Task 1

El objetivo es evlauar la compresió de la geometría proyectiva y la manipulación alegbraica de coordenadas homogéneas. Entonces, responda la siguientes preguntas demostrando el desarrollo matemático. No se aceptan respuestas puramente textuales sin respaldo alegraico.

1. Una homografía H es una matriz de 3×3. Explique matemáticamente por qué, aunque tiene 9 elementos, solo posee 8 grados de libertad (GDL)
   a. Adicionalmente, respoda. Si tuviéramos una cámara que solo rota sobre su eje óptico (sin traslación ni cambio de perspectiva), ¿la matriz de transformación sigue teniendo 8 GDL o se reduce? Demuestre la estructura de dicha matriz simplificad
1. En el algoritmo DLT (Direct Linear Transform), convertimos el problema $x' = Hx$ en un sistema de la forma $Ah = 0$. Explique por qué buscamos el vector singular asociado al *menor* valor singular de A en lugar de simplemente invertir la matriz. ¿Qué representa geométricamente ese "menor valor singular" cuando los datos tienen ruido?
1. Si usted selecciona 4 puntos para calcular H, pero 3 de ellos son colineales (están en la misma línea recta), el algoritmo fallará. Explique algebraicamente qué le sucede a la matriz A del sistema DLT en este caso y por qué no tiene solución única.

$$x' \sim Hx$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad x' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicar:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \qquad Hx = \begin{bmatrix} h_{11}x & h_{12}y & h_{13} \\ h_{21}x & h_{22}y & h_{23} \\ h_{31}x & h_{32}y & h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \qquad x \sim \left.\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}\right\} \text{Coordenadas}$$

Entonces: $x' = \dfrac{p}{r}$ & $y' = \dfrac{q}{r}$

$$x' = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}} \quad \& \quad y' = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}$$

En plano proyectivo: $[x, y, w] \sim [\lambda x, \lambda y, \lambda w]$ si $\lambda \neq \emptyset$

Suponiendo que se tiene otra matriz: $\hat{H} = \lambda H \longrightarrow \hat{H}x = \lambda(Hx)$

En el caso de las homogéneas: $Hx \sim \lambda(Hx) \longrightarrow H \sim \lambda H$

$\therefore$ La matriz tiene 9 : $h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{31}, h_{23}, h_{33}$

Pero: $H \sim \lambda H$ entonces un parámetro es redundante.

Entonces el espacio de una homografías es: $\mathbb{P}^8$ $\therefore$ $GDL = 9 - 1 = 8$

⇝ Una homografía se ve así:

- Espacio proyectivo: $\mathbb{P}^2$
- Grupo $PGL(3)$ $\longrightarrow$ $PGL(3) = GL(3)/\mathbb{R}^*$
- $GL(3)$ por escala

$\dim(GL(3)) = 9 \longrightarrow \dim(PGL(3)) = 8$