

INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Análisis de sensibilidad

Semana 5 – Sesión 9



Universidad
Tecnológica
del Perú

Logro de la sesión



Al finalizar la sesión, el alumno comprenderá el análisis de sensibilidad y su aplicación en los modelos de programación lineal

Temas a tratar

- ✓ **Conceptos del análisis de sensibilidad**
- ✓ **Aplicación y ejemplos del análisis de sensibilidad**

Análisis de sensibilidad

En todo modelo matemático de PL tenemos los siguientes componentes:

- ✓ **Coeficiente objetivo:** Son los valores que acompañan a las variables en la función objetivo.
- ✓ **Coeficiente tecnológico:** Son los valores que acompañan a las variables en las restricciones
- ✓ **Recurso disponible:** son los valores que se encuentran al lado derecho de las restricciones.

MAX

$$10X + 20Y$$

ST

$$3X + Y$$

$$\geq 9$$

$$X - 3Y$$

$$\geq 5$$

Análisis de sensibilidad

Conceptos

- ❑ El Análisis de Sensibilidad consiste en determinar **cuánto afectaría a la solución óptima, el cambio, dentro del rango de variación,** de alguno de los parámetros del modelo.
- ❑ El análisis de sensibilidad trata de estudiar **el margen permitido de variación de los parámetros del modelo. Es el intervalo permisible para permanecer óptimo**
- ❑ El Análisis de Sensibilidad nos permite conocer **qué ocurriría si cambian los coeficientes de la función objetivo o la cantidad de recursos disponibles.**

Análisis de Sensibilidad

Ejemplo 1

Una fábrica produce 2 productos en dos máquinas. Una unidad del producto 1 requiere 2 horas en la maquina A y 1 hora en la maquina B, y una unidad del producto 2 requiere 1 hora en la maquina A y 3 horas en la maquina B. La ganancia por unidad de los productos 1 y 2 son de \$30 y \$20, respectivamente. El tiempo disponible diariamente para cada maquina es de 8 horas.

- a) Calcular la producción optima de cada máquina para maximizar la ganancia.
- b) Determinar el rango de factibilidad de los coeficientes objetivos y los recursos disponibles

Análisis de Sensibilidad

- a) Calcular la producción óptima de cada máquina para maximizar la ganancia.

```
Solution Report - /Lingo1.ltx  
Lindo Mod  
1 !Xi= cantidad de producto 1 y 2 a producir;  
2 Max 30x1+20x2  
3 st  
4 MAQ1) 2x1+x2<=8  
5 MAQ2) x1+3x2<=8  
6 end
```

Global optimal solution found.
Objective value: 128.0000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 2
Elapsed runtime seconds: 3.53

Model Class: LP

Total variables: 2
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0

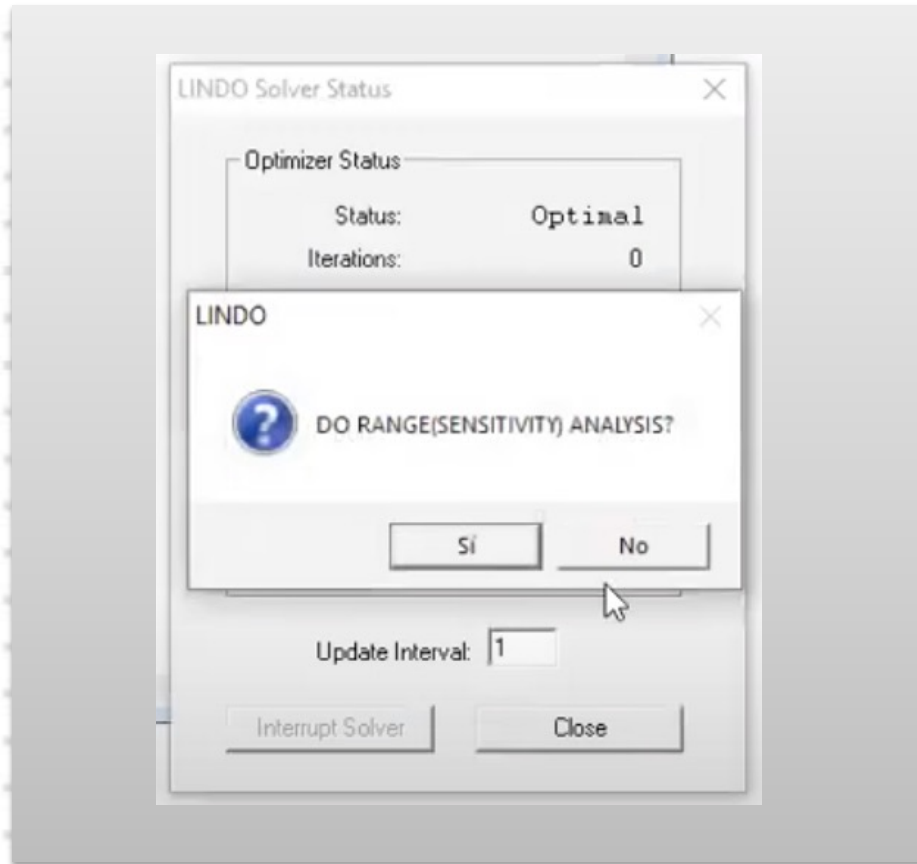
Total constraints: 3
Nonlinear constraints: 0

