№ 17

x_1	4	0	-1	3	4
x_2	2	-3	-2	1	2
x_3	3	2	2	1	-3

$\bar{x} = (2, 0, 1)$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X_c = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = X_c^T X_c = \begin{pmatrix} 22 & 21 & -9 \\ 21 & 22 & -9 \\ -9 & -9 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{N-1} C = \frac{1}{4} C$$

$$\det(C - tI) = -(t-1)(t-16)(t-49)$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 16 \quad t_3 = 49$$

c. b

- $t_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 21 & 21 & -9 \\ 21 & 21 & -9 \\ -9 & -9 & 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7 & -7 & 3 \\ 40 & 40 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $\lambda_2 = 16$

$$\begin{pmatrix} 6 & 21 & -9 \\ 21 & 8 & -9 \\ -9 & -9 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 7 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & -1 & 0 \\ 0 & -3 & \textcircled{1} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} t$$

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{11}} X$$

• $\lambda_3 = 49$

$$\begin{pmatrix} -28 & 21 & -9 \\ 21 & -28 & -9 \\ -9 & -9 & -28 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -\frac{8}{3} & \textcircled{1} \\ 16 & -16 & 0 \\ 24 & -24 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{3} & 1 \\ \textcircled{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

$$V_3 = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

V_i $i=\overline{1,3}$ – главные компоненты

- $\frac{1}{N-1}\lambda_1 = \frac{1}{N-1}\sigma_1^2 = \frac{7}{4}$
- $\frac{1}{N-1}\lambda_2 = \frac{1}{N-1}\sigma_2^2 = 4$
- $\frac{1}{N-1}\lambda_3 = \frac{1}{N-1}\sigma_3^2 = \frac{49}{4}$

} дисперсия по гл. компонентам

№35 $L(y,y) = (y-y)^2$

Если

$$f^*(x) = \arg\min_c E((Y-c)^2 / X=x)$$

то $f^*(x) = E(Y/X=x)$

$$E((Y-c)^2/X=x) = E(Y^2 - 2Yc + c^2/X=x)$$

$$= c^2 + E(Y^2/X=x) - 2cE(Y/X=x) =$$

$$= (c - E(Y/X=x))^2 + E(Y^2/X=x) -$$

$$- E^2(Y/X=x) = (c - E(Y/X=x))^2 +$$

$$+ \underbrace{D(Y/X=x)}_{\geq 0}$$

c входит в первое слагаемое ≥ 0

минимум при $c^* = E(Y/X=x)$

$$\Downarrow$$

ответ $f = E(Y/X=x)$

№36 $L(y, y') = |y - y'|$

$E(|f(x) - Y| | X = x) \to \min$

медиана $(Y | X = x) = med$

Минимум достигается не на медиане а в

$m = med + \varepsilon \quad \varepsilon \neq 0$

$\exists \varepsilon > 0$

$E(|med + \varepsilon - Y| | X = x) =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} |med + \varepsilon - y| p(y|x)\, dy =$

$= \int_{y < med + \varepsilon} (med + \varepsilon - y) p(y|x)\, dy +$

$+ \int_{y > med + \varepsilon} (y - med - \varepsilon) p(y|x)\, dy$

$$\leq \int_{y \leq med} (med + \varepsilon - y)\, p(y|x)\, dy +$$

$$+ \int_{med \leq y \leq med+\varepsilon} (med + \varepsilon - y)\, p(y|x)\, dy +$$

$$+ \int_{y \geq med} (y - med - \varepsilon)\, p(y|x)\, dy -$$

$$- \int_{med+\varepsilon \leq y \leq med+\varepsilon} (y - med - \varepsilon)\, p(y|x)\, dy$$

$$\leq \int_{y \geq med} (y - med)\, p(y|x)\, dy + \int_{y \leq med} (med - y)\, p(y|x)\, dy$$

$$+ a \left(\int_{y \leq med} p(y|x)\, dy - \int_{y \geq med} p(y|x)\, dy \right)$$

$\leq \frac{1}{2}$, потому что медиана

$$+2\int_{mod<y<mod+\varepsilon} (mod+\varepsilon-y)\,p(y|x)\,dy \le$$

$$\le \int_{\mu} |y-mod|\,p(y|x)\,dy +$$

$$+2\int_{mod<y<mod+\varepsilon} (mod+\varepsilon-y)\,p(y|x)\,dy \le$$

$$\le E|y-mod|(x=x) + \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(|y-mod|(x=x)$$

противоречие

при этом ε ответ уменьшается при этом будет аналогично

$\varepsilon \Rightarrow 0 \Rightarrow$ $c = mod$

№ 37 Минимум в моде

L_5?

$L(y', y) = \begin{cases} 0 & y' = y \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$

$\Downarrow$

$R(f) = \int_{XY} L(f(x), y)\, p(y|x)\, dx\, dy \to \min$

$\Downarrow [5 - p(y|x)]$

$\simeq \frac{1}{N} \sum L(f(x_i), y_i)$

в R будет столько нулевых положительных слагаемых, сколько существует элементов, которые не равны $b(x)$

$\Downarrow$

чем больше равных элементов тем меньше R

$\Downarrow$

минимум в $b(x)$ - в моде