二〇一一年答案解析

解：设 B 端铰对杆的力 F_B，记 L-a 为 b，则列弯矩方程

BC 段：$M(x)=F_B x, 0\le x\le L-a$

CA 段：$M(x)=F_B x - F(\mathrm{x}-\mathrm{L}+\mathrm{a}), L-\mathrm{a}\le x\le L$

由于 $EI\omega''=-M(\mathrm{x})$ 可知

$$\theta=\begin{cases}\omega_1'=\dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{1}{2}F_B\mathrm{x}^2+C_1\right) & 0\le \mathrm{x}\le L-\mathrm{a}\\ \omega_2'=\dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{1}{2}F_B\mathrm{x}^2+\dfrac{1}{2}F(\mathrm{x}-\mathrm{L}-\mathrm{a})^2+C_2\right) & 0\le \mathrm{x}\le L-\mathrm{a}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\omega_1=\dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{1}{6}F_B\mathrm{x}^3+C_1\mathrm{x}+D_1\right) & 0\le \mathrm{x}\le L-\mathrm{a}\\ \omega_2=\dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{1}{6}F_B\mathrm{x}^3+\dfrac{1}{6}F(\mathrm{x}-\mathrm{L}-\mathrm{a})^3+C_2\mathrm{x}+D_2\right) & L-\mathrm{a}\le \mathrm{x}\le L\end{cases}$$

由边界连续性，当 x=0 时，$\omega_1=0$，$D_1=0$

当 x=L 时，$\omega_2=\dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{1}{6}F_B\mathrm{x}^3+\dfrac{1}{6}F\mathrm{a}^3+C_2L\right)=0, C_2=C_1=\dfrac{1}{6}F_BL^2-\dfrac{1}{6}F\dfrac{\mathrm{a}^3}{L}$

因此弯矩方程为 $M(\mathrm{x})=\begin{cases}F_B\mathrm{x} & 0\le \mathrm{x}\le \mathrm{L}-\mathrm{a}\\ F_B\mathrm{x}-\mathrm{F}(\mathrm{x}-\mathrm{L}+\mathrm{a}), & L-\mathrm{a}\le \mathrm{x}\le L\end{cases}$

挠曲线方程为 BC：$\omega_1=\dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{1}{6}F_B\mathrm{x}^3+\dfrac{1}{6}F\mathrm{L}^2\mathrm{x}+\dfrac{1}{6}F\dfrac{\mathrm{a}^3\mathrm{x}}{L}\right)$

$$\omega_2=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}F_B\mathrm{x}^3+\frac{1}{6}F(\mathrm{x}-\mathrm{L}+\mathrm{a})^2\mathrm{x}+\frac{1}{6}F_BL^2\mathrm{x}-\frac{1}{6}F\frac{\mathrm{a}^3\mathrm{x}}{L}\right)$$

当 L=1.7a 时，$\theta_C=0$，即令 $\mathrm{x}=L-\mathrm{a}=0.7\mathrm{a}$，

$$\omega_1'=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}F_B(0.7\mathrm{a})^2+\frac{1}{6}F_BL^2-\frac{1}{6}F_B\frac{\mathrm{a}^3}{1.7\mathrm{a}}\right)=0$$

即 $F_B=0.41F$

二、解：（1）、$\sigma_y=50MPa$ 可作为一个主应力

$\sigma_y = 50MPa$，$\tau_{xy} = 40MPa$（逆时针为正）

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{60+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60-0}{2}\right)^2 + 40^2} = \begin{cases}80MPa\\ -20MPa\end{cases}$$

所以，$\sigma_1 = 80MPa$，$\sigma_2 = 50MPa$，$\sigma_3 = -20MPa$

（2）、最大主应力 $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 50MPa$

（3）、$\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \dfrac{1}{200\times10^9}\left[60 - 0.3\times50\right]\times10^6 = 2.25\times10^{-4}$

$\varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] = \dfrac{1}{200\times10^9}\left[50 - 0.3\times60\right]\times10^6 = 1.6\times10^{-4}$

