

# EST-46115: Modelación Bayesiana

**Profesor:** Alfredo Garbuno Iñigo — Primavera, 2022 — Diagnósticos MCMC.

**Objetivo.** Estudiaremos diagnósticos típicos de métodos de simulación Markoviana (por Metropolis-Hastings o HMC) con el objetivo de poder identificar problemas y posibles soluciones para simulaciones deficientes.

**Lectura recomendada:** Para una revisión de los diagnósticos de MCMC busca la sección 11.4 de [2]. El Capítulo 3 de [1] tiene una revisión muy bonita de series de tiempo.

## 1. INTRODUCCIÓN

El avance en poder computacional ha permitido la proliferación de métodos Bayesianos. El poder generar cadenas de Markov es múltiples procesadores nos ayuda a relajar los requisitos y ayuda a explotar los recursos computacionales disponibles.

Cuando generamos una muestra de la distribución posterior usando MCMC, sin importar el método (Metrópolis, Gibbs, HMC), buscamos que:

- Los valores simulados **no estén influenciados** por el valor inicial (arbitrario) y deben explorar todo el rango de la posterior.
- Debemos tener **suficientes simulaciones** de tal manera que las estimaciones sean precisas y estables.
- Queremos tener **métodos y resúmenes informativos** que nos ayuden diagnosticar correctamente el desempeño de nuestras simulaciones.

En la **práctica** intentamos cumplir lo más posible estos objetivos. Debemos de tener un criterio para considerar cadenas de **longitud finita y evaluar la calidad** de las simulaciones.

Primero estudiaremos **diagnósticos generales** para métodos que utilicen MCMC y después mencionaremos particularidades del método de simulación HMC.

## 2. DIAGNÓSTICOS GENERALES

Una forma que tenemos de evaluar la (o identificar la falta de) convergencia es considerar distintas secuencias independientes.

### 2.1. Monitoreo de convergencia

**Burn-in e iteraciones iniciales.** En primer lugar, en muchas ocasiones las condiciones iniciales de las cadenas las escogemos de tal forma que que son **“típicos”** en relación a la posterior.

Estrategias de selección de puntos iniciales pueden ser valores aleatorios de la previa o perturbaciones aleatorias a estimadores MLE.

Correr varias cadenas en puntos dispersos tienen la ventaja de explorar desde distintas regiones de la posterior. Eventualmente, esperamos que todas las **cadenas mezclen bien** y representen **realizaciones independientes** del mismo proceso estocástico (Markoviano).

