Mathématiques 2 : Les Relations d'Ordre

Loïc Lecharlier

HE Vinci : Informatique de gestion

27 février 2023

Relation d'Ordre : Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E.

On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** lorsqu'elle est à la fois

- **réflexive**
- **antisymétrique**
- **transitive**

Relation d'Ordre : Exemple

1. $\mathbf{1}_E$ (relation d'égalité). En effet
   - $e = e$ pour tout élément de $E \rightarrow \mathbf{1}_E$ est réflexive
   - Si $e \neq f$ alors $\neg(e = f) \rightarrow \mathbf{1}_E$ est antisymétrique
     (on ne peut pas avoir $e = f$ et $f = e$ si $e \neq f$).
   - Si $e = f$ et $f = g$ alors $e = g \rightarrow \mathbf{1}_E$ est transitive
2. "est inférieur ou égal à" sur $\mathbb{Z}$.
3. "est inclus dans" sur $\mathcal{P}(A)$ le power-set de l'ensemble A
4. "est un diviseur de" sur $\mathbb{N}_0$. En effet,
   - Tout naturel non nul est toujours un diviseur de lui-même
     $\rightarrow$ la relation "est un diviseur de" est réflexive
   - Soient n_1 et n_2 deux naturels strictement positif.
     Si n_1 est un diviseur de n_2 et n_2 est un diviseur de n_1 alors $n_1 = n_2$
     $\rightarrow$ la relation "est un diviseur de" est antisymétrique
   - Soient $n_1,\ n_2,\ n_3 \in \mathbb{N}_0$.
     Si n_1 diviseur de n_2 et n_2 diviseur de n_3 alors n_1 est un diviseur de n_3
     $\rightarrow$ la relation "est un diviseur de" est transitive.

Relation d'Ordre : Notation

Une relation d'ordre sur un ensemble quelconque est souvent notée $\leq$.

On utilise souvent la notation

$$x < y \text{ pour signifier que } (x \leq y) \wedge (x \neq y)$$

Avec une relation d'ordre $\leq$ sur un ensemble E
$\rightarrow$ 4 possibilités pour deux éléments x et y de E :

1. $x = y$ autrement dit $x \leq y$ et $y \leq x$
2. $x < y$ autrement dit $x \leq y$ et $x \neq y$
3. $y < x$ autrement dit $y \leq x$ et $x \neq y$
4. $x \not\lesseqgtr y$ autrement dit $\neg(x \leq y)$ et $\neg(y \leq x)$

Dans le cas 4. on dira que les éléments x et y sont **non comparables**.

Si

- il existe deux éléments qui ne sont pas comparables $\rightarrow$ ordre **partiel**.
- tout élément est comparable avec tout autre élément $\rightarrow$ ordre **total**.

Ordre Partiel et Ordre Total : Exemples

Exemples :

1. La relation "est multiple de" sur $\mathbb{N}$ est un ordre partiel :

   Par exemple, 2 n'est pas multiple de 3 et 3 n'est pas multiple de 2

   $\rightarrow$ Il existe donc deux éléments non comparables.

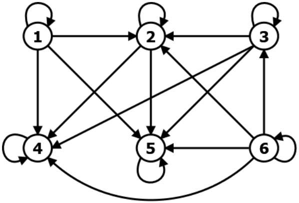
2. L'ordre alphabétique est un ordre total sur les lettres $\{\text{'a'}, \text{'b'}, \cdots, \text{'z'}\}$:

   En effet, si on prend deux lettres différentes,

   $\rightarrow$ il y en aura toujours une qui sera avant l'autre dans l'ordre alphabétique.

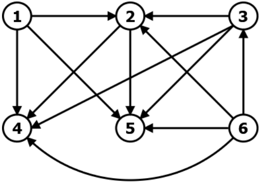
Représentation : Diagramme de Hasse : Etapes

Soit un ordre (une relation d'ordre) sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dont le digraphe est



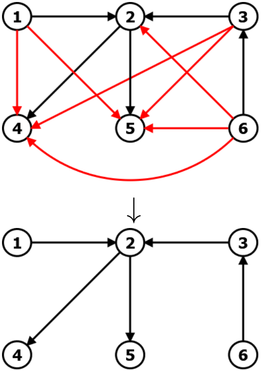
Les étapes pour simplifier cette représentation graphique et arriver au diagramme de Hasse sont :

1. On "sous-entend" les boucles (une relation d'ordre est réflexive) :



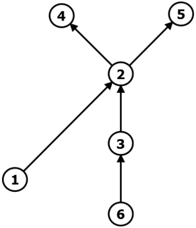
Représentation : Diagramme de Hasse : Etapes

2. On "sous-entend" les flèches récupérables (en **rouge**) par une clôture transitive (une relation d'ordre est transitive)



Représentation : Diagramme de Hasse : Etapes

3. On oriente les flèches vers le haut (il n'y a que des flèches simples)



4. On représente les sommets par des points (convention de HASSE) et on enlève la direction des flèches (car elles sont toutes vers le haut).

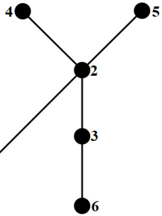
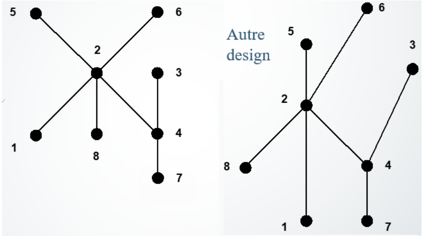


Diagramme de Hasse : Lecture

Règles dans un diagramme de Hasse :

1. Pas de ligne horizontale ni de triangle
2. Des "points" distincts ont toujours des étiquettes distinctes
3. **La notion de niveau n'existe pas !**

   Exemples :



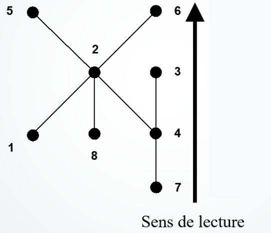
Les deux diagrammes ci-dessus représentent le même ordre !

Par exemple, 5 et 6 ne sont pas comparables.

$\rightarrow$ l'un à la même hauteur que l'autre ou plus haut que l'autre ne signifie rien.

