COURS SUR LES ENSEMBLES ET LES RELATIONS

1. Ensembles

Définition 1.1. Un **ensemble** E est une collection d'objets. Chaque objet x de E est appelé un **élément** de E et on note $x \in E$. Dans le cas contraire, on note $x \notin E$. Un ensemble E peut être défini :

- soit par **extension** : on explicite tous ses éléments entre deux accolades.
- soit par **compréhension** : on définit ses éléments par une propriété. L'ensemble E est alors de la forme
$$E = \{x \in \cdots \mid P(x)\}.$$

Exemple 1.2.
- *L'ensemble* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ *constitué des entiers naturels.*
- *L'ensemble* $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ *constitué des entiers relatifs.*
- *L'ensemble* $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ *constitué des nombres rationnels.*
- *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *constitué des nombres réels.*
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *(en extension).*
- $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair}\}$ *(en compréhension).*

Définition 1.3. Soient F et E deux ensembles. On dit que F est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E si tout élément de F est un élément de E. On dit aussi que F est **inclus** dans E. On note $F \subset E$. Dans le cas contraire, on note $F \not\subset E$. Si $F \subset E$ mais $F \neq E$, on dit que F est **strictement inclus** dans E et on note $F \subsetneq E$.

Exemples 1.4.
- *On considère* $\Omega = \mathbb{N}$, $E = \{2, 4, 5, 8, 10\}$, $F = \{2, 5, 8\}$ *et* $G = \{3, 4, 5, 8\}$. *On a* $F \subset E$ *et* $G \not\subset E$. *On voit aussi que* $F \subsetneq E$.
- *On a* $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

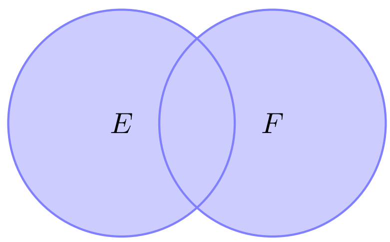
Définition 1.5. On dit que deux ensembles E et F sont **égaux**, que l'on note par $E = F$, s'ils ont les mêmes éléments. Cela revient à dire que $E \subset F$ et $F \subset E$.

Définition 1.6. L'**ensemble vide**, que l'on note $\emptyset$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On remarque que l'ensemble vide est inclus dans n'importe quel ensemble.

Définition 1.7. Soient Ω un ensemble et E et F deux sous-ensembles de Ω.

- La **réunion** de E et F, que l'on note $E \cup F$, est l'ensemble des éléments de Ω qui sont soit dans E soit dans F. On a
$$E \cup F = \{x \in \Omega \mid x \in E \,\text{ou}\, x \in F\}.$$

$E \cup F$

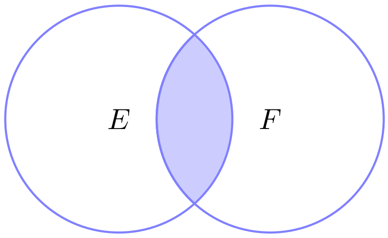


Exemple 1.8. *On considère* $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$*,* $E = \{a, c, d, e\}$ *et* $F = \{c, e, g, h\}$*. On a* $E \cup F = \{a, c, d, e, g, h\}$*.*

- L' **intersection** de E et F, que l'on note $E \cap F$, est l'ensemble des éléments de Ω qui sont à la fois dans E et dans F. On a

$$E \cap F = \{x \in \Omega \mid x \in E \,\text{et}\, x \in F\}.$$

$E \cap F$



Exemple 1.9. *On considère* $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$*,* $E = \{a, c, d, e\}$ *et* $F = \{c, e, g, h\}$*. On a* $E \cap F = \{c, e\}$*.*

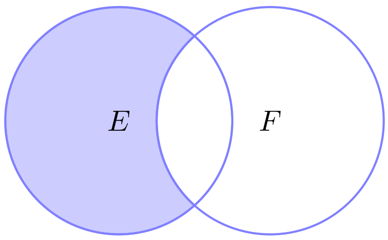
- Le **complémentaire** de E dans Ω, que l'on note $\overline{E}$ ou $C_\Omega(E)$, est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans E. On a

$$\overline{E} = \{x \in \Omega \mid x \notin E\}.$$

Exemple 1.10. *On considère* $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ *et* $E = \{a, c, d, e\}$*. On a* $\overline{E} = \{b, f, g, h\}$*.*

- La **différence** entre E et F, que l'on note $E \setminus F$ ou $E - F$, est l'ensemble des éléments de Ω qui sont dans E mais ne sont pas dans F. On a $E - F = \{x \in \Omega \mid x \in E \,\text{et}\, x \notin F\} = E \cap \overline{F}$.

