Correction : dénombrement

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}$

Exercice 13 :

$\boxed{10 \text{ choix}}$ $\boxed{9 \text{ choix}}$ $\boxed{8 \text{ choix}}$

• Cela revient à tirer successivement 3 chevaux parmi 10.

Donc le nombre de tiercés possibles est $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

fixé, 9 choix, 8 choix

• Si on connaît le vainqueur, il reste à déterminer le second cheval et le troisième parmi les 9 autres, donc il y a $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$ tiercés possibles.

Exercice 14 :

On choisit simultanément 3 livres parmi 10, donc on a

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3!\,7!} = \frac{720}{6} = 120.$$

• Si elle est sûre d'acheter un choisi à l'avance, pour les 2 autres, il y a

$$C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2! \times 7!} = 36$$

choix.

$|\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8, L_9, L_{10}\}|$ $10 \times 9 \times 8 / 3!$

$\{U, V, W\}$ $\{L_1, L_2, L_3\}$ (L_3, L_2, L_3)

Exercice 12 :

5 choix, 5 choix, 5 choix, 5 choix

1ère roue, 2ème roue, 3ème roue, 4ème roue

$= \{(a, b, c, d)\}$

• 1er cadenas :

Le nombre d'essais à faire pour ouvrir le cadenas est : $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$.

• 2ème cadenas :

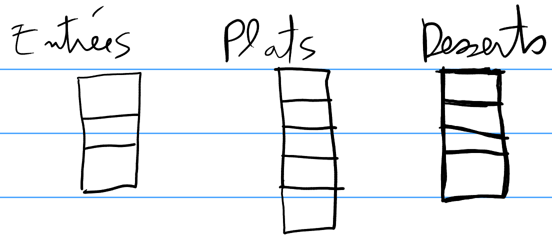
$= \{(a, b, c, d, e, f)\}$

3 choix, 3 choix, 3 choix, 3 choix, 3 choix, 3 choix

Le nombre d'essais à faire pour ouvrir le cadenas est $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$.

Donc le 2ème cadenas est plus sûr que le 1er.

Exercice 15 :



Desserts $= \{A, B, C, D\}$ Ex : A, B
B, A

Entrée : 3 choix
Plat : 5 choix
Desserts : 4 choix

$\Rightarrow$ $3 \times 5 \times 4 = 60$ possibilités Entrée - plat - dessert

· Si on choisit un plat et 2 desserts, on a $\underset{\text{choix du plat}}{5} \times \underset{\text{choix des desserts distincts}}{C_4^2} = 30$ possibilités.

$$= 5 \times \frac{4!}{2!(4-2)!} = 5 \times \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!\,2!} = 5 \times \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} = 5 \times 6 = 30$$

Exercice 16

* 4-4-2 : Gardien | Défenseurs | Milieux | Attaquants
3 choix | C_8^4 choix | C_5^4 choix | C_7^2 choix

Au total, il y a $3 \times C_8^4 \times C_5^4 \times C_7^2$ choix possibles

* 4-3-3 : Gardien | Défenseurs | Milieux | Attaquants
3 choix | C_8^4 choix | C_5^3 choix | C_7^3 choix.

Au total, il y a $3 \times C_8^4 \times C_5^3 \times C_7^3$ choix possibles

* le gardien est sur le terrain, un défenseur est déjà choisi

Exercice 17

1- Tirage simultané : $C_7^3 = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4!}{3!\times 4!} = 35$ tirages possibles.

$= \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 7\times 5$

2- Tirage successif avec remise

1ère boule 2ème boule 3ème boule tirés

10 choix 10 choix 10 choix

$\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7\}$

Simultané : $\{U, V, W\}$

Tirage successif avec remise : $\square\ \square\ \square$

Au total, il y a $10\times 10\times 10 = 1000$ tirages possibles

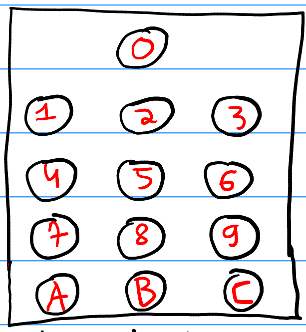
3- Tirage successif sans remise

1ère boule 2ème boule 3ème boule

10 choix 9 choix 8 choix

Au total, il y a $10\times 9\times 8 = 980$ tirages possibles.

