Equations et problèmes du second degré

Définition : L'équation du premier degré à une inconnue est une équation dans laquelle, le plus fort exposant de l'inconnue est 2.

Elle peut toujours être ramenée à la forme générale : $ax^2+bx+c=0$

x : l'inconnue ; a, b et c sont des quantités connues

Exemples : 1) Soit l'équation : $6x^2-15 = x^2+2x$

après transposition des termes et réduction, cette équation s'écrit : $5x^2-2x-15=0$. $\{a=5,\ b=-2,\ c=-15\}$

2) Soit l'équation : $x^3+mx^2+nx = 12+3x^2+x^3$

cette équation peut être écrite sous la forme :

$$(m-3)x^2+nx-12=0. \{a=m-3,\ b=n,\ c=-12\}$$

Remarque : b et c peuvent être nuls, mais le coefficient a n'est jamais nul, sinon il s'agit d'une équation du premier degré de la forme $bx+c=0$.

1). Résoudre une équation du second degré

c'est trouver les nombres (positifs, nuls ou négatifs) qui vérifient l'équation. Ces nombres s'appellent les racines de l'équation.

1.1. Équation incomplète :

L'équation est incomplète si l'un des coefficients b ou c est nul. Donc elle est des formes suivantes :

$$ax^2+bx=0$$

$$ax^2+c=0$$

Exemples : $3x^2-6x=0$; $5x^2-125=0$ ....

Résolution de l'équation incomplète $ax^2 + c = 0$:

Exemple : ① $4x^2 - 16 = 0$

$$4x^2 = 16$$

En divisant les deux membres par 4, on a : $x^2 = \frac{16}{4} = 4$

D'où, en passant à la racine carrée des deux membres,

il vient : $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

L'équation proposée admet deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$.

② $3x^2 + 14 = 0$

Comme dans l'exemple précédent, on trouve :

$$x^2 = \frac{-14}{3}$$

Le second membre est négatif !

Quelle que soit la valeur de x, son carré ne peut pas être négatif. L'équation proposée n'a donc pas de solution.

Généralisation

Soit l'équation $ax^2 + c = 0$,

donc $x^2 = \frac{-c}{a}$. On a deux cas :

(i) La quantité $\frac{-c}{a}$ est positive : on obtient deux racines

$x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$ et $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$

(ii) La quantité $\frac{-c}{a}$ est négatif : l'équation n'a pas de solutions.

Remarque : pour qu'il y ait deux racines, il faut que $-\frac{c}{a}$ soit positif $\Leftrightarrow \frac{c}{a}$ négatif

$\Leftrightarrow$ c et a de signe contraires.

Résolution de l'équation incomplète : $ax^2 + bx = 0$

Exemples : ① soit l'équation :

$$2x^2 - 8x = 0 \;;$$

en mettant x en facteur commun, on a :

$$x(2x - 8) = 0$$

or pour qu'un produit soit nul, il suffit que l'un des facteurs le soit. L'équation sera donc vérifiée pour $x = 0$ et pour $2x - 8 = 0$

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{8}{2} = 4$$

L'équation proposée admet donc deux racines :

$$x_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 = 4.$$

Généralisation

Soit l'équation : $ax^2 + bx = 0$

Elle peut s'écrire, en mettant x en facteur

$$x(ax + b) = 0$$

L'équation admet deux racines : $x_1 = 0$ et $x_2 = \dfrac{-b}{a}$

1.2. Équations complètes

: L'équation est complète si aucun des coefficients a, b, c n'est nul :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Pour résoudre cette équation, on calcule le discriminant Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

1°). Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de racine.

2°). Si $\Delta = 0$, l'équation a deux racines égales à $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

3°). Si $\Delta > 0$, l'équation a deux racines distinctes données par : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

__Exemples:__ Soit à résoudre les équations suivantes:

(1°) $3x^2 + 4x - 4 = 0$ $\quad a = 3\ ;\ b = 4\ ;\ c = -4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(3)(-4)$$
$$= 16 + 48 = 64 = 8^2 > 0$$

$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux racines:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-8}{2\times 3} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+8}{2\times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Les racines sont $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{2}{3}$.

