Exercice 4 :

1/ $x + \sqrt{x} = 20$

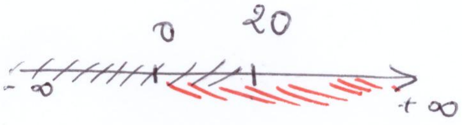
$\sqrt{x} = 20 - x$

* 1ère condition : $x \geqslant 0$

2ème condition : $20 - x \geqslant 0$ sinon la racine carrée est négative

Donc $x \in [0, +\infty[$ et $-x \geqslant -20$

$x \in [0, +\infty[$ et $x \leqslant 20$



$x \in [0, +\infty[\cap]-\infty, 20]$

d'où $\boxed{x \in [0, 20].}$

* En élevant au carré, on a :

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$x = (20 - x)^2 = (20)^2 + (x)^2 - 20x$

$x = 400 + x^2 - 20x$

$0 = 400 + x^2 - 21x$

$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 21x + 400 = 0 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 21 \\ C = 400 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

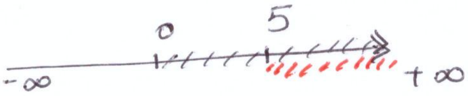
$= (21)^2 - 4(1)(400)$

$= 441 - 1600 = -1159 < 0$

Donc l'équation n'admet pas de solution.

2/ $3\sqrt{2x} - 4x = -20$

$3\sqrt{2x} = 4x - 20$



1ère condition : $2x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 0$

2ème condition : $4x - 20 \geqslant 0 \Longleftrightarrow 4x \geqslant 20 \Longleftrightarrow x \geqslant \frac{20}{4} = 5$

Donc l'équation est définie sur $[0, +\infty[\cap [5, +\infty[= [5, +\infty[$

Résolution de l'équation :

$$3^2 \times 2x = (4x - 20)^2$$

$$9 \times 2x = (\overset{a}{4x})^2 + (\overset{b}{20})^2 - 2(4x)(20)$$

$$18x = 16x^2 + 400 - 160x$$

$$0 = 16x^2 + 400 - 178x$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 178x + 400 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 89x + 200 = 0 \qquad \begin{cases} a = 8 \\ b = -89 \\ c = 200 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-89)^2 - 4(8)(200)$$
$$= 1521 > 0$$

Donc l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{89 - 39}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8} \times$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{89 + 39}{16} = \frac{128}{16} = \boxed{8} \checkmark$$

$x_1 = \frac{25}{8} \notin [5, +\infty[$, donc cette solution est rejetée.

L'équation admet donc une solution $\boxed{x = 8}$

4/ $\sqrt{x^2 + 5} = 1 - \sqrt{x^2 - 8} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{x^2 - 8} = 1$

1ère condition : $x^2 + 5 \geq 0$ ce qui est toujours vérifié !

2ème condition : $x^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{8})^2 \geq 0$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \longrightarrow \Leftrightarrow (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) \geq 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{8}$		$\sqrt{8}$		$+\infty$
$x - \sqrt{8}$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{8}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8})$		$+$	|	$-$	|	$+$	

$x - \sqrt{8} = 0$
$\Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{8}}$

$x + \sqrt{8} = 0$
$\Leftrightarrow x = -\sqrt{8}$

D'où : $(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{8}] \cup [\sqrt{8}, +\infty[$

* Résoudre l'équation :

$$\Big(\underbrace{\sqrt{x^2+5}}_{a} + \underbrace{\sqrt{x^2-8}}_{b}\Big)^2 = 1^2 = 1$$

$$(x^2+5) + (x^2-8) + 2\sqrt{x^2+5} \times \sqrt{x^2-8} = 1$$

$$2x^2 - 3 + 2\sqrt{(x^2+5)(x^2-8)} = 1$$

$$\cancel{2}\sqrt{(x^2+5)(x^2-8)} = 1 - 2x^2 + 3$$

$$= 4 - 2x^2$$

$$= \cancel{2}(2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+5)(x^2-8)} = 2 - x^2$$

Pour donner un sens à cette équation, il faut imposer la condition suivante :

$2 - x^2 \geq 0$ sinon la racine carrée est négative.

$$(\sqrt{2})^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) \geq 0$$

$x + \sqrt{2} = 0$
$x = -\sqrt{2}$

$\sqrt{2} - x = 0$
$-x = -\sqrt{2}$
$\boxed{x = \sqrt{2}}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{2}-x$	$+$		$+$	0	$-$	
$(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)$	$-$		$+$		$-$	

$\sqrt{2} - x \geq 0$
$-x \geq -\sqrt{2}$
$x \leq \sqrt{2}$

Donc $(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Comme de plus $x^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{8}] \cup [\sqrt{8}, +\infty[$

Alors l'équation est définie si

$$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \Big(]-\infty, -\sqrt{8}] \cup [\sqrt{8}, +\infty[\Big) = \emptyset$$

Donc l'équation n'a pas de solution.

