2017 材料力学 835 参考答案

一． 1.由静力平衡以及弯矩方程可知：$\sum Fy=0$ $Fby+Fcy=0$; $\sum Mb=0$ $P\times\sqrt{2}/2-\sqrt{2}LF_{cy}=0$ ，联立可求的：$F_{by}=Fcy=P/2$

2. 求各杆应变 ∵ 由公式$\sigma=E\varepsilon$，$\sigma=F/A$，可得：$\varepsilon=F/(AE)$
则需先求出各杆轴力。分析结点 A：$Nab.\cos45°=Nac.\cos45°$ $(Nab+Nac)\sin45°$，可得到：$Nab=Nac=\sqrt{2}/2P$，又有水平方向合力为 0，可得 $Nbc=P$。
∴各杆应变：AB 杆 $\varepsilon=\sqrt{2}P/2AE$，CD 杆 $\varepsilon=\sqrt{2}P/2AE$，BC 杆 $\varepsilon=P/AE$

3. 有能量法可知：$V_\varepsilon=\Sigma\int FN.FN/2EAdx=2\Sigma\int_0^L(\sqrt{2}P/2)^2/2EAdx+\int_0^{\sqrt{2}L}P^2/2EAdx=(1+\sqrt{2})P^2/2EA$。其中左边的 $0<x<L$. 右边的 $0<x<\sqrt{2}L$.

二． 解：$\sum Mc=0,\dfrac{FL}{2}-\dfrac{qL^2}{2}=0$，其 $q=\dfrac{\rho g\pi}{4}(D^2-(D-2\delta)^2)=1.21\times10^3 KN/m(\uparrow)$；

解得：$F=qL$

$W_B=h,\dfrac{FL^3}{48EI}-\dfrac{5qL^4}{256EI}=h$；$I=\dfrac{1}{64}\pi(D^4-(D-2\delta)^4)=4.62\times10^{-4}m^4$.

带入，可解的 $W_B=h,\dfrac{FL^3}{48EI}-\dfrac{5qL^4}{384EI}=h$

$L=17.68m$, $F=2.14\times10^4 N$

三．解：(1)（A. B 两端的水平力为 F，需看成一对广义力求解）
设一点距 A 点为 x 的弯矩 $M(x)=FX\cos\theta(0<x<L)$
$V\varepsilon=2\int_0^L\frac{(FX\cos x)^2}{2EI}dx=(F^2\cos^2\theta L^3)/3EI$
∴A. B 间的水平位移即：$\partial V\varepsilon/\partial F=(2F\cos^2 L^3)/3EI$

(2)在弯矩和轴力的共同作用下，求 A. B 的之间的水平位移：

$$V\varepsilon=2\int_0^L\frac{(FX\cos x)^2}{2EI}dx+2\int_0^L\frac{F^2}{2\sin^2\theta EA}dx=F^2\cos^2\theta L^3/3EI+F^2L/EA\sin^2\theta$$

当轴力贡献超过 10%时，$\frac{F^2L}{EA\sin^2\theta}/(\frac{F^2\cos^2\theta L^3}{3EI}+\frac{F^2L}{EA\sin^2\theta})\geq10\%$

所以，得到 $\sin2\theta\leq\frac{6}{L}\sqrt{\frac{3}{A}}$

四．求作用在轴上的 F 和 Me.

求 F：由公式$\sigma=M_Z/W_z$ ① $Mz=Fa$ ② $\varepsilon=\sigma/E$ ③，其中 $Mz=\pi d^3/32$,联立可求

出 $F=\varepsilon_0\pi Ed^3/32a$

求 Me：由 B 点的应力状态可知，仅受τ的作用，$\varepsilon_{-45}=\frac{\tau}{E}=16Me/\pi Ed^3, \sigma_{-45}=\tau$

所以：$Me=\varepsilon_{-45}\pi Ed^3/16$

五．(1)求 c 处支座反力

一次超静定，解除支座 c，加反力 Fc，方向向上

列弯矩方程：①$0<X_1<\frac{L}{3}, M_{(X1)}=0$

②$0<X_2<\frac{2L}{3}, M_{(X2)}=FX_2$

③$0<X_3<L, M_{(X3)}=F_cX_3+2/3LF$

刚架总应变能：$V_\varepsilon=\frac{\sum\int M^2(x)}{2EI}dx=\int_0^{\frac{2L}{3}}\frac{(FX_2)^2}{2EI}dx+\frac{\int_0^L(F_cX_3+2FL)^2}{2EI}dx$

由卡式第二定理 $\Delta_c=\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial F_C}=0$，可以推出 $F_c=-F$，所以方向与假设方向相反，即力 F 方向向下。（充分利用铰接点 c 处的变形为 0）

六．解：①当 $F\ll 3EI\Delta/L^3$ 时，则 B.C 端不接触。

设 $M_X=FX$. 杆 AB 的应变能 $V_\varepsilon=\int_0^L\frac{(FX)^2}{2EI}dx=F^2L^3/6EI$

$\therefore \Delta_B=\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial F}=\frac{FL^3}{3EI}$

② $F\gg 3EI\Delta/L^3$ 时，则 BC 端产生相互作用力，令 CD 杆的轴力为 X，则此时的 B 端受力（F−X）

几何相容条件：$\Delta_B=\Delta_C+\Delta$

根据卡氏第二定理：$\Delta_B=\int_0^L\frac{(F-X)x^2}{EI}dx$

又因杆 CD 被压缩，则 $\Delta_c=XL/EA$

联立可得：$X=(FL^3/3EI-\Delta).3EIA/(AL^3-3EI)$