$\varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \dfrac{1}{200\times10^9}\left[-0.3\times\left(60+50\right)\right]\times10^6 = -1.65\times10^{-4}$

（4）、$V_\varepsilon = \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_x\sigma_x + \sigma_y\varepsilon_y\right) + \dfrac{\tau^2}{2G} = 10750 + 10400 = 2.116\times10^4\ J/m^3$

（5）、$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 100MPa$

$\sigma_{r4} = \sqrt{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2} = 88.88MPa$

三、（1）、$F_N = F$，$M_y = Fb$，$M_z = \dfrac{1}{2}Fb$

（2）、$\sigma_{max} = \dfrac{F_N}{A} + \dfrac{M_y}{W_y} + \dfrac{M_z}{W_z} = \dfrac{F}{2b^2} + \dfrac{Fb}{\frac{1}{6}b(2b)^2} + \dfrac{\frac{1}{2}Fb}{\frac{1}{6}2bb^2} = \dfrac{7F}{2b^2}$

（3）、$\sigma_B = \dfrac{F_N}{A} + \dfrac{M_y}{W_y} + \dfrac{M_z}{W_z} = \dfrac{F}{2b^2}$

$\Delta L_{AB} = L\cdot\dfrac{\sigma_B}{E} = \dfrac{FL}{2Eb^2}$

四、解：（1）、$M_{A,x} = 2Fa$，$T = Fa$，$F_S = F$

（2）、$\sigma_{max} = \dfrac{M_{A,x}}{W_x} = \dfrac{2Fa}{\frac{1}{32}\pi(2d)^3\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]} = \dfrac{128Fa}{15\pi d^3}$

$\tau_{max} = \dfrac{T}{W_t} = \dfrac{Fa}{\frac{1}{16}\pi(2d)^3\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]} = \dfrac{32Fa}{15\pi d^3}$

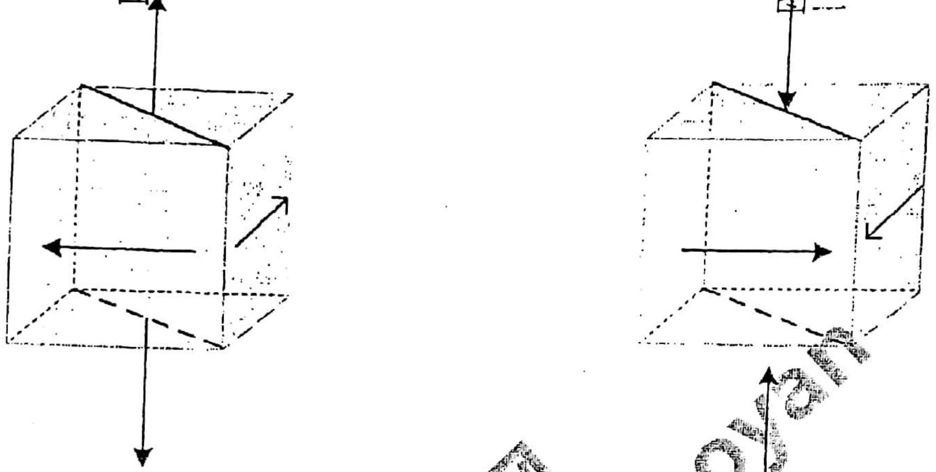
（3）、

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^{\ 2}}=\frac{64Fa}{15\pi d^3}\pm\frac{32\sqrt{2}Fa}{15\pi d^3}=\begin{cases}2.32\dfrac{Fa}{\pi d^3}\\ 0.40\dfrac{Fa}{\pi d^3}\end{cases}$$

故 $\sigma_1=2.32\dfrac{Fa}{\pi d^3}$， $\sigma_2=0.40\dfrac{Fa}{\pi d^3}$， $\sigma_3=0$

