3). Relations entre les coefficients et les racines

Soit l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Il existe deux relations fondamentales entre les racines x_1 et x_2 de l'équation et les coefficients a, b, c :

L'une concerne la somme des racines et l'autre leur produit.

3.1. Somme des racines :

Les racines de l'équation sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Additionnants membre à membre, nous trouvons :

$$x_1 + x_2 = \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a} \quad . \quad \text{Donc} \quad \boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$

La somme de deux racines est égale au quotient en signe contraire du coefficient de x et celui de x^2.

Exemple : * Soit l'équation : $3x^2 + 8x - 12 = 0$ $(\Delta = 208 > 0)$
$a = 3$, $b = 8$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \boxed{-\frac{8}{3}}$

* Soit l'équation : $x^2 - 7x + 10 = 0$ $(\Delta = 9 > 0)$
$a = 1$ et $b = -7$ donc $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{1} = \boxed{+7}$

3.2. Produit de deux racines :

Le produit des deux racines est :

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a \times 2a} = \frac{\cancel{b^2} - (\cancel{b^2} - 4ac)}{4a^2}$$

$$\boxed{x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}}$$

Le produit des deux racines est égal au quotient du coefficient c par le coefficient de x^2

Exemple : Soit l'équation : $2x^2 - 11x - 3 = 0$ $a = 2$, $c = -3$, $b = -11$

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \boxed{\frac{-3}{2}}$, $x_1 + x_2 = \boxed{\frac{11}{2}}$

3.3. Application

(1°) Résoudre mentalement une équation à deux racines simples

* Soit l'équation : $x^2 - 5x + 6 = 0$. Cette équation a deux racines puisque $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 > 0$

on sait que : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = \frac{+5}{1} = \boxed{5}$

et : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = \boxed{6}$

On déduit que $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$ sont les deux racines.

* Soit l'équation : $x^2 - 11x + 28$

Trouvons les racines sans résoudre.

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-11)}{1} = \boxed{+11}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{28}{1} = \boxed{28}$

Donc $x_1 = 4$ et $x_2 = 7$ sont les deux racines

(2°) Vérifier les racines d'une équation du second degré.

* Soit l'équation : $x^2 + 3x - 28 = 0$.

On calcule et on trouve deux racines : $x_1 = 3$ et $x_2 = -6$

D'après la formule $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{1} = -3 \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-28}{1} = -28 \end{cases}$

$x_1 + x_2 = 3 + (-6) = 3 - 6 = \boxed{-3}$

$x_1 \times x_2 = 3 \times (-6) = -18$

$x_1 \times x_2 = -18 \neq -28$ Donc les deux racines ne sont correctes

* Soit l'équation : $x^2 + 8x + 15 = 0$

Vérifier si $x_1 = -5$ et $x_2 = -3$ sont les deux racines de cette équations.

$x_1 = -5$ et $x_2 = -3$

$x_1 + x_2 = -8$

$x_1 \times x_2 = +15$

D'après les formules : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-8}{1} = \boxed{-8}$ ✓

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{15}{1} = \boxed{15}$ ✓

Donc $\boxed{\text{oui}}$

(3°) Former une équation ayant pour racines x_1 et x_2

Soit : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

On peut l'écrire d'une façon équivalente :

$$x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{-(x_1+x_2)} x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{x_1 \times x_2} = 0$$

ou bien : $\boxed{x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \times x_2) = 0}$ ----- (*)

Exemples: Former une équation ayant pour racines :

(1°) $\frac{-3}{4}$ et $+2$, $x_1 + x_2 = \frac{-3}{4} + \frac{2}{1} = \frac{-3+8}{4} = \boxed{\frac{5}{4}}$

$x_1 \times x_2 = \frac{-3}{4} \times \frac{2}{1} = -\frac{6}{4} = \boxed{\frac{-3}{2}}$

