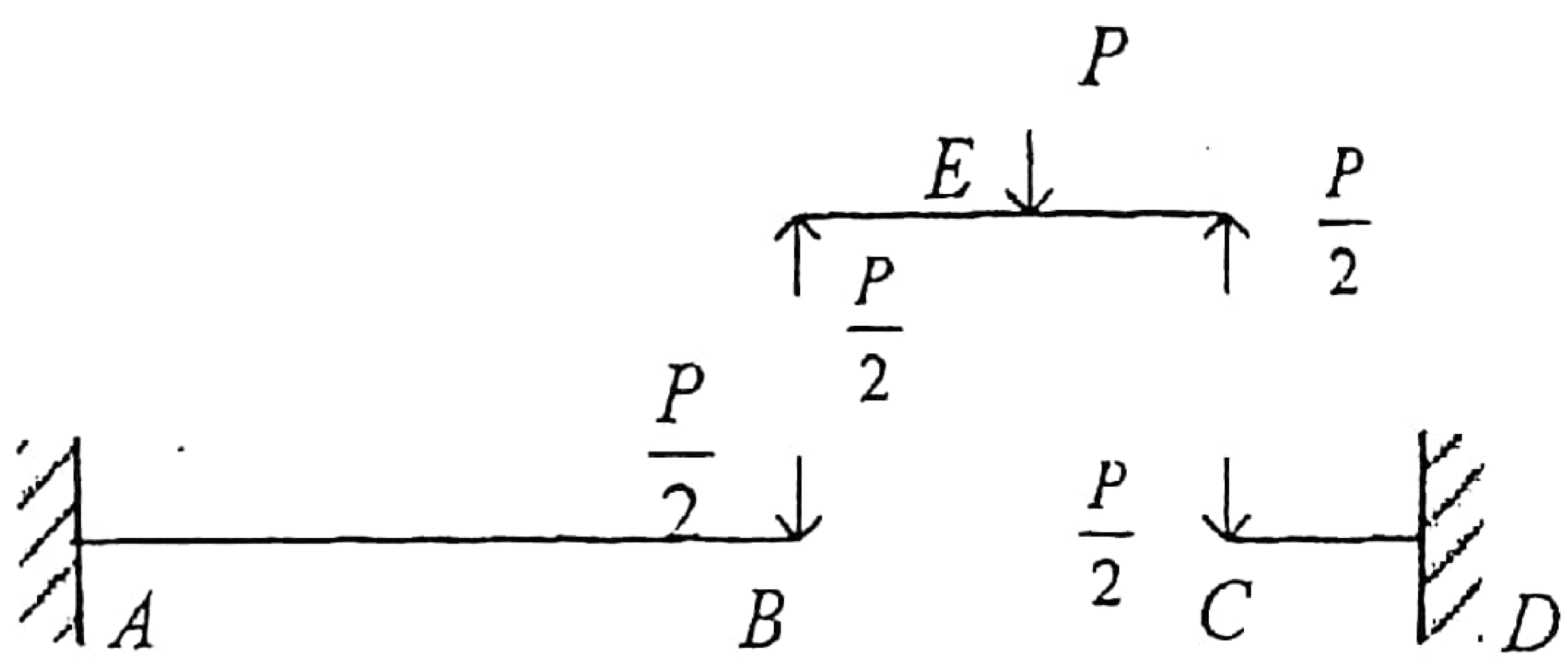
二〇〇九年答案解析

一、（1）



用叠加法：

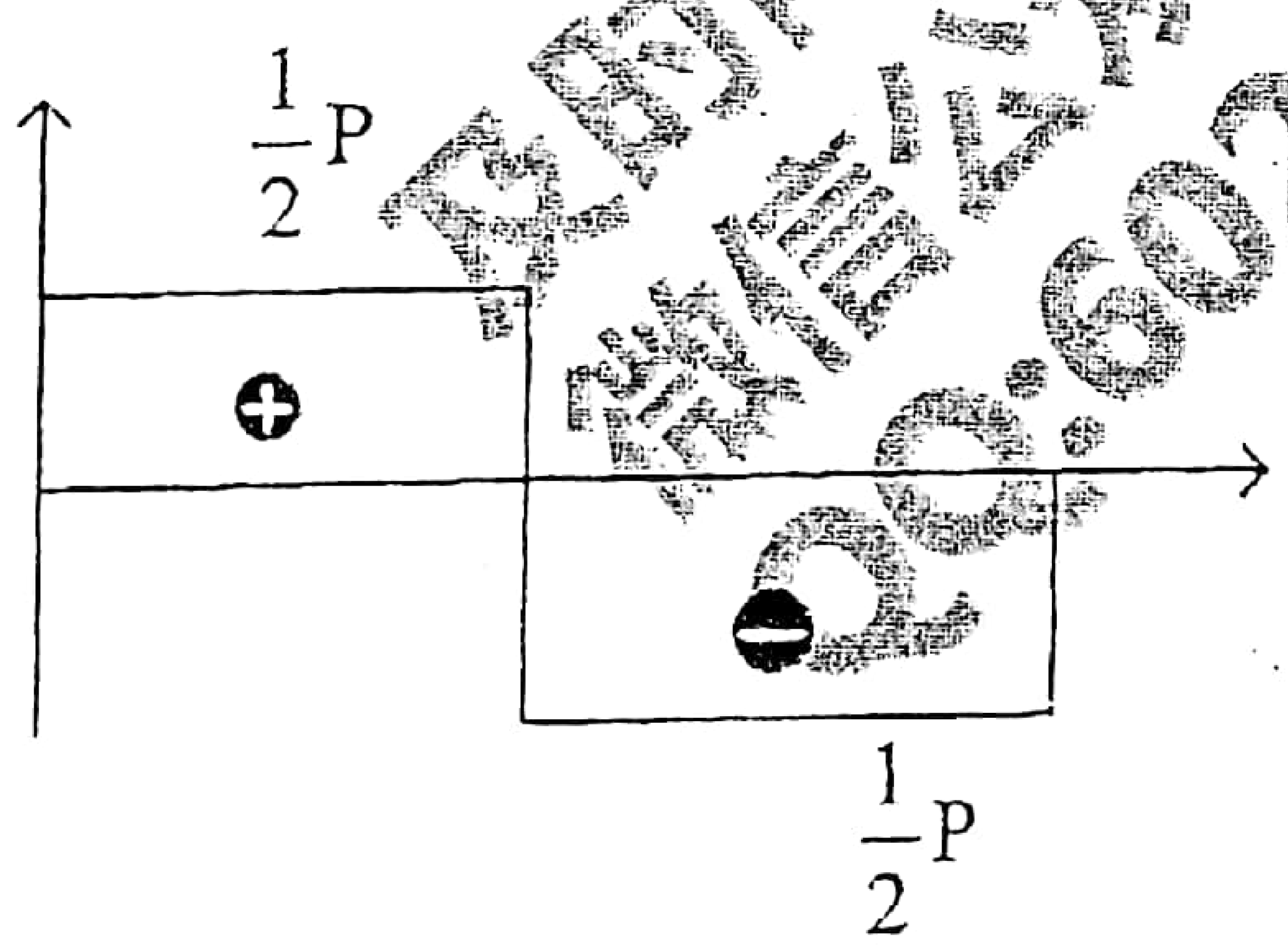
$$\varpi_B=\frac{\frac{P}{