二〇〇七年答案解析

一、这是刘鸿文教材上的一道原题，这里 ABCD 强调是刚性梁（注意一下，16 年曾经考出来一道题是 EI=正无穷，所以要明确一下刚性梁其实就有 EI=正无穷这一潜在条件），受横力没有玩去变形，注意刘鸿文还有道此类形体，即由于 P 会产生 BD 弯曲，CD 弹塑性杆。

解：（1）$\sum M_A=0$，$F_{NBG}\times6+F_{NDF}\times10-P\times8=0$

$$F_{NBG}=F_{ND}.$$

得到绳对杆的力：$F_N=F_{NBG}=F_{NDF}=\dfrac{P}{2}=10\text{kN}$

（2）$\omega_C=\dfrac{1}{2}(\omega_B+\omega_D)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\frac{P}{2}\cdot(L_{BG}+L_{GF}+L_{FD})}{EA}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10\times10^3\times(2+2+4)}{200\times10^9\times1\times10^{-4}}=2mm$

二、解：（1）$I=\dfrac{b(x)h^3}{12}$，$b(x)=\dfrac{x}{l}\cdot b$，故 $I=\dfrac{bh^3}{12l}\cdot x$，$M(x)=-Fx$

故 $V_\varepsilon=\int_0^l\dfrac{(Fx)^2}{2EI}dx\int_0^l\dfrac{6F^2xldx}{Ebh^3}=\dfrac{3F^2l^3}{Ebh^3}$

（2）由卡式第一

定律，$\omega_p=\dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial F}=\dfrac{6Fl^3}{Ebh^3}$

（3）$W=\dfrac{b(x)h^2}{6}=\dfrac{bh^2}{6l}x$，$\sigma_{\max}(x)=\dfrac{M}{W}=\dfrac{6Fl}{bh^2}$

三、解：（1）$\omega(x)=\dfrac{q_0x}{360EIL}(7L^4-10L^2x^2+3x^4)$

当 x 取 $\dfrac{L}{2}$ 时，$\omega\left(\dfrac{L}{2}\right)>0$，即验算部分，这里规定向下为正方向，刘鸿文与孙训方不同，孙训方教材上是以向下为正，这里按经验是常采取孙的规定。

故 $EI\omega'(x)=\dfrac{q_0}{360L}(7L^4-30L^2x^2+15x^4)$

$$EI\omega''(x)=\frac{q_0}{360L}(-60L^2x+60x^3)=-M(x)$$

故 $M(x)=\dfrac{q_0}{6}xL-\dfrac{q_0x^3}{6L}$，$M(0)=M(L)=0$

微信公众号：zju_kaoyan QQ:602318502

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x}=\frac{q_0}{6}L-\frac{q_0x^2}{2L}，令\frac{\partial M(x)}{\partial x}=\frac{q_0}{6}L-\frac{q_0x^2}{2L}=0，则 x=\frac{L}{\sqrt{3}}$$

则 $M_{max}=M\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)=\frac{q_0L^2}{9\sqrt{3}}$

