Feuille de TD 5

Exercice 1

1) $x^2 - 25 = 0$

$x^2 - (5)^2 = 0$ $\qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(x-5)(x+5) = 0$ $\qquad$ (identité remarquable)

Donc $(x-5) = 0$ ou $x + 5 = 0$

$x = 5$ ou $x = -5$

Donc les solutions sont $x_1 = 5$ et $x_2 = -5$

Autre méthode: $x^2 - 25 = 0$

$x^2 = 25$

$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

2/ $5x^2 - 48 = 3x^2 - 144$

$5x^2 - 3x^2 - 48 + 144 = 0$

$2x^2 + 96 = 0$

$2x^2 = -96$

$x^2 = \frac{-96}{2} = -48$

$x^2 = -48 < 0$ impossible !

Alors l'équation n'admet pas de solutions réelles (on peut retrouver ce résultat en calculant Δ et on trouve $\Delta < 0$ donc pas de solution)

3/ $\frac{4x^2}{5} - \frac{60}{1} = \frac{3x^2}{4}$

$\frac{16x^2 - 1200}{\cancel{20}} = \frac{5 \times 3x^2}{20} = \frac{15x^2}{\cancel{20}}$

$16x^2 - 1200 = 15x^2$

$16x^2 - 15x^2 - 1200 = 0$

$x^2 - 1200 = 0$ d'où $x^2 = 1200$

Alors : $x = \pm\sqrt{1200}$

$$1200 = 4 \times 3 \times 100$$
$$= 4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 10$$
$$4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2$$
$$= 4 \times 3 \times 25 \times 4$$

$$\sqrt{1200} = \sqrt{4 \times 4 \times 3 \times 25}$$
$$= \sqrt{4^2 \times 3 \times 5^2} = 4 \times 5\sqrt{3}$$
$$= 20\sqrt{3}$$

D'ou on a deux solutions :

$$x_1 = -20\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = +20\sqrt{3}.$$

4/ $\dfrac{2x^2+3x}{4} = \dfrac{4x^2}{3} - \dfrac{5x}{4}$

on commence par réduire au même dénominateur :

$$\frac{3(2x^2+3x)}{12} = \frac{4(4x^2) - 3(5x)}{12}$$

$$\frac{6x^2+9x}{\cancel{12}} = \frac{16x^2 - 15x}{\cancel{12}}$$

D'ou, on a : $6x^2 + 9x = 16x^2 - 15x$

$$6x^2 - 16x^2 + 9x + 15x = 0$$

$$-10x^2 + 24x = 0$$

pour résoudre cette équation de second degré,

avec $\begin{cases} a = -10 \\ b = 24 \\ c = 0 \end{cases}$, on peut factoriser :

$$-5 \times 2x^2 + 12 \times 2x = 0$$

$$2x(-5x + 12) = 0$$

on a un produit de deux facteurs qui est nul, donc c'est soit le premier $2x$ qui est nul, soit le 2ème qui est nul c'est-à-dire $-5x + 12$.

$x = 0$ ou $-5x = -12$

$x = 0$ ou $x = \frac{-12}{-5} = \frac{12}{5}$

Les solutions de l'équation sont $x = 0$ et $x = \frac{12}{5}$.

5/ $(\underbrace{2x}_{a} + \underbrace{5}_{b})(2x - 5) = -44$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$(2x)^2 - 5^2 = -44$

$4x^2 - 25 = -44$

$4x^2 - 25 + 44 = 0$

$4x^2 + 19 = 0$ une équation incomplète

avec $\begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ c = 19 \end{cases}$ donc $4x^2 = -19$! impossible car le carré est toujours positif.

Donc, l'équation n'admet pas de solutions.