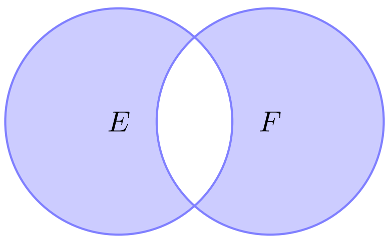
$E - F$



Exemple 1.11. *On considère* $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$*,* $E = \{a, c, d, e\}$ *et* $F = \{c, e, g, h\}$*. On a* $E - F = \{a, d\}$*.*

- La **différence symétrique** de E et F, que l'on note par $E \triangle F$ est l'ensemble $E \triangle F = (E - F) \cup (F - E)$.

$E \triangle F$



Exemple 1.12. *On considère* $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$*,* $E = \{a, c, d, e\}$ *et* $F = \{c, e, g, h\}$*. On a* $E \triangle F = \{a, d, g, h\}$*.*

- Le **produit cartésien** de E et F, que l'on note $E \times F$, est l'ensemble des couples dont le premier élément est dans E et le second élément est dans F. On a

$$E \times F = \{(e, f) \mid e \in E \,\text{et}\, f \in F\}.$$

Exemple 1.13. *On considère* $E = \{0, 1, 2, 3\}$ *et* $F = \{a, b, c\}$. *On a*

$$E \times F = \{(0, a); (0, b); (0, c); (1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c); (3, a); (3, b); (3, c)\}.$$

- L' **ensemble des parties de** Ω, que l'on note $P(\Omega)$, est l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de Ω. On a $P(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\}$.

  Exemple 1.14. *On prend* $\Omega = \{1, 3, 5\}$. *On a*

  $$P(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \Omega\}.$$

Définition 1.15. On dit que deux ensembles E et F sont **disjoints** si $E \cap F = \emptyset$.

Exemple 1.16. *On considère* $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{1, 7, 8\}$ *et* $G = \{5, 6\}$. *Les ensembles* E *et* F *ne sont pas disjoints car* $E \cap F = \{1\} \neq \emptyset$ *mais les ensembles* E *et* G *sont disjoints car* $E \cap G = \emptyset$.

Propriétés 1.17. *Soient* $E, F, G \subset \Omega$ *des ensembles.*

- ***Distributivité :*** *On a*

  $$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$$

  et

  $$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G).$$

- ***Associativité :*** *On a*

  $$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$$

  et

  $$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G.$$

- ***Commutativité :*** *On a*

  $$E \cup F = F \cup E$$

  et

  $$E \cap F = F \cap E.$$

Définition 1.18. Le **cardinal** d'un ensemble E, que l'on note $\text{card}(E)$ ou $\#E$, est le nombre de ses éléments. On dit qu'un ensemble E est **fini** s'il n'a qu'un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dite que E est **infini** et on note $\text{card}(E) = +\infty$.

Exemples 1.19.
- *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *est infini.*
- *Pour* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, *on a* $\#E = 6$ *et donc* E *est un ensemble fini.*

Propriétés 1.20.
- *On a* $\text{card}(\emptyset) = 0$.
- *On a* $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$
- *On a* $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$. *En conséquence, si* $E \cap F = \emptyset$, *alors* $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$.
- *Si* E *est un ensemble fini, on a* $\text{card}(P(E)) = 2^{\text{card}(E)}$.

Définition 1.21. Soit Ω un ensemble non vide. Une **partition** de Ω est la donnée d'une famille de parties $(\Omega_i)_{i \in I}$ de Ω (c'est-à-dire $\Omega_i \subset \Omega$ pour tout $i \in I$) vérifiant :

- pour tout $i \in I$, on a $\Omega_i \neq \emptyset$,
- pour tous $i \neq j$ dans I, on a $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$;
- et $\cup_{i \in I} \Omega_i = \Omega$.

