FONCTIONS RÉELLES

Définition 0.1. Soit E une partie de $\mathbb{R}$. Une **fonction réelle** f sur E associe à chaque élément $x \in E$ au plus un élément $f(x) \in \mathbb{R}$. Pour $x \in E$, le nombre $f(x)$ est appelé **l'image** de x par f si il existe. En général, on note

$$f : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

ou

$$f : x \in E \mapsto x \in \mathbb{R}$$

Le **domaine de définition** D de f est l'ensemble des éléments $x \in E$ pour lesquels $f(x)$ existent.

Exemples 0.2.

- Considérons la fonction
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2. \end{cases}$$
Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}$.
- Considérons la fonction
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$
Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$.
- Considérons la fonction
$$f : \begin{cases}]0, +\infty[:\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$
Le domaine de définition de f est $D =]0, +\infty[$.

Définitions 0.3. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que

- f est strictement croissante sur E si pour tous $a, b \in E$, on a $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
- f est décroissante sur E si pour tous $a, b \in E$, on a $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
- f est monotone sur E si f est croissante ou f est décroissante.
- f est strictement croissante sur E si pour tous $a, b \in E$, on a $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
- f est strictement décroissante sur E si pour tous $a, b \in E$, on a $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
- f est strictement monotone sur E si f est strictement croissante ou f est strictement décroissante.

Remarque 0.4. Une fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante) est toujours croissante (resp. décroissante). En effet, soient $a, b \in E$ tels que $a \leq b$. Si $a = b$, alors $f(a) \leq f(a) = f(b)$ (resp. $f(b) = f(a) \geq f(a)$). Si $a < b$, comme f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) on a $f(a) < f(b)$ (resp. $f(b) > f(a)$). Ainsi $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(b) \geq f(a)$).

Exemples 0.5.

- La
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} :\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 2x + 1 \end{cases}$$
est strictement croissante. En effet, soient $a < b$. On a $2a < 2b$, donc $f(a) = 2a + 1 < 2b + 1 = f(b)$.

- La fonction
$$f : \begin{cases} [0, \infty[:\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = x^2 \end{cases}$$
est strictement croissante. En effet soient $a, b \in [0, \infty[$ tels que $a < b$. On a $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$. Or $b - a > 0$ et $a + b > 0$, donc $f(b) - f(a) = (b-a)(b+a) > 0$. Ainsi $f(a) < f(b)$.
- La
$$f : \begin{cases}]0, +\infty[:\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$
est strictement décroissante. En effet, soient a, b tels que $a < b$. On a $\dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{a}$, donc $f(b) > f(a)$.
- La
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} :\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = -3x + 2. \end{cases}$$
est strictement décroissante. En effet, soient a, b tels que $a < b$. On a $-3b > -3a$, donc $f(b) = -3b + 2 > -3a + 2 = f(a)$.