2}(3L)^3}{3EI}=\frac{9PL^3}{2EI}$$

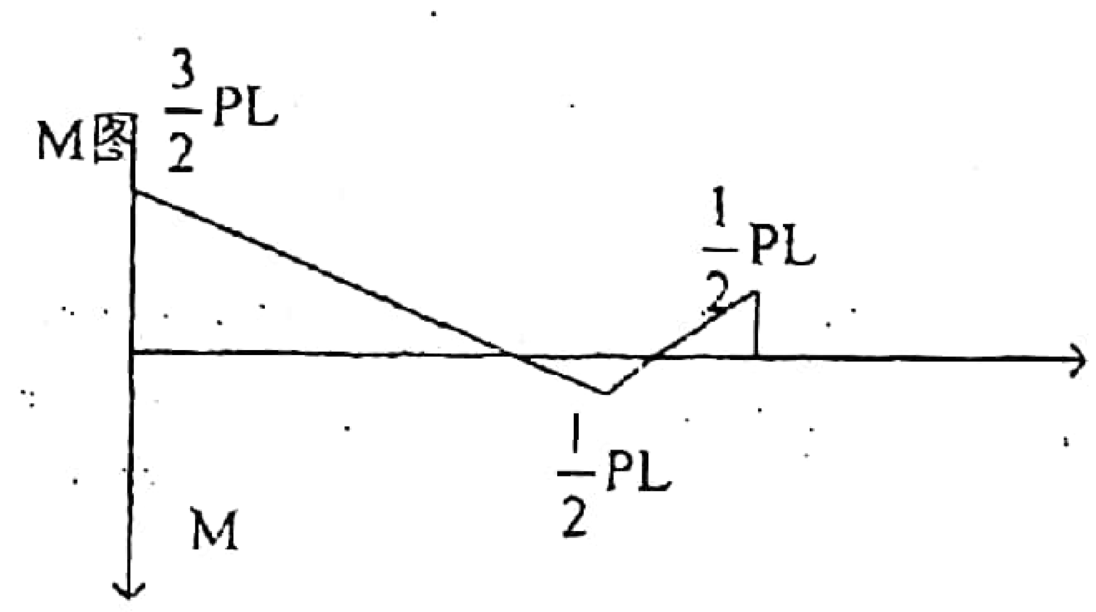
$$\varpi_C=\frac{\frac{P}{2}L^3}{3EI}=\frac{PL^3}{6EI}$$

