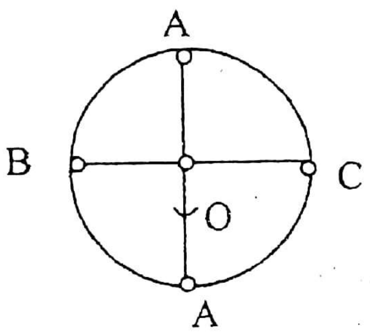
一、一刚性环内有四杆铰支于 O 点，各杆的拉伸刚度为 EA，长为 L，现在已知 O 铰受到竖直向下的力 F

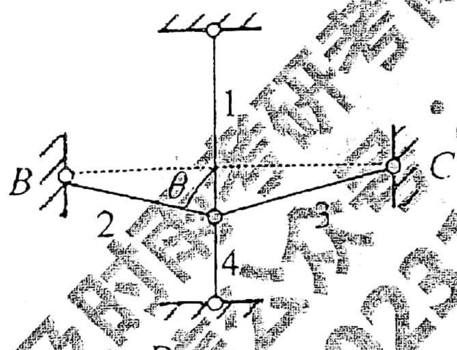
求：（1）各杆的内力大小

（2）O 点的位移大小

此题颇有争议，在于刚性杆变形不变性问题上，这个可以结合 16 年的材力题做一些思考，我曾拿题给交大某位材料力学的老师（本人本科交大）求教，他给我的答复也是更倾向于刚环不发生变形，那么就开始研究各杆的微小变形情况。

解：（1）、如图所示，





3

则结构可简化为

分别记 AO、BO、CO、DO 杆为 1、2、3、4 号杆，对 O 做受力分析

$\sum F_y = 0$，$F_1 + 2F_2\cos\theta - F - F_4 = 0$

$\sum F_x = 0$，$F_2\sin\theta = F_3\sin\theta$

位移关系：$\Delta_1 = \Delta_4$，$\Delta_1 = \dfrac{F_1 L}{EA}$，$\Delta_4 = \dfrac{F_4 L}{EA}$ ①

$$\Delta_3 = \sqrt{L^2 + \Delta_1^2} - L^2 = L\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{L}\right)^2} - 1\right) \approx \frac{\Delta_1^2}{2L} \text{（泰勒公式）}$$

$$\Delta_3=\frac{F_3L}{EA}\qquad \Delta_1=\frac{F_1L}{EA}\qquad ②$$

由①可知，$F_1=F_4$ ③

由②可知，$\dfrac{F_3L}{EA}==\dfrac{\left(\dfrac{F_1L}{EA}\right)^2}{2L}$，$F_3=\dfrac{F_1^2}{2EA}$ ④

$$\cos\theta=\frac{\Delta_1}{\Delta_1+L}\approx\frac{\Delta_1}{L}=\frac{F_1}{EA}\qquad ⑤$$

将③④⑤代入平衡方程，$F_1+\dfrac{F_1^2}{EA}\cdot\dfrac{F_1}{EA}-F-F_1=0$，$F_1=\sqrt[3]{F(EA)^2}$

因此，$F_1=F_4=\sqrt[3]{F(EA)^2}$，$F_2=F_3=\sqrt[3]{\dfrac{F^2EA}{2}}$

（2）、$\Delta_1=\dfrac{F_1L}{EA}=\sqrt[3]{\dfrac{F}{EA}}L$

二、弯曲刚度 EI 的悬臂梁，已知其自由端转角为θ，梁材料为线弹性，试按照卡氏第一定律确定施加于该处的外力偶矩。

讲解：材料是线弹性就可以利用余能定理，要加强余能定理的灵活应用，这里要求利用卡氏第一定律。这道题当时被很多人吐槽。。。得分不怎么理想

解：梁处于纯弯曲状态，则梁内任意一点处的线应变为$\varepsilon=\dfrac{y}{\rho}$，$\rho$为挠曲线的曲率半径，梁处于纯弯曲状态，则挠曲线可看为圆弧，故$\rho\theta=L$，则$\varepsilon=\dfrac{\theta y}{L}$

