FONCTIONS RÉELLES

1. Généralités sur les fonctions

Définition 1.1. Soit E une partie de $\mathbb{R}$. Une **fonction réelle** f sur E associe à chaque élément $x \in E$ au plus un élément $f(x) \in \mathbb{R}$. Pour $x \in E$, le nombre $f(x)$ est appelé **l'image** de x par f si il existe. En général, on note

$$f : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

ou

$$f : x \in E \mapsto x \in \mathbb{R}$$

Le **domaine de définition** D de f est l'ensemble des éléments $x \in E$ pour lesquels $f(x)$ existent.

Exemples 1.2.

- Considérons la fonction
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2. \end{cases}$$
Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}$.
- Considérons la fonction
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$
Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$.
- Considérons la fonction
$$f : \begin{cases}]0, +\infty[: \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$
Le domaine de définition de f est $D =]0, +\infty[$.

Définition 1.3. Soit f une fonction définie sur E. L'*image* de E par f, que l'on note $f(E)$ est l'ensemble des valeurs prises par f dans $\mathbb{R}$. On a

$$f(E) = \{f(x) | x \in E\}.$$

Définition 1.4. Soit $f : E \to F \subset \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *bijective* si pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Dans ce cas, on note $f^{-1} : F \to E$ la *fonction réciproque* de f qui à $y \in F$ on a associe $g^{-1}(y) = x$ où x l'unique élément de E tel que $y = f(x)$. Dans ce cas $(f \circ f^{-1})(y) = y$ pour tout $y \in F$ et $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ pour tout $x \in E$.

Définition 1.5. Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : F \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(E) \subset F$. La *composée* de g par f, que l'on note par $g \circ f$ est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in E$.

Exemples 1.6.

- Considérons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{x}$, on a
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$
- Considérons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \in [0, +\infty[\mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$, on a
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} = \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 2}.$$

1.1. **Fonctions monotones.**

Définitions 1.7. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que

- f est strictement croissante sur E si pour tous $a, b \in E$, on a $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
- f est décroissante sur E si pour tous $a, b \in E$, on a $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
- f est monotone sur E si f est croissante ou f est décroissante.
- f est strictement croissante sur E si pour tous $a, b \in E$, on a $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
- f est strictement décroissante sur E si pour tous $a, b \in E$, on a $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
- f est strictement monotone sur E si f est strictement croissante ou f est strictement décroissante.

Remarque 1.8. Une fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante) est toujours croissante (resp. décroissante). En effet, soient $a, b \in E$ tels que $a \leq b$. Si $a = b$, alors $f(a) \leq f(a) = f(b)$ (resp. $f(b) = f(a) \geq f(a)$). Si $a < b$, comme f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) on a $f(a) < f(b)$ (resp. $f(b) > f(a)$). Ainsi $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(b) \geq f(a)$).

Exemples 1.9.

- La
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} :\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 2x + 1 \end{cases}$$
est strictement croissante. En effet, soient $a < b$. On a $2a < 2b$, donc $f(a) = 2a + 1 < 2b + 1 = f(b)$.
- La fonction
$$f : \begin{cases} [0, \infty[:\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = x^2 \end{cases}$$
est strictement croissante. En effet soient $a, b \in [0, \infty[$ tels que $a < b$. On a $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. Or $b - a > 0$ et $a + b > 0$, donc $f(b) - f(a) = (b - a)(b + a) > 0$. Ainsi $f(a) < f(b)$.
- La
$$f : \begin{cases}]0, +\infty[:\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$
est strictement décroissante. En effet, soient a, b tels que $a < b$. On a $\dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{a}$, donc $f(b) > f(a)$.
- La
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} :\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = -3x + 2. \end{cases}$$
est strictement décroissante. En effet, soient a, b tels que $a < b$. On a $-3b > -3a$, donc $f(b) = -3b + 2 > -3a + 2 = f(a)$.

1.2. **Périodicité, parité et symétrie.**

Définitions 1.10. Soit $f : \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- f est *paire* si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = f(x)$.

  Exemple 1.11. LA fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^4 \in \mathbb{R}$ est paire. En effet, on a $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$.

- f est *impaire* si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f((-x) = -f(x)$.

  Exemple 1.12. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ est impaire. En effet, on a $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

- f est *périodique* de *période* $T > 0$ si pour tout $x \in R$, on a $f(x + T) = f(x)$.

  Exemple 1.13. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$.

1.3. **Concavité et Convexité.**

Définitions 1.14. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

- f est *convexe* si
$$\forall(x,y) \in I \times I, \forall t \in [0,1], f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$
- f est *concave* si $-f$ est convexe.

Exemple 1.15. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est convexe.

2. Limites

Définition 2.1.

- Soient $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction et $l \in \mathbb{R}$. On dit que *la limite* de f en $+\infty$ est l, et on écrit
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$
si pour x assez grand, $f(x)-l$ est assez petit.
- Soient f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty,a[$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que *la limite* de f en $-\infty$ est l, et on écrit
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$
si pour $-x$ assez grand, $f(x)-l$ est assez petit.
- Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in E$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que *la limite* de f en x_0 est l, et on écrit
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$
si pour $x-x_0$ assez petit, $f(x)-l$ est assez petit.
- Soient $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que *la limite* de f en $+\infty$ est $+\infty$ (resp. $-\infty$), et on écrit
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \,(\text{resp. } -\infty)$$
si pour x assez grand, $f(x)$ (resp. $-f(x)$) est assez grand.
- Soient $f :]-\infty,a[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que *la limite* de f en $-\infty$ est $+\infty$ (resp. $-\infty$), et on écrit
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \,(\text{resp. } -\infty)$$
si pour $-x$ assez grand, $f(x)$ (resp. $-f(x)$) est assez grand.
- Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in E$. On dit que *la limite* de f en x_0 est $+\infty$ (resp. $-\infty$), et on écrit
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \,(\text{resp. } -\infty)$$
si pour $x-x_0$ assez petit, $f(x)$ (resp. $-f(x)$) est assez grand.