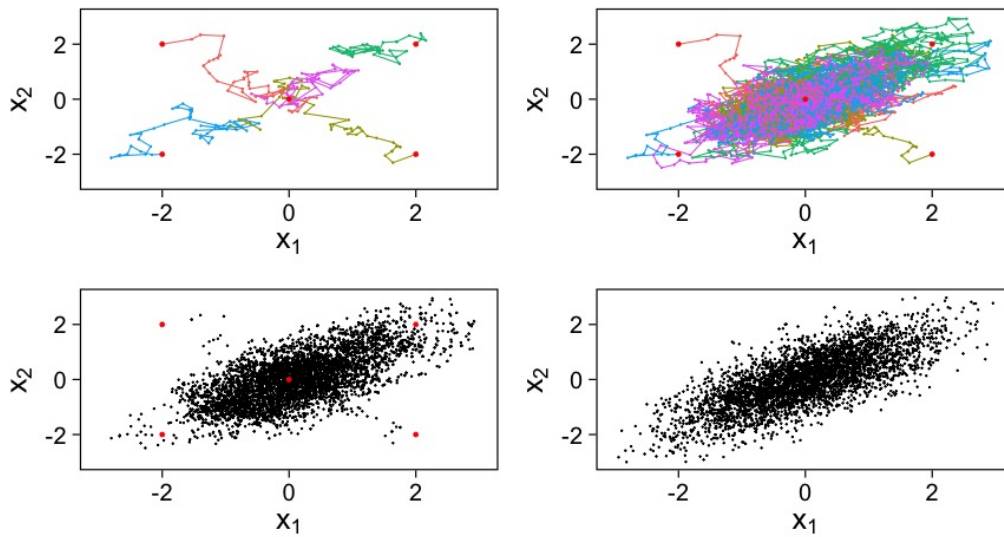
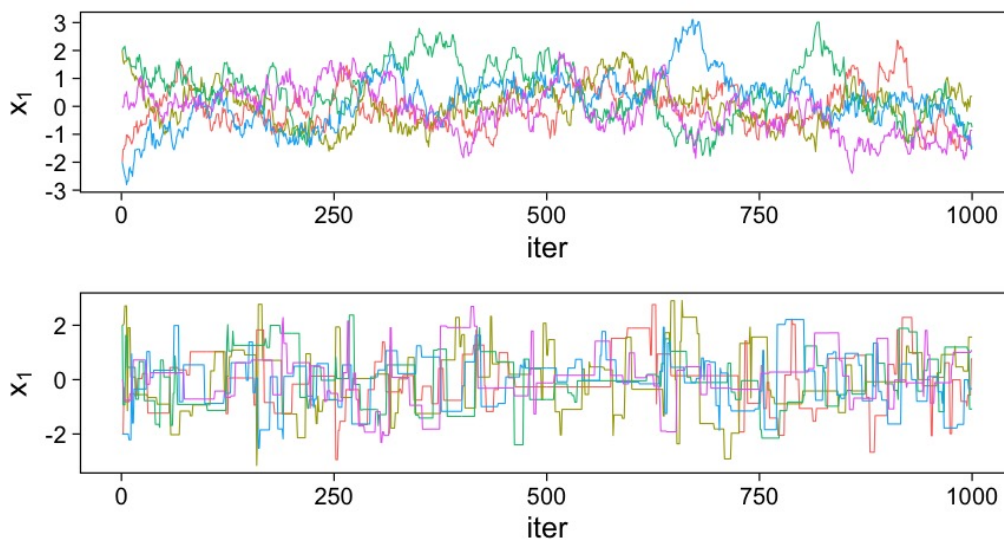


FIGURA 1. Distintas cadenas de Markov.

FIGURA 2. Trayectorias de simulación para  $x_1$ .

Para contrarrestar la dependencia en los distintos puntos iniciales se descarta parte de la cadena en un periodo inicial (periodo de calentamiento).

### 2.1.1. Datos: Cantantes de ópera

```

1 ## Datos: cantantes de ópera -----
2 set.seed(3413)
3 cantantes <- lattice::singer >
4   mutate(estatura_cm = round(2.54 * height)) >
5   filter(str_detect(voice.part, "Tenor")) >
6   select(voice.part, estatura_cm) >
7   sample_n(20)

```

	voice.part	estatura_cm
1		
2	139 Tenor 1	178
3	150 Tenor 2	173
4	140 Tenor 1	165

Denotamos por  $x_i$  la estatura de tenores (cantantes de ópera). Asumimos un modelo Normal con parámetros poblacionales no observados:  $\mu$  y  $\sigma$ . El modelo previo lo asumimos como

$$\mu|\sigma \sim \text{Normal}\left(\mu_0, \frac{\sigma}{n_0}\right), \quad (1)$$

