SOMMES-PRODUITS ET DÉNOMBREMENT

1. Sommes

Définition 1.1. Le symbole $\sum$ (sigma) s'appelle **symbole de sommation**. Etant donnée une de réels $x_1, x_2, \cdots$, la notation $\sum_{i=m}^{n} x_i$ se lit *somme des x_i pour i allant de i de m à n.* Cette quantité est, par définition, égale à $x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n$.

Exemples 1.2. - $\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5 = 15$. Ici $x_i = i$.
- $\sum_{i=5}^{7} i^2 = 5^2 + 6^2 + 7^2 =$. Ici, $x_i = i^2$.
- $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Ici, $x_i = i$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ici, $x_i = i^2$.
-$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. Ici, $x_i = i^3$.

Il y a certaines règles de calculs :
- $\sum_{i=m}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=m}^{n} x_i + \sum_{i=m}^{n} y_i$,
- $\sum_{i=m}^{n} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=m}^{n} x_i$.

Attention, en règle générale, $\sum_{i=m}^{n}(x_i y_i) \neq (\sum_{i=m}^{n} x_i)(\sum_{i=m}^{n} y_i)$.

On peut faire à un changment d'indice :
- on change les bornes de la somme : $\sum_{i=3}^{n+3} a_i = \sum_{k=0}^{n} a_{k+3}$. On a posé : $k = i - 3$.
- on change l'indice dans les termes à sommer : $\sum_{k=0}^{n} a_{k+3} = \sum_{i=3}^{n+3} a_i$.
  On a posé $i = k + 3$.

On peut vérifier qu'on ne s'est pas trompé en régardant le premier et le dernier terme de la somme avant et après changement d'indice.

Définition 1.3. On appelle **somme télescopique** toute somme du type suivant
$\sum_{i=m}^{n}(a_{i+1} - a_i)$ où $(a_n)_{n\leq 0}$ est une suite.

Propriétés 1.4. $\sum_{i=m}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m$.

2. Produits

Définition 2.1. Le symbole $\prod$ (pi) s'appelle **symbole produit**. Etant donnée une suite de réels $x_1, x_2 \cdots$, la notation $\prod_{i=m}^{n} x_i$ se lit *produit des x_i pour i allant de i de m à n.* Cette quantité est, par définition, égale à $x_m \times x_{m+1} \times \cdots \times x_n$.

Exemples 2.2. -$\prod_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2 = 36$. Ici $x_i = i^2$.
-$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$. Ici $x_i = i$.

Il y a certaines règles de calculs :
- $\prod_{i=m}^{n}(x_i y_i) = (\prod_{i=m}^{n} x_i)(\prod_{i=m}^{n} y_i)$,
- $\prod_{i=m}^{n} \lambda x_i = \lambda^{n-m+1} \prod_{i=m}^{n} x_i$.

3. Suites arithmétiques et géométriques

Définition 3.1. Une suite de réels $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite **arithmétique** s'il existe un réel r, que l'on appelle la **raison** de la suite, tel que

$$u_{n+1} = u_n + r, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Propriétés 3.2. -Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r. Alors

- pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = u_0 + nr$. C'est le **terme général** de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
- pour tous entiers $s \leq t$, on a $u_t = u_s + (t-s)r$.
- $\sum_{i=s}^{t} u_i = \dfrac{(u_s + u_t)(t-s+1)}{2}$, pour tous $s \leq t$.

Exemples 3.3.
- On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 2n+3$ pour tout $n \geq 0$. Alors, pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+1} = 2(n+1)+3 = (2n+3)+2 = u_n + 2$. Ainsi $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$. On voit bien que $u_n = nr + u_0$ pour tout $n \geq 0$. On a

$$\sum_{i=15}^{70} u_i = \frac{(u_{15} + u_{70})(70-15+1)}{2} = \frac{((2\cdot 15+3)+(2\cdot 70+1))\cdot 56}{2} = 4872.$$

- Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = -\frac{1}{3}n + 7$ pour tout $n \geq 0$. Alors, pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+1} = -\frac{1}{3}(n+1)+3 = (-\frac{1}{3}n+7)+(-\frac{1}{3}) = u_n + (-\frac{1}{3})$. Ainsi $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = -\frac{1}{3}$.

Définition 3.4. Une suite de réels $(v_n)_{n\geq 0}$ est dite **géométrique** s'il existe un réel $q \neq 1$, que l'on appelle la **raison** de la suite, tel que

$$v_{n+1} = qv_n, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Propriétés 3.5. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q. Alors,
- pour tout $n \geq 0$, on a $v_n = v_0 q^n$. C'est le **terme général** de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$.
- pour tous entiers $s \leq t$, on a $v_t = v_s q^{t-s}$.
- $\sum_{i=s}^{t} v_i = u_s \dfrac{q^{t-s+1}-1}{q-1}$, pour tous $s \leq t$.

Exemples 3.6.
- On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = 7\cdot 5^n$ pour tout $n \geq 0$. Alors, pour tout $n \geq 0$, on a $v_{n+1} = 7\cdot 5^{n+1} = 5\cdot(7\cdot 5^n) = 5\cdot u_n$. Ainsi $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 5$. On voit clairement que $v_{n+1} = qv_n$ pour tout $n \geq 0$.
- Considérons la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = 5\left(-\frac{2}{11}\right)^{n-1}$ pour tout $n \geq 0$. Alors, pour tout $n \geq 0$, on a $v_{n+1} = 5\left(-\frac{2}{11}\right)^{(n+1)-1} = 5\left(-\frac{2}{11}\right)^{n} = 5\left(-\frac{2}{11}\right)^{n-1}\cdot\left(-\frac{2}{11}\right) = -\frac{2}{11}\cdot v_n$. Ainsi $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{11}$.

4. Factorielles

Définition 4.1. La notation $n!$ ($n \in \mathbb{N}$) se lit **factorielle** n est définie par :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \times n-1 \times \cdots \times 2 \times 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Exemples 4.2. - $1! = 1$.
-$2! = 2 \times 1 = 2$.
-$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
-$\dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$.

5. Dénombrement

5.1. **Principe des choix successifs.** Supposons qu'on fait n choix successifs tels que:
- pour le premier choix, il y a q_1 possibilités,
- pour le second choix, il y a q_2 possibilités,

- ...
- pour le n-ème choix, il y a q_n possibilités,

alors il y a $q_1 q_2 \cdots q_n$ façons d'enchaîner, l'un après l'autre, ces n choix.
Application : Tirage successif avec remise. On considère n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement avec remise k boules. Le nombre de résultats possibles est n^k.

5.2. **Arrangements.**

Définition 5.1. Soit $k, n \leq 0$. **L'arrangement** de k parmi n, que l'on note par A_n^k, est le nombre

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Application : Tirage successif sans remise. On considère n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement sans remise k boules où $k \leq n$. Le nombre de résultats possibles est A_n^k.

5.3. **Combinaisons.**

Définition 5.2. Soit $k, n \leq 0$. La notation $\binom{n}{k}$ ou C_n^k qui se k **parmi** n est le nombre

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Définition 5.3. Soit E un ensemble. Une partie ou sous-ensemble de E de cardinal k s'appelle une k**-partie** de E ou une **combinaison de** p **éléments de** E.

Propriétés 5.4. -Soit E un ensemble de cardinal n et $k \leq n$. Le nombre de k-parties de E est k parmi n: $\binom{n}{k}$.
- Soient $k, n \geq 0$. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Application : Tirage simultané. On considère n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément k boules où $k \leq n$. Le nombre de résultats possibles est C_n^k.