Diagramme de Hasse : Lecture

4. Un diagramme de Hasse se lit de bas en haut :
   $\rightarrow$ on a $x < y$ si on peut aller de x à y uniquement en "montant".
   Soit l'ordre représenté par le diagramme de Hasse suivant :



- $1 < 6$: on peut aller de 1 à 6 en montant $(1 - 2 - 6)$
- $7 < 4$: on peut aller de 7 à 4 en montant $(7 - 4)$
- $7 < 5$: on peut aller de 7 à 5 en montant $(7 - 4 - 2 - 5)$
- $1 < 5$: on peut aller de 1 à 5 en montant $(1 - 2 - 5)$
- $8 \nleq 3$: on ne peut pas aller de 8 à 3 en montant : il faudrait descendre par 4
- $1 \nleq 7$: on ne peut pas aller de 1 à 7 en montant : il faudrait descendre par 4
- $5 \nleq 3$: on ne peut pas aller de 5 à 3 en montant : il faudrait descendre par 2

Diagramme de Hasse et Ordre Total

Rappel : Un ordre est dit **total** si **tout élément est comparable à tout autre**.

un ordre total sera représenté par un digramme de Hasse dit "**linéaire**"

$\rightarrow$ en forme de ligne verticale.

Exemples :

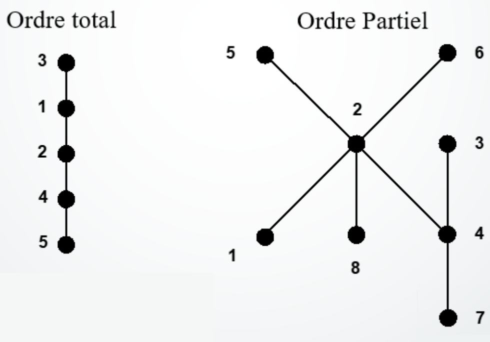


Diagramme de Hasse et Ordre Total

- L'ordre de gauche est un ordre total
  - $\longrightarrow$ tout élément peut être comparé à n'importe quel autre.
  - $\longrightarrow$ Si on prend deux éléments, on pourra toujours aller du plus "bas" vers le plus "haut" en montant.

- L'ordre de droite est partiel.
  - $\longrightarrow$ Par exemple 7 et 1 ne sont pas comparable
  - $\longrightarrow$ Pour aller de l'un à l'autre il faudrait "descendre" de 2 à 1

- L'ordre de droite est un ordre total sur le sous-ensemble $\{2, 5, 7\}$.
  - $\longrightarrow$ On dira que ce sous-ensemble est **totalement ordonné**.

Ensemble ordonné

Un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\leq$ est appelé ensemble ordonné et sera noté $(E, \leq)$.

Propriété :

Si $(E, \leq)$ est ensemble ordonné et B un sous-ensemble de E alors

$$(B, \leq) \text{ est un ensemble ordonné.}$$

Maximum et minimum : Définition

Dans un ensemble ordonné $(E, \leq)$,

1. le **maximum**, s'il existe, est un élément **supérieur à tous les autres**.

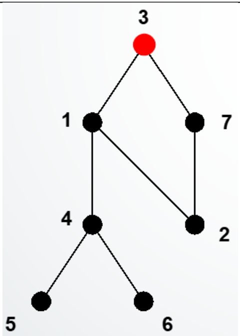
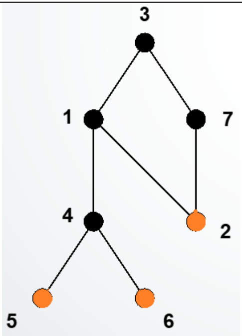
$$\boxed{a = \max(E) \Leftrightarrow \forall x \in E : x \leq a}$$

2. le **minimum**, s'il existe, est un élément **inférieur à tous les autres**.

$$\boxed{a = \min(E) \Leftrightarrow \forall x \in E : a \leq x}$$

Maximum et minimum : Exemples

1. Soit l'ensemble ordonné $(E, \leq)$ représenté par les diagrammes de Hasse ci-dessous

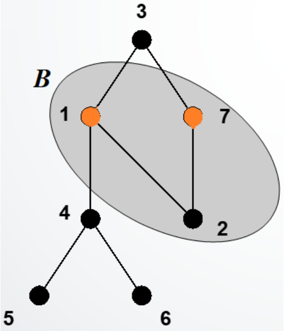
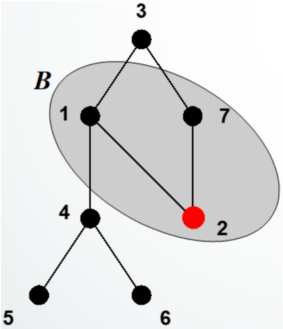
	
$\max(E) = 3$	E n'a pas de minimum

En effet

- On peut atteindre 3 en montant à partir de n'importe quel élément
- Il n'y a pas d'élément inférieur à 5 ni à 6 ni à 2 mais ils sont non comparables.

Maximum et minimum : Exemples

2. Considérons $B = \{1, 2, 7\}$ un sous-ensemble de E.

	
B n'a pas de maximum	$\min(B) = 2$

En effet

- Il n'y a pas d'élément supérieur à 1 ni à 7 mais ils sont non comparables
- $2 \preceq 1$, $2 \preceq 7$ et $2 \preceq 2 \rightarrow \min(B) = 2$

Maximum et minimum : Remarques

1. Ce n'est pas parce qu'il n'existe pas d'élément supérieur à un élément *a* que celui est le maximum !

   $\rightarrow$ s'il existe un élément avec lequel il n'est pas comparable alors ce n'est pas le maximum !

2. Ce n'est pas parce qu'il n'existe pas d'élément inférieur à un élément *a* que celui est le minimum !

   $\rightarrow$ s'il existe un élément avec lequel il n'est pas comparable alors ce n'est pas le minimum !

3. Un ensemble aura toujours au plus un maximum.

4. Un ensemble aura toujours au plus un minimum.

Maximal et minimal : Définition

Dans un ensemble ordonné $(E, \leq)$, un élément est

1. **maximal** s'**il n'existe pas d'élément qui lui est supérieur**.