$$\sigma^{-1} \sim \text{Gamma}(a_0, b_0). \quad (2)$$

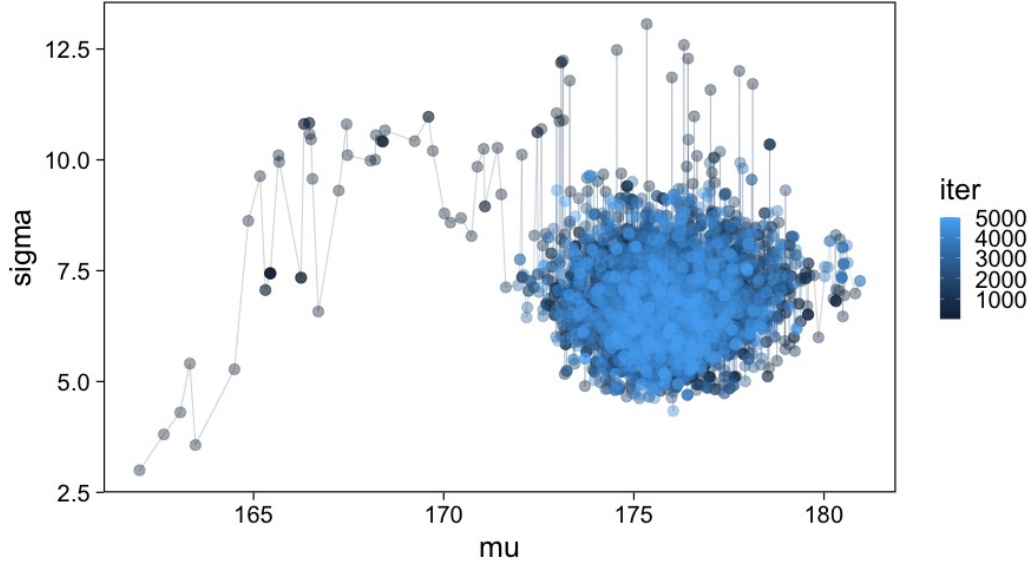


FIGURA 3. Cadena de Markov simulando de la posterior como distribución objetivo.

En esta simulación es evidente<sup>†</sup> que necesitamos descartar una parte inicial de la simulación.

Gelman et al. [2] recomiendan descartar la mitad de las iteraciones de cada una de las cadenas que se simularon. Para problemas en dimensiones altas, incluso se podría esperar descartar hasta un 80 % de simulaciones (en especial para métodos basados en Metropolis-Hastings).

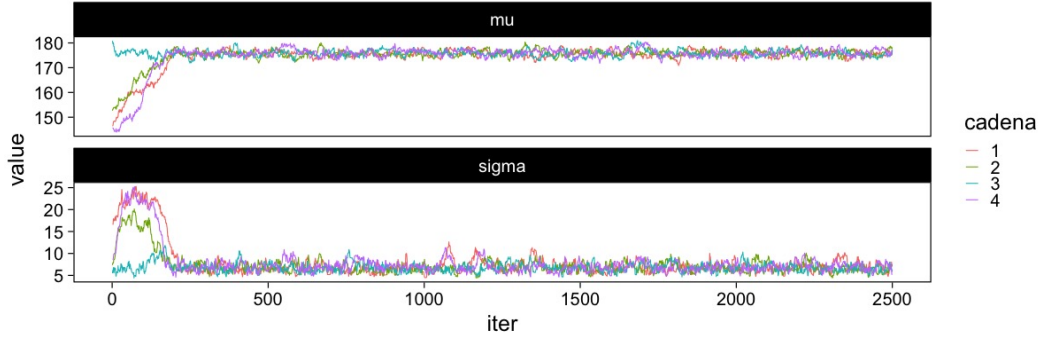


FIGURA 4. Trayectorias con dependencias iniciales.

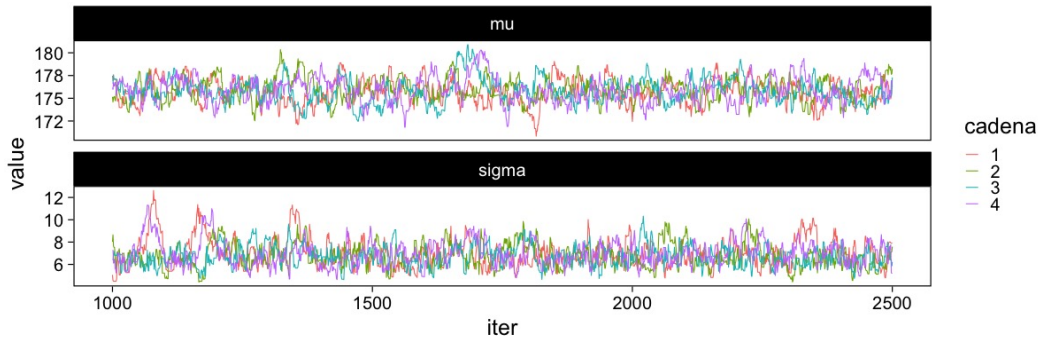


FIGURA 5. Trayectorias estacionarias.