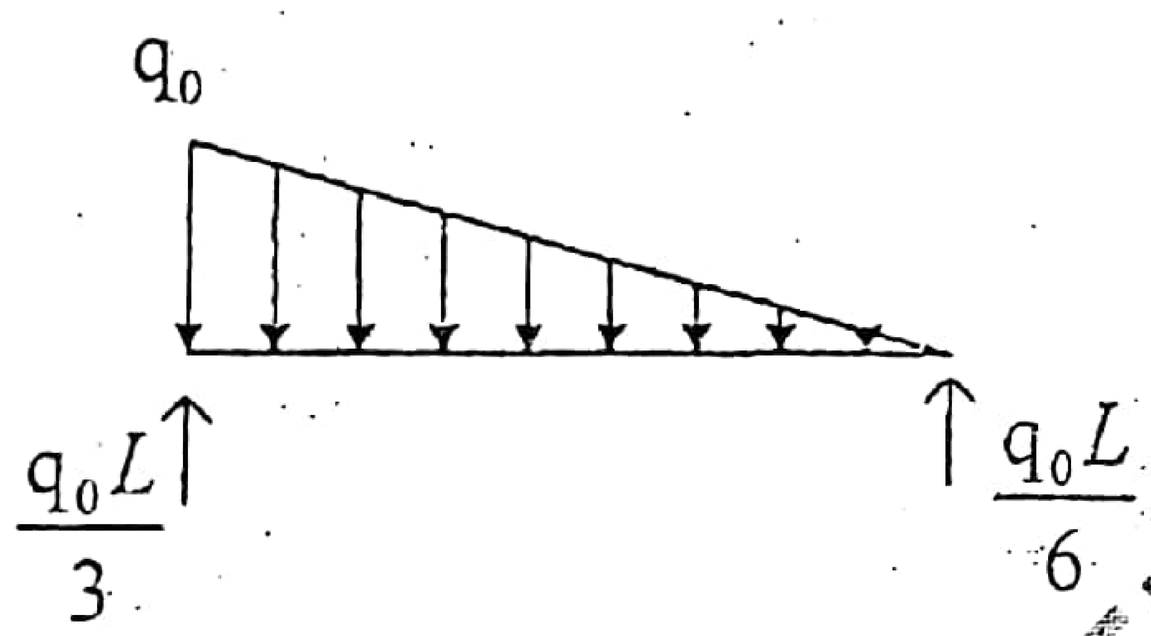
（2）因为 $M(0)=M(L)=0$，故直梁端点弯矩为 0

$$F_S(x)=\frac{\partial M(x)}{\partial x}=\frac{q_0L}{6}-\frac{3q_0x^2}{6L},q(x)=\frac{\partial F_S(x)}{\partial x}=-\frac{x}{L}q_0$$

即有着向下的三角形分布状荷载 q_0，两端分别受 $\frac{q_0L}{6}(\uparrow)$ 和 $\frac{q_0L}{3}(\uparrow)$，如图

（3）如上分析，且 $M(0)=M(L)=0$，$\omega(0)=\omega(L)=0$

故两端为铰支 。



四、此题在刘鸿文和孙训方教材中都有，还有一种考法是超静定杆问题，即可能将 AC 连接起来，应该在做题的过程中遇到过，值得注意。因为 15 年的考研就考出了类似的题目。

解：（1）、静力分析，可知 $2F_{NAB}\cos45^\circ+P=0$　$F_{NBA}=-\frac{1}{\sqrt{2}}P$

$$F_{NAB}=F_{NAD}=F_{NBC}=F_{NCD}=-\frac{1}{\sqrt{2}}P$$，受压

B 点：$F_{NAB}\cos45^\circ+F_{NBD}=0,F_{NDB}=P$ ，受拉

1.强度：$\sigma_{max}=\frac{F_{max}}{A}=\frac{P}{\frac{1}{4}\pi d^2}\le\frac{[\sigma]}{n_{st}}$

$$P\le\frac{[\sigma]}{n_{st}}\cdot\frac{1}{4}\pi d^2=100.5\text{kN}$$

2.稳定性：最大受压杆的压力为 $F_N=-\frac{1}{\sqrt{2}}P$，两端铰结，故 $\mu=1$。

$$\lambda=\frac{\mu L}{i}=\frac{1\times a}{\frac{d}{4}}=\frac{4\times 1}{0.04}=100\geq\lambda_p=100$$

故 $P\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi^3\times 200\times 10^9\times(0.04)^2}{100^2\times 4}=175.4\text{kN}$