由于材料是线弹性，故应变能密度$v_\varepsilon=\dfrac{1}{2}E\varepsilon^2=\dfrac{Ey^2\theta^2}{2L^2}$

则应变能$V_\varepsilon=\int_V v_\varepsilon dV=\int_L\left(\int_A v_\varepsilon dA\right)dx=\int_L\dfrac{E\theta^2}{2L^2}\left(\int_A y^2 dA\right)dx=\dfrac{EI\theta^2}{2L}$

由卡氏第一定律，$M_e=\dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial\theta}=\dfrac{EI\theta}{L}$

三、利用应变花测的构件的自由表面点在切平面内，0°方向为正应变$\varepsilon_{0^\circ}=300\times10^{-6}$，30°方向的正应变$\varepsilon_{30^\circ}=200\times10^{-6}$，90°方向的正应变为$\varepsilon_{90^\circ}=-100\times10^{-6}$，材料弹性模量 E=200GPa，泊松比$\upsilon=0.3$

（1）、求该点 0° 、30° 、90° 方向的正应力 σ_{0°、σ_{30°、σ_{90°

（2）、求该点主应力 σ_1、σ_2 与 σ_3

解：（1）、$\varepsilon_{0^\circ}=\dfrac{1}{E}\left(\sigma_{0^\circ}-\upsilon\sigma_{90^\circ}\right)$ ，$\varepsilon_{90^\circ}=\dfrac{1}{E}\left(\sigma_{90^\circ}-\upsilon\sigma_{0^\circ}\right)$

$$\text{解得}\begin{cases}\sigma_{0^\circ}=\dfrac{\mathrm{E}\left(\upsilon\varepsilon_{90^\circ}+\varepsilon_{0^\circ}\right)}{1-\upsilon^2}=59.34MPa\\[2ex]\sigma_{90^\circ}=\dfrac{\mathrm{E}\left(\upsilon\varepsilon_{0^\circ}+\varepsilon_{90^\circ}\right)}{1-\upsilon^2}=-2.20MPa\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma_{30^\circ}=\dfrac{\sigma_{0^\circ}+\sigma_{90^\circ}}{2}+\dfrac{\sigma_{0^\circ}-\sigma_{90^\circ}}{2}\cos 60^\circ-\tau\sin 60^\circ=43.955-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tau\\[2ex]\sigma_{120^\circ}=\dfrac{\sigma_{0^\circ}+\sigma_{90^\circ}}{2}+\dfrac{\sigma_{0^\circ}-\sigma_{90^\circ}}{2}\cos 240^\circ-\tau\sin 240^\circ=13.185+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tau\end{cases}$$

$$\varepsilon_{30^\circ}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{30^\circ}-\upsilon\sigma_{120^\circ}\right)$$

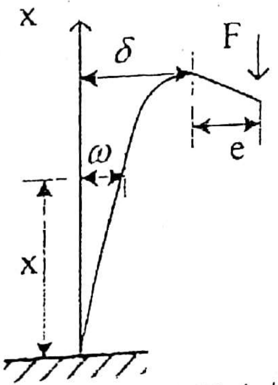
联立上式解得 $\tau\approx 0$

故 $\sigma_{30^\circ}=43.955MPa$

（2）、$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\mathrm{mim}}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_{0^\circ}+\sigma_{90^\circ}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{0^\circ}-\sigma_{90^\circ}}{2}\right)^2+\tau^2}=\begin{cases}59.34MPa\\ -2.20MI\end{cases}$$

故 $\sigma_1=59.35MPa$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-2.20MPa$

