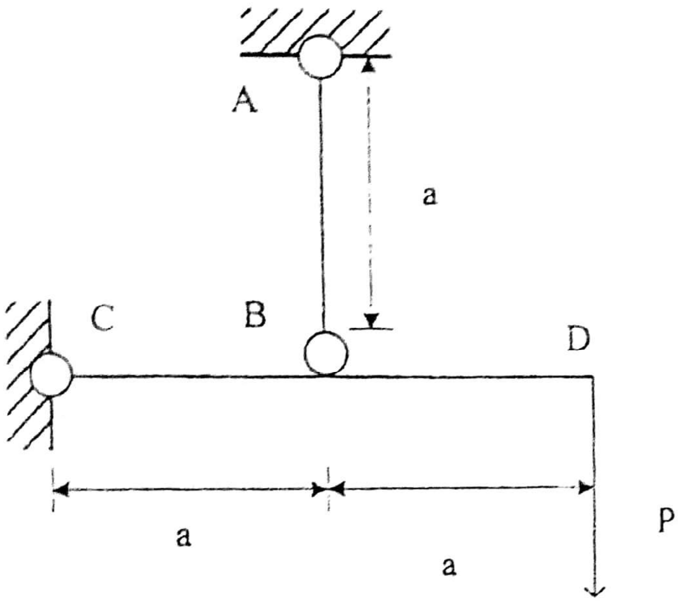
二〇一六年真题　　　答案解析

一、已知：AB 杆和 CD 杆都是半径为 d 的圆杆，AB 杆的弹性模量为 E，其中 AB 杆纵向线应变为 ε，BD 刚性杆（30 分）



求：（1）、P 的大小

（2）、求 D 的竖向位移

（3）、求 AB 杆所具有的应变能

解：（1）、BD 杆为刚性杆，所以 $EI \to \infty$，不发生弯曲变形

$\sum M_C = 0$，$F_{NAB} \cdot \mathrm{a} - P \cdot 2\mathrm{a} = 0$，得 $P = \dfrac{F_{NAB}}{2}$

$\varepsilon = \dfrac{F_{NAB}}{EA}$，$A = \dfrac{1}{4}\pi \mathrm{d}^2$

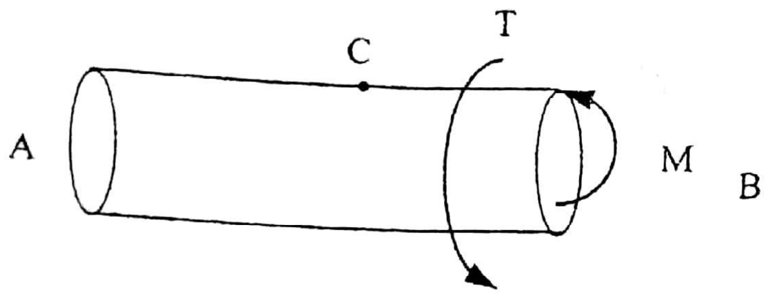
综上，$P = \dfrac{\pi \mathrm{d}^2 E\varepsilon}{8}$

（2）、$\Delta D_y = 2\Delta B_y \approx 2\varepsilon a$

（3）、$v_\varepsilon = \dfrac{1}{2}E\varepsilon^2$

$$V_\varepsilon = \int_l \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{4}\pi \mathrm{d}^2 \cdot 2\mathrm{a} = \frac{\pi E\varepsilon^2 \mathrm{d}^2 \mathrm{a}}{4}$$

二、在 AB 圆杆上的 B 端受力如图，已知 $T = 2M$，EI，$\upsilon = 0.3$



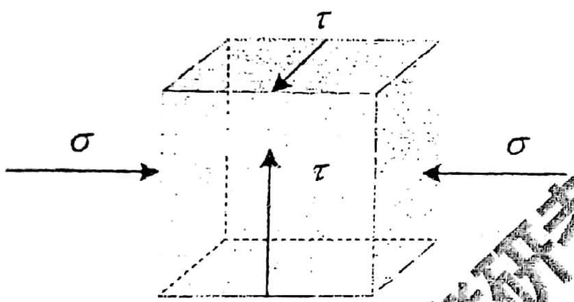
求：（1）C 处的主应力σ_1，σ_2，σ_3

（2）、C 处的最大切应力

（3）、ε_1，ε_2，ε_3

（4）、C 处的第三主应力σ_{r3}

解：（1）、C 点单元体受力情况：



其中 $\sigma=\dfrac{M}{W}=\dfrac{32M}{\pi d^3}$，$\tau=\dfrac{T}{W_t}=\dfrac{32M}{\pi d^3}$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}=\frac{16M}{\pi d^3}\pm\frac{16\sqrt{5}M}{\pi d^3}=\begin{cases}83.94\dfrac{M}{\pi d^3}\\ -6.29\dfrac{M}{\pi d^3}\end{cases}$$