综上，$[P]=100.5\text{kN}$

（2）、当 P 改为外向时，考虑强度与（1）相同，$P\leq 100.5\text{kN}$

考虑稳定性，此时最大受压杆为 BD，$F_N'=P$

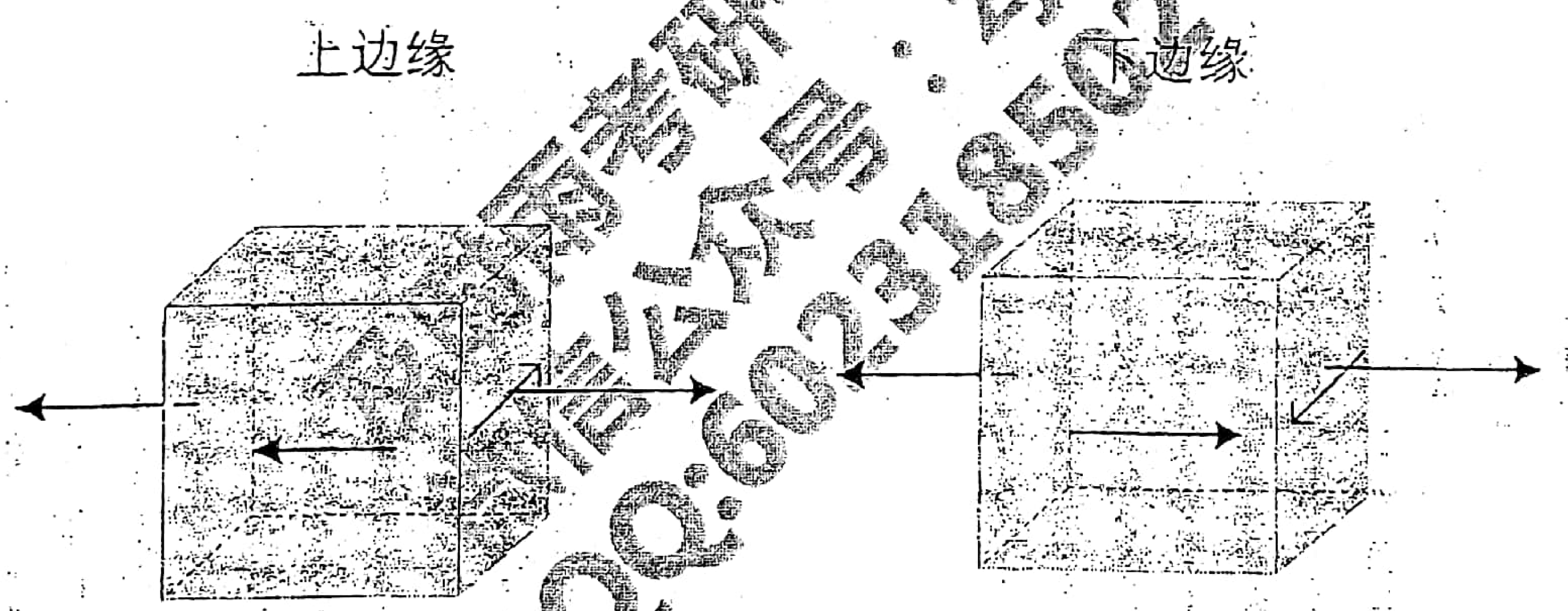
$$\lambda=\frac{\mu L}{i}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\frac{d}{4}}=141.4\geq\lambda_p$$，是大柔度杆。

$F_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{4}\pi d^2\geq n_{st}\cdot P$，得 $P\leq\frac{\pi^3 E d^2}{4n_{st}\lambda^2}=62.03kN$

故 $[P]=62.03\text{kN}$

五、解（1）、危险点为 A 截面处的上下两边界点

（2）、



微信公众号：zju_kaoyan
QQ:602318502

当 P 静止作用时，BC：$M_1(x)=Fx$

AB：$M(x)=Fx$

$T=Fa$

故 A 点，$\sigma_{st}=\frac{M}{W}=\frac{32Fa}{\pi d^3}$

$\tau_{st}=\frac{T}{W_t}=\frac{16Fa}{\pi d^3}$

当自由落置时，$E_p=V_{\varepsilon d}$

即：$P(h+\Delta d)=\frac{1}{2}F_{d}\cdot\Delta d=\frac{1}{2}\frac{\Delta d^{2}}{\Delta st}P$，得 $\Delta d=k_{d}\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta st}}\right)$

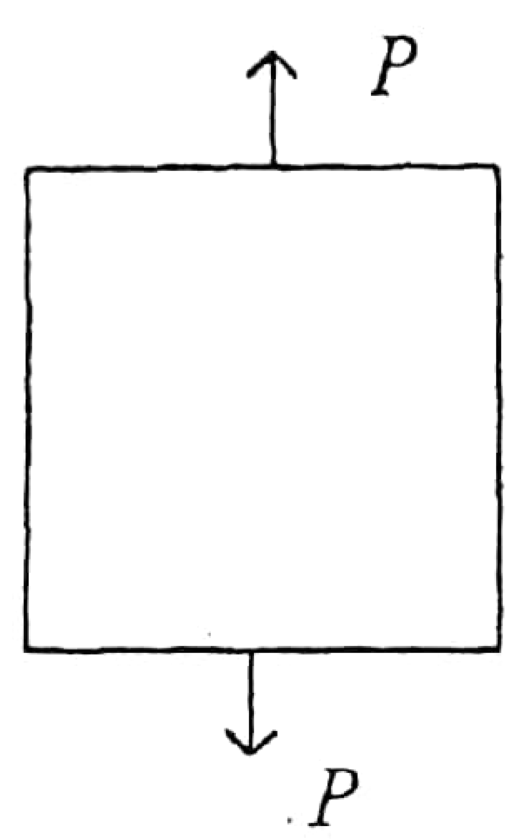
PA

$$\Delta st=\frac{Pa^{3}}{3EI}+\frac{Pa^{3}}{3EI}+\frac{Pa^{2}}{GI_{p}}\cdot a=\frac{2Pa^{3}}{3EI}+\frac{Pa^{3}}{GI_{p}}=\frac{128Pa^{3}}{3E\pi d^{3}}+\frac{32Pa^{3}}{G\pi d^{3}}$$

