Tarea 12
Tuesday, 8 November 2022 16:04

Brandon Hernández

Introducción a inferencia bayesiana

Problema: Nos dan una moneda, y sólo sabemos que la moneda puede tener probabilidad 3/5 de tirar sol (cargada a sol) o puede ser una moneda cargada a águila (probabilidad 2/5 de sol).

Se lanza la moneda dos veces y observamos su resultado (águila o sol). Queremos decir algo acerca de que tan probable es que hayamos tirado la moneda cargada a sol ó la moneda cargada a águila.

Ejercicio 1: ¿Qué pasa cuando el número de soles es cero? ¿Cómo cambian las probabilidades posteriores de cada moneda?

$$P(\theta=0.4\mid X=0)=\frac{P(x=0\mid\theta=0.4)P(\theta=0.4)}{P(x=0)}=\frac{(0.36)(0.5)}{0.26}=0.69$$

$P(x=0\mid\theta=0.4)=(0.6)^2=0.36$

$P(x=0)=P(x=0\mid\theta=0.4)P(\theta=0.4)+P(x=0\mid\theta=0.6)P(\theta=0.6)$

$\Rightarrow P(x=0)=(0.36)(0.5)+(0.16)(0.5)=0.26$

$\therefore P(\theta=0.4\mid X=0)=0.69$
$P(\theta=0.6\mid X=0)=0.31$

Las probabilidades posteriores se invierten.

Ejercicio 2: Incrementa el número de volados, por ejemplo a 10. ¿Qué pasa si observaste 8 soles, por ejemplo? ¿Y si observaste 0?

1) $$P(\theta=0.4\mid x=8)=\frac{P(x=8\mid\theta=0.4)P(\theta=0.4)}{P(x=8)}=\frac{(0.0106)(0.5)}{0.0658}=0.0805$$

$P(x=8\mid\theta=0.4)=(0.4)^8(0.6)^2\binom{10}{8}=(45)(0.4)^8(0.6)^2=0.0106$

$P(x=8)=P(x=8\mid\theta=0.4)P(\theta=0.4)+P(x=8\mid\theta=0.6)P(\theta=0.6)$

$=(0.0106)(0.5)+(0.121)(0.5)=0.0658$

$\therefore P(\theta=0.4\mid x=8)=0.0805$
$P(\theta=0.6\mid x=8)=0.9194$

La probabilidad posterior para $x=8$ y $\theta=0.4$ disminuye muchísimo y para $\theta=0.6$ incrementó.

2) $$P(\theta=0.4\mid x=0)=\frac{P(x=0\mid\theta=0.4)P(\theta=0.4)}{P(x=0)}=\frac{(0.006)(0.5)}{0.00305}=0.983$$

$P(x=0\mid\theta=0.4)=(0.6)^{10}=0.006$

$P(x=0)=P(x=0\mid\theta=0.4)P(\theta=0.4)+P(x=0\mid\theta=0.6)P(\theta=0.6)$

$=(0.006)(0.5)+(0.0001)(0.5)=0.00305$

$\therefore P(\theta=0.4\mid x=0)=0.983$
$P(\theta=0.6\mid x=0)=0.0170$

La probabilidad posterior para $x=0$ y $\theta=0.4$ aumenta muchísimo, mientras que para $\theta=0.6$ disminuye.

Ejercicio 3: ¿Qué pasa si cambias las probabilidades iniciales (por ejemplo cambiar la probabilidad inicial de la moneda 1 a 0.9)?

1) $$P(\theta=0.4\mid x=8)=\frac{P(x=8\mid\theta=0.4)P(\theta=0.4)}{P(x=8)}=\frac{(0.0106)(0.9)}{0.02164}=0.44$$

$P(x=8\mid\theta=0.4)=\binom{10}{8}(0.4)^8(0.6)^2=(45)(0.4)^8(0.6)^2=0.0106$

$P(x=8)=P(x=8\mid\theta=0.4)P(\theta=0.4)+P(x=8\mid\theta=0.6)P(\theta=0.6)$

$=(0.0106)(0.9)+(0.121)(0.1)=0.02164$

$\therefore P(\theta=0.9\mid x=8)=0.44$
$P(\theta=0.6\mid x=8)=0.56$

Aunque la probabilidad de que se haya escogido la primer moneda es alta, la probabilidad posterior baja o se "ajusta" a la información inicial que se tiene disponible.

Justifica las siguientes aseveraciones (para este ejemplo):

a) Las probabilidades posteriores son una especie de punto intermedio entre verosimilitud y probabilidades iniciales:
De los ejemplos anteriores puede observarse que es cierto. Considerando una probabilidad inicial, se agrega información adicional previa al cálculo, lo que nos permite obtener las probabilidades posteriores al experimento. De esta manera, en general observamos que la verosimilitud es pequeña, mientras que el valor de la probabilidad posterior es mayor a la verosimilitud pero menor a la probabilidad inicial.

b) Si tenemos pocas observaciones, las probabilidades posteriores son similares a las iniciales:
Tiene sentido. Mientras menos observaciones tenemos, menos información adicional tenemos, por lo que agregar cada vez más muestras permite que el cálculo de la probabilidad posterior sea más acertado y se aleje de la inicial.

c) Cuando tenemos muchos datos, las probabilidades posteriores están más concentradas y no es tan importante la inicial:
Puede observarse en el tercer ejercicio que, a pesar de tener mucha certeza sobre haber seleccionado una moneda particular, después de agregar información adicional la probabilidad posterior tiende a cuando se tenían pocas observaciones. Si repetimos el ejercicio para 50 volados y probabilidad de escoger la primer moneda igual a 0.9, vemos que la probabilidad posterior disminuye muchísimo, por lo que eso nos muestra cómo las probabilidades iniciales dejan de ser tan importantes mientras se tenga más información inicial.

d) Si la inicial está muy concentrada en algún valor, la posterior requiere de muchas observaciones para que se pueda concentrar en valores diferentes a la inicial.
Depende de cuánto es "mucho". Podemos ver cómo después de incrementar de 2 volados a 10 volados, las probabilidades posteriores cambian mucho según la cantidad de soles observados. Entonces sí se requiere varias observaciones, pero hay que definir qué tanto es "mucho".