## 2.2. Monitoreo de mezcla dentro y entre cadenas

Gelman y diversos de sus coautores han desarrollado un diagnóstico numérico para evaluar implementaciones de MCMC al considerar múltiples cadenas. Aunque éste estadístico se ha ido refinando con los años, su desarrollo muestra un entendimiento gradual de éstos métodos en la práctica. La medida  $\hat{R}$  se conoce como el **factor de reducción potencial de escala**.

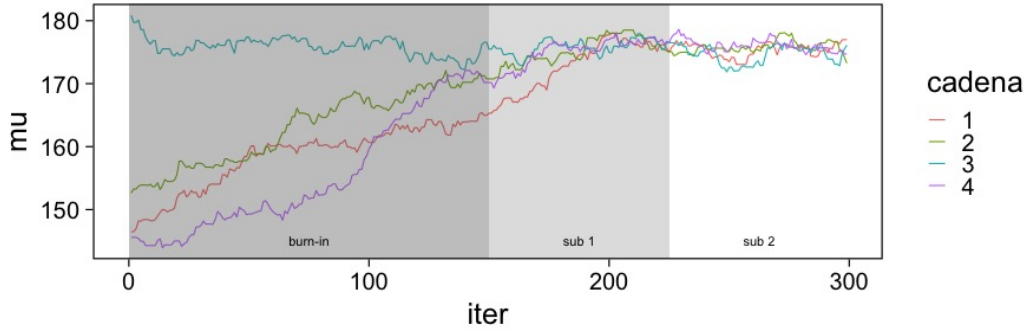
El estadístico  $\hat{R}$  pretende ser una estimación de la posible **reducción en la longitud** de un intervalo de confianza si las simulaciones continuaran infinitamente.

La  $\hat{R}$  estudia de manera simultánea la **mezcla** de todas las cadenas (cada cadena, y fracciones de ella, deberían de haber transitado el soporte de la distribución objetivo) y **estacionalidad** (de haberse logrado cada mitad de una cadena deberían de poseer las mismas estadísticas).

La estrategia es descartar la **primera mitad** de cada cadena. El resto lo volvemos a dividir en dos y utilizamos cada fracción como si fuera una cadena independiente<sup>†</sup>.

Denotemos por  $m$  el número de cadenas simuladas y por  $n$  el número de simulaciones dentro de cada cadena. Cada una de las **cantidades escalares de interés** las denotamos por  $\phi$ . Éstas pueden ser los parámetros originales  $\theta$  o alguna otra cantidad derivada  $\phi = f(\theta)$ .

Ahora denotemos por  $\phi_{ij}$  las simulaciones que tenemos disponibles con  $i = 1, \dots, n$ , y  $j = 1, \dots, m$ . Calculamos  $B$  y  $W$ , la variabilidad **entre** (*between*) y **dentro** (*within*) cadenas,

FIGURA 6. Separación de simulaciones para cálculo de  $\hat{R}$ .

respectivamente, por medio de

$$W = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m s_j^2, \quad \text{con} \quad s_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\phi_{ij} - \bar{\phi}_{.j})^2, \quad \text{donde} \quad \bar{\phi}_{.j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_{ij}, \quad (3)$$

$$B = \frac{n}{m-1} \sum_{j=1}^m (\bar{\phi}_{.j} - \bar{\phi}_{..})^2, \quad \text{donde} \quad \bar{\phi}_{..} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{\phi}_{.j}. \quad (4)$$

La varianza entre cadenas,  $B$ , se multiplica por  $n$  dado que ésta se calcula por medio de promedios y sin este factor de corrección no reflejaría la variabilidad de las cantidades de interés  $\phi$ .