故 $K_{d}=1+\sqrt{1+\frac{2h\times3\pi d^{3}}{128Pa^{3}G+96Pa^{3}E}}=1+\sqrt{1+\frac{3\pi d^{3}h}{64Pa^{3}G+48Pa^{3}E}}$

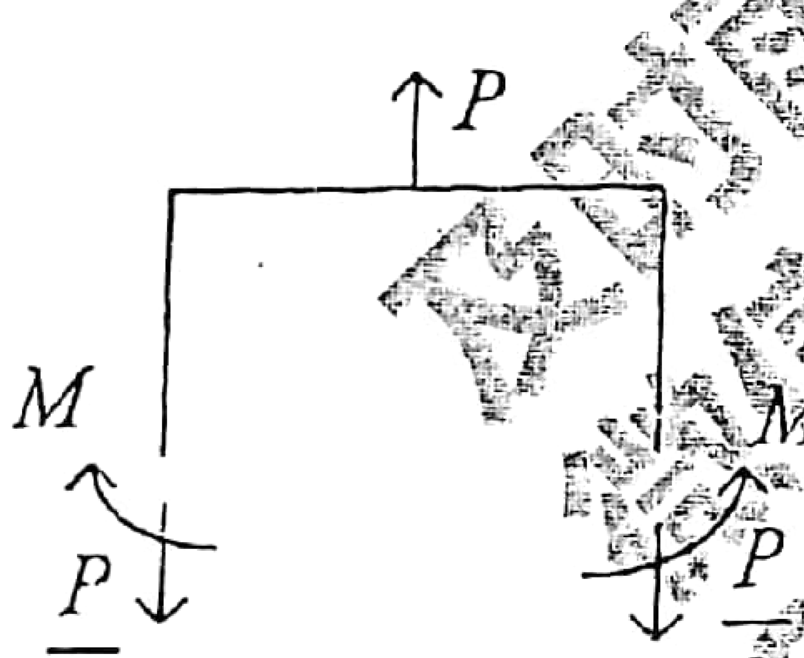
故 $\sigma_{r3,d}=K_{d}\sigma_{r3,st}=\frac{32\sqrt{2}Fa}{\pi d^{3}}\left(1+\sqrt{1+\frac{3\pi d^{3}h}{64Pa^{3}G+48Pa^{3}E}}\right)$

