二〇〇三年答案解析

一、解：（1）、自由度$3\times3-2\times(2+2)-1=0$，因此属于静定结构

（2）、由 D 点的平衡关系，得 $F_{NAD}=0$

$$\sum F_x=0 \quad F_1\cos\theta+F_2=0$$

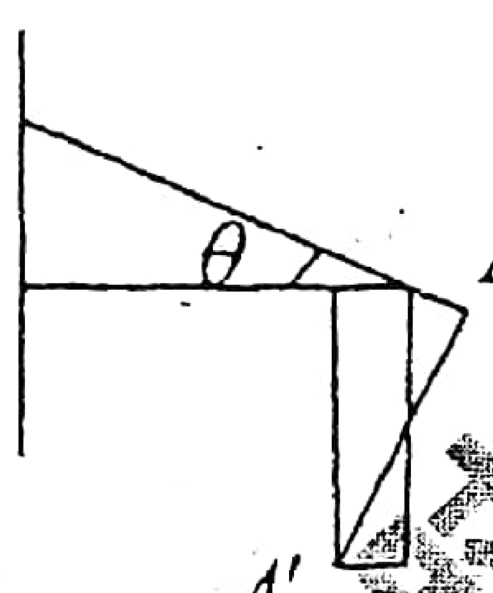
$$\sum F_y=0 \quad F_1\sin\theta-P=0$$

得 $F_1=\dfrac{P}{\sin\theta}$，$F_2=-\dfrac{P\cos\theta}{\sin\theta}$

（3）、$\sigma_{AC}=\dfrac{F_1}{A_{AC}}=\dfrac{P}{A\sin\theta}$（拉应力）

$\sigma_{BA}=\dfrac{F_2}{A_{BA}}=-\dfrac{P\cot\theta}{2A}$（压应力）

$\sigma_{AD}=0$



（4）、

$$\Delta L_{AC}=\frac{\sigma_{AC}L_{AC}}{E}=\frac{PL}{A\sin\theta\cos\theta}\text{（伸长）}$$

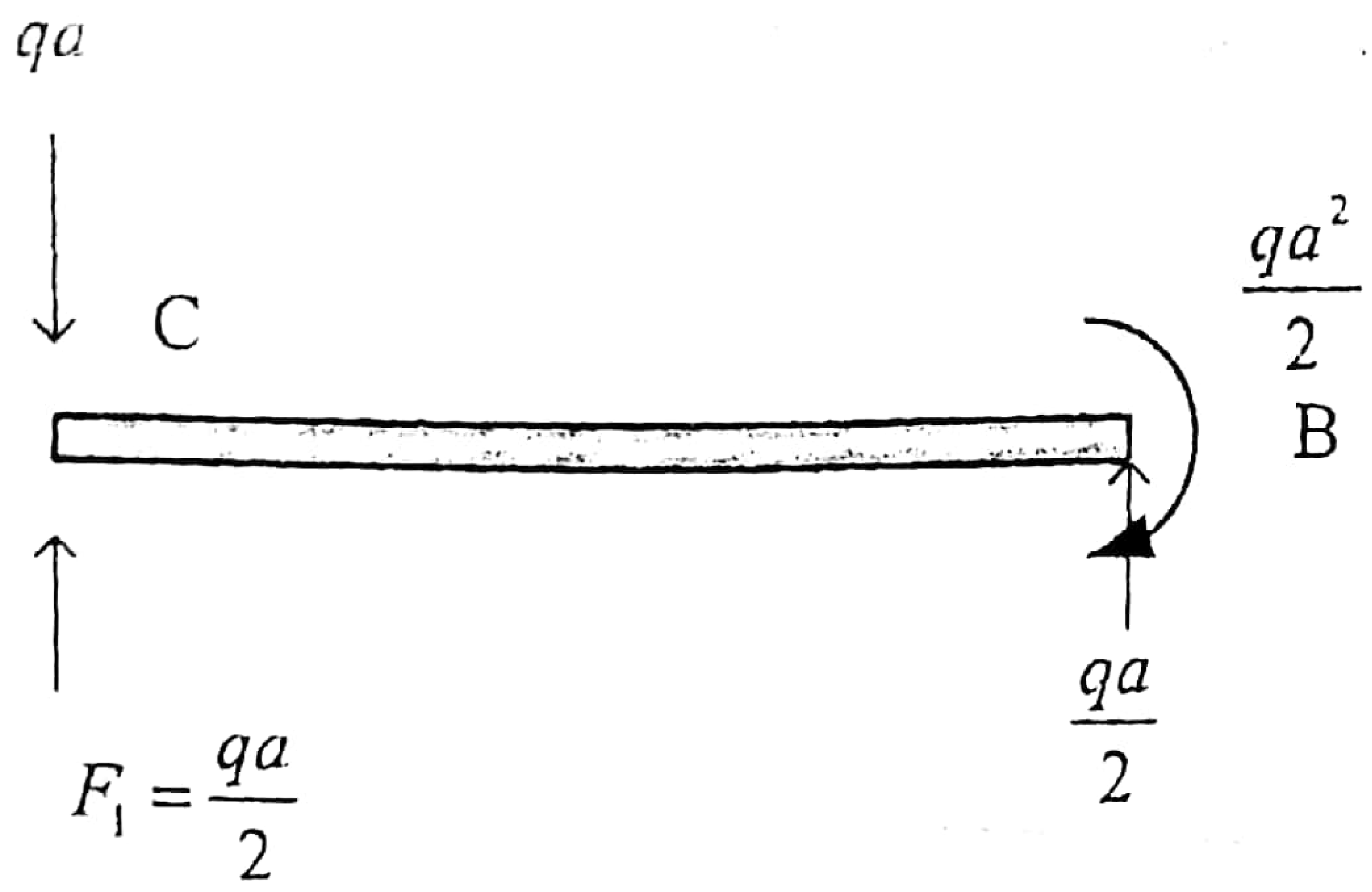
$$\Delta L_{BA}=\frac{\sigma_{BA}L_{BA}}{E}=-\frac{PL\cot\theta}{2A}\text{（压缩）}$$