$$\varpi_E=\frac{\varpi_B+\varpi_C}{2}+\varpi_P=\frac{\frac{9PL^3}{2EI}+\frac{PL^3}{6EI}}{2}+\frac{P(2L)^3}{48EI}=\frac{5PL^3}{2EI}$$

（2）、

Fs图



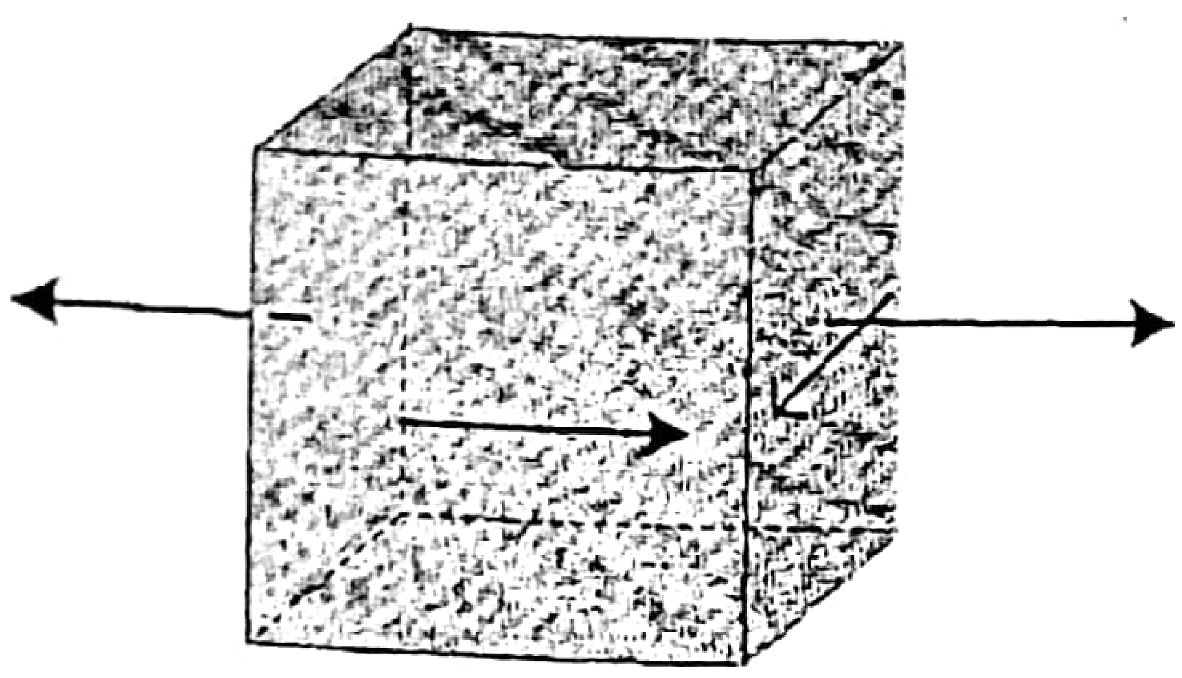


（3）、画法在结构力学中有介绍，或者可以列出 M（x）方程，由 $EI\varpi''=-M(x)$ 的形状