Exercice 18 :



Ex : A 1 2 3 4 $\neq$ A 2 1 3 4

$|\mathrm{card}(\Omega)| = 3\times 10\times 10\times 10\times 10$

$\Omega = \{A, B, C\}\times\{0, \dots, 9\}\times\{0, \dots, 9\}\times\{0, \dots, 9\}\times\{0, \dots, 9\}$

Code : $= \{(a, b, c, d, e) / \dots\}$

1- 1 lettre   Nombre de 4 chiffres

3 choix 10 choix 10 choix 10 choix 10 choix

le nombre de codes différents est $3\times 10\times 10\times 10\times 10 = 30000$

2 - Sans le chiffre 9 : chiffre on choisit parmi {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} 9

lettre $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{}$ 4 chiffres

3 choix 9 choix 9 choix 9 choix 9 choix

$\Rightarrow 3 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 19683$ codes

(a, b, c, d, e)

$A \subset \Omega$

3 - Notons Ω l'ensemble de tous les codes et A l'ensemble de tous les codes contenant au moins le chiffre 1.

Ex : $\overline{A}$ 2134

$\overline{A}$: l'ensemble de tous les codes sans le chiffre 1

Déterminons $\overline{A}$

lettre 4 chiffres

3 choix 9 choix 9 choix 9 choix 9 choix

D'où $\#\overline{A} = 3 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$
$= 19683$.

On a $\#A = \#\Omega - \#\overline{A} = 30.000 - 19683 = 10317$.

4 - Comportant des chiffres distincts

lettre 4 chiffres

3 choix 10 choix 9 choix 8 choix 7 choix

$\Rightarrow 3 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 15120$ codes

Ex : B 1213

5 - Notons B l'ensemble des codes contenant au moins deux chiffres identiques, $\overline{B}$ l'ensemble des codes comportant des chiffres distincts.

On a $\#B = \#\Omega - \#\overline{B} = 30.000 - 15120 = 14880$ codes.

Exercice 19 :

or argent bronze

16 choix 15 choix 14 choix

Il y a $16 \times 15 \times 14 = 3360$ distributions possibles

Menu = (Entrée, plat, dessert)

Exo 20

Entrée	plat	dessert
5 choix	4 choix	6 choix

$\Rightarrow$ Il y a $5 \times 4 \times 6 = 120$ menus possibles

Ex : {2 carreau, D coeur, 5 coeur, 10 trèfle}

Une carte (hauteur, couleur)

10 de trèfle

Exo 23 : carreau ♦, coeur ♥, trèfle ♣, pique ♠ : couleurs | Pour chaque couleur, il y a 13 hauteurs

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R hauteur

1- le nombre de mains possibles est $C_{52}^{4} = \#\Omega$, Ω l'ensemble des mains

2- On choisit 4 cartes de couleurs différentes de la couleur pique. Le nombre de mains est alors $C_{52-13}^{4} = C_{39}^{4}$.

3- Notons D = {mains contenant un as exactement, un roi exactement, un carreau exactement}

Ex : {2 trèfle, 1 carreau, R de coeur, 10 carreau} $\notin D$ / {2 trèfle, 1 pique, R de carreau, 10 trèfle} $\in D$.

D_1 = {mains dans D contenant un as de carreau}

D_2 = {mains dans D contenant un roi de carreau}

D_3 = {mains dans D contenant un carreau qui n'est ni as ni roi}

On a $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$

- $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
- $D_2 \cap D_3 = \emptyset$
- $D_1 \cap D_3 = \emptyset$

On a $\#D = \#D_1 + \#D_2 + \#D_3$

$\#D_1 = ??$ {1 carreau, R non carreau, 2 autres}

- On choisit un roi qui n'est pas carreau : 3 choix
- On choisit 2 cartes qui n'est ni roi ni as ni carreau : il y a $C^{2}_{\underset{\text{choix de couleurs}}{3} \times \underset{\text{choix de hauteurs}}{11}} = C_{33}^{2}$