$$\Delta L_{AD}=0$$

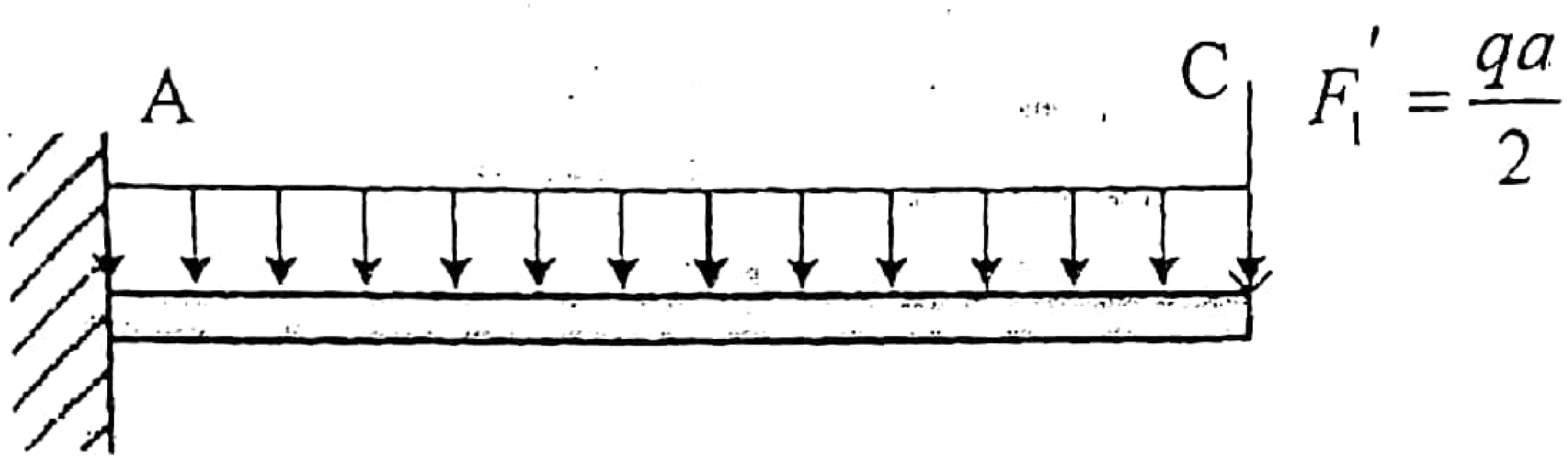
（5）、$\Delta_{Ax}=\Delta L_{AB}=-\dfrac{PL\cot\theta}{2A}(\leftarrow)$

$$\Delta_{Ay}=\frac{\Delta L_{AB}}{\tan\theta}+\frac{\Delta L_{AC}}{\sin\theta}=\frac{PL\left(\cos^3\theta+2\right)}{2A\sin^2\theta\cos\theta}(\downarrow)$$