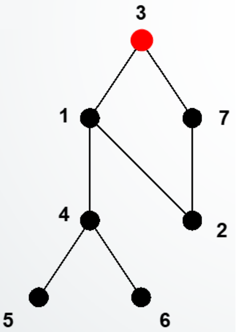
$$\boxed{\begin{array}{lcl} a \text{ est maximal} & \Leftrightarrow & \neg\Big(\exists x \in E : x > a\Big) \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in E : \neg\Big(x > a\Big) \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in E : \Big(x \leq a\Big) \vee \Big(x \not\lesseqgtr a\Big) \end{array}}$$

2. **minimal** s'**il n'existe pas d'élément qui lui est inférieur**.

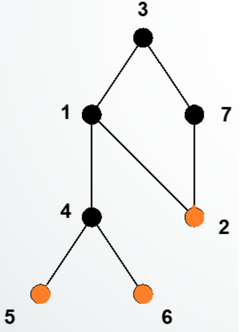
$$\boxed{\begin{array}{lcl} a \text{ est minimal} & \Leftrightarrow & \neg\Big(\exists x \in E : x < a\Big) \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in E : \neg\Big(x < a\Big) \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in E : \Big(x \geq a\Big) \vee \Big(x \not\lesseqgtr a\Big) \end{array}}$$

Maximal et minimal : Exemples

1. Soit l'ensemble ordonné $(E, \leq)$ représenté par les diagrammes de Hasse ci-dessous



$\text{maximaux}(E) = \{3\}$



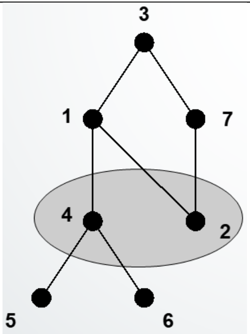
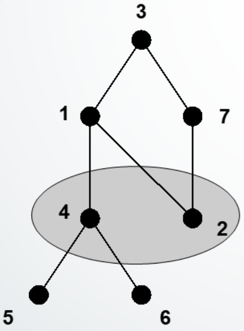
$\text{minimaux}(E) = \{2, 5, 6\}$

En effet

- Il n'y a aucun élément de E qui est supérieur à 3
- Il n'y a aucun élément de E qui soit inférieur à 2, 5 ou 6

Maximal et minimal : Exemples

2. Considérons $B = \{2, 4\}$ un sous-ensemble de E.

	
$\text{maximaux}(B) = \{2, 4\}$	$\text{minimaux}(B) = \{2, 4\}$

En effet

- Les éléments 2 et 4 sont à la fois les éléments maximaux et minimaux de B !
- Il n'y aucun élément de B inférieur ni aucun élément de B supérieur à ces éléments.

Maximal et minimal : Remarques

1. Tout maximum est un élément maximal (comme 3 dans notre exemple) ;
2. Tout minimum est un élément minimal ;
3. Si l'ensemble E est fini et admet un unique élément maximal, cet élément est le maximum ;
4. Si l'ensemble E est fini et admet un unique élément minimal, cet élément est le minimum ;
5. Un élément maximal est un élément supérieur à tous les éléments auxquels il est comparable ;
6. Un élément minimal est un élément inférieur à tous les éléments auxquels il est comparable ;
7. Si l'ensemble E est non vide et fini, alors il existe au moins un élément maximal ;
8. Si l'ensemble E est non vide et fini, alors il existe au moins un élément minimal ;
9. Si l'ordre $\leq$ est total alors
   - tout maximal est maximum
   - tout minimal est minimum

Majorant et minorant : Définition

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, et B un sous-ensemble de E, alors

1. On appelle **majorant** de B, tout élément de E **supérieur ou égal à chacun des éléments de** B.
2. L'ensemble des majorant de B se note $\mathrm{Major}(B)$:

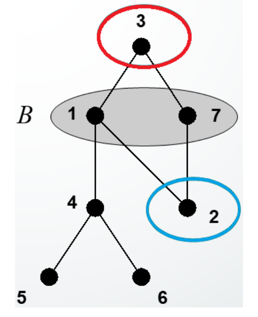
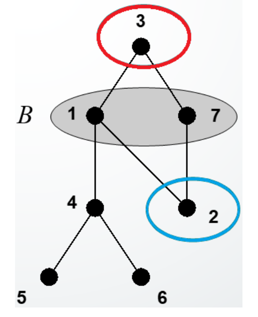
$$\boxed{a \in \mathrm{Major}(B) \Leftrightarrow \forall x \in B : x \leq a}$$

3. On appelle **minorant** de B, tout élément de E **inférieur ou égal à chacun des éléments de** B.
4. L'ensemble des minorant de B se note $\mathrm{Minor}(B)$

$$\boxed{a \in \mathrm{Minor}(B) \Leftrightarrow \forall x \in B : a \leq x}$$

Majorant et minorant : Exemples

1. Considérons $B = \{1, 7\}$ un sous-ensemble de E représenté par les diagrammes de Hasse ci-dessous

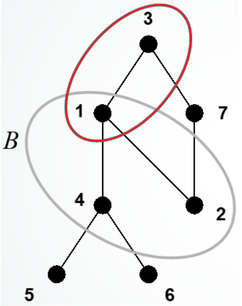
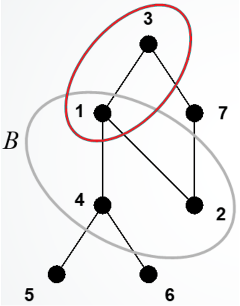
	
$\text{Major}(B) = \{3\}$	$\text{Minor}(B) = \{2\}$

En effet

- $\text{Major(B)} = \{3\}$ car 3 est le seul élément supérieur ou égal à 1 et à 7
- $\text{Minor(B)} = \{2\}$ car 2 est le seul élément inférieur ou égal à 1 et à 7

Majorant et minorant : Exemples

2. Considérons $B = \{1, 2, 4\}$ un sous-ensemble de E représenté par les diagrammes de Hasse ci-dessous

	
$\text{Major}(B) = \{1, 3\}$	$\text{Minor}(B) = \varnothing$

En effet

- $\text{Major(B)} = \{1, 3\}$ car 1 et 3 sont les seuls éléments supérieurs ou égaux à 1, 2, et 4.
- $\text{Minor(B)} = \{\} = \varnothing$ car 6 est inférieur à 4 et 1 mais n'est pas comparable à 2. Il en est de même pour 5.