（4）、该点的应力状态为：

图一　　　　　　　　　　图二



对于图一

$$\tau_{zy}=-\tau=-\frac{32Fa}{15\pi d^3}$$

$\sigma_y=0$， $\sigma_z=0$

所以 $\sigma_{45°}=\tau$， $\sigma_{-45°}=-\tau$

所以

$$\varepsilon_{45°}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{45°}-\upsilon\left(\sigma_{-45°}+\sigma_x\right)\right]=\frac{1}{E}\left[-\frac{32Fa}{15\pi d^3}-\upsilon\left(\frac{32Fa}{15\pi d^3}+\frac{128Fa}{15\pi d^3}\right)\right]=-(0.68+3.40v)\frac{Fa}{E\pi d^3}$$

对于图二，则方向相反， $\varepsilon_{45°}=(0.68+3.40v)\dfrac{Fa}{E\pi d^3}$

五、解：（1）、受力分析

$$F_{NCD}=F$$

$$F_{NBC}=F_{NAC}=-\frac{\sqrt{2}}{2}F$$

$$F_{NBD}=F_{NAD}=\frac{1}{2}F$$

$$\Delta_D=\sum\frac{\partial F_{Ni}\cdot L_i}{EA_i}\frac{\partial F_{Ni}}{\partial F}=\frac{Fa}{EA}+\frac{Fa}{4EA}\times 2+\frac{\frac{1}{2}F\cdot\sqrt{2}a}{EA}\times 2=\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)Fa}{2EA}$$

（2）、在 B 处加一水平向右的单位力，则仅在单位力作用下各杆轴力分别为：

$\overline{F}_{NBD}=1,\overline{F}_{NAD}=1$

则 $\Delta_B=\sum\frac{F_{Ni}\cdot\overline{F}_{Ni}\cdot L_i}{EA_i}=\frac{\frac{1}{2}Fa}{EA}+\frac{\frac{1}{2}Fa}{EA}=\frac{Fa}{EA}$

（3）、当力 F 作用于 C 时，$F_{Ay}'=F_{By}'=\frac{1}{2}F$，$F_{NBC}'=F_{NAC}'=\frac{\sqrt{2}}{2}F$

$F_{NBD}'=F_{NAD}'=\frac{1}{2}F,F_{NCD}=-2F$

易知，CD 杆内力发生变化，由于 CD 能量变动，使 C、D 节点位移发生变化，而 B 不发生变化

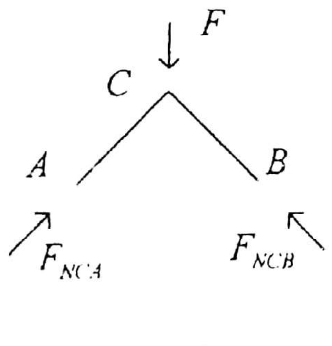
（4）、大柔度条件：$\lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}},\lambda=\frac{\mu_1 L}{i}=\frac{\sqrt{2}a}{i_{\min}}$

$\lambda>\lambda_p$，即 $i_{\min}<\sqrt{\frac{2\sigma_p}{E}}\frac{a}{\pi}$ 或 $I_{\min}<\frac{2a^2\sigma_p}{\pi^2 E}$

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2}=\frac{\pi^2 EI}{2a^2}\geq\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}F}{n_{st}}$$

即 $F_{cr}\leq\frac{3\pi^2 EI}{2\sqrt{2}a^2}$，则 $[\sigma]=\frac{3\pi^2 EI}{2\sqrt{2}a^2 A}$

六、解：截开 AB，分析 AB



1.由于结构对称性，$F_{NCA}=F_{NCB}=\frac{F}{\sqrt{2}}$

分析 A 点，可知 $F_{Ay}=\frac{F}{2}(\downarrow)$

2.AC 杆弯矩为 0，则 $\Delta_C=0$

则 $\Delta_D = \frac{F\left(\sqrt{2}a\right)^3}{48EI} = \frac{\sqrt{2}Fa^3}{24EI}$，故 $\Delta_D = \frac{\sqrt{2}Fa^3}{24EI}$

3.当考虑拉压杆变形时，竖直方向 $F_{Ay} = \frac{F}{2}(\downarrow)$不变，

A、B 两点有伸长趋势，AB 受压，考虑压缩变形，则 $F_{Ax}(\leftarrow)$ 的力减小