二、解： C 右部分

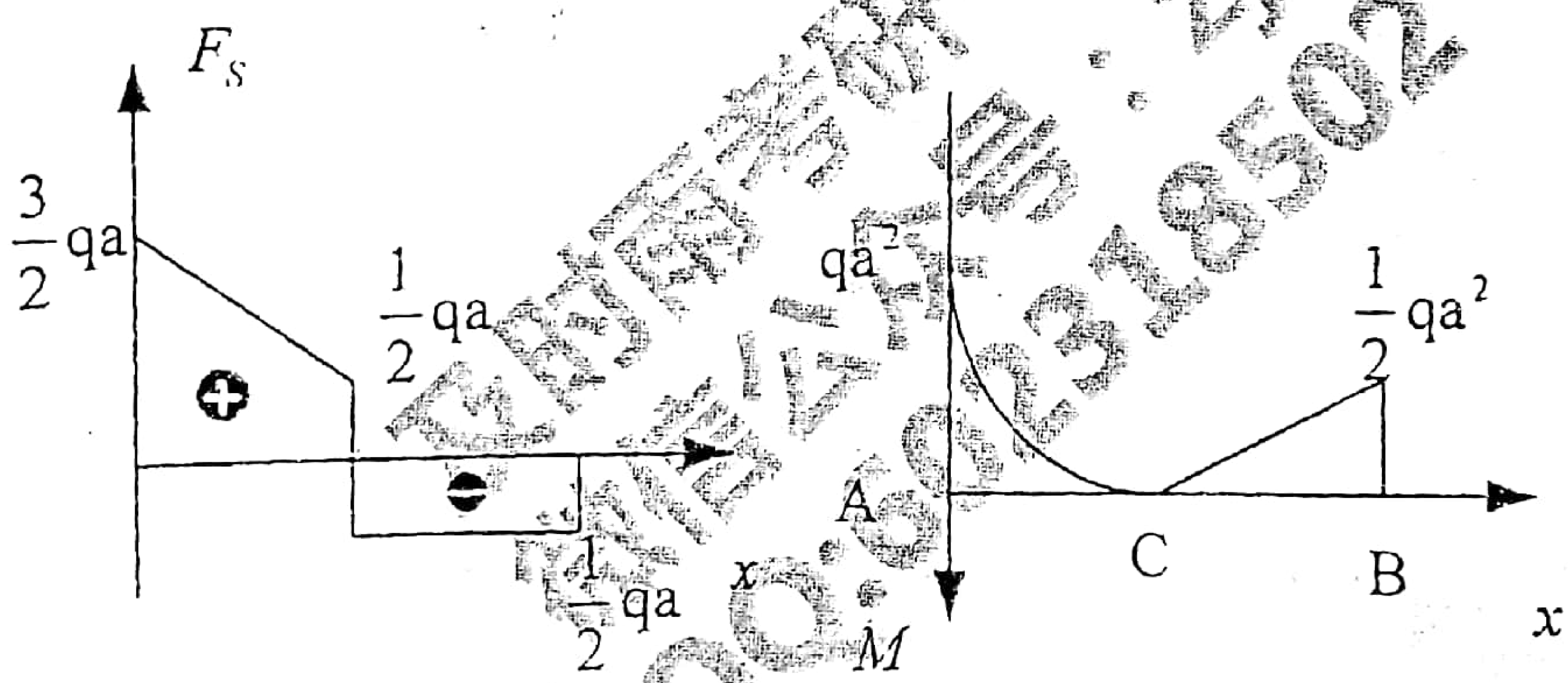


$$\sum M_C = 0, \quad F_B \cdot a - \frac{qa^2}{2} = 0, \quad F_B = \frac{qa}{2}(\uparrow)$$



CA 段， $F_N = \frac{qa}{2} + qx \qquad 0 \le x \le a$

$$M(x) = -\frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2} \qquad 0 \le x \le a?$$



三、解：易知， $F_A = F_B = \frac{qa}{2}$， $F_S(x) = \frac{qL}{2} - qx \qquad 0 \le x \le L$

（1）、 $\tau_{\max} = \frac{F_{S,\max} S_z^*}{Ib} = \frac{3qL}{4bh}$

（2）、 $M(x) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \qquad 0 \le x \le L$

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{8}, \sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W} = \frac{\frac{qL^2}{8}}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{3qL^2}{4bh^2}$$

（3）、下边缘 $\varepsilon(x)=\dfrac{M(x)}{EW}=\dfrac{1}{E\frac{1}{6}bh^2}\left(\dfrac{1}{2}qLx-\dfrac{1}{2}qx^2\right)$

