Matematica discreta elemental

Ernesto Rodriguez

Universidad del Itsmo

erodriguez@unis.edu.gt

Principios basicos

- Los numeros son representaciones simbolicas de cantidades.
- Se pueden representar de muchas formas
- Consideremos la más basica:

- Se utilizan marcas en una superficie para contar.
- Por ejemplo: "////" significa cuatro.

Construccion Algoritmica

Se utilizaran dos reglas para construir los numeros:

- **regla**-*o* el espacio vacio (' ') es un numero.
- **regla**-*s* se puede construir un numero nuevo colocando una marca ("/") despes de un numero existente.
- **Ejemplo:** El numero "////" se produce mediante la aplicación de la regla-*o* y cuatro aplicaciones de la regla-*s*
- Los numeros construidos mediante estas reglas se conocen como: *Numeros unarios naturales*

Más formalidad

- **Definición**: Un numero natural unario es el *sucesor* (*predecesor*) si se puede construir al agregar (quitar) una marca – la regla-*s* produce los sucesores.
- **Ejemplo:** /// es el sucesor de // y // el predecesor de ///

Axiomas de Peano

- **Aximoa (P1):** ' ' (llamado cero) es un numero unario natural
- **Axioma (P2):** Todo numero natural unario tiene un sucesor que es diferente a el
- **Axioma (P3):** El cero no es el sucesor de ningún numero natural unario
- **Axioma (P4):** Diferentes numeros naturales unarios tienen diferentes sucesores
- **Axioma (P5: Inducción):** Todos los numeros naturales unarios tienen una propiedad P si:
  1. *cero* tiene la propiedad P
  2. El sucesor de todo numero con la propiedad P también tiene la propiedad P.
- **Pregunta:** ¿Por que es necesaria tanta formalidad?
- "Este es el precio que hay que pagar para estar absolutamente seguro" – Bernard Russel

Razonamiento sobre Numeros Naturales Unarios

- Los *axiomas de Peano* nos permiten razonar acerca de los numeros naturales
- **Definición**: Un *axioma* es un enunciado sobre objetos matematicos que asumimos ser cierto
- Un *teorema* es un enunciado sobre objetos matematicos que sabemos que es cierto
- Razonamos acerca de los numeros naturales infiriendo teoremas a partir de axiomas u otros teoremas. Ej:
    1. ' ' es un numero natural unario (axioma P1)
    2. / es un numero natural unario (axioma P2 y 1)
    3. // es un numero natural unario (axioma P2 y 2)
- Una sequencia de inferencias es una *demostración* del ultimo enunciado.

Más teoremas y demostraciones

- **Teorema:** ////////// es un numero natural unario
- **Teorema:** /// es diferente de //
- **Teorema:** ///// es diferente de //
- **Teorema:** Existe un numero natural unario que es sucesor de ///
- **Teorema:** Existen al menos 7 numeros naturales unarios
- **Teorema:** Todo numero natural unario es cero o el sucesor de otro numero natural unario

Inducción para los numeros naturales unarios

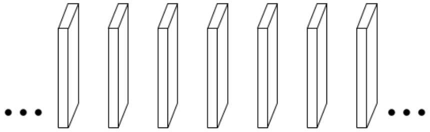
- **Teorema:** Todo numero natural unario es cero o el sucesor de otro numero
- Demostración mediante el axioma P2:
  1. Se considera la propiedad p que dice “es cero o sucesor” y se verifican los requisitos.
  2. El numero ' ' es cero, por lo que cumple con p
  3. Considerar un numero natural unario arbitrario n que cumple con p
  4. El numero n tiene un sucesor llamado $s(n)$ (P2).
  5. Dado que n fue arbitrario, mediate P5 concluimos que todo numero natural unario cumple con p.

Notación

- Es permitido nombrar un numeor natural unario arbitrario mediante una variable (n, m, l, k, n_1, n_2)
- Representamos los numeros mediante la aplicación de reglas que los construye: $////$ se representa como $s(s(s(s(o))))$
- **Definición:** Introduciomos algúnas abreviaciones:
  - Se abrevia a o o ' ' mediante el simbolo '0'
  - Se abrevia a $s(o)$ y $/$ mediante el simbolo '1'
  - Se abrevia a $s(s(o))$ y $//$ mediante '2'
  - ...
- $\mathbb{N}_1$ representa al conjunto de todos los numeros naturales

El Teorema Domino

- **Teorema:** Consideremos una secuencia $S_0, S_1, \ldots$ de dominos, tal que cada numero natural unario n comple con:
  - La distancia entre S_n y $S_{s(n)}$ es menor que la altura de S_n
  - S_n es más alto que ancho, por ente inestable
  - S_n y $S_{s(n)}$ tienen el mismo peso
  - Todos los dominoes S_n se encuentran en una linea recta
- **Teorema:** Si S_0 cae en la direccion de S_1, todos los dominos caen



La Inducción de Domino

- **Demostración:** Demostramos el teorema mediante inducción sobre n con la propiedad P que dice: "S_n cae en la dirección de $S_{s(n)}$"
- Hay que considerar dos casos:
  - **Caso base:** n es cero
    1. Asumimos que S_0 se empuja en la dirección de S_1 por lo cual cae
  - **Caso inductivo:** n es un numero natural unario arbitrario
    1. $n = s(m)$ para algun numero natural unario m (P2)
    2. Asumimos que P se mantiene, por lo cual S_m cae en la dirección de $S_{s(m)}$
    3. Sabemos que S_m empuja a $S_{s(m)}$ en la direccion opuesta que cayo ya que la distancia entre ambos es menor que la altura de S_m y la segunda ley de newton
    4. Debido a que $S_{s(m)}$ tiene el mismo peso que S_m y es inestable, debe caer en la dirección opuesta que cayo S_m