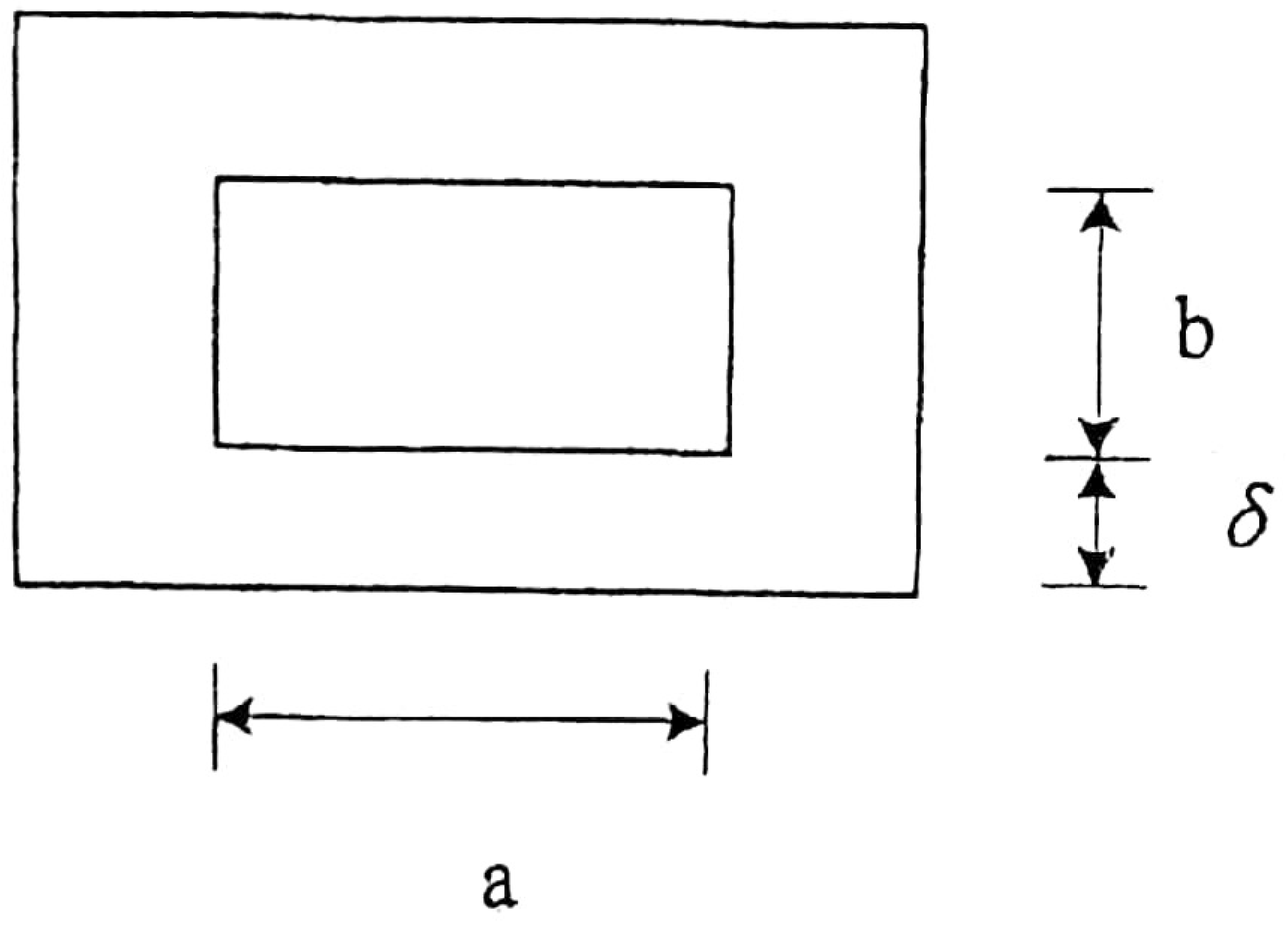
2004年答案

一、解：



（1） $A=(a+2\delta)(b+2\delta)-ab\approx 2(a+b)\delta=4b\delta$（略去高阶）

$$\sigma_{\max}=\frac{F}{A}=-\frac{F}{6b\delta}\text{(压应力)}$$

（2） $\Delta_B=-\upsilon\dfrac{\sigma}{E}=\dfrac{F\upsilon}{6b\delta E}$

（3） $\varepsilon'=-\varepsilon\upsilon=\upsilon\dfrac{\sigma}{E}=\dfrac{F\upsilon}{6b\delta E}$

则横截面上：

水平厚度 $\Delta_{水平}=2\delta\dfrac{F\upsilon}{6\mathrm{b}\delta E}=\dfrac{F\upsilon}{3\mathrm{b}E}$

竖向厚度 $\Delta_{竖直}=\dfrac{F\upsilon}{3\mathrm{b}E}$

（4） $I_{\min}=\dfrac{(a+2\delta)(b+2\delta)^3}{12}-\dfrac{ab^3}{12}\approx\dfrac{7b^3\delta}{6}$(去高阶)