则 $\Delta L=\int_0^L \varepsilon(x)dx=\int_0^L \dfrac{1}{E\frac{1}{6}bh^2}\left(\dfrac{1}{2}qLx-\dfrac{1}{2}qx^2\right)dx=\dfrac{qL^3}{2Ebh^2}$

（4）、$\sigma(x\ y)=\dfrac{M(x)y}{I}$，可知，在非边界横截面上正应力沿高度成正比，在两端边上为 0

四、解：取 σ_z 可取作为一个主应力，大小为 50MPa

（1）、$\sigma_x=90MPa\quad \tau_{xy}=-40MPa\quad \sigma_y=30MPa$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\begin{cases}110MPa\\ 10MPa\end{cases}$$

故 $\sigma_1=110MPa$，$\sigma_2=50MPa$，$\sigma_3=10MPa$

（2）、$\tau_{max}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=50MPa$

（3）、

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}\left[\sigma_1-\upsilon(\sigma_2+\sigma_3)\right]=\frac{1}{200\times10^9}\left[110-0.3(50+10)\right]\times10^6=4.6\times10^{-4}$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}\left[\sigma_2-\upsilon(\sigma_1+\sigma_3)\right]=\frac{1}{200\times10^9}\left[50-0.3(110+10)\right]\times10^6=7\times10^{-5}$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}\left[\sigma_3-\upsilon(\sigma_1+\sigma_2)\right]=\frac{1}{200\times10^9}\left[10-0.3(50+110)\right]\times10^6=-1.9\times10^{-4}$$

（4）、$\theta=\dfrac{1-2\upsilon}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\dfrac{1-2\times0.3}{200\times10^9}(110+10+50)\times10^6=3.4\times10^{-4}$

（5）、最大拉应力理论：$\sigma_{r1}=\sigma_1=110MPa$

最大伸长线应变理论：$\sigma_{r2}=\sigma_1-\upsilon(\sigma_2+\sigma_3)=92MPa$

最大剪应力理论：$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=100MPa$

形状改变能理论：

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right]}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(100^2+40^2+60^2\right)\times10^{12}}=87.18MPa$$

五、解：（1）、$I=\frac{1}{64}\pi d^4 \quad A=\frac{1}{4}\pi d^2$

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\frac{d}{4} \qquad \lambda_{CD}=\frac{\mu L}{i}=\frac{4a}{d}(\mu=1)$$

（2）、$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2}=\frac{\pi^3 Ed^4}{64a^2}$

故 $\frac{F_{cr}}{n_{st}}\geq\frac{[P]}{\sqrt{3}}$，得 $[P]=\frac{\sqrt{3}\pi^3 Ed^4}{192a^2}$

（3）、受力分析，可知，$F_{NAC}=F_{NAD}=F_{NBC}=F_{NBD}=\frac{P}{\sqrt{3}}$

$$F_{NCD}=-\frac{P}{\sqrt{3}}$$

（4）、在 AB 两端施加单位力，则 $\overline{F}_{NAC}=\overline{F}_{NAD}=\overline{F}_{NBC}=\overline{F}_{NBD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\overline{F}_{NCD}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

则 $\Delta_{AB}=\sum\frac{F_{Ni}\overline{F}_{Ni}L_i}{EA}=\frac{\frac{1}{3}Pa}{EA}\times 4+\frac{\frac{1}{3}Pa}{EA}=\frac{20Pa}{3\pi d^2 E}$

