1 Sommes-Produits-Factorielles

Exercice 1 : Calculer $\sum_{i=0}^{5} u_i$, $\sum_{i=3}^{7} u_i$, $\sum_{i=3}^{7}(u_i+i)$, $\prod_{i=0}^{3} u_i$, $\prod_{i=3}^{6} u_i$, $\sum_{i=0}^{4} u_{3i}$ et $\prod_{i=2}^{4} u_{i+1}$ pour chacune des suites suivantes :

a) $u_n = 1$ pour tout $n \geq 0$.

b) $u_n = n$ pour tout $n \geq 0$.

c) $u_n = n-2$ pour tout $n \geq 0$.

d) $u_n = 2n+1$ pour tout $n \geq 0$.

e) $u_n = n^2$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 2 : Simplifier :
$\frac{7!}{5!}$; $\frac{10!}{7!}$; $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$;

Exercice 3 : En remarquant que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, déterminer :

a) $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(k(k+1))}$.

b) $\sum_{k=3}^{45} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 4 : Déterminer :

a) $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$.

b) $\sum_{k=3}^{45} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$.

Exercice 5 : Déterminer :

a) $\sum_{k=1}^{100} kk!$.

b) $\sum_{k=3}^{45} kk!$.

Exercice 6 : Calculer :

a) $\prod_{i=1}^{n-1}(i)$

b) $\prod_{i=1}^{n-1}(n-i)$;

c) $\prod_{i=1}^{2n}(i^2-1)$

d) $\left(\prod_{i=1}^{2n}(2i)\right)\prod_{i=0}^{2n}(2i+1)$

2 Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 7 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$. Déterminer

a) u_{100}, u_{15} et u_{35}.

b) $\sum_{i=0}^{24} u_i$.

c) $\sum_{i=25}^{100} u_i$.

d) $\sum_{i=3}^{10} u_{3i}$.

e) $\sum_{i=3}^{10} u_{5i-1}$.

Exercice 8 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique vérifiant $u_{18} = -7$ et $u_6 = 2$. Déterminer

1. la raison de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. u_0 et u_{20}.
3. $\sum_{i=3}^{17} u_i$

Exercice 9 : Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites arithmétiques de premiers termes respectifs $u_0 = 5$ et $v_0 = 7$ et de raisons respectives $r = -2$ et $s = 1/2$. Déterminer

a) $\sum_{i=0}^{50}(u_{2i+1} + v_{i-1})$.

b) $\sum_{i=5}^{18}(2u_{5i} - 3v_{3i})$.

Exercice 10 : Soit $(v_n)_{n\leq 0}$ une suite géométrique de premier terme $v_0 = 6$ et de raison $q = 1/3$. Déterminer

a) v_4, v_{10} et v_{100}.

b) $\sum_{i=0}^{15} v_i$.

c) $\sum_{i=3}^{17} v_i$.

d) $\sum_{i=0}^{15} v_{3i+1}$.

Exercice 11 : Soit $(v_n)_{n\leq 0}$ une suite géométrique de premier terme $v_5 = 64$ et $v_1 = 4$. Déterminer

a) la raison q de la suite.

b) v_7 et v_{18}.

c) $\sum_{i=5}^{13} v_{2i+1}$.

d) $\prod_{i=1}^{n} v_i$ où n est un entier naturel quelconque.

3 Dénombrement

Exercice 12 : Un collégien veut utiliser un cadenas pour son casier. Il hésite entre 2 : l'un a 4 roues avec 5 chiffres possibles, l'autre a 6 roues avec 3 lettres. Lequel est le plus sûr?

Exercice 13 : Il y a une course de 10 cheveaux.

Combien y-a-t-il de tiercés possibles? On connaît le vainqueur. Combien y-a-t-il de tiercés possibles?

Exercice 14 : Rose reçoit un cadeau : elle peut choisir 3 livres parmi une sélection de 10. Combien de combinaisons possibles peut-elle faire?