Majorant et minorant : Remarques

1. Si $\max(B)$ existe alors c'est un élément de B qui est un majorant de B

$$B \cap \mathrm{Major}(B) = \varnothing \text{ ou } \left\{ \max(B) \right\}$$

2. Si $\min(B)$ existe alors c'est un élément de B qui est un minorant de B

$$B \cap \mathrm{Minor}(B) = \varnothing \text{ ou } \left\{ \min(B) \right\}$$

Supremum et infimum : Définition

Dans un ensemble ordonné $(E, \leq)$,

1. le **supremum**, s'il existe, est le **minimum de l'ensemble des majorants**, noté $\sup(E)$:

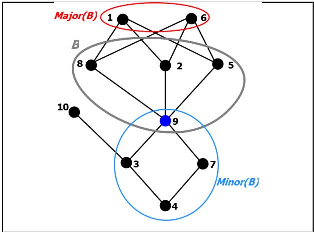
$$\boxed{\sup(B) = \min\Big(\mathrm{Major}(B)\Big)}$$

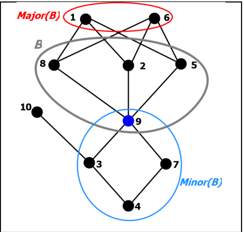
2. l'**infimum**, s'il existe, est le **maximum de l'ensemble des minorants**.

$$\boxed{\inf(B) = \max\Big(\mathrm{Minor}(B)\Big)}$$

Supremum et infimum : Exemples

Considérons $B = \{2,5,8,9\}$ un sous-ensemble de E représenté par les diagrammes de Hasse ci-dessous





B n'a pas de supremum	$\inf(B) = 9$

- L'ensemble des majorants de B est $\mathrm{Major}(B) = \{1,6\}$
- L'ensemble B n'a pas de supremum car 1 et 6 ne sont pas comparables.
- L'ensemble des minorants de B est $\mathrm{Minor}(B) = \{3,4,7,9\}$ car 9 est inférieur ou égal à tous les éléments de B et 3, 4 et 7 sont inférieurs à 9.
- L'infimum de B est $\inf(B) = 9$ car 9 est le maximum de $\mathrm{Minor}(B)$

Supremum et infimum : Remarques

1. Si $\max(B)$ existe, alors $\sup(B) = \max(B)$.

2. Si $\sup(B)$ existe et appartient à B, alors $\sup(B) = \max(B)$.

3. Si $\min(B)$ existe, alors $\inf(B) = \min(B)$. (C'est le cas de l'élément 9 dans notre exemple)

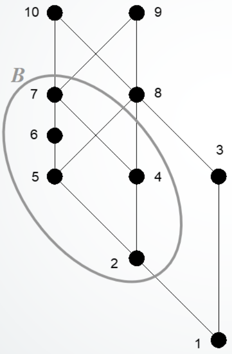
4. Si $\inf(B)$ existe et appartient à B, alors $\inf(B) = \min(B)$. (c'est le cas de l'élément 9 dans notre exemple)

Exemples récapitulatifs : Exemple 1

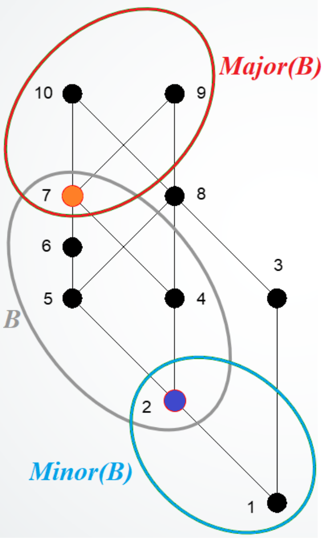
Soit

- l'ensemble $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ muni de la relation d'ordre $\leq$;
- le sous-ensemble de E : $B = \{2,4,5,6,7\}$

Dont voici le diagramme de Hasse :



Alors



1) $\max(B) = 7$

2) $\min(B) = 2$

3) $\mathrm{maximaux}(B) = \{7\}$

4) $\mathrm{minimaux}(B) = \{2\}$

5) $\mathrm{Major}(B) = \{7, 9, 10\}$

6) $\mathrm{Minor}(B) = \{1, 2\}$

7) $\sup(B) = 7$

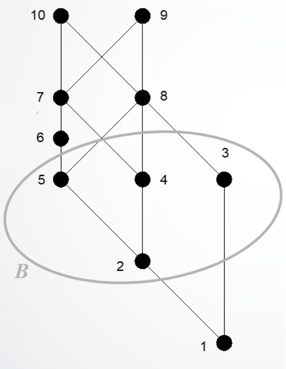
8) $\inf(B) = 2$

Exemples récapitulatifs : Exemple 2

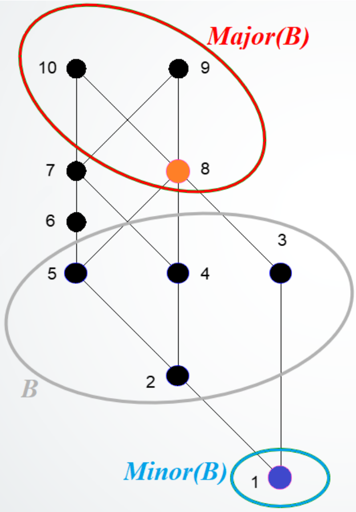
Soit

- l'ensemble $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ muni de la relation d'ordre $\leq$;
- le sous-ensemble de E : $B = \{2,3,4,5\}$

Dont voici le diagramme de Hasse :



Alors



1) Pas de $\max(B)$

2) Pas de $\min(B)$

3) $\text{maximaux}(B) = \{3, 4, 5\}$

4) $\text{minimaux}(B) = \{2, 3\}$

5) $\mathbf{Major}(B) = \{8, 9, 10\}$

6) $\mathbf{Minor}(B) = \{1\}$

7) $\sup(B) = 8$

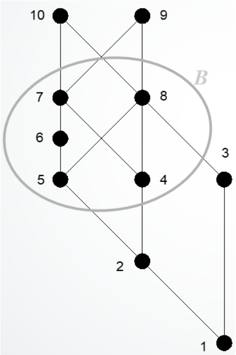
8) $\inf(B) = 1$

Exemples récapitulatifs : Exemple 3

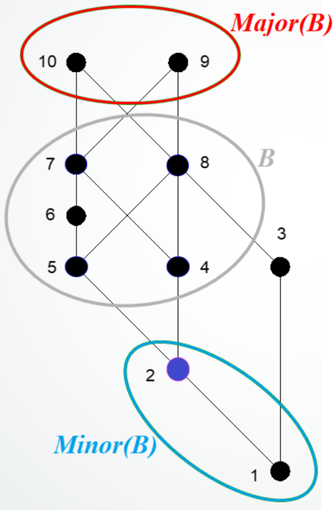
Soit

- l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ muni de la relation d'ordre $\leq$;
- le sous-ensemble de E : $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