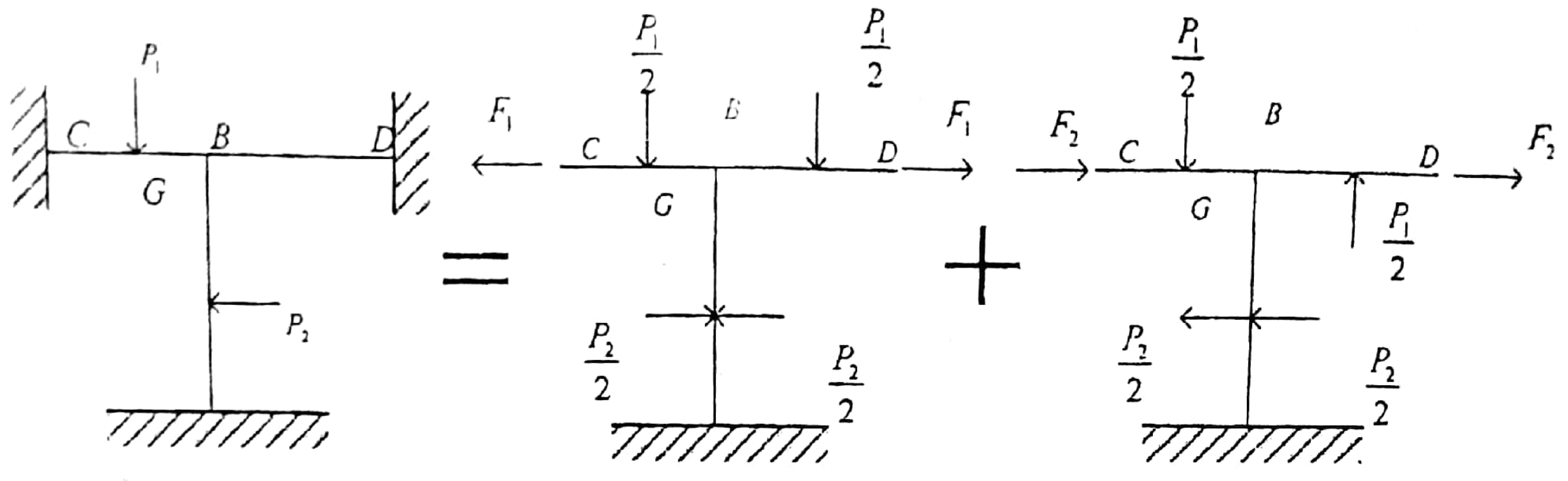
（5）、改变作用力 P 方向时，$F'_{NAC}=F'_{NAD}=F'_{NBC}=F'_{NBD}=-\frac{P}{\sqrt{3}}$

$$\overline{F}'_{NCD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

对于 AC 杆，$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2}=\frac{\pi^3 Ed^4}{64a^2}$

$\frac{F_{cr}}{n_{st}}\leq\frac{[P]}{\sqrt{3}}$，$P=\frac{\sqrt{3}\pi^3 Ed^4}{192a^2}$，容许值未改变