D'après la formule (*), une équation ayant $x_1 = \frac{-3}{4}$ et $x_2 = +2$ comme deux racine est :

$$x^2 - \underbrace{\left(\frac{5}{4}\right)}_{x_1+x_2} x + \underbrace{\left(\frac{-3}{2}\right)}_{x_1 \times x_2} = 0 \iff x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\iff \boxed{4x^2 - 5x - 6 = 0}$$

(2°) -8 et -7

$x_1 + x_2 = -8-7 = \boxed{-15}$ $\quad x_1 = -8$

$x_1 \times x_2 = (-8)(-7) = \boxed{+56}$ $\quad x_2 = -7$

Donc l'équation qui admet $x_1 = -8$ et $x_2 = -7$ comme deux racines est : $\boxed{x^2 - \underbrace{(-15)}_{x_1+x_2} x + \underbrace{56}_{x_1 \times x_2} = 0}$

$\iff x^2 + 15x + 56 = 0$

(4°) Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit

On note : S = la somme donc $S = x_1 + x_2$

P = le produit donc $P = x_1 \times x_2$

x_1 et x_2 sont donc les racines de l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0 \qquad \text{(d'après (*))}$$

Exemples:

Trouver deux nombres dont la some S et le produit P sont donnés par :

(1) $S = \frac{-7}{2}$ et $P = -2$

Les nombres cherchés x_1 et x_2 sont solutions de l'équation

$$x^2 - Sx + P = 0 \iff x^2 - \left(\frac{-7}{2}\right)x - 2 = 0$$

$$\iff x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0$$

(en multipliant toute l'équation par 2) $\iff 2x^2 + 7x - 4 = 0$

$\Delta = (7)^2 - 4(2)(-4) = 49 + 32 = 81 = (9)^2 > 0$

Donc $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = -\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \boxed{-4}$; $x_2 = \boxed{\frac{1}{2}}$

Les deux nombres cherchés sont $x_1 = -4$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

(2) $S = 18$ et $P = 45$

Cela revient à résoudre l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0 \iff x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$\Delta = (-18)^2 - 4(1)(45) = 144 = (12)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+18-12}{2} = \boxed{3} \quad ; \quad x_2 = \frac{18+12}{2} = \boxed{15}$$

Les nombres cherchés tels que $S = 18$ et $P = 45$ sont $x_1 = 3$ et $x_2 = 15$

(3) $S = -7$ et $P = -60$

Cela revient à résoudre l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0 \iff x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$\Delta = (7)^2 - 4(1)(-60) = 289 = (17)^2$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-17}{2} = \frac{-24}{2} = -12$$

(on peut déjà deviner que $x_2 = 5$) car $S = -7$ et $P = -60$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+17}{2} = 5$$

A préparer pour vendredi 13/11

4). Équations irrationnelles du second degré :

Exemple ① $\sqrt{2x-3} + x = 3$

→ La résolution se fait après élévation au carré

→ Cette équation doit avoir un discriminant Δ nul ou positif

on aura $\sqrt{2x-3} = 3 - x$

on remarque immédiatement qu'on doit avoir

$$3 - x > 0 \quad \text{et} \quad 2x - 3 > 0$$

$$\cancel{-}x > \cancel{-}3 \quad \text{et} \quad x > \frac{3}{2}$$

$$x < 3 \quad \text{et} \quad x > \frac{3}{2}$$

En élevant au carré, on a :

$$2x - 3 = 9 - 6x + x^2$$

d'où : $x^2 - 8x + 12 = 0$

La résolution de cette équation donne :

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 12 \end{cases}$$

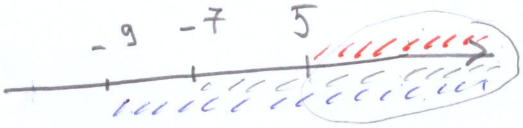
$$= (-8)^2 - 4(1)(12)$$

$\Delta = 16 > 0$. Donc l'équation admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+8-4}{2} = \boxed{2}$ ✓

et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+4}{2} = \boxed{6}$ ✗ . La racine $x = 6$ est à rejeter car $x = 6 \notin \left]\frac{3}{2}, 3\right[$