Dont voici le diagramme de Hasse :



Alors



1) Pas de $\max(B)$

2) Pas de $\min(B)$

3) $\text{maximaux}(B) = \{7, 8\}$

4) $\text{minimaux}(B) = \{4, 5\}$

5) $\text{Major}(B) = \{9, 10\}$

6) $\text{Minor}(B) = \{1, 2\}$

7) Pas $\sup(B)$

8) $\inf(B) = 2$

Treillis : Définition

Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est appelé treillis si

$$\boxed{\text{toute paire d'éléments a un supremum et un infimum.}}$$

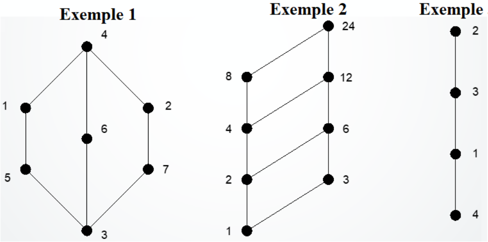
Treillis : Exemples

1. L'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ est un treillis.
    - le supremum deux sous-ensembles de *A* sera leur union car c'est le plus petit ensemble qui les contiendra tous les deux.
    - l'infimum de deux sous-ensembles de *A* sera leur intersection car c'est le plus grand ensemble qui soit contenu dans ces deux sous-ensembles

2. L'ensemble ordonné $\left(\mathbb{N}_0, \Big| (''\textit{divise}'')\right)$ est un treillis.
    - le supremum de deux naturels n et m strictement positifs, sera le $\mathrm{PPCM}(n, m)$
      $\rightarrow$ celui-ci est le plus petit naturel divisible par n et m
    - l'infimum de deux naturels n et m strictement positifs, sera le $\mathrm{PGCD}(n, m)$
      $\rightarrow$ celui est plus grand entier qui divise n et m

Treillis : Exemples

3. Soit les 3 ensembles ordonnés ci-dessous



$\rightarrow$ Ces 3 ensembles sont des treillis !

$\rightarrow$ Dans chacun de ses ensembles, n'importe quelle paire d'éléments possède un supremum et un infimum :

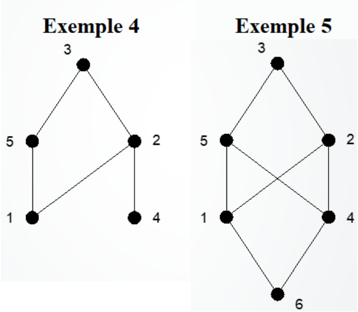
Exemple 1 : $\sup\left(\{5, 2\}\right) = 4$ et $\inf\left(\{5, 2\}\right) = 3$

Exemple 2 : $\sup\left(\{8, 6\}\right) = 24$ et $\inf\left(\{8, 6\}\right) = 2$

Exemple 3 : $\sup\left(\{3, 4\}\right) = 3$ et $\inf\left(\{3, 4\}\right) = 4$

Treillis : Exemples

3. Soit les 2 ensembles ordonnés ci-dessous



$\longrightarrow$ Ces 2 ensembles ne sont pas des treillis !

Exemple 4 : Les éléments 1 et 4 nom pas d'infimum car ce sont des minimaux non comparables de l'ensemble E.

Exemple 5 : Les éléments 1 et 4 n'ont pas de supremum car $\mathrm{Major}\Big(\{1,4\}\Big) = \{2,3,5\}$ avec 2 et 5 inférieurs à 3 mais non comparables.

Astuces pour déterminer si un ensemble ordonné est un treillis

Voici 3 astuces pour déterminer si un ensemble ordonné est un treillis :

1. Un ensemble totalement ordonné est un treillis. (Cas de l'exemple 3)

2. Si l'ensemble ordonné a plusieurs maximaux ou plusieurs minimaux alors ce n'est pas un treillis (Cas de l'exemple 4)

3. Les seuls paires d'éléments à vérifier sont les paires d'éléments non comparables.
   En effet
   - Si e_1 et e_2 sont comparables alors
     - si $e_1 < e_2$ alors $\sup\left(\{e_1, e_2\}\right) = e_2$ et $\inf\left(\{e_1, e_2\}\right) = e_1$
     - si $e_2 < e_1$ alors $\sup\left(\{e_1, e_2\}\right) = e_1$ et $\inf\left(\{e_1, e_2\}\right) = e_2$
   - Exemple 5 : Seules paires d'éléments non comparables : $\{1, 4\}$ et $\{2, 5\}$.
     $\rightarrow \{1, 4\}$ n'a pas de supremum ce n'est donc pas un treillis.

Tri topologique : Définition

Soit $\leq$ un ordre partiel sur un ensemble E.

On appelle tri topologique toute "linéarisation" de $\leq$,

- $\rightarrow$ tout ordre total sur E étendant $\leq$.
- $\rightarrow$ tout ordre total sur E incluant $\leq$

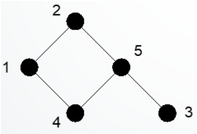
Mathématiquement cela se traduit par

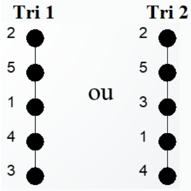
$$\leq' \text{ est un tri topologique de } \leq$$

$$\textbf{ssi } \Big(\leq' \text{ est total} \Big) \wedge \Big(\forall x, y \in E : (x \leq y) \Rightarrow (x \leq' y) \Big)$$

Tri topologique : exemples

Soit l'ensemble ordonné $(E, \leq)$ et 2 tris topologiques : tri_1 et tri_2





On a que l'ordre $\leq$ implique

- $1 \leq 1$ et $1 < 2$
- $2 \leq 2$
- $3 \leq 3$, $3 < 5$ et $3 < 2$
- $4 \leq 4$, $4 < 1$, $4 < 5$ et $4 < 2$
- $5 \leq 5$ et $5 < 2$

$\rightarrow$ Toutes ces propriétés restent vraies dans les tris 1 et 2

$\rightarrow$ Ce sont des ordres totaux.