11

34 × 11

374

(2°) $3x^2 - 5x - 8 = 0$

$a = 3,\ b = -5,\ c = -8$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

121

$$= (-5)^2 - 4(3)(-8) = 25 - 4(-24)$$
$$= 25 + 96 = 121 = (11)^2$$

$\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{121}}{2\times 3} = \frac{5-11}{6} = \frac{-6}{6}\ ;\quad \boxed{x_1 = -1}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{121}}{2\times 3} = \frac{5+11}{6} = \frac{16}{6}\ ;\quad \boxed{x_2 = \frac{8}{3}}$$

(3°) $5x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{5}{49} = 0$

$a = 5,\ b = -\frac{10}{7},\ c = \frac{5}{49}$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= \left(\frac{-10}{7}\right)^2 - 4(5)\left(\frac{5}{49}\right)$$
$$= \frac{100}{49} - \frac{100}{49} = 0$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{d}{c}\right)$$

$\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution double

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(\frac{-10}{7}\right)}{2\times 5} = \frac{\left(\frac{10}{7}\right)}{\left(\frac{10}{1}\right)} = \frac{10}{7} \times \frac{1}{10} = \frac{10}{70}$$

$$\boxed{x_0 = \frac{1}{7}}$$

(4) $5x^2 - 3x + 15 = 0$

$a = 5, \quad b = -3, \quad c = 15$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(5)(15) = 9 - 300$
$= -291 < 0$

$\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution.

(5) $\boxed{5x^2 + 10x + m \text{. Par quelle valeur peut-on remplacer } m \text{ pour que cette équation ait deux racines distinctes ? Deux racines confondues ? pas de racine ? Peut-on avoir des racines si } m \text{ est négatif ?}}$

racine double

- L'équation admet deux racines si $\Delta > 0$

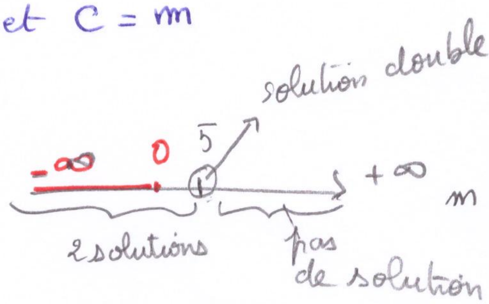
$\Delta = b^2 - 4ac \qquad a = 5, \quad b = 10 \quad \text{et} \quad c = m$

$= 100 - 4(5)(m) = \boxed{100 - 20m}$

$\Delta > 0 \iff 100 - 20m > 0$

$\iff -20m > -100$

$]-\infty, 5[$ $\qquad m < \frac{-100}{-20} = \frac{100}{20} = 5$



Si $m < 5$ alors l'équation admet deux racines distinctes.

- L'équation admet deux racine confondues si $\Delta = 0 \iff 100 - 20m = 0$
$\iff m = 5$
- L'équation n'admet pas de racine si $\Delta < 0 \iff m > 5$
- lorsque $m \in]-\infty, 0[$ (négatif), l'équation admet 2 solutions.

(6) Résoudre l'équation $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{2}$

$\frac{(x-2) + (x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{3}{2} \iff \frac{2x - 3}{(x-1)(x-2)} = \frac{3}{2}$

$\iff 2(2x-3) = 3(x-1)(x-2)$

$\iff 4x - 6 = 3(x^2 - 2x - x + 2) = 3(x^2 - 3x + 2)$

$\iff 4x - 6 = 3x^2 - 9x + 6$

$3x^2 - 9x - 4x + 6 + 6 = 0$

$\boxed{3x^2 - 13x + 12 = 0}$ $\qquad a = 3, \ b = -13, \ c = 12$
$\Delta = 25 > 0$

L'équation admet deux solutions $x_1 = \boxed{4/3}$ et $x_2 = \boxed{3}$

(7) On donne l'équation :

$$\frac{(3-x)^2-(2-x)^2}{(2-x)(3-x)}=\frac{a}{b} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^*$$

- Démontrer que cette équation du second degré a <u>toujours</u> des racines réelles.
- Calculer ces racines dans le cas où $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$

$b\left((3-x)^2-(2-x)^2\right) = a(2-x)(3-x)$ $\qquad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$b\left((9-6x+x^2)-(4-4x+x^2)\right) = a(6-2x-3x+x^2)$

$b(9-6x+\cancel{x^2}-4+4x-\cancel{x^2}) = a(6-5x+x^2)$

$b(5-2x) = 6a-5ax+ax^2$

$5b-2bx = 6a-5ax+ax^2$

$ax^2-5ax+2bx+6a-5b=0$

$$\boxed{\underbrace{a}_{A}x^2+\underbrace{(-5a+2b)}_{B}x+\underbrace{(6a-5b)}_{C}=0}$$

$\Delta = B^2-4AC$

$= (-5a+2b)^2-4a(6a-5b)$

$= (25a^2-2(+5a)(2b)+4b^2)-(24a^2-20ab)$

$= 25a^2-\cancel{20ab}+4b^2-24a^2+\cancel{20ab}$

$\boxed{\Delta = a^2+4b^2}$ c'est la somme de deux carrées donc $\Delta > 0$

($\Delta \neq 0$ car $\Delta = 0 \iff a=0$ et $b=0$ impossible car $b \in \mathbb{R}^*$).