六、



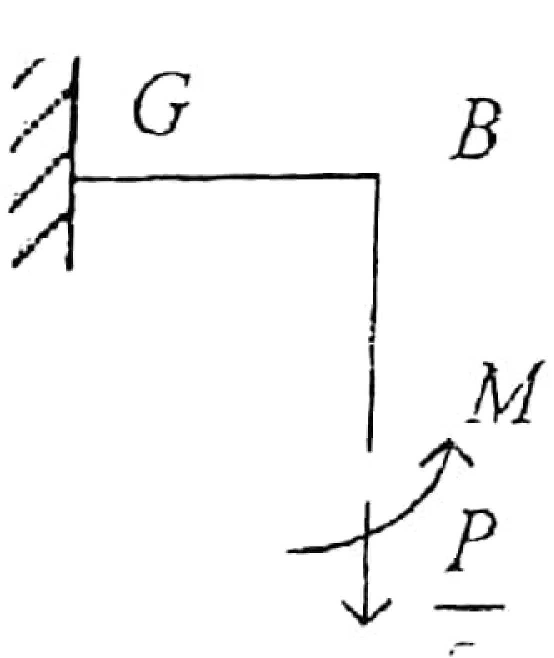
刘鸿文教材上太多此类型题，14 章 11 题

解：（1）、结构和荷载上下对称，左右对称，故在 AD、BC 中点截开，分析上半部分



截面只存在对称力，即轴力和弯矩

由力平衡，可知轴力 $F_N=\frac{P}{2}$,此时左右对称，故值分析右半部分，结构简化为：



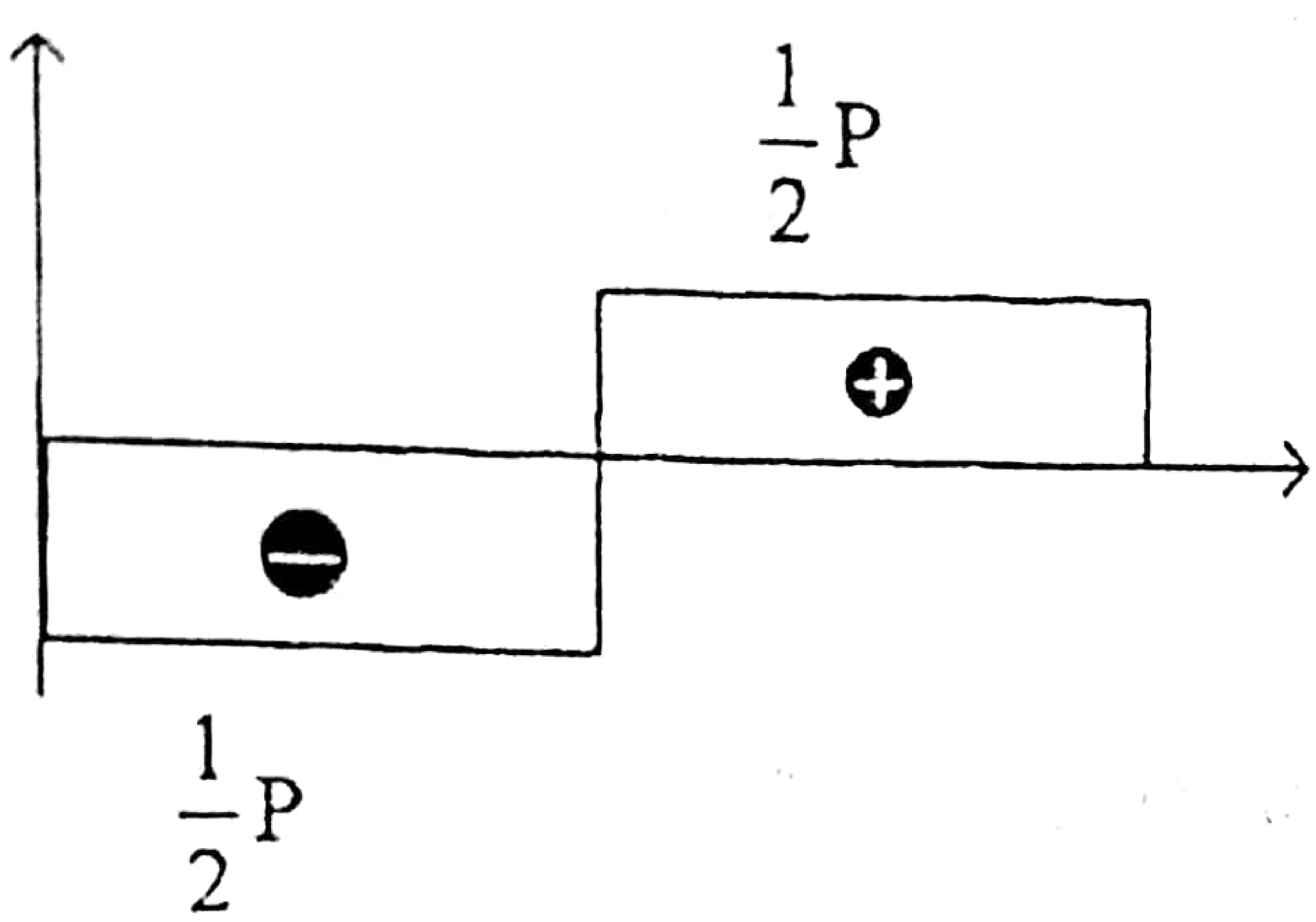
利用叠加法：$\theta=\frac{M\frac{a}{2}}{EI}-\frac{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}\right)^{2}}{2EI}=0,M=\frac{Pa}{8}$，逆时针