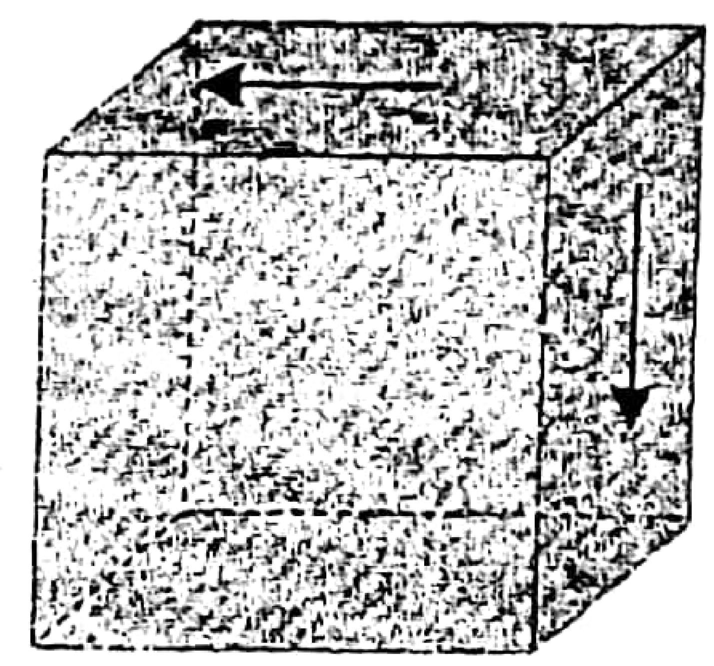
（我画的不光滑，软件作图太恼火）

二、解：（1）、

A

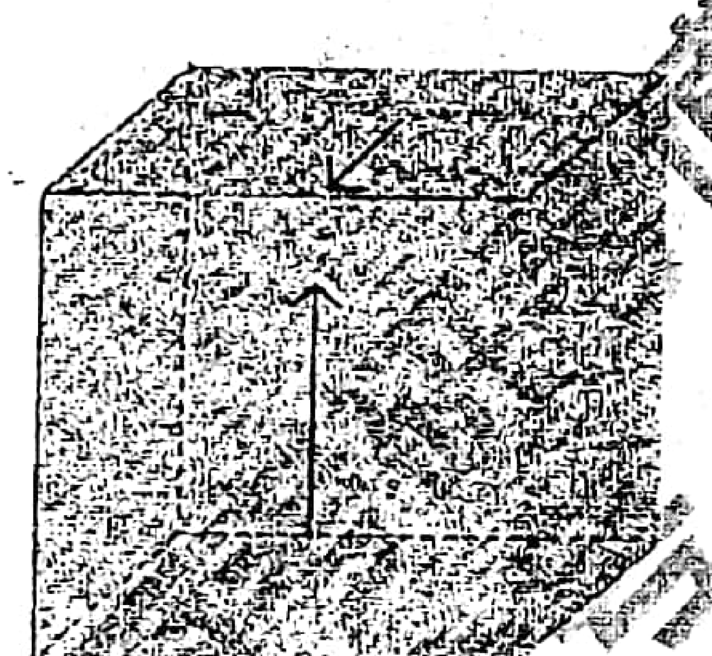


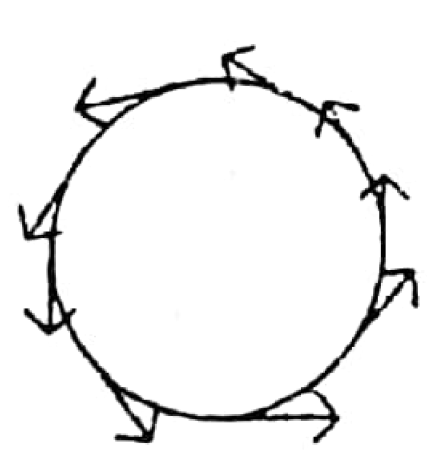
B



这里值得一提，上边缘的应力状态如何画？对于网上所谓的来自某学长之手的答案真的错误很多，如果这里不强调一下真的好多人要迷惑很久。请参照孙训方材料力学的第 7.1 题，以及刘鸿文第 7.1 题（c）图，以及 7.8 题的答案解析，7.9 题。