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 0 - 4(4)(19)$
< 0

6/ $\frac{5x^2}{3} = x^2 + 30$

$\frac{5x^2}{\cancel{3}} = \frac{3(x^2+30)}{3} = \frac{3x^2 + 90}{\cancel{3}}$

$5x^2 = 3x^2 + 90$

$5x^2 - 3x^2 - 90 = 0$

$2x^2 - 90 = 0$ une équation incomplète

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -90 \end{cases}$

$2x^2 = 90$

$x^2 = \frac{90}{2} = 45$

$\boxed{\begin{matrix} x^2 = c > 0 \\ x = \pm\sqrt{c} \end{matrix}}$

on a donc deux solutions

$x = -\sqrt{45}$ et $x = +\sqrt{45}$

$x = \boxed{-3\sqrt{5}}$ et $x = \boxed{+3\sqrt{5}}$

$$\left(\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5} \right).$$

Exercice 2 :

4/ $x(x-8) + 7 = 0$

$x^2 - 8x + 7 = 0$ $\quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 7 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-8)^2 - 4 \cdot (1)(7) =$

$= +64 - 28 = \boxed{36} = 6^2 > 0$

Donc il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8-6}{2} = \dfrac{2}{2} = \boxed{1}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8+6}{2} = \dfrac{14}{2} = \boxed{7}$

Donc, $x_1 = 1$ et $x_2 = 7$.

5/ $(\boxed{x} + \boxed{5})(x+2) = 40$

$x^2 + 2x + 5x + 10 = 40$

$x^2 + 7x + 10 - 40 = 0$

$x^2 + 7x - 30 = 0$ $\quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 7 \\ c = -30 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 7^2 - 4(1)(-30) =$

$= 49 + 120 = 169 = (13)^2 > 0$

Donc, on a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7 - 13}{2} = \dfrac{-20}{2} = \boxed{-10}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7 + 13}{2} = \dfrac{+6}{2} = \boxed{3}$

Alors, on a $x_1 = -10$ et $x_2 = 3$

6/ $2x^2 - 4\sqrt{2}\,x + 2 = 0$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4\sqrt{2} \\ c = 2 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 2$

$= +16(\sqrt{2})^2 - 16$

$= 16 \times 2 - 16 = \boxed{16} > 0$

Donc il y a deux solutions :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4\sqrt{2} - 4}{2 \times 2} = \frac{4\sqrt{2} - 4}{4} = \frac{\cancel{4}(\sqrt{2} - 1)}{\cancel{4}}$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4\sqrt{2} + 4}{4} = \frac{\cancel{4}(\sqrt{2} + 1)}{\cancel{4}} = \sqrt{2} + 1$

Les solutions sont : $x_1 = \sqrt{2} - 1$ et $x_2 = \sqrt{2} + 1$.

7°/ $2x^2 - \frac{11}{10}x - \frac{3}{10} = 0$

méthode 1 :

$\begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{-11}{10} \\ C = \frac{-3}{10} \end{cases}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= \left(\frac{-11}{10}\right)^2 - \frac{4}{1} \times \frac{2}{1} \times \left(\frac{-3}{10}\right)$

$= \frac{11^2}{10^2} + \frac{24}{10}$

$= \frac{121}{100} + \frac{240}{100} = \frac{361}{100}$

$\Delta = \frac{19^2}{10^2} = \left(\frac{19}{10}\right)^2 > 0$

Donc on a deux solutions

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{11}{10} - \frac{19}{10}}{4}$

$= \frac{\frac{11 - 19}{10}}{4} = \frac{\frac{-8}{10}}{\frac{4}{1}}$

$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{d}{c}\right)$

$= \frac{-8}{10} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{-2}{10} = \boxed{\frac{-1}{5}}$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{11}{10} + \frac{19}{10}}{4}$

$= \frac{\frac{30}{10}}{4} = \frac{30}{10} \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$