3. Continuité

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.

Définition 3.1.

- Soit $x_0 \in I$. On dit que f est **continue** en x_0 si pour tout $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe.
- On dit que f est continue sur I si pour tout $x_0 \in I$, la fonction f est continue en x_0.

Théorème 3.2 (**Théorème des valeurs intermédiaires**). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors, pour tous x_0 et y_0 dans I et pour tout y entre $f(x_0)$ et $f(y_0)$, il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$.*

Théorème 3.3 (**Théorème de la bijection**). *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intevalle, $f : I \to f(I)$ est bijective et $f^{-1} : f(I) :\to I$ est une bijection continue et strictement monotone dans le même sens que f.*

Propriétés 3.4.

- *Les fonctions polynomiales $x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*

- *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha \dot{f} + \beta \dot{g}$ et $f \dot{g}$ sont continues sur I*
- *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I tels que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.*
- *Soient f et g deux fonctions continues respectivement sur l'invervalle I et l'intervalle J telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est continue sur I.*

4. Fonction exponentielle

Définition 4.1. Soit $a > 0$. La fonction *exponentielle de base* a est la fonction continue $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in]0, +\infty[$. Dans le cas où $a = e$, on retrouve la fonction exponentielle usuelle exp.

Exemples 4.2. La fonction exponentielle de base 8 est la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 8^x$.

Propriétés 4.3. *Soit $a > 0$.*
- *Soit $a > 1$. La fonction exponentielle de base a est strictement croissante. On a $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$.*
- *Soit $a < 1$. La fonction exponentielle de base a est strictement décroissante. On a $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.*

5. Fonction logarithme

Définition 5.1. Soit $a > 0$. La fonction *logarithme* de base a est $\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de la fonctione exponentielle de base a. Dans le cas où $a = e$, on retrouve le logarithme népérien ln.

Propriétés 5.2. *Soit $a > 0$.*
- *On a $\log_a(a^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $a^{\log_a(x)} = x$ pour tout $x \in]0, \infty[$. En particulier, on a $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x \in]0, \infty[$.*
- *La fonction exponentielle induit une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]0, +\infty[$.*
- *La fonction logarithme induit une bijection entre $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$.*
- *Soit $a > 1$. La fonction logarithmé de base a est strictement croissante. On a*
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$$
et
$$\lim_{x \to 0} \log_a(x) = -\infty.$$
- *Soit $a < 1$. La fonction logarithme de base a est strictement décroissante. On a*
$$\lim_{x \to 0} a^x = +\infty$$
et
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty.$$

6. Dérivabilité

Définition 6.1. Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f est *dérivable* en x_0 si la limite
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe et on la note par $f'(x_0)$. On dit que f est *dérivable* sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Exemple 6.2. On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a
$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0.$$

Définition 6.3. Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$. La droite tangente à la courbe de f en x_0 est la droite d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Exemple 6.4. On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. L'équation de la tangente en -3 est $y = f'(-3)(x - (-3)) + f(-3) = 2(-3)(x + 3) + (-3)^2 = -6x - 18 + 9 = -6x - 9$.

Théorème 6.5. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

- *Si pour tout $x \in I$ $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) , alors f est croissante (décroissante) sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$ $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$ $f(x) = 0$, alors f est constante sur I.*
- *Si f' est croissante sur I, alors f est convexe sur I.*
- *Si f' est décroissante sur I, alors f est concave sur I.*

Supposons de plus que f' est dérivable sur I.

- *Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est convexe sur I.*
- *Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est concave sur I.*

Propriétés 6.6. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $a, b \in \mathbb{R}$.*

- *Si f et g sont dérivables en x_0, alors $a\dot{f} + b\dot{g}$ l'est aussi et on a*

$$(a\dot{f} + b\dot{g})'(x_0) = a\dot{f}'(x_0) + b\dot{g}'(x_0).$$

- *Si f et g sont dérivables en x_0, alors $f\dot{g}$ l'est aussi et on a*

$$(f\dot{g})'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) + g'(x_0).$$

- *Si f et g sont dérivables en x_0 et $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ l'est aussi et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

- *Si h est une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $f(I) \subset J$, alors $h \circ f$ est dérivable sur I et on a*

$$(h \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\dot{h}'(f(x_0)).$$

  On a donc $(h \circ f)' = f'\dot{(}h' \circ f)$.
- *Si $f(I)$ est un intervalle, f est une bijection de I sur $f(I)$ et la fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable, alors pour tout $y_0 \in f(I)$, on a*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

6.1. **Dérivées usuelles.**

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^\alpha \ (\alpha < 0)$	$\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$x^\alpha \ (\alpha > 0)$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x) \ (a > 0 \ a \neq 1)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$a^x \ (a > 0)$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln(a)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

7. Lever une forme indéterminée