画法：将 A 处所在截面截开，即一个圆，切应力方向是圆上该点的切线，顺时针，将截面向里旋转，则 A 点即上边缘点



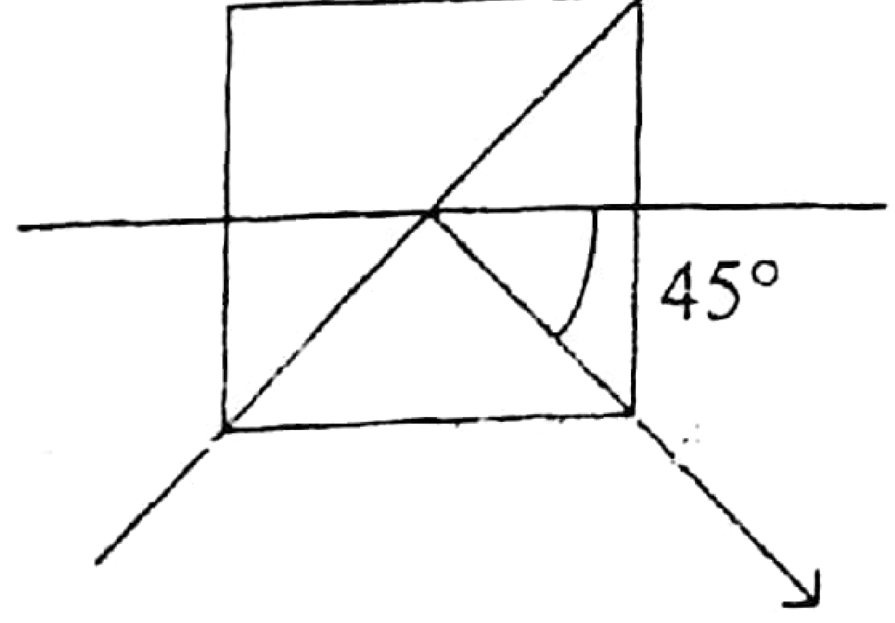


（2）、ε_1是纵向线应变，A点横向线应变为 $\varepsilon=-\upsilon\varepsilon_1$，

$$-\upsilon\varepsilon_1=\frac{\sigma}{E},\sigma=\frac{Fa}{W}=\frac{32Fa}{\pi d^3}$$

故 $F=\frac{-\upsilon\varepsilon_1\pi d^3}{32a}$

B



B 点纯剪应力状态，$\sigma_{-45^\circ}=\tau\sin-90^\circ=-\tau$

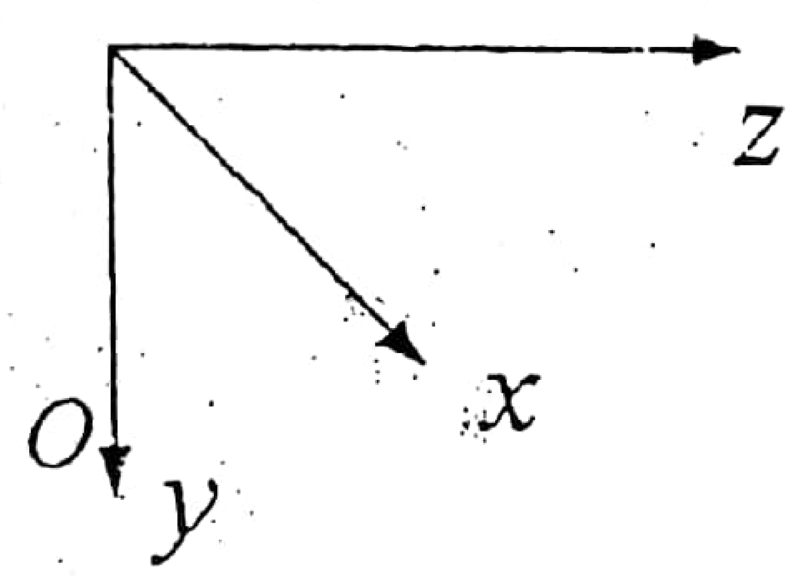
$$\sigma_{45^\circ} = \tau \sin 90^\circ = \tau$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(-\tau - \upsilon\tau\right) = \frac{-(1+\upsilon)}{E}\tau$$

$$T = -\frac{E\varepsilon_2 \pi d^3}{16(1+\upsilon)}$$

三、解：（1）、AB 段是弯曲变形

（2）、A 截面为危险截面



则有 $M_y = 2PL$

$M_z = 2PL$

$F_{Sy} = 2P$

$F_{Sz} = P$

（3）、最大拉应力位于 A 截面的（z，b）、$\left(-\frac{b}{2},-b\right)$ 点

$$\sigma_t = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{2PL}{\frac{1}{6}2b b^2} + \frac{2PL}{\frac{1}{6}b(2b)^2} = \frac{9PL}{b^3}$$

（4）、利用叠加法

$$\omega_{cz} = -\frac{P(2L)^3}{3EI_y} = -\frac{16PL^3}{Eb^4}$$

$$\omega_{By} = -\frac{2PL^3}{3EI_Z}，\quad \theta_{By} = \frac{2PL^2}{2EI_Z} = \frac{PL^2}{EI_Z}$$

$$\omega_{Cy} = \omega_{By} + \theta_{By}L = \frac{5PL^3}{3EI_Z} = \frac{5PL^3}{3E \times \frac{b}{12}(2b)^3} = \frac{5PL^3}{2Eb^4}$$

故自由端 $\varpi = \sqrt{\varpi_{Cy}^2 + \varpi_{Cz}^2} = \frac{PL^3}{Eb^4}\sqrt{16^2 + 2.5^2} = \frac{\sqrt{1049}PL^3}{2Eb^4}$

