2. Supongamos que nos interesa analizar el IQ de una muestra de estudiantes del ITAM y suponemos que el IQ de un estudiante tiene una distribución normal $x \sim N(\theta, \sigma^2)$ **con σ^2 conocida.** Considera que observamos el IQ de un estudiante x. La verosimilitud del modelo es:

$$p(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2\right)$$

Realizaremos un análisis bayesiano por lo que hace falta establer una distribución inicial, elegimos $p(\theta)$ que se distribuya $N(\mu, \tau^2)$ donde elegimos los parámetros μ, τ (τ desviación estándar) que mejor describan nuestras creencias iniciales, por ejemplo si tengo mucha certeza de que el IQ promedio se ubica en 150, elegiría $\mu = 150$ y una desviación estándar chica, por ejemplo $\tau = 5$. Entonces la distribución inicial es:

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2\right)$$

Calcula la distribución posterior $p(\theta|x) \propto p(x|\theta)p(\theta)$, usando la inicial y verosimilitud que definimos arriba. Una vez que realices la multiplicación debes identificar el núcleo de una distribución Normal,

¿cuáles son sus parámetros (media y varianza)?

Conocemos de antemano la distribución inicial y la verosimilitud, por lo que podemos obtener directamente la distribución posterior realizando el cálculo correspondiente:

$$p(\theta|x) \propto p(x|\theta)\,p(\theta) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2\right)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2\right)\right]$$

Conocemos σ^2 y τ^2, por lo que las constantes pueden ser omitidas para simplificar el cálculo.

$$\therefore\ p(\theta|x) \propto exp\left\{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)(x-\theta)^2 - \left(\frac{1}{2\tau^2}\right)(\theta-\mu)^2\right\} = exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2-2\theta x+\theta^2) - \frac{1}{2\tau^2}(\theta^2-2\theta\mu+\mu^2)\right\}$$

$$\Rightarrow p(\theta|x) \propto exp\left\{\frac{-x^2}{2\sigma^2} + \frac{\theta x}{\sigma^2} - \frac{\theta^2}{2\sigma^2} - \frac{\theta^2}{2\tau^2} + \frac{\theta\mu}{\tau^2} - \frac{\mu^2}{2\tau^2}\right\} = exp\left\{-\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right) + \theta\left(\frac{\mu}{\tau^2}+\frac{x}{\sigma^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\tau^2}+\frac{x^2}{\sigma^2}\right)\right\}$$

Al ser un modelo normal-normal, buscamos que la distribución posterior se distribuya normal y sea de la forma:

$$exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta-\mu)^2\right\} = exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(\theta^2-2\theta\mu+\mu^2)\right\}$$

así, tenemos

$$exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta^2\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\sigma^2}\right) - 2\theta\left(\frac{\mu}{\tau^2}+\frac{x}{\sigma^2}\right) + \left(\frac{\mu^2}{\tau^2}+\frac{x^2}{\sigma^2}\right)\right]\right\}$$

y buscamos algo de la forma $exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(\theta^2-2\theta\mu+\mu^2)\right\}$

de esta forma tenemos que

$$*\ \frac{-1}{2\sigma^2}\theta^2 = \frac{-1}{2}\theta^2\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\sigma^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} = \left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\sigma^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} = \left(\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}\right)$$

$$\therefore\ \sigma^2 = \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}$$

$$*\ -\frac{1}{2\sigma^2}(-2\theta\mu) = +\frac{2}{2}\theta\left(\frac{\mu}{\tau^2}+\frac{x}{\sigma^2}\right) \Rightarrow \frac{\theta\mu}{\sigma^2} = \theta\left(\frac{\mu}{\tau^2}+\frac{x}{\sigma^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\sigma^2} = \left(\frac{\sigma^2\mu+x\tau^2}{\sigma^2\tau^2}\right) \Rightarrow \mu = \sigma^2\left(\frac{\sigma^2\mu+x\tau^2}{\sigma^2\tau^2}\right) \Rightarrow \mu = \left(\frac{\cancel{\sigma^2\tau^2}}{\sigma^2+\tau^2}\right)\left(\frac{\sigma^2\mu+x\tau^2}{\cancel{\sigma^2\tau^2}}\right)$$

$$\therefore\ \mu = \frac{\sigma^2\mu+x\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}$$