Exemple ② : $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5} = \sqrt{2x+18}$

On doit avoir : $\begin{cases} x + 7 \geq 0 \\ \text{et} \\ x - 5 \geq 0 \\ \text{et} \\ 2x + 18 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -7 \\ \text{et} \\ x \geq 5 \\ \text{et} \\ x \geq \frac{-18}{2} = -9 \end{cases}$



Donc $x \in \left]-7, +\infty\right[\underset{\text{et}}{\cap} \left]5, +\infty\right[\cap \left]-9, +\infty\right[$

ou $\boxed{x \in \left]5, +\infty\right[}$

En élevant au carré, on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Big(\underbrace{\sqrt{x+7}}_{a} + \underbrace{\sqrt{x-5}}_{b}\Big)^2 = 2x + 18$$

$$\boxed{\sqrt{X} \times \sqrt{Y} = \sqrt{X \times Y}}$$

$$(x+7) + 2\sqrt{x+7} \times \sqrt{x-5} + (x-5) = 2x + 18$$

$$(x+7) + 2\sqrt{(x+7)(x-5)} + (x-5) = 2x + 18$$

$$2\sqrt{(x+7)(x-5)} = \cancel{2x} + 18 - \cancel{2x} - 2$$

$$2\sqrt{(x+7)(x-5)} = 16 \quad \text{d'où : } \sqrt{(x+7)(x-5)} = \frac{16}{2} = 8$$

On se ramène à l'équation irrationnelle :

$$\sqrt{(x+7)(x-5)} = 8$$

On recommence, en élevant au carré, on a :

$$(x+7)(x-5) = 64$$

$$x^2 - 5x + 7x - 35 = 64$$

$x^2 + 2x - 35 - 64 = 0$ d'où : $x^2 + 2x - 99 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -99 \end{cases}$$

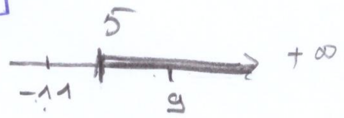
$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(-99)$$

$$= 4 + 396 = 400 > 0$$

Donc l'équation admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 20}{2} = \frac{-22}{2} = \boxed{-11}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 20}{2} = \frac{18}{2} = \boxed{9}$$



Comme $x_1 = -11 \notin]5, +\infty[$ alors cette racine est à rejeter. On déduit que l'équation irrationnelle admet une seule solution $\boxed{x = 9}$

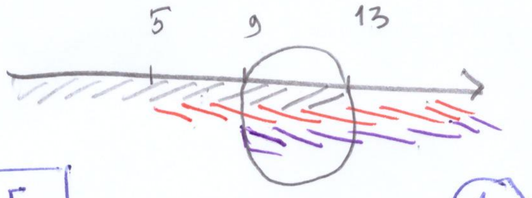
Exemple ③ : Résoudre $\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}} = \sqrt{13 - x}$

on doit avoir $\begin{cases} 13 - x > 0 \\ \text{et} \\ 2 + \sqrt{x-5} > 0 \\ \text{et } x - 5 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x > -13 \\ \sqrt{x-5} > -2 \\ \text{et } x > 5 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x < 13 \\ \text{et } x > 5 \\ \sqrt{x-5} > -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x < 13 \\ \text{et } x > 5 \\ x - 5 > (-2)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{(en élevant au carré)}$$

$$\iff \begin{cases} x < 13 \\ \text{et } x > 5 \\ \text{et } x - 9 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 13 \\ \text{et } x > 5 \\ x > 9 \end{cases}$$



$$\iff \boxed{x \in]9, 13[} \text{ - - - - - - - - - } ①$$

On peut maintenant résoudre l'équation en élevant au carré :