Concrètement, se donner une partition d'un ensemble revient à le diviser en plusieurs parties.

Exemple 1.22. *On considère* $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. *On peut prendre :*

- $\Omega_1 = \{a, b, c\}$ *et* $\Omega_2 = \{d, e, f, g, h\}$. *En effet, on a :*
  - $\Omega_1 \neq \emptyset$ *et* $\Omega_2 \neq \emptyset$,
  - $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$,
  - *et* $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$.
- $\Omega_1 = \{a, d\}$, $\Omega_2 = \{b, e, f\}$ *et* $\Omega_3 = \{c, g, h\}$. *En effet, on a :*
  - $\Omega_1 \neq \emptyset$, $\Omega_2 \neq \emptyset$ *et* $\Omega_3 \neq \emptyset$,
  - $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_1 \cap \Omega_3 = \emptyset$ *et* $\Omega_2 \cap \Omega_3 = \emptyset$,
  - *et* $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 = \Omega$.

2. Rappels sur les intervalles

Soient $a \leq b$ deux nombres réels. On définit les intervalles :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$,
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$,
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$,
- et $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$.

3. Relations

Définition 3.1. Soient E et F deux ensembles. Une **relation binaire** entre E et F est une partie $\mathcal{R}$ de $E \times F$. Dans le cas où $E = F$, on dit que $\mathcal{R}$ est une **relation binaire** sur E. Pour $(e, f) \in \mathcal{R}$, on dit que e est en relation avec f et on note $e\mathcal{R}f$.

Exemples 3.2.
- *On considère* $E = \{1, 2, 3\}$ *et* $F = \{a, b, c, d\}$. *L'ensemble*
$$\mathcal{R} = \{(1, a); (2, c); (2, d)\}$$
est une relation binaire entre E *et* F.
- *On considère* $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. *L'ensemble*
$$\mathcal{R} = \{(a, c); (a, d); (e, e); (f, g)\}$$
est une relation binaire sur E.

Définition 3.3. Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E, c'est-à-dire, $\mathcal{R} \subset E \times E$. On dit que $\mathcal{R}$ est :

(1) **réfléxive** si pour tout $e \in E$, on a $e\mathcal{R}e$.

Exemple 3.4.
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *et* $\mathcal{R} = \{(1, 2); (1, 5); (2, 2); (2, 3)\}$. *La relation* $\mathcal{R}$ *n'est pas réfléxive car* $(1, 1) \notin \mathcal{R}$.

- $E = \{a, b, c, d\}$ *et* $\mathcal{R} = \{(a, a); (a, d); (b, b); (b, c); (c, c); (d, d)\}$. *La relation* $\mathcal{R}$ *est réfléxive car* $(a, a) \in \mathcal{R}$, $(b, b) \in \mathcal{R}$, $(c, c) \in \mathcal{R}$ *et* $(d, d) \in \mathcal{R}$.
- $E = \mathbb{Z}$ *et* $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ est pair}\}$. *Pour tout* $x \in \mathbb{Z}$, *on a* $(x, x) \in \mathcal{R}$ *car* $x - x = 0$ *est pair. Ainsi* $\mathcal{R}$ *est réflexive.*
- $E = \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$. *La relation* $\mathcal{R}$ *est réfléxive car pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $(x, x) \in \mathcal{R}$ *vu que* $x \leq x$.

(2) **irréfléxive** si pour tout $e \in E$, on a non($e\mathcal{R}e$).

Exemple 3.5.
- $E = \{w, x, y, z\}$ *et* $\mathcal{R} = \{(w, x); (x, x); (x, y)\}$. *La relation* $\mathcal{R}$ *n'est pas irréfléxive car* $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- $E = \{w, x, y, z\}$ *et* $\mathcal{R} = \{(w, x); (w, y); (x, y)\}$. *La relation* $\mathcal{R}$ *est irréfléxive car* $(w, w) \notin \mathcal{R}$, $(x, x) \notin \mathcal{R}$, $(y, y) \notin \mathcal{R}$ *et* $(z, z) \notin \mathcal{R}$.

(3) **symétrique** si pour tous $e, f \in E$, on a $e\mathcal{R}f \Rightarrow f\mathcal{R}e$.