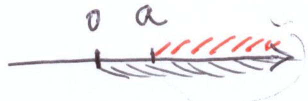
5/ $2\sqrt{x} = x - a$, $a \in \mathbb{R}$

1ère condition : $x \geq 0$

2ème condition : $\underline{x - a} \geq 0$ sinon la racine carrée est négative

Donc on doit avoir $x \in [0,+\infty[\cap [a,+\infty[$

* si $a = 0$  , $x \in [0,+\infty[$

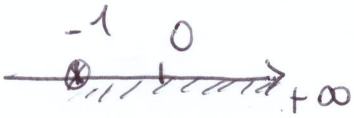
* si $a > 0$  , $x \in [a,+\infty[$

* si $a < 0$  , $x \in [0,+\infty[$

Pour résoudre l'équation, on va élever au carré :

$$2^2 \times x = (x-a)^2$$
$$4x = x^2 + a^2 - 2ax$$
$$x^2 - 2ax - 4x + a^2 = 0$$
$$\boxed{\Leftrightarrow x^2 - (2a+4)x + a^2 = 0}$$
$$\Delta = (-(2a+4))^2 - 4(1)(a^2)$$
$$= 4a^2 + 16 + 2 \times 2a \times 4 - 4a^2$$
$$= \cancel{4a^2} + 16 + 16a - \cancel{4a^2}$$
$$\Delta = 16 + 16a$$

cas 1 : si $\Delta > 0 \Leftrightarrow 16 + 16a > 0$, $\Leftrightarrow$



$$\Leftrightarrow 16a > -16$$
$$\Leftrightarrow a > \frac{-16}{16}$$
$$\Leftrightarrow a > -1 \Leftrightarrow a \in]-1,0[\cup [0,+\infty[$$

Donc l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{(2a+4) - \sqrt{16+16a}}{2 \times 1} \quad ; \quad x_2 = \frac{2a+4+\sqrt{16+16a}}{2}$$

5/ $x_1 = 4 + \frac{2}{\sqrt{5}}$; $x_2 = 4 - \frac{2}{\sqrt{5}}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$x^2 - \left(4 + \cancel{\frac{2}{\sqrt{5}}} + 4 - \cancel{\frac{2}{\sqrt{5}}}\right)x + \left(4 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(4 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$x^2 - 8x + \left(4^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\right) = 0$$

$$\underbrace{x^2}_{} - \underbrace{8x}_{} + \underbrace{16 - \frac{4}{5}}_{} = 0 \qquad 16 - \frac{4}{5} = \frac{80-4}{5} = \frac{76}{5}$$

$$\frac{5\times x^2}{5} - \frac{8x^{\times 5}}{5} + \frac{76}{5} = 0 \iff 5x^2 - 40x + 76 = 0$$

Exercice 6: Si on a : $x_1 + x_2 = S$

$x_1 \times x_1 = P$

Donc x_1 et x_2 sont les deux racines de l'équation :

$$X^2 - SX + P = 0$$

1/ $S = 18$; $P = 45$

Notons ces deux nombres cherchés x_1 et x_2. Alors :

x_1 et x_2 sont solution de l'équation :

$$x^2 - 18x + 45 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -18 \\ c = 45 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (18)^2 - 4(1)(45) =$

$324 - 180 = 144 = (12)^2 > 0$

On a bien deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 - 12}{2} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 + 12}{2} = \frac{30}{2} = \boxed{15}$$

Exercice 7 :

?

1/ $x^2 - 6x + m = 0$ $\quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = m \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-6)^2 - 4(1)(m)$

$\boxed{\Delta = 36 - 4m}$

cas 1 : $\Delta > 0 \Leftrightarrow 36 - 4m > 0$

$\Leftrightarrow -4m > -36$

$m < \frac{-36}{-4} = 9$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 9$ et dans ce cas, l'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{36-4m}}{2}$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{36-4m}}{2}$

cas 2 : $\Delta = 0 \Leftrightarrow 36 - 4m = 0$

$-4m = -36$

$m = \frac{-36}{-4} = 9$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 9$ et donc l'équation admet une solution double : $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$

cas 3 : $\Delta < 0 \Leftrightarrow 36 - 4m < 0$

$-4m < -36$

$m > \frac{-36}{-4} = 9$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow m > 9$

Donc l'équation n'admet de solutions