Total nonzeros: 6
Nonlinear nonzeros: 0

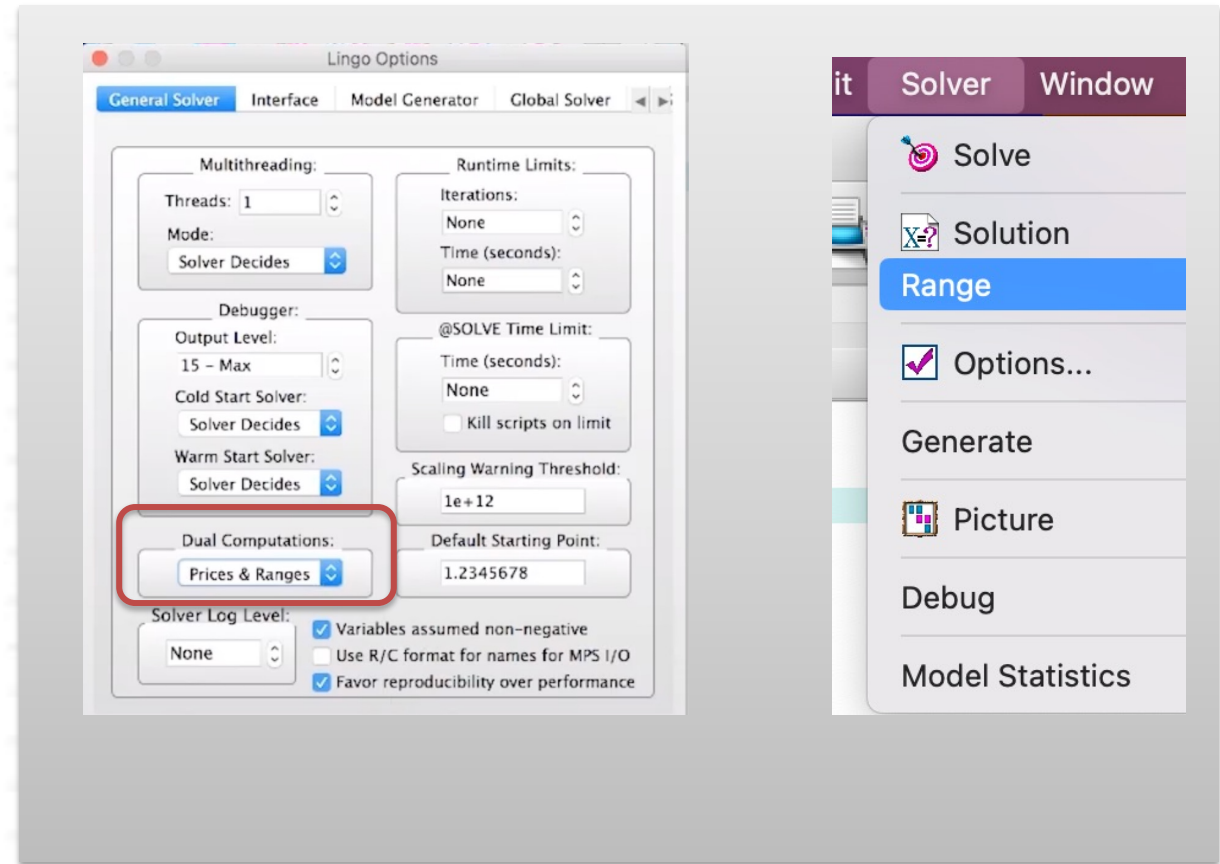
Variable	Value	Reduced Cost
X1	3.200000	0.000000
X2	1.600000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	128.0000	1.000000
MAQ1	0.000000	14.00000
MAQ2	0.000000	2.000000

Análisis de Sensibilidad

En Lindo



En Lingo



Análisis de Sensibilidad

b) Determinar el rango de factibilidad de los coeficientes objetivos y los recursos disponibles