所以，$\sigma_1=83.94\dfrac{M}{\pi d^3}$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-6.29\dfrac{M}{\pi d^3}$

（2）、最大切应力 $\tau=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=45.12\dfrac{M}{\pi d^3}$

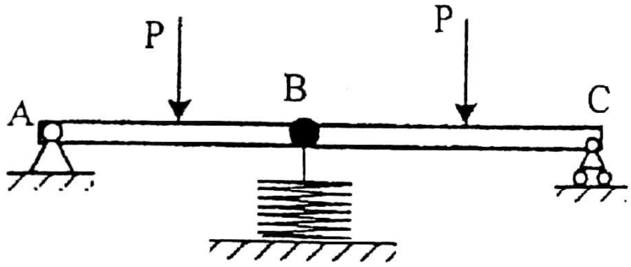
（3）、$\varepsilon_1=\dfrac{1}{E}\left[\sigma_1-\upsilon(\sigma_2+\sigma_3)\right]=\dfrac{1}{E}\left[83.94\dfrac{M}{d^3}-\upsilon\left(0-6.29\dfrac{M}{d^3}\right)\right]=88\quad\dfrac{M}{Ed^3}$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}\left[\sigma_2-\upsilon(\sigma_1+\sigma_3)\right]=\frac{1}{E}\left[0-\upsilon\left(83.94\frac{M}{d^3}-6.29\frac{M}{d^3}\right)\right]=-23.30\frac{M}{Ed^3}$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}\left[\sigma_3-\upsilon(\sigma_1+\sigma_2)\right]=\frac{1}{E}\left[-6.29\frac{M}{d^3}-\upsilon\left(83.94\frac{M}{d^3}+0\right)\right]=-31.47\frac{M}{Ed^3}$$

（4）、$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\dfrac{32\sqrt{5}M}{\pi d^3}=22.78\dfrac{M}{d^3}$

三、简支梁 AC 杆中点 B 有弹簧支撑，受力情况如图所示.



求：（1）、弹簧的反力
（2）、弹簧的刚度 k

易知，$M_B=0$，分析结构的左半部分，$\sum M_B=0$，$F_A\cdot 2L-PL=0$

$F_A=\dfrac{P}{2}$

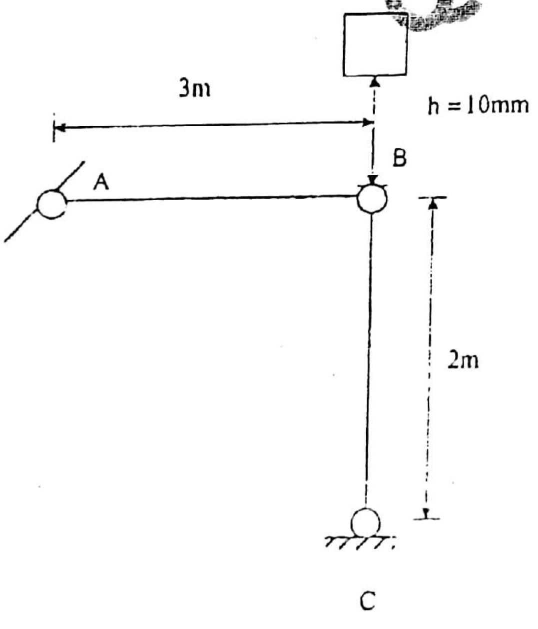
左右对称，所以 $F_B=\dfrac{P}{2}$，

整体而言，$\sum F_y=0$，所以弹簧反力 $F=P$

（2）分析左半部分，$\omega_{B左}=\dfrac{PL^3}{3EI}+\dfrac{PL^2}{2EI}\times L-\dfrac{\frac{F}{2}(2L)^3}{3EI}=\dfrac{FL^3}{2EI}$

所以弹簧的刚度 $k=\dfrac{\frac{F}{2}}{\omega_{B左}}=\dfrac{EI}{L^3}$

四、



已知：AB 杆：$EI = 5\times10^{5} N\cdot \mathrm{m}^2$，$A = 150\mathrm{cm}^2$，$n_{st} = 2.5$

AB，BC 杆：$E = 200GPa$，$d = 38mm$，$P = 300N$，$\sigma_p = 200MPa$

求：（1）、Kd（2）、BC 杆的稳定性

解：（1）、设 BC 杆的内力为 X，

$$\omega_B = \Delta L_{BC}，\quad \omega_B = \frac{(P-X)L^3{}_{AB}}{3EI}，\quad \Delta L_{BC} = \frac{XL_{BC}}{EA}$$

解得 $X = 299.85N$

$$\Delta_{st} = \omega_B = 2.7\times10^{-6}$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta st}} = 87.1$$