$\rightarrow$ Ce sont bien des tris topologiques de l'ordre $\leq$.

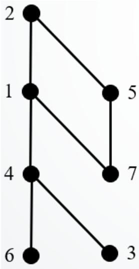
Construction d'un tri topologique

On construit un tri topologique

de bas en haut en sélectionnant un élément minimal à chaque étape.

Exemple :

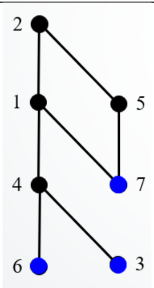
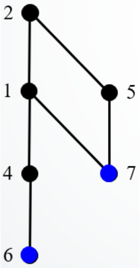
Soit l'ordre dont le diagramme de Hasse est ci-dessous



Voici les différentes étapes de la construction d'un tri topologique de cet ordre :

Construction d'un tri topologique

1. On retire un élément minimal et on l'ajoute en haut du tri :

Minimaux	**Ajout au tri**	**Ordre Restant**
		

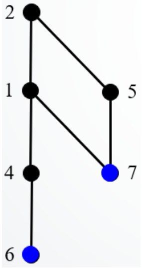
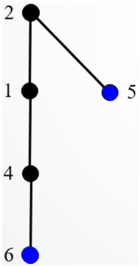
→ Les minimaux sont 3, 6 et 7

→ On choisit 3

→ On l'ajoute en haut du tri et on le retire de l'ordre

Construction d’un tri topologique

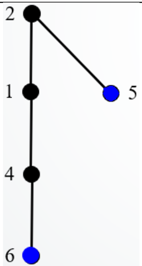
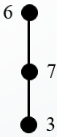
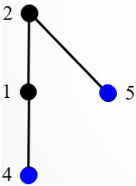
2. On retire un élément minimal et on l’ajoute en haut du tri :

Minimaux	Ajout au tri	Ordre Restant
		

- → Les minimaux sont 6 et 7
- → On choisit 7
- → On l’ajoute en haut du tri et on le retire de l’ordre

Construction d'un tri topologique

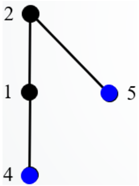
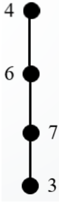
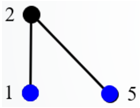
3. On retire un élément minimal et on l'ajoute en haut du tri :

Minimaux	Ajout au tri	Ordre Restant
		

- → Les minimaux sont 5 et 6
- → On choisit 6
- → On l'ajoute en haut du tri et on le retire de l'ordre

Construction d’un tri topologique

4. On retire un élément minimal et on l’ajoute en haut du tri :

<table>
<tr><th>Minimaux</th><th>Ajout au tri</th><th>Ordre Restant</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

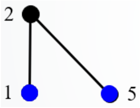
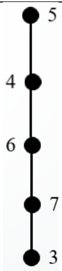
$\rightarrow$ Les minimaux sont 4 et 5

$\rightarrow$ On choisit 4

$\rightarrow$ On l’ajoute en haut du tri et on le retire de l’ordre

Construction d’un tri topologique

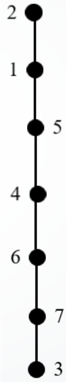
5. On retire un élément minimal et on l’ajoute en haut du tri :

Minimaux	**Ajout au tri**	**Ordre Restant**
		

- → Les minimaux sont 1 et 5
- → On choisit 5
- → On l’ajoute en haut du tri et on le retire de l’ordre

Construction d'un tri topologique

6. L'ordre restant est un ordre total

Ordre restant	tri topologique final
	

$\longrightarrow$ On ajoute l'ordre restant en haut du tri !

Détermination du nombre de tris topologiques d'un ordre

A chaque étape de la construction d'un tri topologique

- $\rightarrow$ choix d'un élément parmi les éléments minimaux.
- $\rightarrow$ plusieurs tris topologiques possibles pour un ordre partiel.

Pas de formule permettant de calculer le nombre de tris topologique d'un ordre.

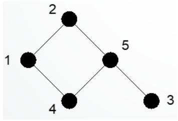
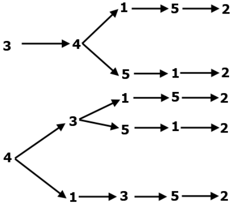
Une technique possible pour déterminer le nombre de tris topologiques :

$\rightarrow$ **l'arbre des tris possibles**.

Détermination du nombre de tris topologiques d'un ordre

<u>Exemple :</u>

Soit l'ordre et l'arbre de ces tripologiques ci-dessous

<table>
<tr><th>Diagramme de Hasse</th><th>Arbre des tris topologiques</th><th>Tris Possibles</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>$3 \to 4 \to 1 \to 5 \to 2$
$3 \to 4 \to 5 \to 1 \to 2$
$4 \to 3 \to 1 \to 5 \to 2$
$4 \to 3 \to 5 \to 1 \to 2$
$4 \to 1 \to 3 \to 5 \to 2$</td>
</tr>
</table>

1. On met à gauche les éléments minimaux de l'ordre : 3 et 4
2. Pour chacun d'eux, on met après les minimaux possibles suivants :
   - Si on retire 3, alors le seul minimal suivant est 4
   - Si on retire 4, alors les minimaux suivants sont 3 et 1
3. On recommence l'étape 2 pour chaque nouvel élément retiré

On continue comme cela jusqu'à obtenir tous les tris !

Produit de relations d'ordre : Introduction

Soit

- un ensemble A ordonné par l'ordre $\leq_A$
- un ensemble B ordonné par l'ordre $\leq_B$

Comment ordonner le produit cartésienne $A \times B$ grâce aux ordres $\leq_A$ et $\leq_B$?