Donc l'équation admet toujours deux racines réelles pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$

- Si $\frac{a}{b}=\frac{3}{2} \iff a=3$ et $b=2$ alors $\Delta = 3^2+4(2)^2 = 9+4\times4=25$

$x_1 = \frac{-B-\sqrt{25}}{2A} = \frac{-11-5}{2\times3} = \boxed{\frac{-16}{6}}$; $x_2 = \frac{-B+\sqrt{25}}{2A} = \frac{-11+5}{6} = \boxed{-1}$

2). Décomposition en facteurs en utilisant les racines

Soit l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

(1°) Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ peut être décomposé en facteurs : $\boxed{a}(x - x_1)(x - x_2)$

où x_1 et x_2 sont les deux racines de l'équation.

(2°) Si $\Delta = 0$, la décomposition s'écrit :

$$a(x - x_0)^2$$

où x_0 est la racine double.

(3°) Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ ne peut pas être factorisé. (irréductible)

Exemples : Décomposer en facteurs en utilisant les racines du trinôme :

(1°) $x^2 - 9x + 18$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -9 \\ c = 18 \end{cases}$

$\Delta = (-9)^2 - 4(1)(18)$

$\Delta = +81 - 72 = 9 > 0$

Donc 2 racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+9 - 3}{2}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9 + 3}{2}$ donc $x_1 = 3$ et

$x_2 = 6$. Alors : $x^2 - 9x + 18 = \overset{a}{1}(x - 3)(x - 6)$

(2°) $3x^2 - 21x + 36$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -21 \\ c = 36 \end{cases}$

$\Delta = (-21)^2 - 4(3)(36)$

$\Delta = 441 - 432 = \boxed{9} > 0$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{21 - 3}{6} = \dfrac{18}{6} = \boxed{3}$; $x_2 = \dfrac{21 + 3}{6} = \boxed{4}$

Donc : $3x^2 - 21x + 36 = 3(x - 3)(x - 4)$

(3°) $2x^2 - 12x + 18$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -12 \\ c = 18 \end{cases}$

$= (-12)^2 - 4(2)(18)$

$144 - 8 \times 18 = 144 - 144 = \boxed{0}$

Donc il existe une racine double

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{2 \times 2} = \dfrac{12}{4} = 3$

Donc : $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$

(4°) $2x^2 - 3x - 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{cases}$

$= (-3)^2 - 4(2)(-2)$

$= 9 + 16 = 25$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{3 - 5}{2 \times 2} = \dfrac{-2}{4} = \boxed{\dfrac{-1}{2}}$; $x_2 = \dfrac{3 + 5}{4} = \boxed{2}$

D'où : $2\left(x - \left(\dfrac{-1}{2}\right)\right)(x - 2)$

$2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2)$

(5°) Simplifier après avoir décomposé en facteurs :

$$\boxed{\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}}$$

• $x^2 - \overset{4^2}{16} = 0$ donc $x^2 = 16 = 4^2$

donc $x_1 = 4$ et $x_2 = -4$

$\boxed{x^2 - 16 = (x-4)(x+4)}$

• $x^2 - 5x + 4 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac$

avec $a = 1$, $b = -5$ et $c = 4$: $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(4)$

$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$

Donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{+5-3}{2} = \boxed{1}$ et $x_2 = \dfrac{5+3}{2} = \dfrac{8}{2} = \boxed{4}$

$\boxed{x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)}$

D'où : $\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4} = \dfrac{(\cancel{x-4})(x+4)}{(x-1)(\cancel{x-4})} = \dfrac{x+4}{x-1}$

$$\boxed{\frac{x^2+6x-27}{x^2-9x+18}}$$

• $x^2 + 6x - 27 = 0$ $\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 6 \\ c = -27 \end{array}\right.$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (6)^2 - 4(1)(-27)$

$= 36 + 108 = 144 = (12)^2 > 0$

Donc il existe deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-12}{2\times 1} = \dfrac{-18}{2} = \boxed{-9}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+12}{2\times 1} = \dfrac{6}{2} = \boxed{3}$

Donc $x^2 + 6x - 27 = (x-(-9))(x-3) = \boxed{(x+9)(x-3)}$

• $x^2 - 9x + 18 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -9 \\ c = 18 \end{array}\right.$

$\Delta = (-9)^2 - 4(1)(18)$

$= 81 - 72 = 9 > 0$. Donc il existe deux racines

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{+9+3}{2\times 1} = \dfrac{12}{2} = \boxed{6}$ $\quad = \dfrac{+9-3}{2\times 1} = \dfrac{6}{2} = \boxed{3}$

Donc : $x^2 - 9x + 18 = \boxed{(x-6)(x-3)}$

D'où : $\dfrac{x^2+6x-27}{x^2-9x+18} = \dfrac{(x+9)(\cancel{x-3})}{(x-6)(\cancel{x-3})} = \boxed{\dfrac{x+9}{x-6}}$