六、此题源自孙训方课本上的正反对称类型题（下册 3-14）



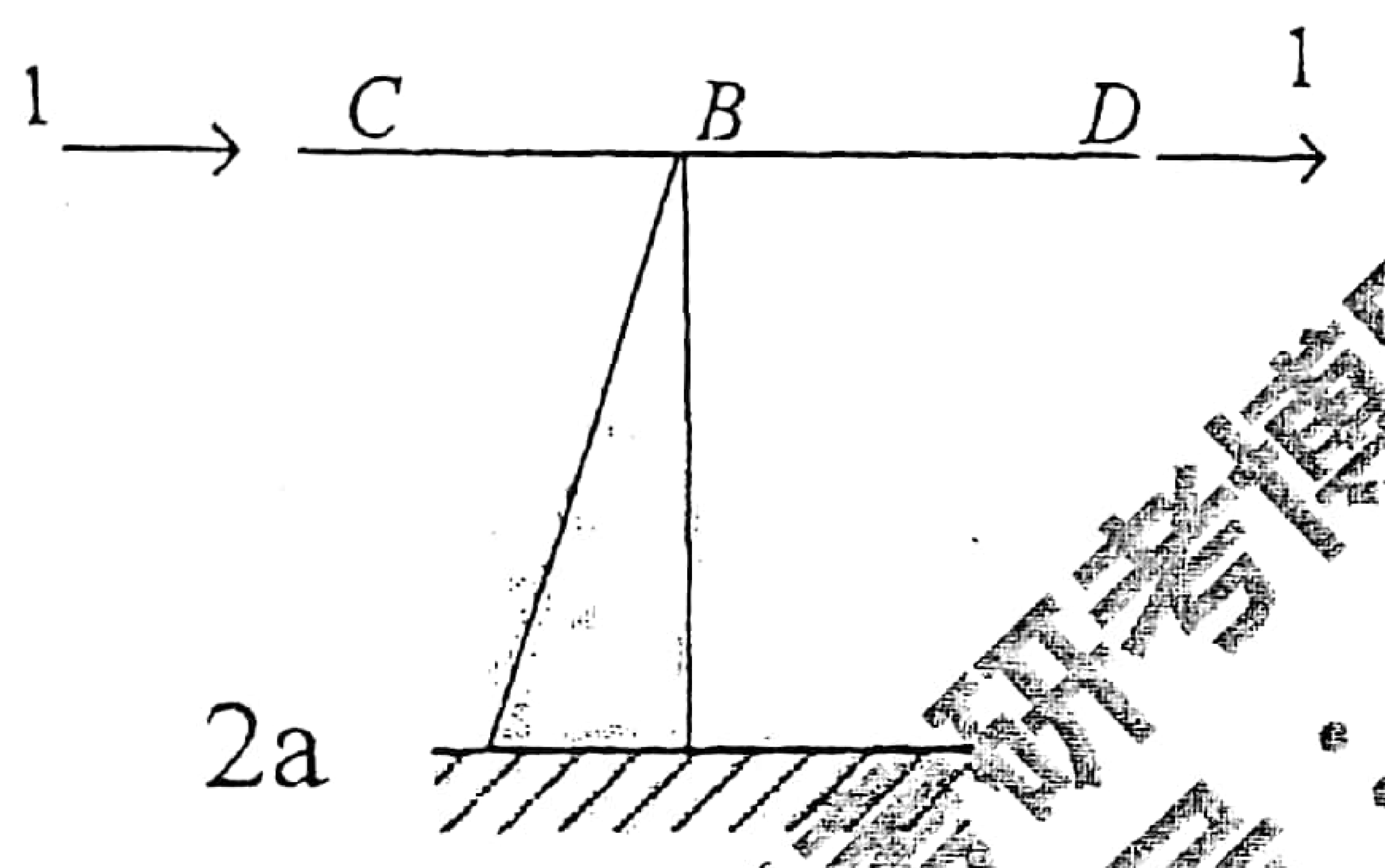
原结构　　　　图一　　　　图二

对图一而言

$\sum M_A = 0$，可知 $F_1 = 0$

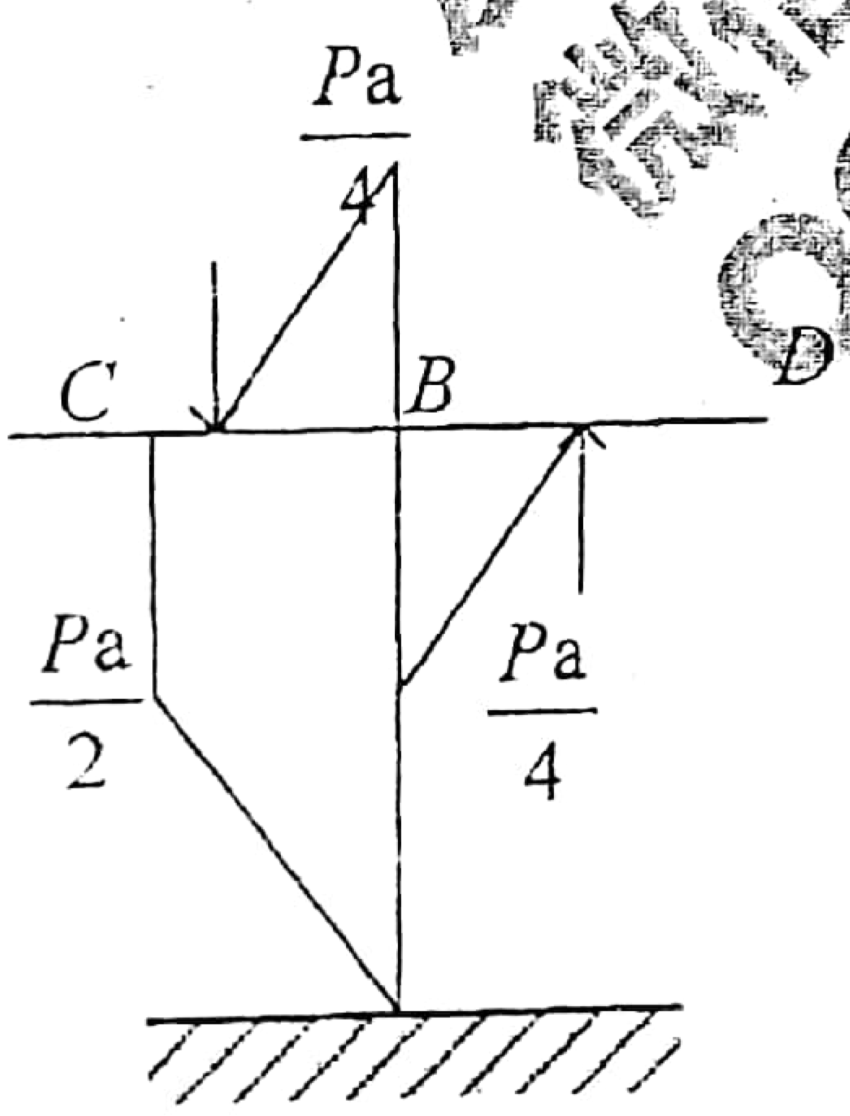
故求解约束力可用图二来做

用单位力法：在 $F_2=1$ 的作用下



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \times \left(a \times 2a \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2a \right) = \frac{4a^3}{3EI}$$

