Método Newton-Raphson

Sebastián Ramos
Brandon Hernández
Mercedes Luna

¿Qué es el método de Newton?

- Es un procedimiento algorítmico que permite hallar raíces de funciones, conocido un valor numérico cercano a la raíz. Es un método abierto e iterativo, en general de rápida convergencia, muy útil para el cálculo de raíces cuadradas y de mayor grado, aunque para algunos casos el método presenta inconvenientes, por ejemplo si existen raíces múltiples, en este caso se tendría que aplicar diferentes soluciones para así lograr encontrar la raíz sin abandonar el método.
- También es usado para encontrar los máximos y mínimos de una función encontrando los ceros de su primera derivada

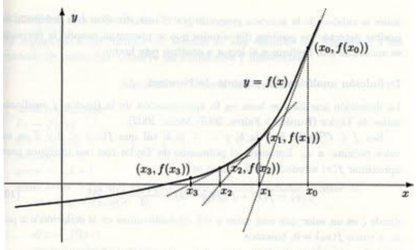
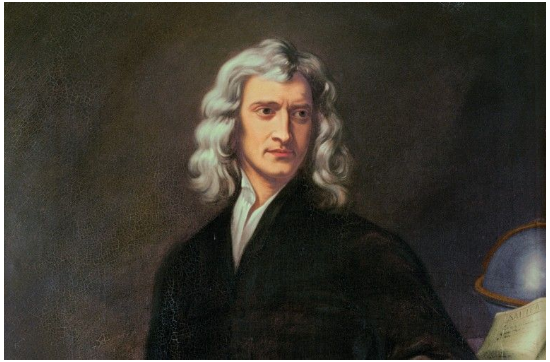


Figura 20. Explicación gráfica del método de Newton

Historia

- Fue descrito por Isaac Newton por primera vez en 1669
- Lo dio a conocer en dos publicaciones: “Sobre el análisis mediante ecuaciones con un número infinito de términos” y “Método de las fluxiones”
- El método solamente lo aplicaba a polinomios
- No consideraba las aproximaciones sucesivas
- No lo relaciono con el cálculo



¿ Por qué es llamado a veces Newton-Raphson?

- Joseph Raphson , matemático miembro de Royal Society, publicó este método en 1690
- El trabajo de Newton no fue publicado hasta 1736
- Los trabajos de Raphson no eran tan reconocidos como los de Newton
- Posteriormente se le reconoció su labor
- Newton le permitía ver su trabajo a Raphson
- Raphson tomó el método de Newton pero lo hizo para el resto de funciones

Fundamento matemático

Supóngase que la función f es continuamente diferenciable dos veces en el intervalo $[a, b]$; o sea, $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Sea $\overline{x} \in [a, b]$ una aproximación a la raíz p tal que $f'(\overline{x}) \neq 0$ y $|\overline{x} - p|$ es *pequeño*. Considérese el polinomio de Taylor de primer grado para $f(x)$ alrededor de $\overline{x}$

$$f(x) = f(\overline{x}) + (x - \overline{x})\ f'(\overline{x}) + \frac{(x - \overline{x})^2}{2}\ f''(\zeta(x))\ , \tag{IX.1}$$

donde $\zeta(x)$ está entre x y $\overline{x}$. Como $f(p) = 0$, la ecuación $(IX.1)$, con $x = p$, nos da

$$0 = f(\overline{x}) + (p - \overline{x})\ f'(\overline{x}) + \frac{(p - \overline{x})^2}{2}\ f''(\zeta(p))\ . \tag{IX.2}$$

El método de Newton se deriva suponiendo que el término que contiene a $(p - \overline{x})^2$ es despreciable y que

$$0 \approx f(\overline{x}) + (p - \overline{x})\ f'(\overline{x})\ . \tag{IX.3}$$

Despejando p de esta ecuación resulta:

$$p \approx \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}\ , \tag{IX.4}$$

lo cual debe ser una mejor aproximación a p que $\overline{x}$.

