ et $L_1 - L_3$ donnent :

$$\begin{cases} 0.c + d - (-6d) + 0.u = 14 - 0 \\ c - (-c) + d + 0.u = 14 - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7d = 14 & \text{...... } L_1 \\ 2c + d = 8 & \text{...... } L_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 2 & \text{.... } L_1 \\ 2c + d = 8 & \text{.... } L_2 \end{cases}$$

En remplaçant L_1 dans L_2, on obtient :

$$\begin{cases} d = 2 \\ 2c + 2 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 2 \\ 2c = 8 - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 2 \\ 2c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{d = 2} \\ \boxed{c = 3} \end{cases}$$

En remplaçant les valeurs de d et de c dans L_3 (par exemple ou dans L_1 ou L_2) on obtient :

$$-c + u = 6 \Rightarrow -3 + u = 6$$
$$u = 6 + 3 = 9 \quad \text{donc } \boxed{u = 9}$$

Le nombre cherché est $\boxed{\underset{c}{3}\,\underset{d}{2}\,\underset{u}{9}}$