4.1

$$W_K = V_0 + L(V_1 \ldots V_K)$$

$$\|V_j\| = 1 \qquad V_j \perp V_i \qquad i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{N} dist^2(x^{(i)}, W_K) \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{N} \| x^{(i)} - V_0 - \sum_{j=1}^{K} \langle x^{(i)} - V_0, V_j \rangle V_j \|^2 \to \min$$

$$W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_K$$

$$V_0 = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^{(i)}$$

P

док-ть, что можно взять

$$W_0 = V_0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \langle x^{(i)} - V_0, x^{(i)} - V_0 \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\langle x^{(i)}, x^{(i)} \rangle - 2 \langle x^{(i)}, V_0 \rangle +$$

$+ \langle V_0, V_0 \rangle) =$

$= \sum_{i=1}^{N} \langle \alpha^{(i)}, \alpha^{(i)} \rangle + N \langle V_0, V_0 \rangle - 2 \langle \sum_{i=1}^{N} \alpha^{(i)}, V_0 \rangle =$

$= \sum_{i=1}^{N} \langle \alpha^{(i)}, \alpha^{(i)} \rangle + N (\langle V_0 - \frac{1}{N} \sum \alpha^{(i)}, V_0 - \frac{1}{N} \sum \alpha^{(i)} \rangle$

$- \frac{1}{N} \langle \sum \alpha^{(i)}, \sum \alpha^{(i)}$

от V зависит только второе слаг

$$N (\langle V_0 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha^{(i)}, V_0 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha^{(i)} \rangle)$$

минимум при $V_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha^{(i)}$

ч. т. д.