四、解：（1）、能量法：C 处得竖直力和水平力分别记为 P1，P2

BC 段 $M(x_1) = -P_1x_1$

BA 段 $M(x_2) = -P_1L - P_2x_2$

$$\Delta_{Cy} = \int_0^L \frac{\partial M(x_1)}{\partial P_1}\cdot\frac{M(x_1)}{EI}dx_1 + \int_0^l \frac{\partial M(x_2)}{\partial P_1}\cdot\frac{M(x_2)}{EI}dx_2$$

$$== \int_0^L \frac{P_1x_1^2}{EI}dx_1 + \int_0^L \frac{P_1L^2 + P_2x_2L}{EI}dx_2 = \frac{P_1L^3}{3EI} + \frac{P_1L^3}{EI} + \frac{P_2L^3}{2EI} = \frac{11PL^3}{6EI}$$

$$\Delta_{Cx} = \int_0^L \frac{\partial M(x_1)}{\partial P_2}\cdot\frac{M(x_1)}{EI}dx_1 + \int_0^L \frac{\partial M(x_2)}{\partial P_2}\cdot\frac{M(x_2)}{EI}dx_2$$

$$== \int_0^L \frac{P_1Lx_2 + P_2x_2^2}{EI}dx_2 = \frac{P_1L^3}{2EI} + \frac{P_2L^3}{3EI} = \frac{5PL^3}{6EI}$$

或者用叠加法：

$$\varpi_{cx} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^2}{2EI}L = \frac{5PL^3}{6EI}$$

$$\varpi_{cy} = \frac{P_1L^3}{3EI} + \frac{(P_1L)L}{EI}L + \frac{P_2L^2}{2EI} = \frac{11PL^3}{6EI}$$

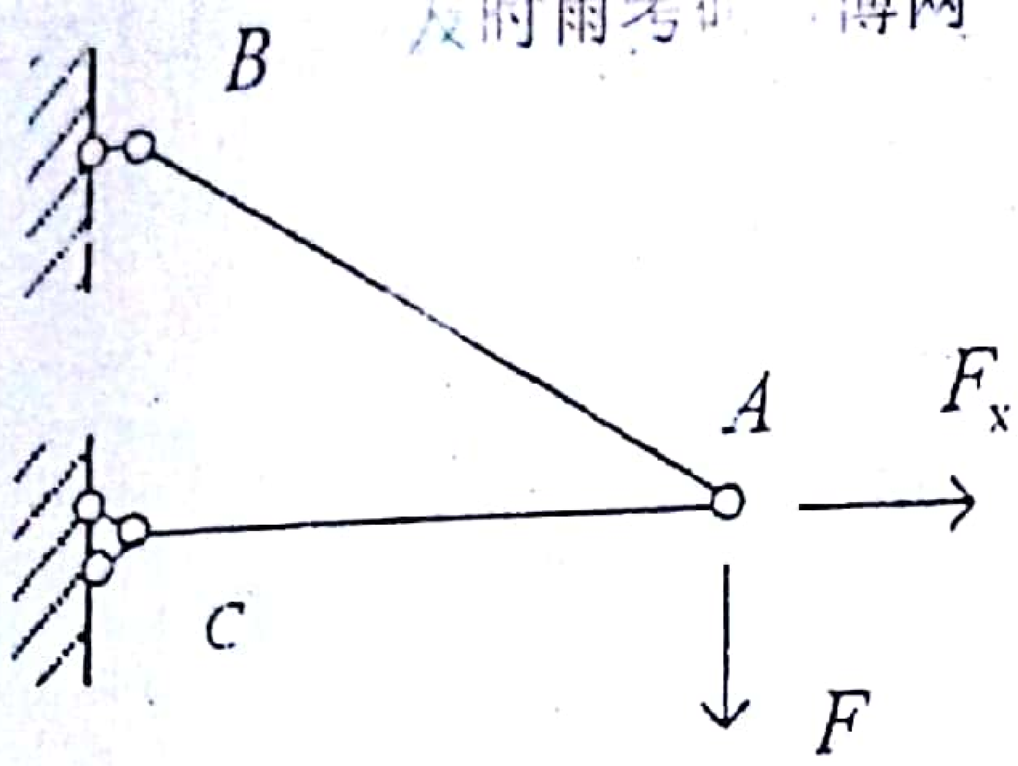
（2）、$V_\varepsilon = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI}dx + \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI}dx = \int_0^L \frac{P^2x^2}{2EI}dx + \int_0^L \frac{P^2(L+x)^2}{2EI}dx = \frac{4P^2L^3}{3EI}$ 3

