№35 $L(y,y) = (y-y)^2$

Если

$$f^*(x) = \arg\min_c E((Y-c)^2 / X=x)$$

то $f^*(x) = E(Y/X=x)$

$$E((Y-c)^2/X=x) = E(Y^2 - 2Yc + c^2/X=x)$$

$$= c^2 + E(Y^2/X=x) - 2cE(Y/X=x) =$$

$$= (c - E(Y/X=x))^2 + E(Y^2/X=x) -$$

$$- E^2(Y/X=x) = (c - E(Y/X=x))^2 +$$

$$+ \underbrace{D(Y/X=x)}_{\geq 0}$$

c входит в первое слагаемое ≥ 0

минимум при $c^* = E(Y/X=x)$

$$\Downarrow$$

ответ $f = E(Y/X=x)$

Ф. риск

$$R(f) = \int_{X \times Y} L(f(x), y)\, p(x,y)\, dx\, dy =$$

$$\int_X \int_Y L(f(x), y)\, p(y|x)\, dy\, p(x)\, dx =$$

$$[L = (f(x) - y)^2]$$

$$= \int_X E[(Y - f(x))^2 | X = x]\, p(x)\, dx$$

$$R(f^*) = \int_X D_x(Y | X = x)\, p(x)\, dx =$$

$$E_x(D_x(Y | X = x))$$