La varianza de  $\phi$  se puede estimar por medio de

$$\hat{V}(\phi)^+ = \frac{n-1}{n} W + \frac{1}{n} B. \quad (5)$$

Este estimador **sobre-estima** la varianza pues los puntos iniciales pueden estar sobre-dispersos, mientras que es un **estimador insesgado** una vez que se haya alcanzado el estado estacionario (realizaciones de la distribución objetivo)

Por otro lado, la varianza estimada por  $W$  será un sub-estimador pues podría ser el caso de que cada cadena no ha tenido la oportunidad de recorrer todo el soporte de la distribución. En el límite  $n \rightarrow \infty$ , el valor esperado de  $W$  aproxima  $V(\phi)$ .

Se utiliza como diagnostico el factor por el cual la escala de la distribución actual de  $\phi$  se puede reducir si se continua con el procedimiento en el límite  $n \rightarrow \infty$ . Esto es,

$$\hat{R} = \sqrt{\frac{\hat{V}(\phi)^+}{W}},$$

por construcción converge a 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Problemas con  $\hat{R}$ . El estimador de reducción de escala funciona bien para monitorear estimadores y cantidades de interés basados en medias y varianzas, o bien, cuando la distribución es simétrica y cercana a una Gaussiana. Es decir, colas ligeras. Sin embargo, para percentiles, o distribuciones lejos del supuesto de normalidad no es un buen indicador. Es por esto que también se recomienda incorporar transformaciones que nos permitan generar un buen estimador. Puedes leer mas de esto aqui: [4].

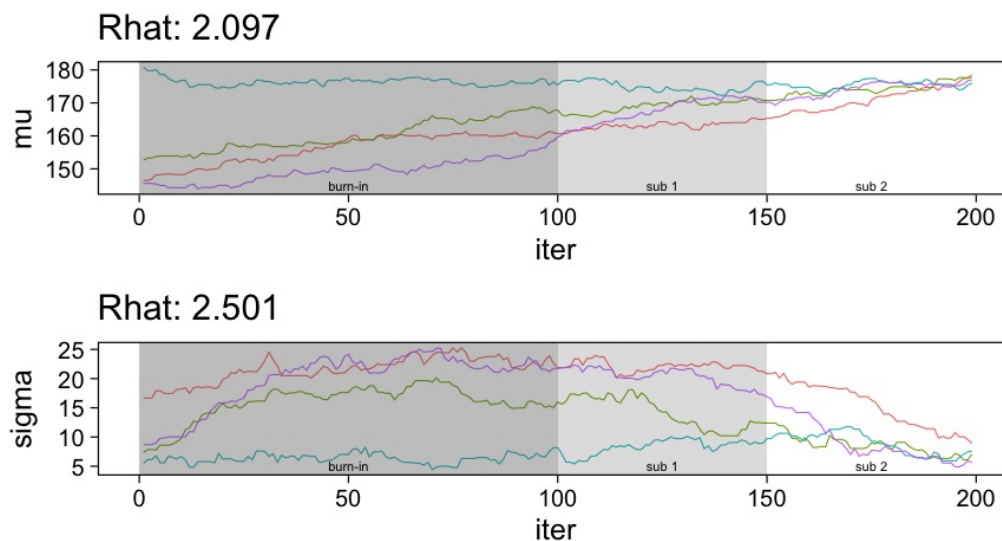


FIGURA 7. Diagnóstico de reducción de escala. Sugerencia: generar mas simulaciones.

