ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
INGENIERÍA CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

PERÍODO ACADÉMICO: 2025-A
ASIGNATURA: ICCD412 Métodos Numéricos **GRUPO:** GR2
TIPO DE INSTRUMENTO: Práctica 03
FECHA DE ENTREGA LÍMITE: 06/05/2025
ALUMNO: Freire Ismael

TEMA

Método de la bisección

OBJETIVOS

- Aplicar el método de la bisección para encontrar aproximaciones de funciones continuas, garantizando exactitud dentro de una tolerancia especificada.

MARCO TEÓRICO

El método de la bisección corresponde a un procedimiento numérico que sirve para aproximar raíces de ecuaciones f de la forma $f(x) = 0$. Su nombre proviene de la división repetida de un intervalo en partes iguales, seleccionando subintervalos donde la función cambia de signo. Este método centra su fundamento teórico en el Teorema del Valor Intermedio que menciona:

- Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe por lo menos un punto $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$.

- Por el **Teorema del Valor Intermedio**, $f(a)$ y $f(b)$ deben tener signos opuestos ($f(a) \cdot f(b) < 0$), como se indicó anteriormente. De esta manera se asegura la existencia de una raíz en el intervalo (a, b). Por lo tanto, si no se cumple esta condición, el método deja de ser aplicable.

Los pasos que sigue el método son los siguientes:

1. Selección del intervalo inicial que cumpla $f(a) \cdot f(b) < 0$.

2. Cálculo del punto medio:

$$p = \frac{a+b}{2}$$

Corresponde a la primera aproximación a la raíz y es la base para iteraciones posteriores.

3. Evaluación de la función:

- Si $f(p) = 0$ o el error estimado $\frac{b-a}{2}$ < tolerancia, entonces p es la raíz buscada y el proceso finaliza.
- Si no se cumple, se debe actualizar el intervalo de acuerdo a:
  a) Si $f(a) \cdot f(p) < 0$ (negativo), la raíz está en $[a, p]$.
  Se toma: $b = p$.
  b) Si $f(a) \cdot f(p) > 0$ (positivo), la raíz está en $[p, b]$.
  Se toma: $a = p$.

4. Luego, se repete desde el paso 2 (cálculo del nuevo punto medio).
Nota: En cada iteración, la longitud del intervalo se reduce a la mitad, y el último p calculado es la mejor aproximación a la raíz.

Entre algunos aspectos más relevantes del método, se destaca su convergencia asegurada, y es que el método siempre converge en algún punto, raíz, dentro del intervalo $[a, b]$.

Lo que conlleva a la expresión que permite estimar el error de la aproximación después de n iterciones:

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

donde:

- p es la raíz exacta de la función
- p_n es la aproximación a la raíz en la iteración n
- $\frac{b-a}{2^n}$ es la cota de error máxima que se puede tener luego de n iteraciones

Finalmente, dado que el método de la bisección garantiza convergencia, cada valor aproximado obtenido en p se acerca progresivamente al valor real de la función. Y gracias al criterio de tolerancia establecido, el algoritmo se detiene cuando el error es menor a ese parámetro, asegurando así que la solución obtenida no solo se encuentra dentro del margen de precisión deseado, sino que además representa una de las mejores aproximaciones posibles a la raíz verdadera.

DESARROLLO

1. **Un abrevadero de longitud L tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r (Consulte la figura adjunta.) Cuando se llena con agua hasta una distancia h a partir de la parte superior, el volumen V de agua es**

$$V = L\left[\frac{1}{2}\pi r^2 - r^2 \arcsin\left(\frac{h}{r}\right) - h\sqrt{r^2-h^2}\right]$$

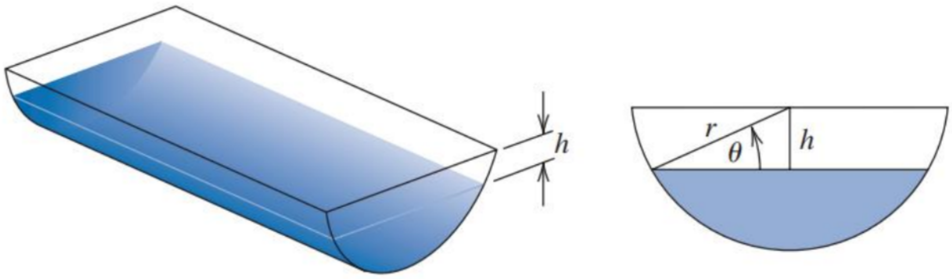

Figura 1: Figura referencial ej.1

Suponga que $L = 10, r = 1cm$ y $V = 12{,}4cm^3$. Encuentre la profundidad del agua en el abrevadero dentro de $0{,}01cm$