Reporte del rango del análisis de sensibilidad

Range Report – Lingo1.ltx				
Ranges in which the basis is unchanged:				
Rangos de los coeficientes de la FO				
Objective Coefficient Ranges:				
Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease	Incrementos o decrementos permitidos de las variables
X1	30.00000	10.00000	23.33333	30 - 23.33 ; 30 + 10
X2	20.00000	70.00000	5.000000	20-5 ; 20 + 70
Righthand Side Ranges:				
Rangos del lado derecho de la restricción				
Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease	Incrementos o decrementos permitidos en los recursos
MAQ1	8.000000	8.000000	5.333333	< 8 – 5.33 ; 8 + 8 >< 2.67 ; 16 >
MAQ2	8.000000	16.00000	4.000000	< 8 - 4 ; 8 + 16 > ... < 4 ; 24 >

Análisis de Sensibilidad

Ejemplo 2

Gutchi Company fabrica bolsos de mano, estuches y mochilas. La elaboración incluye piel y materiales sintéticos, y la piel es la materia prima escasa o limitante. El proceso de producción requiere dos tipos de mano de obra calificada: costura y acabado. La siguiente tabla muestra la disponibilidad de los recursos, su consumo por los tres productos y las utilidades por unidad.

REQUERIMIENTOS DE RECURSOS POR UNIDAD				
Recurso	Bolso de Mano	Estuches	Mochila	Disponibilidad diaria
Piel (metros ²)	2	1	3	42 metros ²
Costura (hr)	2	1	2	40 hrs
Acabado (hr)	1	0.5	1	45 hrs
Precio de venta (\$)	24	22	45	-----

Análisis de Sensibilidad

Ejemplo 2

Lindo Model - Lingo1.ltx		Solution Report - /Lingo1.ltx	
1 Max 24x1+22x2+45x3		Nonlinear constraints: 0	
2 st		Total nonzeros: 12	
3 2x1+x2+3x3<=42		Nonlinear nonzeros: 0	
4 2x1+x2+2x3<=40			
5 x1+0.5x2+x3<=45			
6 end			
		Variable	Value
		X1	0.000000
		X2	36.000000
		X3	2.000000
		Reduced Cost	
		X1	20.000000
		X2	0.000000
		X3	0.000000
		Row	Slack or Surplus
		1	882.0000
		2	0.000000
		3	0.000000
		4	25.000000
		Dual Price	
		1	1.000000
		2	1.000000
		3	21.000000
		4	0.000000
		Range Report - Lingo1.ltx	
		Ranges in which the basis is unchanged:	
		Objective Coefficient Ranges:	
		Variable	Current Coefficient
		X1	24.00000
		X2	22.00000
		X3	45.00000
		Allowable Increase	Allowable Decrease
		20.00000	INFINITY
		0.5000000	7.000000
		21.00000	1.000000
		Righthand Side Ranges:	
		Row	Current RHS
		2	42.00000
		3	40.00000
		4	45.00000
		Allowable Increase	Allowable Decrease
		18.00000	2.000000
		2.000000	12.00000
		INFINITY	25.00000

Análisis de Sensibilidad

Análisis de sensibilidad cuando varían los coeficientes de las variables en la función objetivo

Que pasaria con mi FO si hay un incremento de \$6 dólares en mi producto bolsos.

```
Max 24x1+22x2+45x3
```

```
st
```

```
PIEL) 2x1+x2+3x3<=42
```

```
COSTURA) 2x1+x2+2x3<=40
```

```
ACABADO) x1+0.5x2+x3<=45
```

```
end
```

Dado que nuestro problema es menor o igual todas tendran Holguras.

Si hubiera una restricción de mayor o igual, se tiene un Excedente.

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	20.00000
X2	36.00000	0.000000
X3	2.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	882.0000	1.000000
PIEL	0.000000	1.000000
COSTURA	0.000000	21.00000
ACABADO	25.00000	0.000000

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	24.00000	20.00000	INFINITY
X2	22.00000	0.500000	7.000000
X3	45.00000	21.00000	1.000000

Utilidad de bolsos: $\$24 + \$6 = \$30$

Rangos:

- Infinito. \leq Bolso de mano $\leq 24 + 20$

- infinito \leq Bolso de mano ≤ 44

Como 30 esta dentro del rango. Los valores para todas las variables siempre se van a mantener (x1, x2 y x3)

¿Cuanto seria la nueva función objetivo?

Datos de mt2 de piel:

. Variación del recurso = 6

. Valor de la variable x1 (bolso) = 0

FO = Utilid. Inicial + Var. recurso * x1

Utilidad = $\$882 + (6)*(0)$

Utilidad = $\$882$

Análisis de Sensibilidad

Análisis de sensibilidad cuando varían los coeficientes de las variables en la función objetivo

Que pasaria con mi FO si hay un incremento de \$6 dólares en mi producto bolsos.