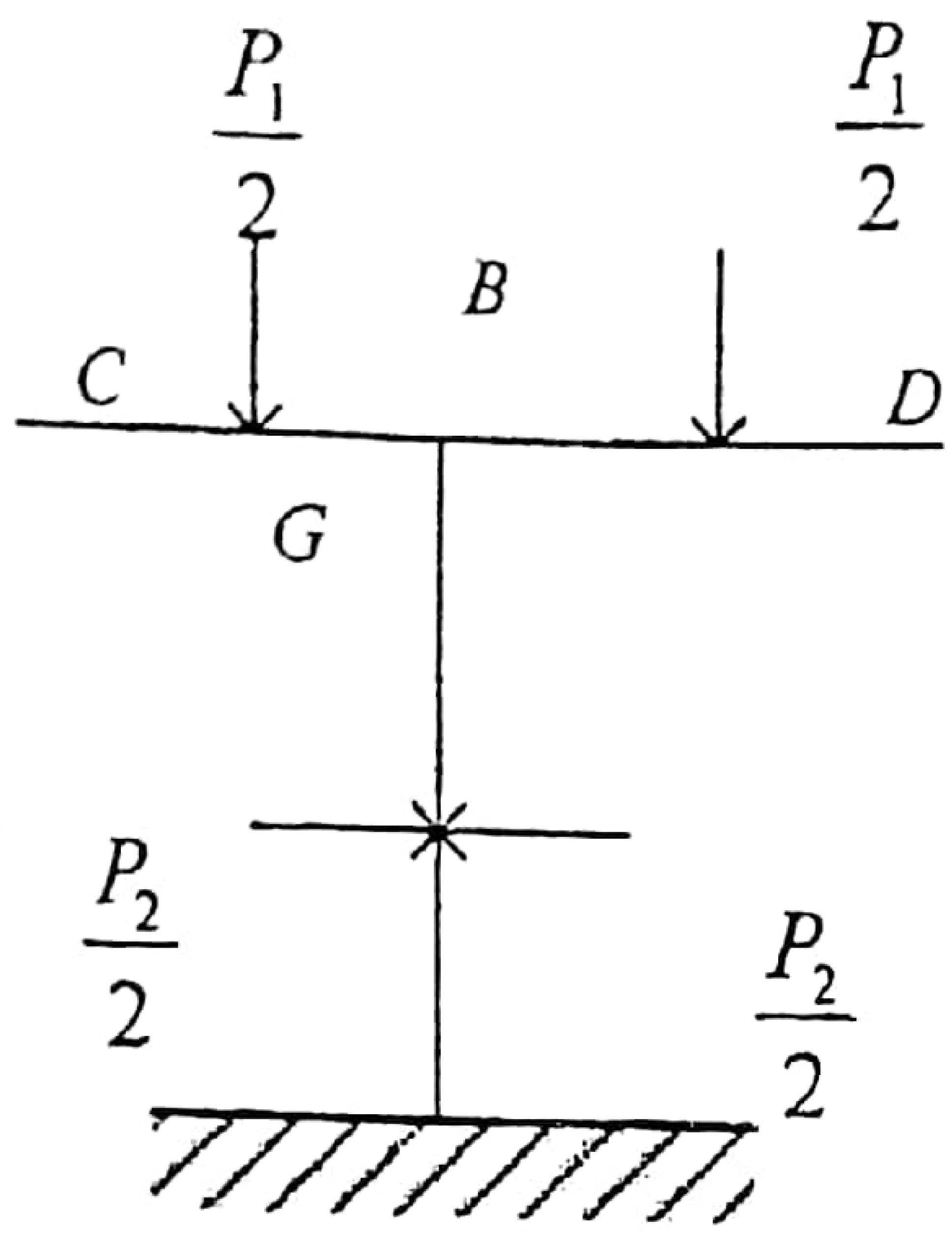
实际力作用下：



$$\Delta_{1P} = \int_0^a \frac{2x\frac{P}{2}}{EI} dx + \int_0^{2a} \frac{2x\left(Pa - \frac{P}{2}x\right)}{EI} dx = \frac{5Pa^3}{16EI}$$