（2）、对于 BC 杆：

$$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = 99.35$$

$$\lambda_{BC} = \frac{\mu L}{i} = \frac{\mu L}{\frac{d}{4}} = \frac{1\times2}{\frac{0.038}{4}} \geq \lambda_p$$，所以 BC 杆属于大柔度杆

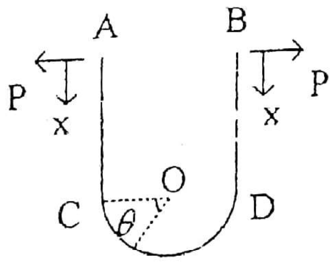
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{BC}}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^3 \frac{1}{64} 0.038^4 \times 200\times10^9}{4} = 50.51kN，$$

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = 44.54MPa$$

$$\sigma_{st,d} = K_d\frac{X}{A} = \frac{299.85}{\frac{1}{4}\pi 0.038^2}\times87.1 = 23.03MPa$$

$\sigma_{st,d} \leq \sigma_{cr}$，故结构稳定

五、



已知：

求：（1）、各杆弯矩

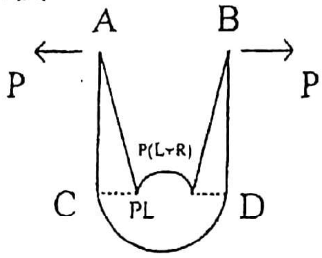
（2）、AB 之间的位移

解：（1）、AC 段：$M(x) = Px$，$0 \leq x \leq L$

CD 段：$M(\theta)=PR\cos+PL$，$0\le\theta\le\pi$

BD 段：$M(\mathrm{x})=Px$，$0\le x\le L$

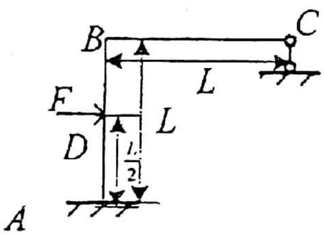
M图



（2）、

$$\Delta_{AB}=2\int_0^{L}\frac{P\mathrm{x}^2}{EI}\mathrm{dx}+\int_0^{\pi}\frac{PR(R\cos\theta+L)^2}{EI}\mathrm{d}\theta=\frac{2PL}{3EI}+\frac{\pi PR^3}{2EI}+\frac{\pi PL^2R}{EI}$$
$$=\frac{P(4L^3+6\pi RL^2+3\pi R^3)}{6EI}$$

六、



已知结构和受力情况如图所示

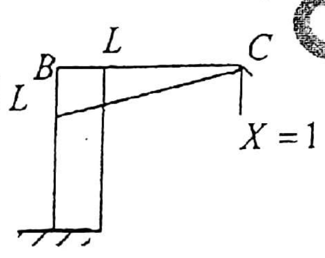
求：（1）A、B 处的反力

（2）刚性杆的最大弯矩

（3）D 处的水平位移

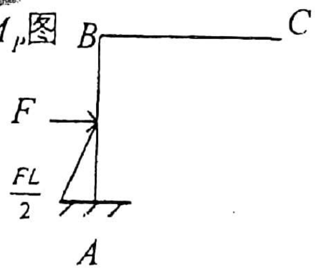
解：（1）、用单位力法，解除 C 处多余约束，代之以未知反力 X，令 X=1，做弯矩图和实际受力图：

$\overline{M}$图



，

M_P图



则 $\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}L^2\times\frac{2}{3}L+L^3\right)=\frac{4L^3}{3EI}$

$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}L\times\frac{1}{2}FL\times L\right)=\frac{FL^3}{8EI}$

所以， $X=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{3}{32}F$

所以 $F_{Cy}=\frac{3}{32}F(\uparrow)$， $F_{Ay}=\frac{3}{32}F(\downarrow)$， $F_{Ax}=F(\leftarrow)$，

$M_A=-\frac{1}{2}FL+L\times\frac{3}{32}F=-\frac{13}{32}FL(逆时针)$

（2）、 $M_{max}=M_A==\frac{13}{32}FL(逆时针)$

（3）、CB 段： $M(x)=\frac{3}{32}Fx$， $0\le x\le L$

BD 段： $M(x)=\frac{3}{32}FL$， $0\le x\le\frac{L}{2}$

DA 段： $M(x)=\frac{3}{32}FL+Fx$， $0\le x\le\frac{L}{2}$

所以 $\Delta_{Dx}=\int_0^L\frac{F\left(\frac{13}{32}x\right)^2}{EI}dx+\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{F\left(\frac{13}{32}L\right)^2}{EI}dx+\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{F\left(\frac{13}{32}L+x\right)^2}{EI}dx=\frac{23FL^3}{768EI}$