四、一端固定，另一端自由的大柔度直杆，压力 F 以小偏心距 e 作用于自由端，如图所示，试导出下列公式。



（1）、杆的最大挠度 δ

（2）、杆的最大弯矩 $M_{\max}$

（3）、杆横截面上的最大正应力

解：（1）、当杆受偏心压力时，任一横截面上距底部 x 处的弯矩为：

$$M(\mathrm{x})=-F(\delta+\mathrm{e}-\omega)$$

于是，可得杆的挠曲线近似方程：$EI\omega''=-M(\mathrm{x})=F(\delta+\mathrm{e}-\omega)$

令 $k^2 = \dfrac{F}{EI_z}$，可写为 $\omega'' + k^2\omega = k^2(\delta + e)$

通解为：$\omega = A\sin kx + B\cos kx + \delta + e$

$\omega' = Ak\cos kBs\sin k$

$(\omega')_{x=0} = 0$，得 A=0

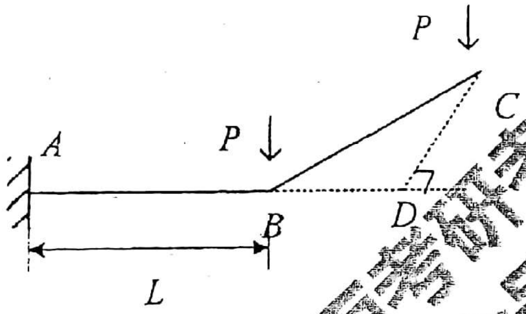
$(\omega)_{x=L} = \delta$，得 $B\cos kL + \delta + e = \delta$，得 $\delta = \dfrac{e(1-\cos kL)}{\cos kL}$

（2）、由弯矩方程 $M(x) = -F(\delta + e - \omega)$ 可知，杆的最大弯矩发生在固定端 O 处截面内，即 $M_{max} = F(\delta + e) = \dfrac{Fe}{\cos kL}$

（3）、杆内的最大压力发生在杆的底部截面上的凹侧边缘上，其值为

$\delta_{c,max} = \dfrac{F}{A} + \dfrac{M_{max}}{W_z} = \dfrac{F}{A} + \dfrac{Fe}{\omega_z \cos kL}$，式中 $k^2 = \dfrac{F}{EI_z}$

五、结构如图。



这道题比较难看，因为当时我读了好几遍题也无法分辨图形的三维还是二维即视感，甚至用尺子量∠ABC 的度数也是 120° 左右，后默认为图形为三维，才可能做法上有点难度。

（1）、求 C 点的竖直位移

（2）、求 C 点的其他位移或者角位移，分析并列出表达式

解：（1）、用能量法：记 C 点受竖向力为 F 为 Fc。

则 BC 段：$M(x_1) = F_C x_1 \qquad 0 \le x_1 \le L$

过 C 点作 AB 垂线，交 AB 延长线于点 D

DB 段：$M(x_2) = F_C x_2 \qquad 0 \le x_2 \le \dfrac{L}{2}$

BA 段：$M(x_2) = F_C x_2 + F\left(x_2 - \dfrac{L}{2}\right) \qquad \dfrac{L}{2} \le x_2 \le \dfrac{3}{2}L$

AD 段：$T = F_C \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} L$

则由能量法。铅垂位移：

$$\Delta_{Cy}=\frac{F_C L^3}{3EI}+\frac{F_C\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI}+\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{2}}\frac{F_C x^2+F\left(x-\frac{L}{2}\right)x}{EI}dx+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}FL\frac{3}{2}L}{GI_p}L$$

$$=\frac{49FL^3}{24EI}+\frac{9FL^3}{GI_p}$$

（2）、C 点对 x 轴的转角，由叠加法：

$$\theta_X=\theta_1+\theta_2=\frac{F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)^2}{2EI}+\frac{\left(F\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)\frac{3}{2}L}{GI_p}$$

