Operaciones con Numeros Naturales Unarios

Ernesto Rodriguez

Universidad del Itsmo

erodriguez@unis.edu.gt

¿Que podemos hacer con los Numeros Naturales Unarios?

- De momento, no mucho...
- ¿Que necesitamos hacer con los numeros naturales unarios?
- ¿Es posible expresar estas necesidades mediante un grupo pequeño de operaciones (funciones)?
- ¿Como definimos estas operaciones?
- ¿Es posible construir algoritmos que lleven a cabo estas operaciones?

Suma

- **Definición:** Definimos la suma $\oplus$ para cualquier numero natural unario n y m como:

$$n \oplus m \begin{cases} m & \text{si } n = o \\ n & \text{si } m = o \\ s(i \oplus m) & \text{si } n = s(i) \end{cases}$$

- ¿Es una definición buena?
- ¿Pueden estas funciones definirse mediante algoritmos?
- A todo esto, ¿Que es una función?
- ¿Ejemplos?

Substitución

- **Definición:** A una agrupación de numeros naturales unarios y operaciones se le conoce como expresión y se abreviaran mediante variables como ξ
- **Ejemplo:** $m \oplus n \oplus l$ es una expresión
- **Definición:** Dado que $n = m$ y una expresión arbitraria ξ, es permitido substituir todas las ocurrencias de n por m en ξ.
- **Definición:** La expresión ξ donde m es sustituido por n se denota como $[m/n]\xi$
- **Ejemplo:** Si $m = s(s(o))$ y $\xi = m \oplus x$, entonces $[m/s(s(o))]\xi = s(s(o)) \oplus n$

La adición es asociativa

Teorema (asociatividad): Para todo numero natural unario n, m, l se cumple: $n \oplus (m \oplus l) = (n \oplus m) \oplus l$

Demostración: mediante inducción en l

- **Caso base:** $l = o$
  - $n \oplus (m \oplus o) = n \oplus m = (n \oplus m) \oplus o$
- **Caso inductivo:** $l = s(i)$
  1. **Hipotesis inductiva:** Asumimos que $m \oplus (n \oplus i) = (m \oplus n) \oplus i$
  2. Sabemos que $n \oplus (m \oplus s(i)) = n \oplus s(m \oplus i) = s(n \oplus (m \oplus i))$
  3. Sabemos que $s(n \oplus (m \oplus i)) = s((n \oplus m) \oplus i)$ por la hipotesis inductiva
  4. Concluimos que $s((n \oplus m) \oplus i) = (n \oplus m) \oplus s(i)$