Conjuntos

- Los conjuntos sun una de las fundaciones de la matematica.
- No se intentaran de definir, se intentara entenderlos.
- Para entender un conjunto, hay que entender que elementos son miembros y cuales no.
- Los conjuntos se representan con:
  - Listas de elementos: $\{a, b, c\}$
  - Describir los elementos en base a una propiedad: $\{x | \texttt{xtienelapropiedad} P\}$
  - Mencionando la pertenencia: $a \in S$ ó $b \notin S$
  - **Axioma**: Todos los elementos que podemos escribir existen.
  - Es importante diferenciar objetos de su representación.

- **igualdad**: $(A \equiv B) :\Leftrightarrow (\forall x. x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
- **subconjunto**: $(A \subseteq B :\Leftrightarrow (\forall x. x \in A \Rightarrow x \in B)$
- **subconjunto propio**: $(A \subset B) :\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \not\equiv B)$
- **superconjunto**: $(A \sqsupseteq B :\Leftrightarrow (\forall x. x \in B \Rightarrow x \in A$
- **subconjunto propio**: $(A \supset B) :\Leftrightarrow (A \supseteq B) \wedge (A \not\equiv B)$

Operaciones con Conjuntos

- **union**: $A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- **union sobre una colección**: Sea I un *conjunto* y S_i una familia de conjuntos con indices I, entonces $\cup_{i \in I} S_i := \{x | \exists i \in Ix. \in S_i\}$
- **intersección**: $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- **intersección de una colección**: Sea I un *conjunto* y S_i, una familia de conjuntos con indices pertenecientes a I, entonces $\cap_{i \in I} S_i := \{x | \forall i \in I . x \in S_i\}$
- **diferencia de conjuntos**: $A \backslash B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
- **conjunto de subconjuntos**: $\mathcal{P}(A)$ o $\{\}^A := \{S | S \subseteq A\}$
- **el conjunto vacio**: $\forall x . x \notin \varnothing$

Operaciones en Conjuntos (cont.)

- **Producto cartesiano**: $A \times B := \{\langle a, b\rangle | a \in A \wedge b \in B\}$. $\langle a, b\rangle$ es una *pareja*
- **Producto cartesiano orden n**: $A_1 \times \ldots \times A_n := \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle | \forall i.1 \leq i \leq n \Rightarrow a_i \in A_i$
- **Espacio cartesiano n-dimensional**: $A^n := \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle | 1 \leq i \leq n \Rightarrow a_i \in A\}$, $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ es un *vector*
- **Definicion:** se escribe $\cup_{i=1}^{n} S_i$ para el conjunto $\cup_{i \in \{i | 1 \leq i \leq n\}}$
- **Definicion:** se escribe $\cap_{i=1}^{n} S_i$ para el conjunto $\cap_{i \in \{i | 1 \leq i \leq n\}}$

Tamaños de Conjuntos

- **Definición**: El *tamaño* ($\#A$) de un conjunto A es el numero de elementos en el conjunto.
- **Conjetura**:
  - $\#\{a, b, c\} = 3$
  - $\#\mathbb{N} = \infty$
  - $\#(A \cup B) \leq \#A + \#B$
  - $\#(A \cap B) \leq \texttt{min}(\#A, \#B)$
  - $\#(A \times B) = \#A * \#B$
- ¿Como demostramos estas propiedades?
- A todo esto, ¿Que significa "numero de objetos"?
- **Idea**: Es necesario asignarle a cada elemento de un conjunto un numero natural unario
- ¿Como asociamos elementos de un conjunto a elementos de otros conjuntos?

Los conjuntos son impresionantes

- Los conjuntos parecen simples, pero son *poderosos*
- Hay conjuntos muy grandes. e.j. "El conjunto $\mathcal{S}$ de todos los conjuntos":
  - Contiene el conjunto $\varnothing$
  - Para todo objeto O, tenemos que $\{O\}, \{\{O\}\}$, $\{O, \{O\}\}, \ldots \in \mathcal{S}$
  - Contiene todas las uniones, intersecciones y conjuntos de conjuntos
  - Se contiene a si mismo $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$

El conjunto $\mathcal{S}$

- **Propuesta**: El conjunto $\mathcal{S}'$ de todos los conjuntos que no se contienen a si mismo
- **Pregunta**: ¿$\mathcal{S}' \in \mathcal{S}'$?
  - Supongamos que si, entonces $\mathcal{S}' \notin \mathcal{S}'$ ya que $\mathcal{S}'$ solo contiene objetos que no se contienen a si mismos
  - Supongamos que no, entonces $\mathcal{S}' \in \mathcal{S}'$ ya que $\mathcal{S}'$ contiene a los conjuntos que no se contienen a si mismo
- De cualquier forma, tanto $\mathcal{S}' \in \mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}' \notin \mathcal{S}'$ son ciertos, lo cual es una contradicción

Jerga Matematica

- ¿Nos proteje la *jerga matematica*?
- **No**: $\mathcal{S}' := \{m | m \notin m\}$
- La *jerga matematica* nos permite construir enunciados contradictorios que son "gramaticalmente" validos
- Hay que tener cuidado al construir conjuntos!