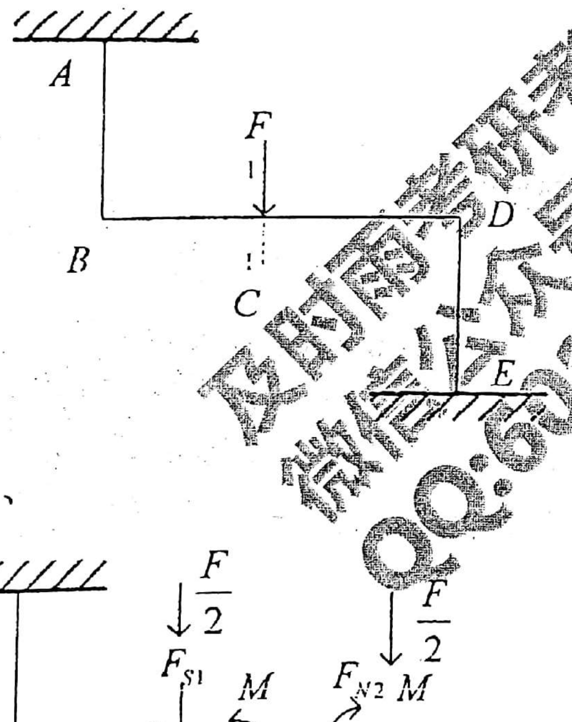
C 点对 y 轴的转角为：$\theta_y=\frac{FL^2}{2EI}+\frac{F\left(\frac{1}{2}L\right)^2}{2EI}=\frac{5FL^2}{8EI}$