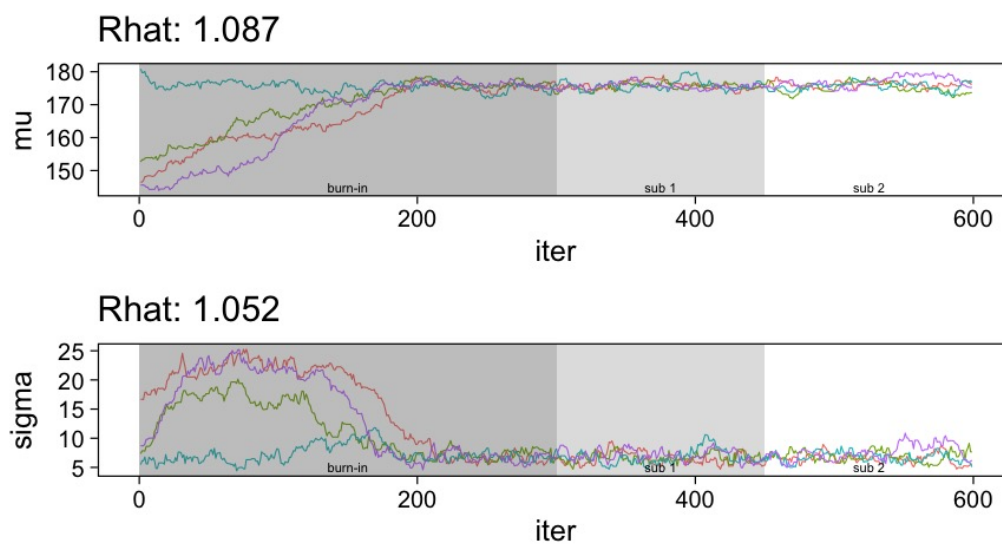


FIGURA 8. Diagnóstico de reducción de escala. Observaciones: parece estar bien.

### 2.3. Número efectivo de simulaciones

Queremos que los recursos que hemos asignado a generar simulaciones sean representativos de la distribución objetivo. Si las  $n$  simulaciones dentro de cada cadena en verdad son realizaciones independientes entonces la estimación de  $B$  sería un estimador insesgado de  $\mathbb{V}(\phi)$ .

En esta situación tendríamos  $n \cdot m$  realizaciones de la distribución que queremos simular. Sin embargo, la correlación entre las muestras hacen que  $B$  sea mayor que  $\mathbb{V}(\phi)$  en promedio.

Una manera para definir el tamaño efectivo de simulaciones es por medio del estudio del estimador

$$\bar{\phi}_{..} \approx \mathbb{E}(\phi). \quad (6)$$

Del cual podemos derivar que

$$\mathbb{V}(\bar{\phi}_{..}) = \frac{\mathbb{V}(\phi)}{m \cdot n}.$$

El problema es que la correlación en las cadenas implica el denominador  $(m \cdot n)$  realmente sea una fracción del total de muestras, digamos  $\lambda$ . De tal forma que el número efectivo de simulaciones es

$$N_{\text{eff}} = \lambda \cdot (m n),$$

donde

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{t=-\infty}^{\infty} \rho_t} = \frac{1}{1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho_t}.$$

El término  $\rho_t$  denota la **auto-correlación** con diferencia en  $t$  unidades de tiempo.

**Definición (autocorrelación):** La autocovarianza y autocorrelación de una serie temporal **estacionaria**  $\{Y_t : t = 0, \dots\}$  están definidas (respectivamente) como

$$C_\tau = \mathbb{E}[(Y_{t+\tau} - \mu)(Y_t - \mu)], \quad \rho_\tau = \frac{\mathbb{E}[(Y_{t+\tau} - \mu)(Y_t - \mu)]}{\sigma^2}. \quad (7)$$

**Definición (estimador de autocorrelación):** La función de autocorrelación se estima utilizando

$$\hat{C}_\tau = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=1}^{T-\tau} (Y_{t+\tau} - \hat{\mu})(Y_t - \hat{\mu}), \quad \hat{\rho}_\tau = \frac{\hat{C}_\tau}{\hat{C}_0}. \quad (8)$$

**Definición (variograma):** El variograma de una serie temporal **estacionaria**  $\{Y_t : t = 0, \dots\}$  está definido como

$$V_\tau = \mathbb{E}[(Y_{t+\tau} - Y_t)^2]. \quad (9)$$

**Nota** que  $V_\tau = C_0 - C_\tau$ .

Regresando a nuestro contexto... para estimar  $\rho_t$  partimos de nuestro estimador  $\hat{\mathbb{V}}(\phi)^+$ ; y utilizamos el **variograma**  $V_t$  para cada **retraso**  $t$

$$V_t = \frac{1}{m(n-t)} \sum_{j=1}^m \sum_{i=t+1}^n (\phi_{i,j} - \phi_{i-t,j})^2.$$