$x_2 = \boxed{\frac{3}{4}}$

<u>méthode 2 :</u> on a : $2x^2 - \frac{11}{10}x - \frac{3}{10} = 0$

$$\frac{20x^2}{10} - \frac{11}{10}x - \frac{3}{10} = 0$$

$$\frac{20x^2 - 11x - 3}{10} = 0$$

d'où : $20x^2 - 11x - 3 = 0$

$$\begin{cases} a = 20 \\ b = -11 \\ c = -3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-11)^2 - 4 \times 20 \times (-3) \\ &= 121 + 240 = 361 > 0 \end{aligned}$$

on a deux solutions :

$$x_1 = \frac{11 - 19}{40} = \frac{-8}{40} = \boxed{\frac{-1}{5}}$$

$$x_2 = \frac{11 + 19}{40} = \frac{30}{40} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

8/ $\frac{2x-1}{x-1} - \frac{2x-3}{x-2} + \frac{1}{6} = 0$

$$\frac{6(x-2)(2x-1) - 6(x-1)(2x-3) + (x-1)(x-2)}{6(x-1)(x-2)} = 0$$

$\Rightarrow 6(\underbrace{2x^2 - x - 4x + 2}) - 6(\underbrace{2x^2 - 3x - 2x + 3}) + (\underbrace{x^2 - 2x - x + 2}) = 0$

$\Rightarrow 6(2x^2 - 5x + 2) - 6(2x^2 - 5x + 3) + (x^2 - 3x + 2) = 0$

$\Rightarrow \cancel{12x^2} - \cancel{30x} + 12 - \cancel{12x^2} + \cancel{30x} - 18 + x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -4 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-3)^2 - 4(1)(-4) = +9 + 16 = \boxed{25} > 0$

On a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = \boxed{4}$$

L'équation est définie si : $x - 1 \neq 0$ et $x - 2 \neq 0$

c-est-à-dire : $x \neq 1$ et $x \neq 2$. (sinon problème de division par zéro.)

Donc, $x \notin \{1, 2\}$.

Comme $x_1, x_2 \notin \{1, 2\}$. Alors les deux solution

$x_1 = -1$ et $x_2 = 4$ sont acceptées.

Exercice 3 : Équations bicarrées :

1/ $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

On pose : $\boxed{y = x^2}$. Donc obtient :

$y^2 - 13y + 36 = 0$ qui est une équation de degré 2 et d'inconnue y.

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -13 \\ c = 36 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4(1)(36)$

$= 169 - 144 = \boxed{25} > 0$

Donc l'équation en "y" admet deux solutions :

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+5}{2} = \frac{18}{2} = \boxed{9}$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-5}{2} = \frac{8}{2} = \boxed{4}$$

Mais $y = x^2$. Pour trouver les solutions de l'équation en "x", il suffit de passer à la racine carrée avec chaque valeur : y_1, y_2 :

$$x_1 = \sqrt{y_1}, \quad x_2 = -\sqrt{y_1}, \quad x_3 = \sqrt{y_2}, \quad x_4 = -\sqrt{y_2}$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -2$$

On a bien quatres solutions pour l'équation de départ.

2/ $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

On pose $y = x^2$ donc l'équation devient :

$$y^2 - 8y - 9 = 0 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = -9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-8)^2 - 4(1)(-9) \\ &= 64 + 36 = 100 > 0 \end{aligned}$$

Donc l'équation en y admet deux solutions :

$$y_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - 10}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

$$y_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + 10}{2} = \frac{18}{2} = \boxed{9}$$

Alors, $x^2 = y$, alors :

- $x^2 = -1 < 0$ (impossible !)
- $x^2 = 9$. Donc $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Donc les solutions de l'équation de départ sont $\underline{\underline{-3}}$ et $\underline{\underline{+3}}$.

3/ $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

On pose $y = x^2$. L'équation devient :

$y^2 - 18y + 81 = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -18 \\ c = 81 \end{cases}$

$\Delta = (-18)^2 - 4(1)(81)$

$\Delta = 324 - 324 = 0$

Donc l'équation admet une solution double :

$y_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{18}{2} = 9$

Comme $y = x^2$. Alors $9 = x^2$

et $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Donc l'équation admet deux solutions : $\underline{\underline{-3}}$ et $\underline{\underline{+3}}$.