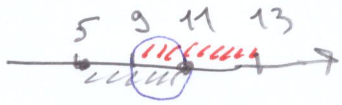
$$2 + \sqrt{x - 5} = 13 - x$$

D'où : $\sqrt{x-5} = 13 - x - 2$

$$\sqrt{x-5} = 11 - x$$

pour résoudre équation irrationnelle, on doit vérifier les deux conditions : $\begin{cases} x-5 > 0 \\ \text{et} \\ 11 - x > 0 \end{cases}$ (déjà prise en compte)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \; ✓ \\ -x > -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \; ✓ \\ x < 11 \end{cases}$$



D'où : $\boxed{x \in \,]5, 11[}$ ------ (2)

Donc pour résoudre, on doit avoir (1) et (2)

c'est-à-dire : $x \in \,]5, 11[\,\cap\,]9, 13[= \boxed{]9, 11[}$

Donc $\sqrt{x-5} = 11 - x \Rightarrow x - 5 = (11-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 23x + 126 = 0$

$\Delta = 25 > 0$ et $x_1 = 9$, et $x_2 = 14$: $x_1 \notin \,]9, 11[$ et $x_2 \notin \,]9, 11[$

5). Équations bicarrées : Soit l'équation :

$$a x^4 + b x^2 + c = 0 \quad \text{---------- (1)}$$

C'est une équation du quatrième degré qui ne contient que des puissances paires de l'inconnue x.

Résolution : on pose : $y = x^2$ (d'où : $x = \pm\sqrt{y}$)

on obtient donc l'équation : $a y^2 + b y + c = 0$ ------ (2)

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, on a deux racines pour l'équation (2) : y_1 et y_2
- A chaque racine positive y_1 ou y_2 correspondent deux racines en x pour l'équation (1).

Donc si $y_1 > 0$ et $y_2 > 0$, on aura :

$$x_1 = +\sqrt{y_1} \; ; \; x_2 = -\sqrt{y_1} \; ; \; x_3 = +\sqrt{y_2} \; ; \; x_4 = -\sqrt{y_2}$$

Exemples : (1) Soit l'équation : $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ ----- (1)

on pose $y = x^2$ donc (1) peut être réécrite sous la forme :

$\begin{cases} b=-6 \\ c=8 \end{cases}$ $y^2-6y+8=0$ .... (2)

C'est une équation de degré 2 d'inconnue y.

$\Delta=(-6)^2-4(1)(8)=36-32=4>0$

Donc l'équation (2) admet deux solutions distinctes:

$\boxed{y_1}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=\boxed{2} \Rightarrow y_1>0$

$\boxed{y_2}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}=\boxed{4} \Rightarrow y_2>0$

Comme $y=x^2$ donc les solutions de l'équation (1) sont:

$x_1=+\sqrt{y_1}=+\sqrt{2}$

$x_2=-\sqrt{y_1}=-\sqrt{2}$

$x_3=+\sqrt{y_2}=+\sqrt{4}=2$

$x_4=-\sqrt{y_2}=-\sqrt{4}=-2$

(2) Résoudre l'équation bicarrée suivante =

$x^4-5x^2+4=0$ .... (1)

On pose $y=x^2$. Alors l'équation (1) devient:

$y^2-5y+4=0$ .... (2) $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=4 \end{cases}$

$\Delta=(-5)^2-4(1)(4)=25-16=9>0$

Donc l'équation (2) admet deux solutions distinctes:

$y_1=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=\boxed{1} \Rightarrow y_1>0$

$y_2=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=\boxed{4} \Rightarrow y_2>0$

D'où les solutions de l'équation (1) sont:

$x_1=+\sqrt{y_1}$, $x_2=-\sqrt{y_1}$, $x_3=+\sqrt{y_2}$, $x_4=-\sqrt{y_2}$

c'est-à-dire: $x_1=\sqrt{1}=1$

$x_2=-\sqrt{1}=-1$

$x_3=\sqrt{4}=2$

$x_4=-\sqrt{4}=-2$