Utilizando la igualdad  $\mathbb{E}(\phi_i - \phi_{i-t})^2 = 2(1 - \rho_t)\mathbb{V}(\phi)$ , podemos estimar

$$\hat{\rho}_t = 1 - \frac{V_t}{2 \hat{\mathbb{V}}(\phi)^+}.$$



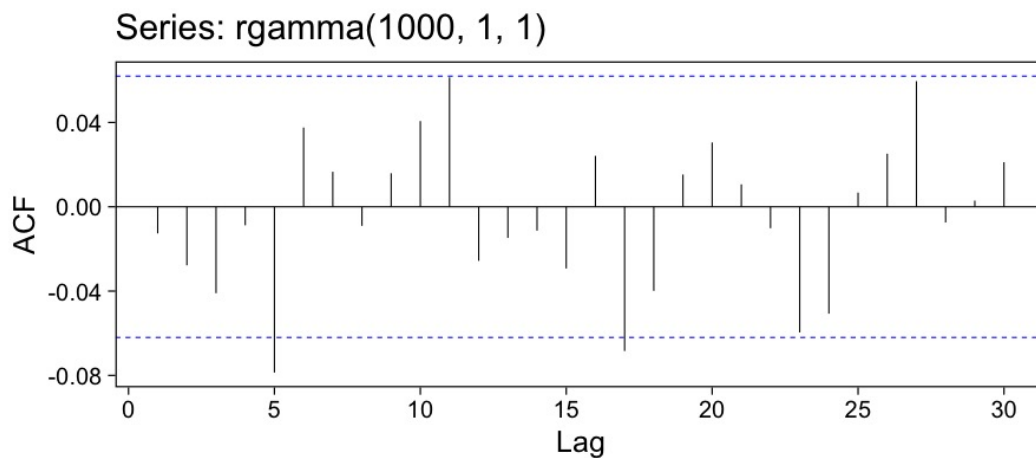
La mayor dificultad que presenta el estimador es considerar **todos** los retrasos posibles. Eventualmente agotaremos la longitud de las cadenas para ello. Por otro lado, para  $t$  eventualmente grande nuestros estimadores del variograma  $V_t$  serán muy ruidosos (¿por qué?). En la práctica truncamos la serie de acuerdo a las observaciones [3]. La serie tiene la propiedad de que para cada par  $\rho_{2t} + \rho_{2t+1} > 0$ . Por lo tanto, la serie se trunca cuando observamos  $\hat{\rho}_{2t} + \hat{\rho}_{2t+1} < 0$  para dos retrasos sucesivos.

Si denotamos por  $T$  el **tiempo de paro**, el estimador para el número efectivo de simulaciones es

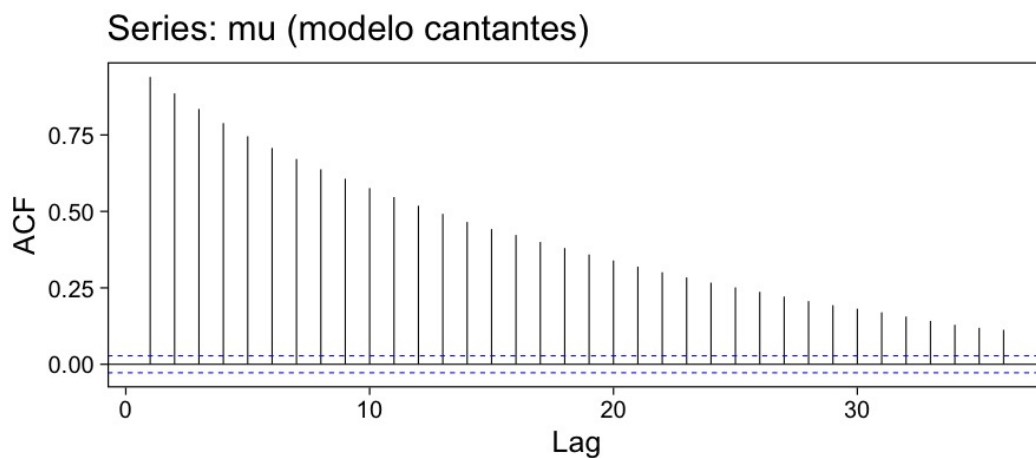
$$\hat{N}_{\text{eff}} = \frac{mn}{1 + 2 \sum_{t=1}^T \hat{\rho}_t}.$$