Elle en repère un qu'elle est sûre d'acheter. Combien y-a-t-il de combianaisons possibles?

Exercice 15 : Nicolas va au restaurant. Au menu, il y a 3 entrées, 5 plats chauds et 4 desserts.

Combien de possibilités y-a-t-il s'il fait entrée/plat/dessert?

Julien préfère le sucré, il choisit de prendre un plat et 2 desserts. Combien de choix a-t-il?

Exercice 16 : Le sélectionneur doit constituer une équipe. Il a le choix entre 3 gardiens, 8 défenseurs, 5 milieux et 7 attaquants.

Combien y a-t-il de choix possibles s'ils jouent en

- 4-4-2 (4 défenserus, 4 milieux et 2 attaquants)
- 4-3-3 (4 défenserus, 3 milieux et 3 attaquants).

On sait déjà quel gardien sera sur le terrain. Il sait déjà qu'il fera jouer un défenseur particulier et qu'un attaquant est forfait pour blessure. Combien a-t-il d'équipes possibles?

Exercice 17 : On tire 3 boules dans une urne contenant 7 boules de couleurs différentes. Déterminer le nombre de tirages possibles lorsque:

1. on tire les 4 boules simultanément
2. on tire les 4 boules successivement et avec remise,
3. on tire les 4 boules successivement et sans remise.

Exercice 18 : Un clavier de 13 touches (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C) permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 4 chiffres distincts ou non.

1) Combien de codes différents peut-on former ?

2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 9 ?

3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?

4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Exercice 19 : A l'occasion d'une compétition sportive groupant 16 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles ?

Exercice 20 : Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 5 entrées, 4 plats et 6 desserts ?

Exercice 21 : On lance 10 fois un dé à jouer et on prend note des résultats successivement obtenus.

a) Déterminer le nombre de résultats possibles.

b) Déterminer le nombre de résultats contenant des chiffres deux à deux distincts.

c) Déterminer le nombre de résultats avec 6 nombres pairs et 4 nombres impairs.

d) Déterminer le nombre de résultats avec 1 un, 2 deux, 3 trois et 4 quatre.

e) Déterminer le nombre de résultats avec au moins 2 six.

f) Déterminer le nombre de résultats qui commencent et finissent par des nombres pairs.

g) Déterminer le nombre de résultats qui ne contiennent pas deux chiffres voisins de même parité.

h) Déterminer le nombre de résultats dont la somme des nombres impairs dans le résultat vaut 4.

i) Déterminer le nombre de résultats dont la somme des points vaut 12. Même chose pour 13.

Exercice 22 :

1) Déterminer le nombre d'anagrammes du mot DERIVABILITE.

2) Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot DERIVABILITE :

   a) commençant et finissant par une consonne ;
   b) commençant et finissant par une voyelle ;
   c) commençant par une consonne et finissant par une voyelle;
   d) commençant par une voyelle et finissant par une consonne;
   e) ne contenant pas le sous-mot AI;
   f) ne contenant pas le sous-mot II;
   g) ne contenant pas le sous-mot AIE.

Exercice 23 : n considère un jeu de 52 cartes. On appelle **main** un ensemble formé de quatre cartes.

1. Déterminer le nombre de mains possibles.

2. Déterminer le nombre de mains ne contenant pas la couleur pique.

3. Déterminer le nombre de mains contenant un as exactement, un roi exactement et un carreau exactement.

4. Déterminer le nombre de mains contenant au moins un as et une trêfle.

Exercice 24 : On considère la chaîne de caractères "ARBRE LOCALEMENT COMPLET" où un espace compte comme un caractère, donc ici il y a deux espaces.

- Déterminer le nombre d'anagrammes de la chaîne de caractères ci-dessus.

- Déterminer le nombre d'anagrammes où les deux espaces ne sont pas côte à côte.

- Déterminer le nombre d'anagrammes commençant par une voyelle.

