一九九九年答案解析

一、第一强度理论理论——最大拉应力理论 $\sigma_{r1}=\sigma_1\le[\sigma]$

第二强度理论理论——最大拉应变理论 $\sigma_{r2}=\sigma_1-\upsilon(\sigma_2+\sigma_3)\le[\sigma]$

第三强度理论理论——最大切应力理论 $\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3\le[\sigma]$

第四强度理论理论——形状改变能密度理论

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_2)^2\right]}\le[\sigma]$$

① 脆性材料，非三向压应力状态下，脆性破坏，可用第一式
②、脆性材料，三向压应力状态下，屈服失效，可用第三或第四式
③、塑性材料，非三向压应力状态下，屈服失效，可用第三或第四式
④、塑性材料，三向压应力状态下，脆性破坏，可用第一或第二式

（2）$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2}+\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{4}+\tau^2}\\ \dfrac{\sigma}{2}-\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{4}+\tau^2}\end{cases}$$

所以 $\sigma_1=\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2}$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2}$

二、解：（1）、$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}$

$$\Delta_{st}=\frac{PL}{EA}=\frac{10\times10^3\times2}{20\times10^9\times0.1^2}=1\times10^{-4}$$

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}=45.73$$

（2）、$\sigma_{d,max}=K_d\cdot\Delta_{st}=K_d\frac{P}{A}==45.73MPa$

（3）、下端插入刚性基础部分，故 $\varepsilon_x=\varepsilon_y=0$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-(\sigma_y+\sigma_z)\right]=0$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-(\sigma_x+\sigma_z)\right]=0$$

$$\sigma_z=-45.73MPa$$

得 $\sigma_x = \sigma_y = -1643MPa$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = -2.06\times10^{-3}$$

所以 $\sigma_1 = \sigma_2 = -11.43MPa$，， $\sigma_3 = -45.73MPa$

三、解：（1）、$\sum F_y = 0$， $F_{Ay} = F_{By} = \text{q}L = 6KN$

$$\sum M_C = 0 \quad F_{Ay}\cdot L\cdot\cos30° - \frac{1}{2}(\text{q}\cos30°)\cdot L^2 - F_{NAB}\cdot L\cdot\sin30° = 0$$

得 $F_{NAB} = 5.20KN$

（2）、AC 段：

$$M(\text{x}) = F_{Ay}\cos30°\text{x} - \frac{1}{2}(\text{q}\cos30°)\text{x} - \text{qx}\sin30° - F_{NAB}\text{x}\cdot\sin30° = 2.60\text{x} - 1.3\text{x}^2$$

$$\sigma_C(\text{x}) = \left|\frac{F_N\cos30° + F_{Ay}\sin30° - \text{qx}\sin30°}{A} + \frac{M(\text{x})}{\frac{1}{6}\text{bh}^2}\right| = \left|1.875 + 38.625\text{x} - 19.5\text{x}^2\right|$$

$$\sigma_t(\text{x}) = \left|\frac{M(\text{x})}{\frac{1}{6}\text{bh}^2} - \frac{F_N\cos30° + F_{Ay}\sin30° - \text{qx}\sin30°}{A}\right| = \left|39.375x - 19.5\text{x}^2 - 1.875\right|$$

$$\frac{\partial\sigma_c(\text{x})}{\partial\text{x}} = 0，\quad 38.625 - 39x = 0，\quad \text{x} = 0.99m，\quad \sigma_{c,\max} = 21.00MPa$$

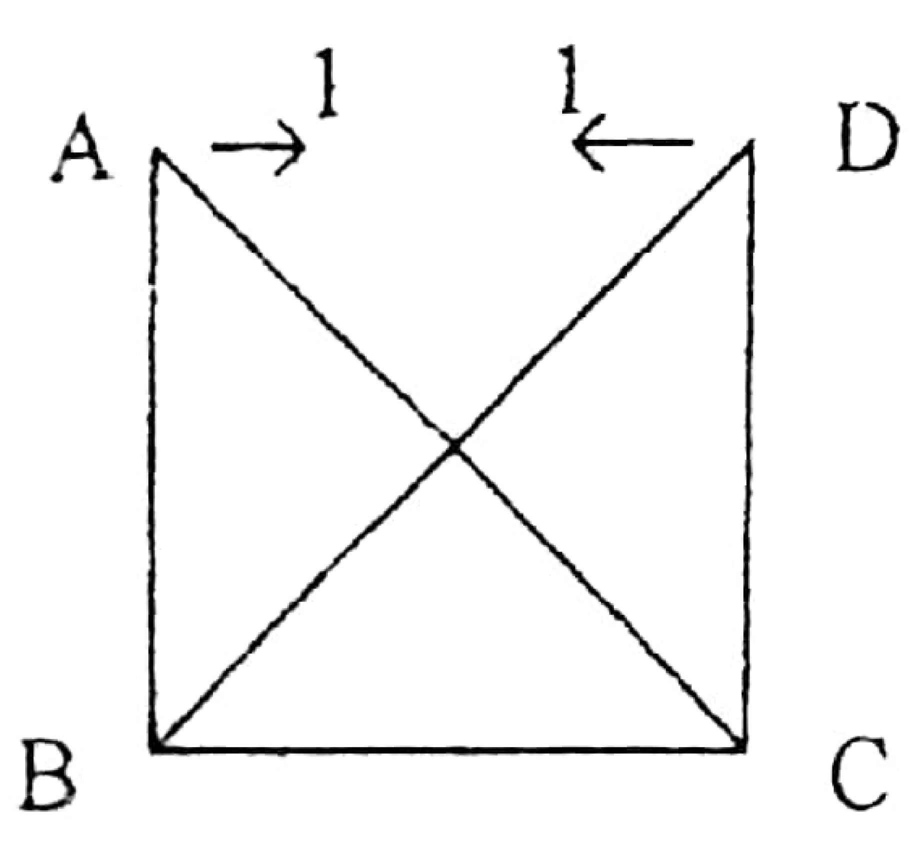
$$\frac{\partial\sigma_t(\text{x})}{\partial\text{x}} = 0，\quad 39.375 - 39x = 0，\quad \text{x} = 1.01m，\quad \sigma_{t,\max} = 18.00MPa$$

