Mathématiques générales : TD4 (corrigés1)

Exercice 10 (Corr) : On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
   -**Réfléxivité**. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 - x^2 = 0 = x - x$, donc $x\mathcal{R}x$.
   -**Symétrie**. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$, c'est-à-dire $x^2 - y^2 = x - y$. En multipliant par -1 la dernière égalité, on obtient $y^2 - x^2 = y - x$. Ainsi $y\mathcal{R}y$.
   -**Transitivité**. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$ (c'est-à-dire $x^2 - y^2 = x - y$) et $y\mathcal{R}z$ ((c'est-à-dire $y^2 - z^2 = y - z$)). On a $x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (x - y) + (y - z) = x - z$, donc $x\mathcal{R}z$.

2. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, déterminer la classe d'équivalence de x.
   Fixons $x \in \mathcal{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors $y \in [x] \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x + y) - (x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \,\text{ou}\, x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \,\text{ou}\, y = 1 - x$. D'où $[x] = \{x, 1 - x\}$.

Exercice 13(Corr) :
Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $xe^y = ye^x$ est une relation d'équivalence.
-**Réfléxivité**.Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $xe^x = xe^x$, donc $x\mathcal{R}x$.
-**Symétrié**.Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$, c'est-à-dire $xe^y = ye^x$. On a $ye^x = xe^y$, donc $y\mathcal{R}x$.
-**Transitivité.** Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$ (c'est-à-dire $xe^y = ye^x$) et $y\mathcal{R}z$ (c'est-à-dire $ye^z = ze^y$). On a $(xe^y)(ye^z) = (ye^x)(ze^y)$ et en divisant par ye^y, on obtient $xe^z = ze^x$. Donc $x\mathcal{R}z$.

Exercice 14(corr) : Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, anti-symétriques, transitives :

1. $E = \mathbb{Z}$ et $x\mathcal{R}y$ $x = -y$,
   -$\mathcal{R}$ n'est pas réfléxive car $1 \neq -1$ ou encore non($1\mathcal{R}1$).
   -$\mathcal{R}$ est symétrique. En effet, soient $x, y \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$, i.e. ,$x = -y$. On a $y = -x$, donc $y\mathcal{R}x$.
   -$\mathcal{R}$ n'est antisymétrique. En effet, $1\mathcal{R} - 1$ et $-1\mathcal{R}1$ mais $-1 \neq 1$.
   -$\mathcal{R}$ n'est pas transitive. En effet $1\mathcal{R} - 1$ et $-1\mathcal{R}1$ mais non($1\mathcal{R}1$) car $1 \neq -1$.

2. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $cos^2x + sin^2y = 1$.
   -$\mathcal{R}$ est réfléxive. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a toujours $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $x\mathcal{R}x$.
   -$\mathcal{R}$ est symétrique. En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$, I.e. $\cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$. On a $1 = (1 - \sin^2(y)) + (1 - \cos^2(x)) = \cos^2(y) + \sin^2(x)$, donc $y\mathcal{R}x$.
   -$\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique. En effet $0\mathcal{R}\pi$ (car $\cos^2(0) + \sin^2(\pi) = 1$) et $\pi\mathcal{R}0$ (car $\cos^2(\pi) + \sin^2(0) = 1$) mais $0 \neq \pi$.
   -$\mathcal{R}$ est transitive. En effet soient $x, y, z\mathcal{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\ddagger$, i.e. $\cos^2(x) + sin^2(y) = 1$ et $\cos^2(y) + sin^2(z) = 1$. En faisant la somme, on obtient $\cos^2(x) + sin^2(y) + \cos^2(y) + sin^2(z) = 2$. Or $sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$, donc $\cos^2(x) + \sin^2(z) = 2 - (sin^2(y) + \cos^2(y)) = 2 - 1 = 1$. Ainsi $x\mathcal{R}z$.

3. $E = \mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y$ si et seulement si$\exists p, q \geq 1, y = px^q$ (p et q sont des entiers).
   -$\mathcal{R}$ est réfléxive. En effet, soit $x \in \mathbb{N}$. On a $x = 1 \times x^1$ ($p = q = 1$), donc $x\mathcal{R}x$.
   -$\mathcal{R}$ n'est pas symétrique. En effet $2\mathcal{R}6$ car $6 = 3 \times 2^1$ ($p = 3$ et $q = 1$) mais on ne peut pas écrire $2 = p \times 6^q$ (car 6 ne divise pas 2) donc $6\mathcal{R}2$.
   -$\mathcal{R}$ est antisymétrique. En effet, soient $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. En particulier x

divise y et y divise x. Donc $x = y$.
-$\mathcal{R}$ est transitive. En effet, soient $x, y, z \in \mathbb{N}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On peut écrire $y = px^q$ et $z = p'y^{q'}$, donc $z = p'y^{q'} = p'(px^q) = p'p^q x^{qq'}$ avec $p'p^q \geq 1$ et $qq' \geq 1$. Donc $x\mathcal{R}z$.

Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence?
-La seule relation d'équivalence est la relation 2. et la seule relation d'ordre est la 3.