Nous allons voir deux manières de faire cela :

1. Le produit classique
2. Le produit lexicographique

Produit Classique : Définition

Soit

- un ensemble A ordonné par l'ordre $\leq_A$
- un ensemble B ordonné par l'ordre $\leq_B$

Sur le produit cartésien $A \times B$ on définit la relation d'ordre $\leq_{A\times B}$ en posant

$$\boxed{(a_1, b_1) \leq_{A\times B} (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq_A a_2 \textbf{ et } b_1 \leq_B b_2}$$

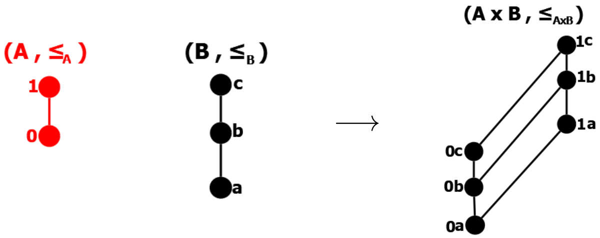
$\rightarrow$ Il faut que chaque composante du premier couple soit inférieure à la composante correspondante du second couple pour que le premier couple soit inférieur ou égal au second !

$\rightarrow$ Cette relation d'ordre est le **produit classique** des relations $\leq_A$ et $\leq_B$.

$\rightarrow$ Il est noté $\left(A \times B, \leq_{A\times B}\right)$.

Produit Classique : Exemple

Soit les ensembles ordonnés $\left(A, \leq_A\right)$ et $\left(B, \leq_B\right)$ alors $\left(A \times B, \leq_{A\times B}\right)$ est

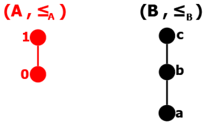


En effet, par exemple

- $(0, c) \leq_{A\times B} (1, c)$ car $0 <_A 1$ et $c =_B c$.
- $(0, b) \leq_{A\times B} (1, c)$ car $0 <_A 1$ et $b <_B c$.
- $(0, c)$ et $(1, a)$ pas comparables avec $\leq_{A\times B}$ car $0 <_A 1$ mais $c >_B a$.

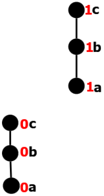
Produit Classique : Méthode de construction

Soit les ensembles ordonnés $\left(A, \leq_A\right)$ et $\left(B, \leq_B\right)$



Etapes pour construire $\left(A \times B, \leq_{A\times B}\right)$:

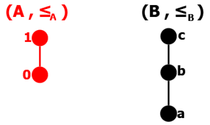
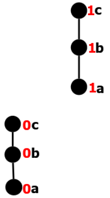
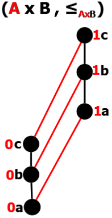
1. Dessiner une copie de $(B, \leq_B)$ pour chaque élément de A et les disposer comme les éléments de A sur son diagramme de Hasse



Il y a 2 éléments dans $(A, \leq_A)$: **0** et **1** avec **1** "au-dessus" de **0**

Produit Classique : Méthode de construction

2. Comme il y a une arête de **0** vers **1** sur le diagramme de Hasse de $(A, \leq_A)$, on ajoute des arêtes entre les éléments correspondants.

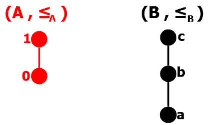
$(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$	Etape 1	Etape 2
		

En effet comme $0 \leq_A 1$ on doit avoir $(0, e_B) \leq_{A\times B} (1, e_B)$ pour tout élément e_B de B.

$\rightarrow$ On a obtenu le diagramme de Hasse de $\left(A \times B, \leq_{A\times B}\right)$ vu précédemment !

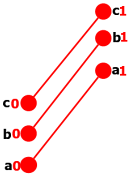
Produit Classique : Méthode de construction

Construisons maintenant $\left(B \times A, \leq_{B\times A}\right)$



Etapes pour construire $\left(B \times A, \leq_{B\times A}\right)$:

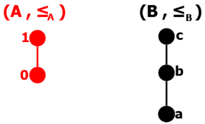
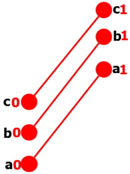
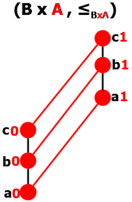
1. Dessiner une copie de $(A, \leq_A)$ pour chaque élément de B et les disposer comme les éléments de A sur son diagramme de Hasse



Il y a 3 éléments dans $(B, \leq_B)$: ***a***, ***b*** et ***c*** avec ***c*** "au-dessus" de ***b*** "au-dessus" de ***a***

Produit Classique : Méthode de construction

2. Comme il y a une arête de ***a*** vers ***b*** et une de ***b*** vers ***c*** sur le diagramme de Hasse de $(B, \leq_B)$, on ajoute des arêtes entre les éléments correspondants.

$(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$	Etape 1	Etape 2
		

En effet comme $a \leq_B b \leq_B c$ on doit avoir $(a, e_A) \leq_{B\times A} (b, e_A) \leq_{B\times A} (c, e_A)$ pour tout élément e_A de A.

$\rightarrow$ On a obtenu le diagramme de Hasse de $\left(B \times A, \leq_{B\times A}\right)$!

$\rightarrow$ Le diagramme de Hasse de $\left(B \times A, \leq_{B\times A}\right)$ est le même que celui de $\left(A \times B, \leq_{A\times B}\right)$ à l'exception des étiquettes des éléments ! ! !

Produit Classique : Méthode de construction : Etapes

Conclusion :

1) Les diagramme de Hasse de $\left(A \times B, \leq_{A\times B}\right)$ et $\left(B \times A, \leq_{B\times A}\right)$ sont les mêmes à l'exception des étiquettes des éléments

2) Les étapes pour construire $\left(A \times B, \leq_{A\times B}\right)$ à partir de $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ sont

   a) Dessiner au temps de copies de $(B, \leq B)$ que d'éléments dans $(A, \leq_A)$.

   b) Pour chaque arête d'un élément a_1 vers un élément a_2 sur le diagramme de Hasse de $(A, \leq_A)$ (autrement dit si $a_1 \leq_A a_2$), on relie les éléments correspondants des copies de $(B, \leq_B)$ correspondant à a_1 et a_2.