六 、图示钢架以 G 点为对称中心。

（1）、求 A 点的力

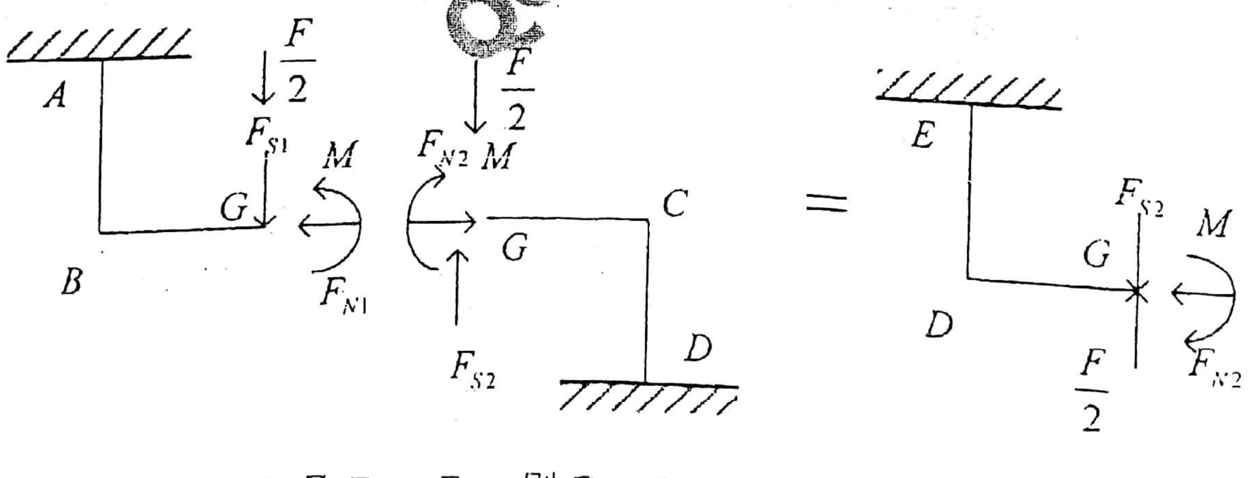
（2）、求 G 点位移

（3）、求 F 变水平后，A 点力的大小



解：

（1）、

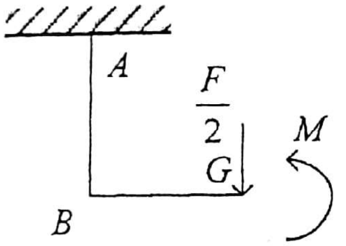


即：$F_N+F_N=0$，且 $F_N=F_N$，则 $F_N=0$

$$M_1-M_2=0,\ M_1=M_2$$

$$F_{S1}+F_{S2}-\frac{F}{2}-\frac{F}{2}=0, F_{S1}=F_{S2}，则 F_{S1}=0$$

只存在弯矩。



G 点转角为 0，BG 段：$M(x)=-\frac{F}{2}x+M \qquad 0\le x\le a$

AB 段：$M(x)=-\frac{F}{2}a+M \qquad 0\le x\le a$

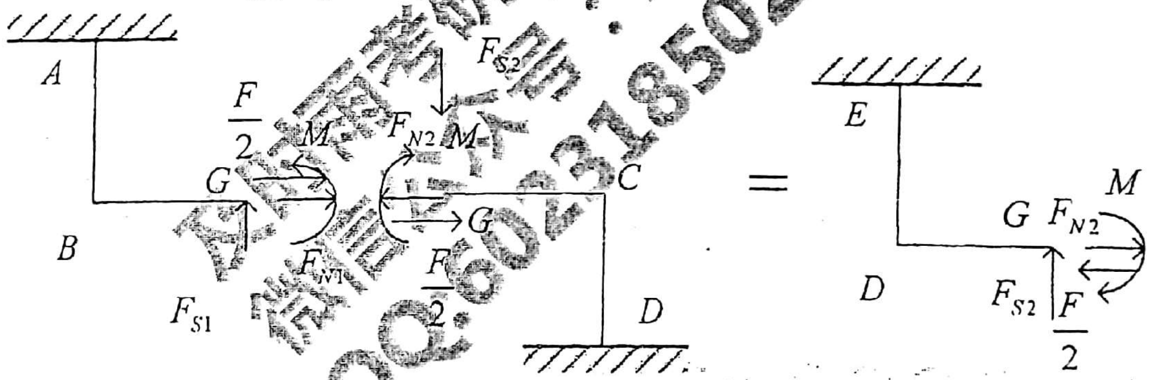
$$\theta=\int_0^a\frac{-\frac{F}{2}x+M}{EI}dx+\int_0^a\frac{-\frac{F}{2}a+M}{EI}dx=-\frac{Fa^2}{4EI}+\frac{Ma}{EI}-\frac{Fa^2}{2EI}+\frac{Ma}{EI}=0$$

则 $M=\frac{3}{8}Fa$，则 $M_A=-\frac{F}{2}a+\frac{3}{8}Fa=-\frac{1}{8}Fa$，$F_{AN}=\frac{F}{2}$

（2）、

$$\omega_{G1}=\int_0^a\frac{\frac{F}{4}x^2-M\frac{x}{2}}{EI}dx+\int_0^a\frac{\frac{F}{4}a^2-M\frac{a}{2}}{EI}dx=\frac{Fa^3}{EI}-\frac{Ma^2}{4EI}+\frac{4Fa^3}{EI}-\frac{Ma^2}{2EI}=\frac{5Fa^3}{96EI}$$

（3）、当竖向 F 变为水平时，同（1）分析方法

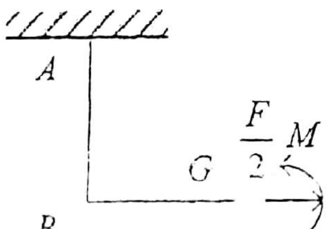


易得， $M-M=0$，M 存在

$\frac{F}{2}-F_N-\frac{F}{2}-F_N=0$，则 $F_N=0$

$F_S=0$

故仍是只有 M 存在，分析左半部分



BG 段：$M(x)=M \qquad 0<x<a$

AB 段：$M(x)=-\frac{F}{2}x+M$　　0<x<a

G 点转角为 0　，

$$\theta=\int_0^a\frac{M}{EI}dx+\int_0^a\frac{-\frac{F}{2}x+M}{EI}dx=-\frac{2Ma}{EI}-\frac{Fa^2}{2EI}=0\text{，则 }M=\frac{Fa}{8}$$

则 $M_A=-\frac{Fa}{2}+\frac{Fa}{8}=-\frac{3Fa}{8}$，$F_S=\frac{F}{2}$，$F_N=0$