El método de Newton-Raphson implica el generar la sucesión $\{p_n\}$ definida por

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}\ , \qquad n \geq 1\ . \tag{IX.5}$$

- El método de Newton consiste en tomar una aproximación inicial , xi y a continuación obtener una aproximación más refinada mediante la formula de abajo.Es decir, se trata de acercarnos a la raíz xi+1 por medio de la fórmula recursiva,

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

La fórmula de Newton Raphson se obtiene a partir de la fórmula de la pendiente de una recta

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{0 - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

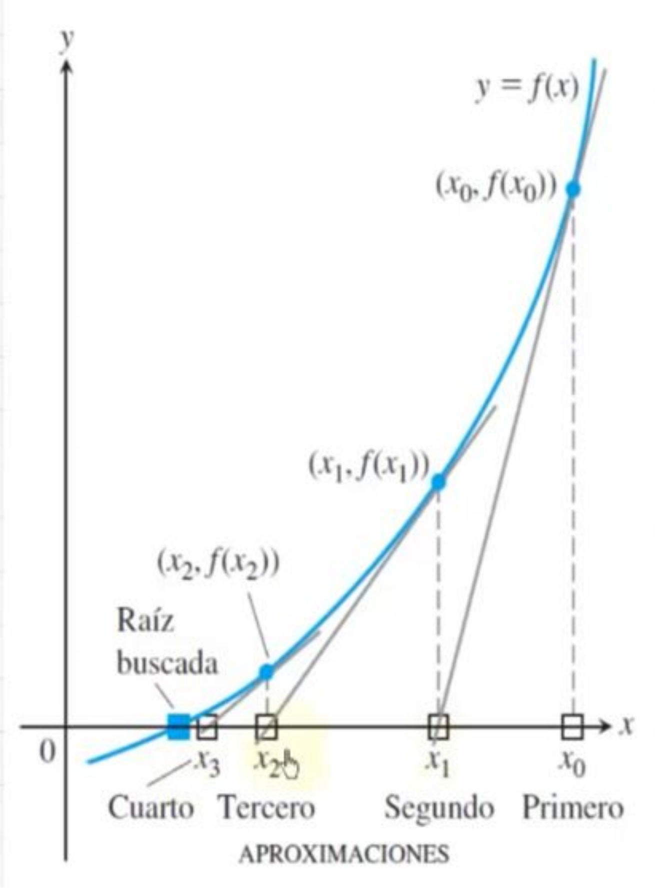
$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

$$m(x_{i+1} - x_i) = -f(x_i)$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{-f(x_i)}{m}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{m}$$

Explicación geométrica



Condiciones de convergencia

Existencia de la Raíz.

Unicidad de la Raíz.

Concavidad.

Intersección de la Tangente a f(x), dentro de [a,b]

Raíces múltiples

Una raíz múltiple corresponde a un punto donde una función es tangencial al eje x. Por ejemplo, una raíz doble resulta de:

$F(x) = (x - 3)(x - 2)(x - 2).$

Multiplicidad impar de raíces

$F(x) = (x - 3)(x - l)(x - 1)(x - 1).$

Multiplicidad par

Convergencia del método

- Convergencia cuadrática en el caso de ser raíz con multiplicidad algebraica igual a 1.
- Convergencia lineal en el caso de ser raíz con multiplicidad algebraica mayor a 1.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

El algoritmo

EL ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON

Para hallar una solución aproximada de $f(x) = 0$, dada una aproximación inicial p_0.

Entrada: aproximación inicial p_0 ; tolerancia TOL; cantidad máxima de iteraciones N;

Salida: solución aproximada p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: Tomar $i = 1$;

Paso 2: Mientras que $i \leq N$ seguir pasos 3-6;

Paso 3: Tomar $p = p_0 - \dfrac{f(p_0)}{f'(p_0)}$ % Calculamos p_i .

Paso 4: Si $|p - p_0| < TOL$ entonces SALIDA(p);

Paso 5: Tomar $i = i+1$

Paso 6: Tomar $p_0 = p$ % redefinir p_0 .

Paso 7: SALIDA('El método fracasó después de N iteraciones'); PARAR.

Comparación con Bisección

- El método de Newton es mucho más rápido que el método de bisección.
- El método de bisección asegura convergencia mientras que el método de Newton no asegura convergencia global.
- La bisección es más lenta debido a que divide el intervalo en 2 partes cada vez que itera, mientras que el método de Newton converge cuadráticamente si no hay raíces múltiples.
- La mejor manera de llegar a la convergencia es elegir un valor inicial cercano a la raíz buscada.

El código en python

Referencias

https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Newton

https://www.gaussianos.com/la-historia-del-metodo-de-newton-raphson-y-otro-caso-mas-de-mala-documentacion-en-el-cine/

http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/mn11b/temas/newton_ecuac.pdf