（3）、$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial P} = \frac{8PL^3}{3EI}$

物理意义：$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial P}$ 表示弹性杆在 P 作用下得所有位移之和。

备注：如刘鸿文教材中的例 13.11，用余能定理做具有普遍性，而教材上用的是位移关系，不容易想到。这里再次申明，注意余能定理的使用，尤其在做 $\sigma = K\varepsilon^n$ 类型题，注意使用约束条件。

五、解：（1）、教材上的原题，刘鸿文和孙训方上都有



在 A 处虚设一水平力 Fx，受力分析，$F_{NAC}=-F+F_x$，$\dfrac{\partial F_{NAC}}{\partial F}=-1$，$\dfrac{\partial F_{NAC}}{\partial F_x}=1$

$F_{NAB}=\sqrt{2}F$，$\dfrac{\partial F_{NAC}}{\partial F}=\sqrt{2}$，$\dfrac{\partial F_{NAC}}{\partial F_x}=0$

故水平位移 $\Delta_x=\int_0^a \dfrac{F_{NAC}}{EA}\cdot\dfrac{\partial F_{NAC}}{\partial F_x}dx=\dfrac{-Fa}{EA}=\dfrac{-Fa}{2b^2E}$（向左）

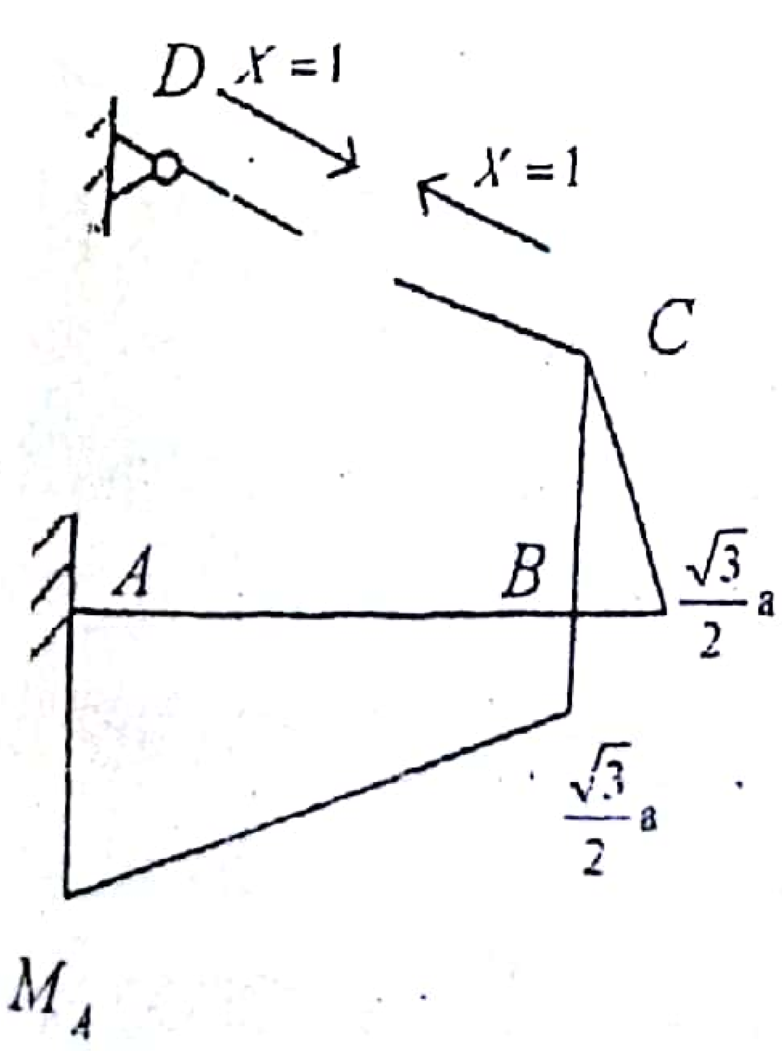
竖直位移 $\Delta_y=\dfrac{\sqrt{2}F\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}a}{EA}+\dfrac{F\times1\times a}{EA}=\dfrac{(2\sqrt{2}+1)Fa}{2b^2E}$（向下）、

（2）、$F_{NAC}=-F$，两端球铰，$\mu=1$

$I_{min}=\dfrac{\pi^2\times E\times\dfrac{b^4}{6}}{a^2}=\dfrac{\pi^2Eb^4}{6a^2}\geq F$