- Déterminer le nombre d'anagrammes commençant et finissant par une voyelle.

- Déterminer le nombre d'anagrammes commençant par une consonne et finissant par une voyelle.

Exercice 25 : Un code est composé de 11 caractères qui sont des lettres (il y en a 26) ou des chiffres (il y en a 10) et qui sont séparés par 10 caractères de séparation. Le caractère de séparation peut-être:

- Une virgule (,) s'il suit une voyelle.
- Un tiret (-) ou un point d'interrogation (?) s'il suit un nombre impair.
- Un tiret (-) ou un point d'exclamation (!) s'il suit un nombre paire non nul.
- Un point (.) s'il suit le nombre 0.
- Une virgule(,) ou un tiret(-) ou un point d'interrogation(?) ou un point d'exclamation(!) ou un point(.) s'il suit une consonne. Au total il y a 21 caractères dans un code.

  Ex: $a, 1 - 2!0.e, r?f.4 - z?e, 1$

1) Déterminer le nombre de codes possibles en respectant ces règles.
2) Déterminer le nombre de codes ne contenant pas de chiffres pairs.
3) Déterminer le nombre de codes contenant au plus deux virgules.
4) Déterminer le nombre de codes contenant au moins la lettre e et une virgule.
5) Déterminer le nombre de codes contenant exactement une lettre a et exactement un point.
6) Déterminer le nombre de codes contenant exactement une lettre a, exactement une lettre z et exactement un point.

Exercice 26 : Dans un jeu de 32 cartes, on tire 13 cartes au hasard.

1) Calculer le nombre de tirages possibles.
2) Calculer le nombre de tirages possibles pour avoir :
   a) exactement une dame.
   b) au plus un valet.
   c) au moins un as.
   d) exactement une dame et un neuf.
   e) exactement un roi, un huit et deux valets.
   f) exactement deux rois et trois pics.
   g) exactement un roi et 2 trêfles.

Exercice 27 : Une urne A contient 4 boules blanches et 6 boules noires. Une urne B contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On tire simultanément 2 boules de l'urne A et 1 boule de l'urne B.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles?
2. Donner le nombre de cas favorables à l'obtention de :

   a) 3 boules de la même couleur.

b) 1 boule blanche.
c) 2 boules blanche.

Exercice 28 : Soit l'ensemble $\Omega = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$.

1) Combien de nombres de 4 chiffres distincts peut-on former avec les éléments de Ω ?

2) Parmi ces nombres :

- Combien sont pairs ?
- Combien sont impairs ?
- Combien sont supérieurs à 9000 ?
- Combien sont inférieurs à 15000 ?

Exercice 29 : Chaque pièce d'un jeu de dominos dispose de deux faces, chaque face peut êtrenumérotée de 0 à 6. On remarque qu'une pièce peut être un «double» (les deux faces portent le même numéro), ou un «couple» (les deux faces portent des numéros différents).

1) Combien existe-t-il de pièces «doubles» ?

2) Combien existe-t-il de pièces «couples» ?

3) Combien y a-t-il de pièces dans un jeu de dominos ?

4) Répondre aux mêmes questions que précédemment en supposant que chaque face peut être numérotée de 0 à 8, de 0 à 10.

Exercice 30 : Combien y-a-t-il d'anagrammes des mots :

1. MATHEMATIQUES
2. INFORMATIQUE
3. REELLE

Exercice 31 :

1. Dénombrer le nombre d'anagrammes du mot "INFORME".
2. Dénombrer les anagrammes du mot "INFORME" dans chacun des cas suivants :
   a) commençant et finissant par une consonne ;
   b) commençant et finissant par une voyelle ;
   c) commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
   d) commençant par une voyelle et et finissant par une consonne.

Exercice 32 : On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 35 femmes et 28 hommes.

1) De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?

2) Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec :

   a) uniquement des hommes ;
   b) des personnes de même sexe ;
   c) au moins une femme et au moins un homme.