Produit Lexicographique : Définition

Soit

- un ensemble A ordonné par l'ordre $\leq_A$
- un ensemble B ordonné par l'ordre $\leq_B$

Sur le produit cartésien $A \times B$ on définit la relation d'ordre $\preccurlyeq_{A\times B}$ en posant

$$\boxed{(a_1\,, b_1) \preccurlyeq_{A\times B} (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 <_A a_2 \textbf{ ou } (a_1 = a_2 \text{ et } b_1 \leq_B b_2)}$$

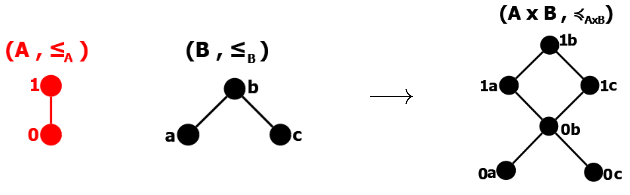
$\rightarrow$ On regarde en priorité la première composante des deux couples :

1. Si la première composante du premier couple est inférieure à la première composante du second couple alors le premier couple est inférieur au second
2. Si la première composante du premier couple est égale à la première composante du second couple alors si la seconde composante du premier couple est inférieure ou égale à la seconde composante du second couple, alors le premier couple est inférieur au second.

$\rightarrow$ Cette relation d'ordre est le **produit lexicographique** des relations $\leq_A$ et $\leq_B$ et est noté $\left(A \times B, \preccurlyeq_{A\times B}\right)$.

Produit Lexicographique : Exemple

Soit les ensembles ordonnés $\left(A, \leq_A\right)$ et $\left(B, \leq_B\right)$ alors $\left(A \times B, \preccurlyeq_{A\times B}\right)$ est

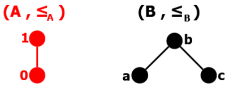


En effet, par exemple

- $(0, c) \preccurlyeq_{A\times B} (1, a)$ car $0 <_A 1$.
- $(0, a) \preccurlyeq_{A\times B} (0, b)$ car $0 =_A 0$ et $a <_B b$.
- $(1, a)$ et $(1, c)$ pas comparable avec $\preccurlyeq_{A\times B}$ car $1 =_A 1$ mais $c \lesseqgtr\!\!\!\!/\ _B a$.

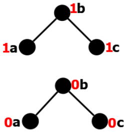
Produit Lexicographique : Méthode de construction

Soit les ensembles ordonnés $\left(A, \leq_A\right)$ et $\left(B, \leq_B\right)$



Etapes pour construire $\left(A \times B, \preccurlyeq_{A\times B}\right)$:

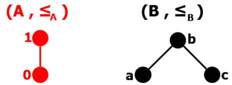
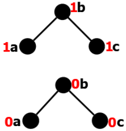
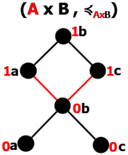
1. Dessiner une copie de $(B, \leq_B)$ pour chaque élément de A et les disposer comme les éléments de A sur son diagramme de Hasse



Il y a 2 éléments dans $(A, \leq_A)$: **0** et **1** avec **1** "au-dessus" de **0**

Produit Lexicographique : Méthode de construction

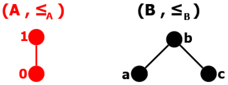
2. Comme il y a une arête de **0** vers **1** sur le diagramme de Hasse de $(A, \leq_A)$, alors tous les éléments de la copie de $(B, \leq_B)$ correspondant à **1** sont supérieurs à ceux de la copie de $(B, \leq_B)$ correspondant à **0**.
   - $\rightarrow$ Ajout d'arêtes entre les minimaux de la copie de $(B, \leq_B)$ correspondant à **1** et les maximaux de la copie de $(B, \leq_B)$ correspondant à **0**.

$(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$	Etape 1	Etape 2
		

$\rightarrow$ On a obtenu le diagramme de Hasse de $\left(A \times B, \preccurlyeq_{A\times B}\right)$ vu précédemment !

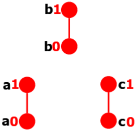
Produit Lexicographique : Méthode de construction

Construisons maintenant $\left(B \times A, \preccurlyeq_{B\times A}\right)$



Etapes pour construire $\left(B \times A, \preccurlyeq_{B\times A}\right)$:

1. Dessiner une copie de $(A, \leq_A)$ pour chaque élément de B et les disposer comme les éléments de B sur son diagramme de Hasse



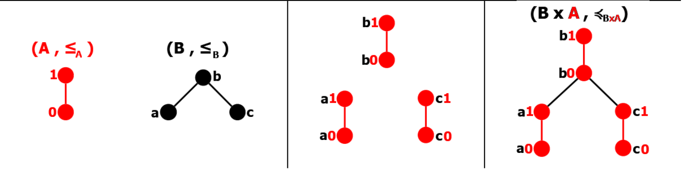
Il y a 3 éléments dans $(B, \leq_B)$: ***a***, ***b*** et ***c*** avec ***b*** "au-dessus" de ***a*** et ***c***

Produit Lexicographique : Méthode de construction

2. Comme il y a une arête de ***a*** vers ***b*** et une de ***b*** vers ***c*** sur le diagramme de Hasse de $(B, \leq_B)$, cela veut dire que tous les éléments de la copie correspondant à ***b*** sont supérieurs à ceux des copies correspondant à ***a*** et ***c***.

   $\rightarrow$ Ajout d'arêtes entre les minimaux de la copie de $(A, \leq_A)$ correspondant ***b*** et les maximaux des copies de $(A, \leq_A)$ correspondant à ***a*** et ***c***

$(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$	Etape 1	Etape 2



$\rightarrow$ On a obtenu le diagramme de Hasse de $\left(B \times A, \preccurlyeq_{B\times A}\right)$!

$\rightarrow$ Celui-ci est très différents du diagramme de Hasse de $\left(A \times B, \preccurlyeq_{A\times B}\right)$

Produit Lexicographique : Méthode de construction : Etapes

Conclusion :

1) Les diagramme de Hasse de $\left(B \times A, \preccurlyeq_{B\times A}\right)$ est très différents de celui de $\left(A \times B, \preccurlyeq_{A\times B}\right)$.

2) Les étapes pour construire $\left(A \times B, \preccurlyeq_{A\times B}\right)$ à partir de $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ sont

   a) Dessiner au temps de copies de $(B, \leq B)$ que d'éléments dans $(A, \leq_A)$.

   b) Pour chaque arête d'un élément a_1 vers un élément a_2 sur le diagramme de Hasse de $(A, \leq_A)$ (autrement dit si $a_1 \leq_A a_2$), on **relie les minimaux** de la copie de $(B, \leq_B)$ correspondant à a_2 **avec les maximaux** de la copie de $(B, \leq_B)$ correspondant à a_1.