Relaciones

Ernesto Rodriguez

Universidad del Itsmo

erodriguez@unis.edu.gt

Relaciones

- **Definición** Dados los conjuntos A y B, $R \subset A \times B$ es una *relacion binaria* entre elementos de A y B.
- Si $A = B$, entonces R es una relación en A
- La relación R es total ssi $\forall x \in A\ \exists y \in B.\ \langle x, y \rangle \in R$
- $R^{-1} := \{\langle y, x\rangle | \langle x, y\rangle \in R\}$ es el *inverso* de R
- Dadas las relaciones $R \subset A \times B$ y $S \subset B \times C$, $A \circ B := \{\langle a, c\rangle \in A \times C \mid \exists b \in B.\ \langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S\}$ se conoce como la *composición* entre A y S
- Las relaciones ternarias, cuaternarias, ect. se pueden representar con:
  - Considerar $A \times B \times C$ como $A \times (B \times C)$
  - Considerar $\langle a, b, c\rangle$ como $\langle a, \langle b, c\rangle\rangle$
  - Utilizaremos $\langle a, b, c\rangle$ y $\langle a, \langle b, c\rangle\rangle$ para representar el mismo objeto.

Ejemplos

- Mayor que ($>$)
- Menor que ($<$)
- Subconjunto de ($\subset$)
- Igual que ($\equiv$)
- `madre_de`
- `padre_de`

Propiedades de Relaciones Binarias

- Una relación $R \subset A \times A$ es llamada:
  - **reflexiva** sii $\forall a \in A.\ \langle a, a\rangle \in R$
  - **irreflexiva** sii $\forall a \in A.\ \langle a, a\rangle \notin R$
  - **symetrica** sii $\forall a, b \in A.\ \langle a, b\rangle \in R \Rightarrow \langle b, a\rangle \in R$
  - **asimetrica** sii $\forall a, b \in A.\ \langle a, b\rangle \in R \Rightarrow \langle b, a\rangle \notin R$
  - **anti-simetrica** sii $\forall a, b \in A.\ (\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, a\rangle \in R) \Rightarrow a = b$
  - **transitiva** sii $\forall a, b, c \in A.\ (\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in R) \Rightarrow \langle a, c\rangle \in R$
  - **relacion de equivalencia** sii R es *reflexiva*, *simetrica* y *transitiva*
- La relación de igualdad $(\equiv)$ es una *relación de equivalencia* en cualquier conjunto.
- En un conjunto de personas, la relacion `madre_de` no es *simetrica* ni *reflexiva*

Ordenes Parciales

- Un **orden parcial** es una relación *reflexiva*, *antisimetrica* y *transitiva*.
- Un **orden parcial estricto** es un orden parcial *irreflexivo* y *transitivo*
- A menudo, se utiliza el simbolo $\preceq$ para denotar un orden parcial y $\prec$ para un orden parical estricto.
- Se dice que un *orden parcial* es **lineal** si todos los elementos se pueden *comparar*. i.e. si $\langle x, y\rangle \in R$ o $\langle y, x\rangle \in R$ para todo $x, y \in A$
- La relación *menor o igual que* $(\leq)$ es un *orden lineal* para todo $\mathbb{N}$
- La relación *succesor* es un orden parcial no lineal.

Funciones (como relaciones especiales)

- Una relación $f \subset X \times Y$ es una función parcial si para todo $x \in X$ hay a lo sumo un $y \in Y$ tal que $\langle x, y \rangle \in f$
- Se utiliza $f \; : \; X \to Y$ en vez de $f \subset X \times Y$
- A X se le conoce el **dominio** de f
- A Y se le conoce como el **contradominio** de f
- Se escribe $f(x) = y$ en lugar de $\langle x, y \rangle \in f$
- Una función f esta **indefinida** en x sii $\langle x, y \rangle \notin f$ para todo $y \in Y$. Se indica con $f(x) = \perp$
- Si $\forall x \in X \; \exists^1 y \in Y. \; \langle x, y \rangle \in f$, a f se le conoce como una **funcion total**.
- Se conoce como **función identidad** en A a la función $\mathtt{id}_A := \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$

Notación lambda

- La **notación-λ** nos permite expresar funciones de forma más compacta.
- Para $f = \{\langle x, E\rangle | x \in X\}$ donde E es una expresión arbitraria, se puede escribir $\lambda x \in X.\ E$
- Ejemplos:
  - $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n = \{\langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathtt{id}_{\mathbb{N}}$
  - $\lambda x \in \mathbb{N}.\ x^2 = \{\langle x, x^2\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$
  - $\lambda\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.\ x + y = \{\langle\langle x, y\rangle, x + y\rangle \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\}$

Propiedades de funciones e inversos

- Dada una función $f : S \to T$, la función es:
  - **injectiva** sii $\forall x, y \in S.\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
  - **surjectiva** sii $\forall y \in T\ \exists x \in S.\ f(x) = y$
  - **bijectiva** sii f es *injectiva* y *surjectiva*
- Si f es *injectiva*, la función contraria f^{-1} es una función parcial.
- Si f es *surjectiva*, la función contraria f^{-1} es una función total.
- Si f es *bijectiva*, la función contraria f^{-1} se le conoce como la **función inversa**.
- La función $v : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}$ donde $v(o) = 0$ y $v(s(n)) = v(n) + 1$ es una bijección entre los numeros naturales unarios y los numeros naturales ordinarios.
- **Nota:** Los conjuntos que se pueden relacionar con una bijección se consideran equivalentes y a menudo son intercambiados. Se intercambiaran los $\mathbb{N}_1$ y $\mathbb{N}$

Cardinalidad de Conjuntos

- Se dice que un conjunto A es **finito** y tiene cardinalidad $\#(A) \in \mathbb{N}$ sii hay una función bijectiva $f : A \rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid n < \#(A)\}$
- Se dice que un conjunto A es **finitamente contable** sii hay una bijección $f \ : \ A \rightarrow \mathbb{N}$

- Si $f \in A \to B$ y $g \in B \to C$ son funciones, llamamos a la función $g \circ f \ : \ A \to C$; $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ la **composición** de g y f.
- Si $f \in A \to B$ y $C \subseteq A$, llamamos a la función $f|_C := \{\langle c, a\rangle \mid \langle c, b\rangle \in f\}$ donde $c \in C$ la **restricción** de f a C