Tomando la ecuación original, se sustituye los valores dados:

$$12{,}4 = 10 \cdot \left[\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 - 1^2 \cdot \arcsin\left(\frac{h}{1}\right) - h\sqrt{1^2-h^2}\right]$$

$$1{,}24 = \left[\frac{1}{2}\pi - \arcsin(h) - h\sqrt{1-h^2}\right]$$

Obteniendo la ecuación simplificada de la forma:

$$0 = \arcsin(h) + h\sqrt{1-h^2} - \frac{1}{2}\pi + 1{,}24$$

Con ello, se obtiene la tabla:

a	b	p	f(a)	f(b)	f(p)	error estimado < 10^(-2)
0,00000000	1,00000000	0,50000000	3,30796327	-12,40000000	-6,25815151	0,50000000
0,00000000	0,50000000	0,25000000	3,30796327	-6,25815151	-1,63945387	0,25000000
0,00000000	0,25000000	0,12500000	3,30796327	-1,63945387	0,81448903	0,12500000
0,12500000	0,25000000	0,18750000	0,81448903	-1,63945387	-0,41994672	0,06250000
0,12500000	0,18750000	0,15625000	0,81448903	-0,41994672	0,19572590	0,03125000
0,15625000	0,18750000	0,17187500	0,19572590	-0,41994672	-0,11253639	0,01562500
0,15625000	0,17187500	0,16406250	0,19572590	-0,11253639	0,04149324	0,00781250

Figura 2: Soluciones Ej.1

Y se concluye que $h \approx 0{,}1640$

2. **Un objeto que cae verticalmente a través del aire está sujeto a una resistencia viscosa, así como a la fuerza de gravedad. Suponga que un objeto con masa m cae desde una altura s_0 y que la altura del objeto después de t segundos es**

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$

donde $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$ y k representa el coeficiente de la resistencia del aire en $0{,}1\frac{Ns}{m}$. Suponga $s_0 = 300m$, $m = 0{,}25kg$ y $k = 0{,}1\frac{Ns}{m}$. Encuentre, dentro de $0{,}01 segundos$, el tiempo que tarda un cuarto de kg en golpear el piso.

Tomando la ecuación original, se sustituye los valores dados:

$$s(t) = 300 - \frac{0{,}25 \cdot 9{,}81}{0{,}1}t + \frac{0{,}25^2 \cdot 9{,}81}{0{,}1^2}\left(1 - e^{-\frac{0{,}1 \cdot t}{0{,}25}}\right)$$

Obteniendo la ecuación simplificada de la forma:

$$s(t) = 300 - 24{,}525 \cdot t + 61{,}3125\left(1 - e^{-0{,}4t}\right)$$

Con ello, se obtiene la tabla:

a	b	p	f(a)	f(b)	f(p)	error estimado < 0,01
0,00000000	30,00000000	15,00000000	300,00000000	-374,43787672	-6,71447849	15,00000000
0,00000000	15,00000000	7,50000000	300,00000000	-6,71447849	174,32243037	7,50000000
7,50000000	15,00000000	11,25000000	174,32243037	-6,71447849	84,72512965	3,75000000
11,25000000	15,00000000	13,12500000	84,72512965	-6,71447849	39,10013653	1,87500000
13,12500000	15,00000000	14,06250000	39,10013653	-6,71447849	16,20856010	0,93750000
14,06250000	15,00000000	14,53125000	16,20856010	-6,71447849	4,75027269	0,46875000
14,53125000	15,00000000	14,76562500	4,75027269	-6,71447849	-0,98136885	0,23437500
14,53125000	14,76562500	14,64843750	4,75027269	-0,98136885	1,88464414	0,11718750
14,64843750	14,76562500	14,70703125	1,88464414	-0,98136885	0,45168458	0,05859375
14,70703125	14,76562500	14,73632813	0,45168458	-0,98136885	-0,26483054	0,02929688
14,70703125	14,73632813	14,72167969	0,45168458	-0,26483054	0,09342994	0,01464844
14,72167969	14,73632813	14,72900391	0,09342994	-0,26483054	-0,08569957	0,00732422

Figura 3: Soluciones Ej.2

Y se concluye que $h \approx 17{,}729$

3. **Ejercicios teóricos**

   - **Use el teorema 2.1 para encontrar una cota para el número de iteraciones necesarias para lograr una aproximación con precisión de 10^{-4} para la solución de $x^3 - x - 1 = 0$ que se encuentra dentro del intervalo $[1, 2]$. Encuentre una aproximación para la raíz con este grado de precisión.**

     Tomando el teorema:

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n} < tolerancia$$

Se reemplazan los valores dados del intervalo, obteniendo:

$$\frac{2-1}{2^n} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-4}$$

De donde se despeja n aplicando logaritmos, obteniendo:

$$\log_{10}(2^{-n}) < \log_{10}(10^{-4})$$

$$-n \cdot \log_{10}(2) < -4 \cdot 1$$

$$n > \frac{4}{\log_{10}(2)} \approx 13{,}29$$

Por lo que, se requieren al menos 14 iteraciones para lograr una aproximación con precision de 10^{-4}

i	a	b	p	f(a)	f(b)	f(p)	error estimado < 10^(-4)
1	1,00000000	2,00000000	1,50000000	-1,00000000	5,00000000	0,87500000	0,50000000
2	1,00000000	1,50000000	1,25000000	-1,00000000	0,87500000	-0,29687500	0,25000000
3	1,25000000	1,50000000	1,37500000	-0,29687500	0,87500000	0,22460938	0,12500000
4	1,25000000	1,37500000	1,31250000	-0,29687500	0,22460938	-0,05151367	0,06250000
5	1,31250000	1,37500000	1,34375000	-0,05151367	0,22460938	0,08261108	0,03125000
6	1,31250000	1,34375000	1,32812500	-0,05151367	0,08261108	0,01457596	0,01562500
7	1,31250000	1,32812500	1,32031250	-0,05151367	0,01457596	-0,01871061	0,00781250
8	1,32031250	1,32812500	1,32421875	-0,01871061	0,01457596	-0,00212795	0,00390625
9	1,32421875	1,32812500	1,32617188	-0,00212795	0,01457596	0,00620883	0,00195313
10	1,32421875	1,32617188	1,32519531	-0,00212795	0,00620883	0,00203665	0,00097656
11	1,32421875	1,32519531	1,32470703	-0,00212795	0,00203665	-0,00004659	0,00048828
12	1,32470703	1,32519531	1,32495117	-0,00004659	0,00203665	0,00099479	0,00024414
13	1,32470703	1,32495117	1,32482910	-0,00004659	0,00099479	0,00047404	0,00012207
14	1,32470703	1,32482910	1,32476807	-0,00004659	0,00047404	0,00021371	0,00006104

Figura 4: Soluciones Ej.3 Parte Teórica

Con la tabla, se concluye que $p \approx 1{,}325$ con precisión de 10^{-4}.

- **La función definida por $f(x) = sin(\pi x)$ tiene ceros en cada entero. Muestre cuando $-1 < a < 0$ y $2 < b < 3$, el método de bisección converge a**

  a.) 0, **si** $a + b < 2$

  b.) 2, **si** $a + b > 2$

c.) 1, **si** $a + b = 2$

El ejercicio busca aproximar un cero entero de $f(x) = sin(\pi x)$ partiendo de un intervalo [a,b] con $-1 < a < 0$ y $2 < b < 3$. Sabiendo también que $f(a) = sin(\pi a) < 0$ y $f(b) = sin(\pi b) > 0$. Y que por el Teorema del Valor Intermedio existe al menos un entero p en $[a, b]$.

Entonces, lo primero es seguir los pasos que sigue el método de la bisección, lo cual es calcular $p = \frac{a+b}{2}$. Sabiendo que, dependiendo de si p cae a la izquierda o la derecha, se tomará la parte correspondiente.

a.) si $a + b < 2$, entonces $p < 1$ ya que $a < 0$ y $0 < p < 1$. Por lo que, la raíz más cercana es 0.

b.) si $a + b > 2$, entonces $p > 1$ ya que $b < 3$ y $1 < p < 2$ la raíz más cercana es 2.

c.) si $a + b = 2$, entonces $p = 1$ ya que $f(p) = sin(\pi \cdot 1) = sin(\pi) = 0$ la raíz más cercana es 1.

CONCLUSIONES

El método de la bisección es una técnica sencilla y sumamente confiable para encontrar raíces en funciones continuas, siempre y cuando se cumpla con la condición de cambio de signo en el intervalo incial. Lo cual garantiza la convergencia, es decir, si se cumple la condición anterior y si existe una raíz en el intervalo $[a, b]$ entonces el método encontrá un valor aproximado dentro de la precisión requerida.

Por otro lado, cabe mencionar que dicha precisión se alcanzará de acuerdo a la tolerancia especificada, si es menor, mayor será la cantidad de iteraciones realizadas y mayor será la exactitud del valor encontrado.

RECOMENDACIONES

Antes de aplicar el método siempre es fundamental verificar que la función sea continua en el intervalo de trabajo y que el intervalo inicial que se está tomando cumpla con la condición del signo opuesto $f(a) \cdot f(b) < 0$ en los extremos. Pues solo así el Teorema del Valor Intermedio garantiza la existencia de al menos una raíz. Además, resulta conveniente estimar el número de iteraciones necesarias, ya que permite elegir una tolerancia adecuada que evite ejecuciones innecesarias.

REFERENCIAS

[1] J. H. Mathews and K. D. Fink, *Métodos numéricos con Matlab.* Madrid: Prentice Hall, 2000.