El **tamaño efectivo de simulaciones** nos ayuda a monitorear lo siguiente. Si las simulaciones fueran independientes  $N_{\text{eff}}$  sería el número total de simulaciones; sin embargo, las simulaciones de MCMC suelen estar correlacionadas, de modo que cada iteración de MCMC es menos informativa que si fueran independientes.

Por ejemplo si graficáramos simulaciones independientes, esperaríamos valores de autocorrelación chicos:



Sin embargo, los valores que simulamos tienen el siguiente perfil de autocorrelación:



1	mu	sigma	accept
2	0.029	0.048	0.690



LISTING 1. *Fracción  $N_{\text{eff}}/nm$  para la simulación de la posterior los cantantes de ópera.*

1	mu	sigma	accept
2	0.088	0.146	0.380

LISTING 2. *Fracción  $N_{\text{eff}}/nm$  para la simulación (calibrada) de la posterior los cantantes de ópera.*

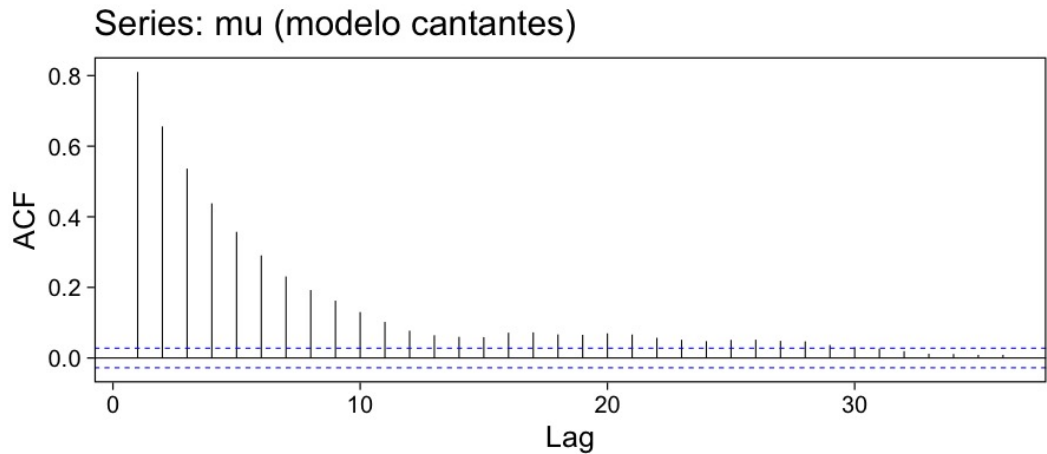


FIGURA 9. *Perfil de correlación para la simulación calibrada.*

REFERENCIAS

[1] N. Cressie and C. K. Wikle. *Statistics for Spatio-Temporal Data*. John Wiley & Sons, 2015. 1

[2] A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Dunson, A. Vehtari, and D. B. Rubin. *Bayesian Data Analysis*, volume 2. CRC press Boca Raton, FL, 2014. 1, 3

[3] C. J. Geyer. Introduction to Markov Chain Monte Carlo. *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, (1990): 3–48, 2002. 8

[4] A. Vehtari, A. Gelman, D. Simpson, B. Carpenter, and P.-C. Bürkner. Rank-Normalization, Folding, and Localization: An Improved  $\hat{R}$  for Assessing Convergence of MCMC (with Discussion). *Bayesian Analysis*, 16(2), jun 2021. ISSN 1936-0975. . 5