故 $[F]=\dfrac{\pi^2Eb^4}{6a^2}$

6、解：（1）、结构为一次超静定，用单位力法来做：
断开 DC 杆，代之以未知力 X
在单位力作用下，



DC 段：$\overline{F}_{NDC}=1$

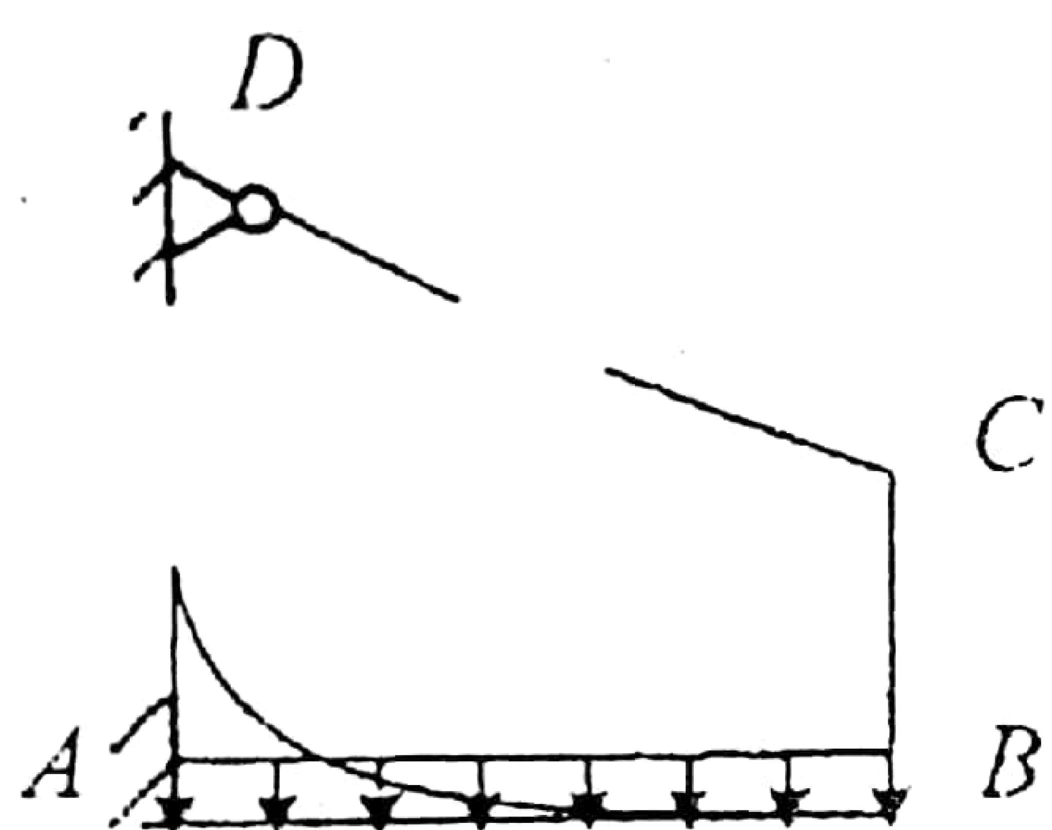
CB 段：$\overline{M}(x_1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1$，$0\leq x_1\leq a$

A 段：$\overline{M}(x_2)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\dfrac{1}{2}x_2$

则 $\delta_{11}=\dfrac{1}{EA}+\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)+\int_0^{2a}\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\dfrac{1}{2}x\right)^2}{EI}dx$

$=\left(\dfrac{29}{12}+\sqrt{3}\right)\dfrac{a^3}{EI}+\dfrac{1}{EA}=\left(\dfrac{41}{12}+\sqrt{3}\right)\dfrac{a^3}{EI}$

在实际力作用下：BA 段：$M(x_2)=-\dfrac{1}{2}qx_2{}^2$



$M=\dfrac{1}{2}qx^2$

故 $\Delta_{1p}=-\int_0^{2a}\dfrac{\dfrac{1}{2}qx^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\dfrac{1}{2}x\right)}{EI}dx=-\dfrac{q}{EI}\int_0^{2a}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}ax^2+\dfrac{x^3}{4}\right)dx=-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+1\right)\dfrac{qa^4}{EI}$

由正则方程，则 $X=-\dfrac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=qa\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+1}{\dfrac{41}{12}+\sqrt{3}}=qa\dfrac{8\sqrt{3}+12}{41+12\sqrt{3}}=0.418qa$

（2）、BA 段：$M(x)=-\dfrac{1}{2}qx^2+X\cdot\overline{M}(x)=-\dfrac{1}{2}qx^2+\dfrac{8\sqrt{3}+12}{41+12\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}a+x}{2}$

令 x=2a，解得 $M_A=-1.219qa^2$