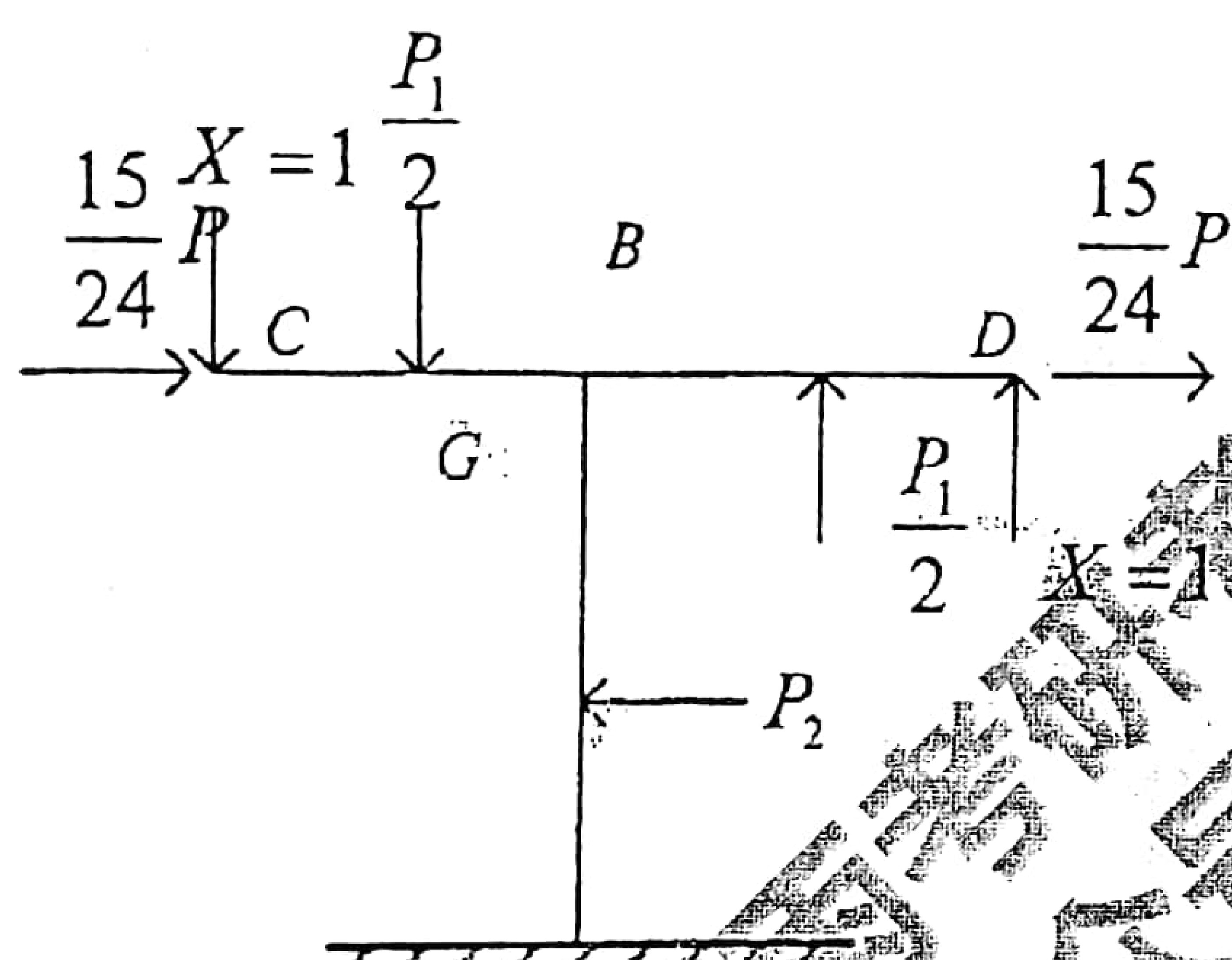
故 $F_2 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{5}{8}P$

（2）、在图一中



$$\omega_{c1}=\omega_{D1}=\frac{\frac{P}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3EI}+\frac{\frac{P}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2EI}\times\frac{a}{2}=\frac{5Pa^3}{64EI}(\downarrow)$$

在图二中，C、D 的竖直位移反向且相等



故 $\omega_{C2}=\frac{21Pa}{256EI}(\downarrow)$　$\omega_{D2}=\frac{21Pa}{256EI}(\uparrow)$

综上，$\omega_C=\frac{5Pa}{64EI}+\frac{21Pa}{256EI}=\frac{41Pa}{256EI}$　　$\omega_D==\frac{Pa}{256EI}$

于是在 C、D 两端分别设一对方向相反的单位力 X=1