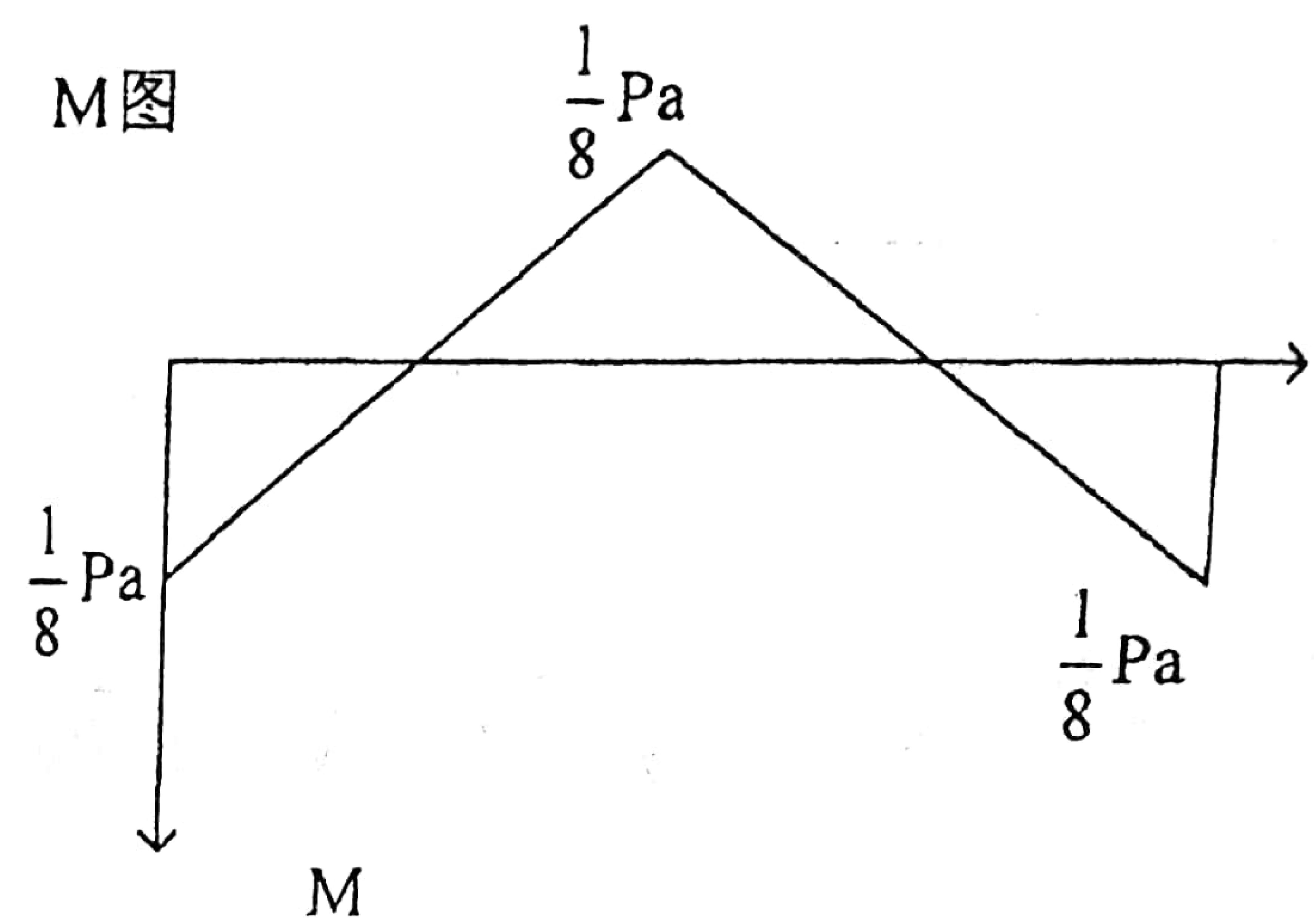
及时雨考研考博网 微信公众号 tju_kaoyan QQ:602318502

故 B 点 $M=\frac{Pa}{8}$，即 $M_A=\frac{Pa}{8}$。（或用能量法）

（2）、

Fs图





（3）、利用（1），在 GH 两点加单位力 1，则 QB 段 $\overline{M}(x)=\frac{a}{8}$，BG 段 $\overline{M}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{8}$

所以

$$\Delta=4\int\frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}dx=4\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{\frac{a}{8}\cdot\frac{Pa}{8}}{EI}dx+4\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{\left(-\frac{P}{2}x+\frac{Pa}{8}\right)\left(\frac{a}{8}-x\right)}{EI}dx$$

$$=4\left[\frac{Pa^3}{EI}\cdot\frac{1}{128}+\frac{1}{3EI}\left(x-\frac{a}{8}\right)^3\right]_0^{\frac{a}{2}}=\frac{26Pa^3}{24EI}+\frac{Pa^3}{32EI}$$