Comprobando con el software

```
max=30*x1+22*x2+45*x3;  
[piel] 2*x1+x2+3*x3<=42;  
[costura] 2*x1+x2+2*x3<=40;  
[acabado] x1+0.5*x2+x3<=45;  
end
```

Global optimal solution found.
Objective value: 882.0000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 2
Elapsed runtime seconds: 0.08

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	14.00000
X2	36.00000	0.000000
X3	2.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	882.0000	1.000000
PIEL	0.000000	1.000000
COSTURA	0.000000	21.00000
ACABADO	25.00000	0.000000

Otro caso:

Que pasaría con la FO si hay una variación de -\$2 en la utilidad de mi producto estuches.

$22 - 2 \leq \text{Bolsos} \leq 22 + 0.5$

$882 - 2(36) = 810$

Análisis de Sensibilidad

DUAL PRICE (PRECIO DUAL)

- ❑ Es el monto en que el resultado de la **función objetivo** mejorará si el lado derecho de la restricción aumentase en una unidad.
- ❑ Esta mejora dependerá si el modelo es maximizar o minimizar la función objetivo. Si el objetivo es maximizar, entonces la mejora significará un aumento del valor óptimo. Si el objetivo es minimizar, entonces la mejora significará una disminución del valor óptimo.

```
Max 24x1+22x2+45x3
st
PIEL) 2x1+x2+3x3<=42
COSTURA) 2x1+x2+2x3<=40
ACABADO) x1+0.5x2+x3<=45
end
```

Global optimal solution found.

Objective value:

882.0000

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	20.00000
X2	36.00000	0.000000
X3	2.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	882.0000	1.000000
PIEL	0.000000	1.000000
COSTURA	0.000000	21.00000
ACABADO	25.00000	0.000000

DUAL PRICE

Ejemplo:

Piel: 1. Por cada unidad de recurso que aumenta o disminuya. La utilidad aumenta o disminuye en \$1.

El mismo concepto para Costura y Acabado.

Pregunta: Si se puede aumentar la capacidad de los recursos disponibles para los productos. ¿Cuál tendría la prioridad? El que tenga el mayor Precio Dual nos va a convenir en caso se aumente la capacidad de los recursos.

Análisis de Sensibilidad - Ejemplo

Análisis de sensibilidad cuando hacemos variaciones en la parte derecha de los recursos

Que pasaria si en vez de 40 horas para costura, consigo 1 hora más. ¿Cuánto sera la nueva utilidad?

```
max=24*x1+22*x2+45*x3;  
[piel] 2*x1+x2+3*x3<=42;  
[costura] 2*x1+x2+2*x3<=40;  
[acabado] x1+0.5*x2+x3<=45;  
end
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	20.000000
X2	36.000000	0.000000
X3	2.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	882.0000	1.000000
PIEL	0.000000	1.000000
COSTURA	0.000000	21.000000
ACABADO	25.00000	0.000000

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	24.00000	20.00000	INFINITY
X2	22.00000	0.5000000	7.000000
X3	45.00000	21.00000	1.000000

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
PIEL	42.00000	18.00000	2.000000
COSTURA	40.00000	2.000000	12.00000
ACABADO	45.00000	INFINITY	25.00000

40 hrs + 1 hr = 41 hrs de costura

Rangos:

$40 - 12 \leq \text{HRS DE COSTURA} \leq 40 + 2$

$28 \leq \text{HRS DE COSTURA} \leq 42$

en este rango el precio dual siempre sera 21

41 hrs esta en el rango [28; 42]....ok

¿Entonces cuanto seria la nueva utilidad?

Datos:

. Variación de horas costura = 1 hora

. Precio dual de costura = 21

UTILIDAD = Utilid. Inicial + Var. costura * Precio dual

Utilidad = \$882 + (1)*(21)

Utilidad = \$903

Tenemos 40 hrs de costura (disponibilidad recurso)
Por cada unidad (hora) que aumentemos o disminuimos la utildad aumentara o disminuira en 21 dolares

Análisis de Sensibilidad - Ejemplo

Análisis de sensibilidad cuando hacemos variaciones en la parte derecha de los recursos

Que pasaria si en vez de 40 horas para costura, consigo 1 hora más. Cuanto sera la nueva utilidad?.

Comprobamos con el software

```
max=24*x1+22*x2+45*x3;  
[piel] 2*x1+x2+3*x3<=42;  
[costura] 2*x1+x2+2*x3<=41;  
[acabado] x1+0.5*x2+x3<=45;  
end
```

Global optimal solution found.
Objective value:
Infeasibilities:
Total solver iterations:
Elapsed runtime seconds:

903.0000
0.000000
2
0.10

Otro caso:

Qué pasaría si en vez de 40 horas de costura tenemos 30 horas de costura

¿Cuánto seria la utilidad? = $882 - 10(21) = 672$

Conclusiones

- En programación lineal, el análisis de Sensibilidad nos permite conocer qué ocurrirá si cambian los coeficientes de la función objetivo o la cantidad de recursos disponibles.



**Universidad
Tecnológica
del Perú**