Exemple 3.6.
- $E = \{a, d, f, g\}$ *et* $\mathcal{R} = \{(a, d); (f, g); (g, f)\}$. *La relation* $\mathcal{R}$ *n'est pas symétrique car* $(a, d) \in \mathcal{R}$ *mais* $(d, a) \notin \mathcal{R}$.
- $E = \mathbb{Z}$ *et* $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ est pair}\}$. *La relation* $\mathcal{R}$ *est symétrique. En effet, soient* $x, y \in \mathbb{Z}$ *tels que* $(x, y) \in \mathcal{R}$, *c'est-à-dire,* $x - y$ *est pair. Alors,* $y - x = -(x - y)$ *est aussi pair et donc* $(y, x) \in \mathcal{R}$.

(4) **antisymétrique** si pour tous $e, f \in E$, on a $(e\mathcal{R}f \text{ et } f\mathcal{R}e) \Rightarrow (e = e')$.

Exemple 3.7.
- $E = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ *et* $\mathcal{R} = \{(1, 2); (1, 3); (2, 1); (5, 7)\}$. *La relation* $\mathcal{R}$ *n'est pas antisymétrique car* $(1, 2) \in \mathcal{R}$ *et* $(2, 1) \in \mathcal{R}$ *mais* $1 \neq 2$.
- $E = \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$. *La relation* $\mathcal{R}$ *est antisymétrique. En effet, soient* $x, y \in \mathcal{R}$ *tels que* $(x, y) \in \mathcal{R}$*(c'est-à-dire* $x \leq y$*) et* $(y, x) \in \mathcal{R}$ *(c'est-à-dire* $y \leq x$*). On a forcément* $x = y$.

(5) **transitive** si pour tous $e, f, g \in E$, on a $(e\mathcal{R}f \text{ et } f\mathcal{R}g) \Rightarrow e\mathcal{R}g$.

Exemple 3.8.
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *et* $\mathcal{R} = \{(1, 2); (1, 5); (2, 3); (5, 6)\}$. *La relation* $\mathcal{R}$ *n'est pas transitive par* $(1, 2) \in \mathcal{R}$ *et* $(2, 3) \in \mathcal{R}$ *mais* $(1, 3) \notin \mathcal{R}$.
- $E = \mathbb{Z}$ *et* $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ est pair}\}$. *La relation* $\mathcal{R}$ *est transitive. En effet, soient* $x, y, z \in \mathbb{Z}$ *tels que* $(x, y) \in \mathcal{R}$ *(c'est-à-dire* $x - y$ *est pair) et* $(y, z)\mathcal{R}$ *(c'est-à-dire* $y - z$ *est pair). Alors* $x - z = (x - y) + (y - z)$ *est pair comme somme de deux nombres pairs et donc* $(x, z) \in \mathcal{R}$.
- $E = \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$. *La relation* $\mathcal{R}$ *est transitive. En effet soient* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tels que* $(x, y) \in \mathcal{R}$ *(c'est-à-dire* $x \leq y$*) et* $(y, z) \in \mathcal{R}$ *(c'est-à-dire* $y \leq z$*). On a forcément* $x \leq z$, *c'est-à-dire* $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Définition 3.9. Soit E un ensemble. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est dite **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 3.10. $E = \mathbb{Z}$ *et* $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ est pair}\}$. *Par les exemples précédents,* $\mathcal{R}$ *est réflexive, symétrique et transitive. Ainsi* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

Définition 3.11. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pour $e \in E$, la classe d'équivalence de e, que l'on note $[e]$ ou $\mathcal{C}\updownarrow(e)$, est l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec e. On a $[e] = \{f \in E \mid e\mathcal{R}f\}$. On vérifie que les classes d'équivalences forment une partition de E.

Exemple 3.12. *Soit* $E = \mathbb{Z}$. *On considère la relation d'équivalence* $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ est pair}\}$ *sur* E. *Les classes d'équivalences sont* $[0]$ *(l'ensemble des entiers pairs) et* $[1]$ *(l'ensemble des entiers impairs).*

Définition 3.13. Soit E un ensemble. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est dite **relation d'ordre** si elle est réfléxive, antisymétrique et transitive.

Exemple 3.14. $E = \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$. *Par les exemples précédents,* $\mathcal{R}$ *est réflexive, antisymétrique et transitive. Ainsi,* $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre.*