故危险截面位置在 x=0.99m 处，位置是截面的上边缘，$\sigma_{\max} = 21.00MPa$

四、解：自由度：4×2-6-3=-1，结构为一次超静定结构

断开多余约束 AB 杆，代之以一对约束反力 X

用单位力法，当 X=1 时，



杆件	$\overline{F}_{Ni}$	F_{Ni}
AB	1	0
BD	1	-P
AC	1	-P
CD	$-\sqrt{2}$	-P
BC	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}P$
AD	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}P$

故 $\delta_{11}=\sum\dfrac{\overline{F}_{Ni}\overline{F}_{Ni}L_i}{EA_i}=\dfrac{1\cdot a}{EA}\times 4+\dfrac{2\sqrt{2}a}{2EA}\times 2=\dfrac{\left(4+2\sqrt{2}\right)a}{EA}$

$$\Delta_{1P}=\sum\frac{\overline{F}_{Ni}F_{Ni}L_i}{EA_i}=\frac{-P\cdot a}{EA}\times 3+\frac{-\sqrt{2}\times\sqrt{2}P\times\sqrt{2}a}{2EA}\times 2=-\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)Pa}{EA}$$

故 $X=-\dfrac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}P=0.854P$

即 $F_{NAB}=0.854P$

（2）、实际受力情况：$F_{Ni}=\overline{F}_{Ni}x+F_{Ni}$

杆件	F_{Ni}	$\dfrac{\partial F_{Ni}}{\partial P}$	$\dfrac{F_{Ni}\cdot\dfrac{\partial F_{Ni}}{\partial P}\cdot L_i}{EA_i}$	L
AB	0.854P	0.854	0.729	L
BD	-0.146P	-0.146	0.021	a
AC	-0.146P	-0.146	0.021	a
CD	-0.146P	-0.146	0.021	a
BC	0.206P	0.206	0.030	$\sqrt{2}$a
AD	0.206P	0.206	0.030	$\sqrt{2}$a

则 $\Delta_{AB}=\sum\dfrac{F_{Ni}\cdot\dfrac{\partial F_{Ni}}{\partial P}\cdot L_i}{EA_i}=0.852\dfrac{Pa}{EA}$

（3）、将两个力转 180°，则上述分析的 $\Delta_{1P}=\dfrac{Pa\left(3+2\sqrt{2}\right)}{EA}$

则 $F_{NAB}=-0.854P$，$F_{Ni}=X\cdot\overline{F}_{Ni}+\Delta_{1P}$，可知，各杆内力均发生方向变化，而大小不变。

五、解：BC 杆： $M_x(x)=Px \qquad 0\le x\le 1$

$$M_y(x)=Px \qquad 0\le x\le 1$$

AB 杆： $M_z(x)=Px \qquad 0\le x\le 2$

$$M_y(x)=1\cdot P$$

$$T=1\cdot P$$

设 BD 杆轴力为 X，则 $\omega_B=\Delta L_{BD}$

$$\omega_B=\frac{(P-X)L^3}{EI}$$

$$\Delta L_{BD}=\frac{2X}{EA}$$

联立，$\dfrac{8P}{EI}=\dfrac{8X}{EI}+\dfrac{2X}{EA}$

其中 $I=\dfrac{1}{64}\pi d^4=2.5\times10^{-9}\times\pi$

$$A=\frac{1}{4}\pi d^2=1\times10^{-4}\times\pi$$

故 $X\approx P$

对于 BD 杆而言， $P_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2}=\dfrac{\pi^2\times100\times10^9}{4}\times\dfrac{1}{64}\pi\times0.02^4\le\dfrac{[\sigma]}{n_{st}}$

解得 $P\le630N$

对于 AB 杆而言，A 为危险截面

$$\sigma=\frac{\sqrt{M_z^{\ 2}+M_y^{\ 2}}}{W}=\frac{32\sqrt{5}P}{\pi d^3} \qquad \tau=\frac{T}{W_t}=\frac{16P}{\pi d^3}$$

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^3+4\tau^2}=\frac{32\sqrt{6}P}{\pi d^3}\le[\sigma]$$

所以 $P\le\dfrac{[\sigma]\pi d^3}{64}=48.1N$

对于 BC 杆而言，B 为危险截面 $\sigma=\dfrac{\sqrt{M_x^{\ 2}+M_y^{\ 2}}}{W}=\dfrac{32\sqrt{2}P}{\pi d^3}$

$$\sigma_{r3} = \frac{32\sqrt{2}P}{\pi d^3} \le [\sigma]$$

所以 $P \le \dfrac{150\times10^6\times\pi\times0.02^3}{32\sqrt{2}} = 83.3N$

综上，$[P] = 48.1N$