Donc $\#D_1 = 3 \times C_{33}^{2}$

$\#D_2 = ??$ Même raisonnement, on a $\#D_2 = 3 \times C_{33}^{2}$

$\#D_3 = ??$. Choix du carreau qui n'est ni as ni roi : 11

· Choix de as qui n'est pas carreau : 3
· Choix d'un roi qui n'est pas carreau : 3
· Choix d'une carte qui n'est ni carreau ni as ni roi :

$$\underset{\text{couleur}}{3} \times \underset{\text{hauteurs}}{11}$$

$$\# D_3 = 11 \times 3 \times 3 \times (3 \times 11) = 3^3 \times 11^2$$

D'où $\# D = \# D_1 + \# D_2 + \# D_3 = 3 \times C_{33}^2 + 3 \times C_{33}^2 + 3^3 \times 11^2$.

4 – $S = \{$mains contenant au moins un as et au moins une trèfle$\}$.

$(x \geq 1$ et $y \geq 1)$ ↓ négation $(x = 0$ ou $y = 0)$

$\overline{S} = \{$mains qui ne contiennent pas de as ou qui ne contiennent pas de trèfles$\}$

$= \underbrace{\{\text{mains qui ne contiennent pas de as}\}}_{S_1} \cup \underbrace{\{\text{mains qui ne contiennent pas de trèfle}\}}_{S_2}$

$\{$2 trèfle, 3 carreau, R pique, 6 pique$\}$

$= S_1 \cup S_2$

$$\# \overline{S} = \#(S_1 \cup S_2) = \# S_1 + \# S_2 - \#(S_1 \cap S_2)$$

· $\underline{\# S_1}$: On a $\# S_1 = C^4_{52 - \underset{\text{le nombre d'as}}{4}} = C^4_{48}$

· $\# S_2$: On a $\# S_2 = C^4_{52 - \underset{\text{le nombre de cartes de trèfles}}{13}} = C^4_{39}$

· $\#(S_1 \cap S_2)$: On a $\#(S_1 \cap S_2) = C^4_{3 \times 12} = C^4_{36}$

$S_1 \cap S_2 = \{$mains ne contenant ni as | ni trèfles$\}$ (hauteur | couleur)

$\#\{$cartes qui ne sont ni as ni trèfle$\} = 3 \times 12 = 36$

Donc $\# \overline{S} = \# S_1 + \# S_2 - \#(S_1 \cap S_2) = C^4_{48} + C^4_{39} - C^4_{36}$

D'où $\# S = \# \Omega - \# \overline{S} = C^4_{52} - (C^4_{48} + C^4_{39} - C^4_{36})$

$$4 \times 52 \neq \frac{52!}{4!(52-4)!}$$

Exo 30 : Déf : Un anagramme d'un mot est un mot obtenu en permutant ~~des~~ les lettres.

Ex : * CAHIER → HCARIE
ACHRIE

* HABILITER → AHIBILRTE

Lettres	nbres d'apparition
A	1
C	1
E	1
H	1
I	1
R	1

$$\text{nbre d'anagrammes} = \frac{(\text{longueur du mot})!}{\prod (\text{nbre d'apparition de lettres})!}$$

$$\leftarrow \frac{6!}{1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!}$$

Lettres	nbres d'apparitions
H	1
A	1
B	1
I	2
L	1
T	1
E	1
R	1

$$\rightarrow \frac{9!}{1!\,1!\,1!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!}$$

1 – MATHEMATIQUES

Lettres	nbres d'apparitio
M	2
A	2
T	2
H	1
E	2
I	1
Q	1
U	1
S	1

$$\rightarrow \frac{13!}{2!\,2!\,2!\,1!\,2!\,1!\,1!\,1!}$$

2 - INFORMATIQUE

lettres	nbres d'apparitio
I	2
N	1
F	1
O	1
R	1
M	1
A	1
T	1
Q	1
U	1
E	1

$$\rightsquigarrow \frac{12!}{2!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!}$$

3 - REELE

lettres	Nbres d'apparitio
E	3
R	1
L	1

$$\rightsquigarrow \frac{5!}{3!\,1!\,1!}$$