$i_{\min}=\sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}}=\dfrac{\sqrt{7}b}{6}$； 故柔度 $\lambda=\dfrac{\mu L}{i_{\min}}=\dfrac{2L\times 6}{\sqrt{7}b}=\dfrac{12L}{\sqrt{7}b}$

（5） $F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$； $\sigma_{cr}=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}=\dfrac{7\pi^2 b^2}{144L^2}$

二、解：

（1） $\sigma_{\max}=\dfrac{M_{\max}}{W}=\dfrac{\frac{1}{2}pbL^2}{W}=\dfrac{3pL^2}{h^2}$

（2）C_1 处于二向应力状态（中间横截面处于弯曲剪切状态）

C_2 处于二向应力状态（非纯剪切）

C_3 处于二向应力状态

（3）梁下层伸缩量：

$$\Delta = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\frac{P}{2}x\left(\frac{a}{2}+x\right)}{EI}dx + \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\left(\frac{Pa}{2}+\frac{5}{8}Px\right)2a}{EI}dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{\left[\frac{5}{8}Px+\frac{Pa}{2}-P\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]\frac{a}{2}}{EI}dx$$

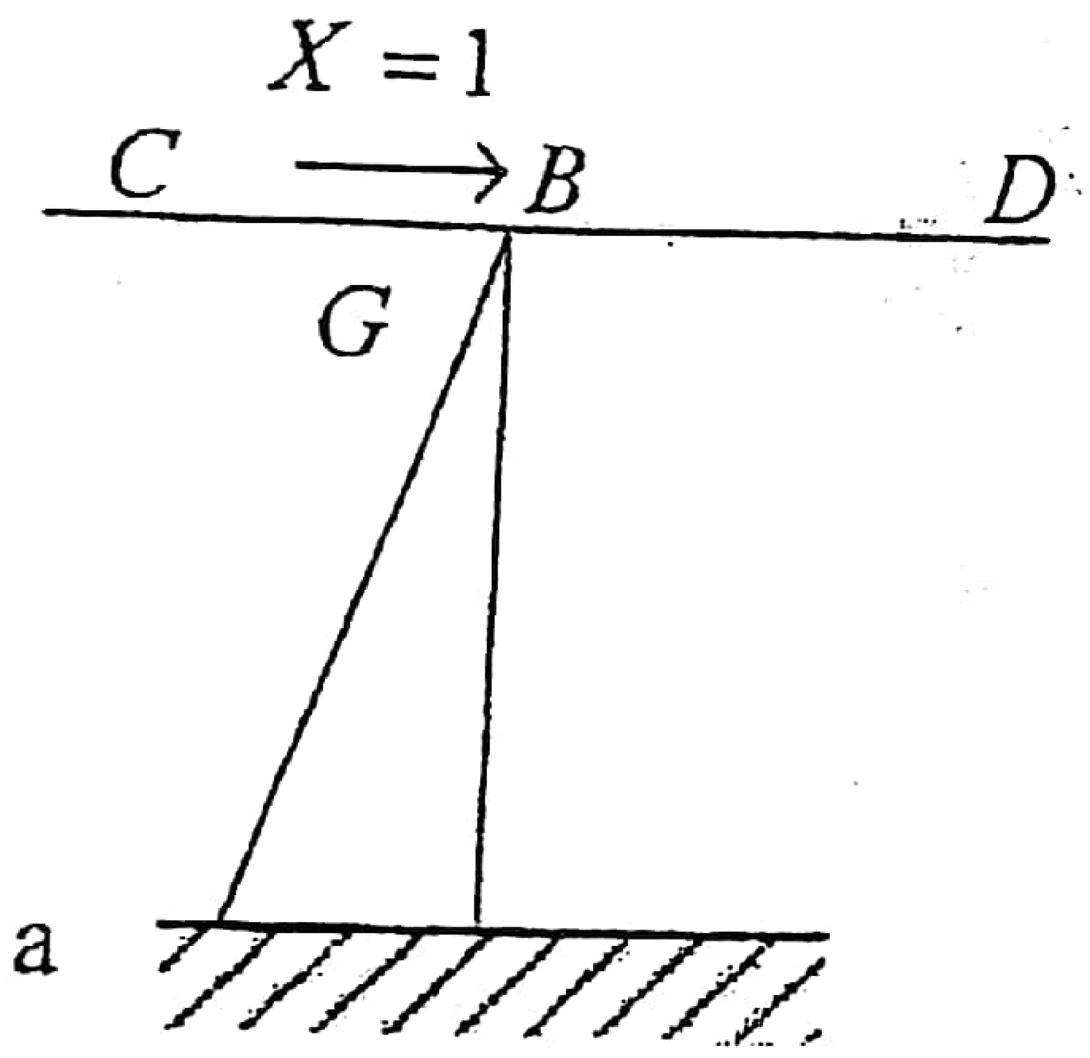
$$= \frac{1}{EI}\left(2\times\left[\frac{P}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3+\frac{P}{2}\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\right]+\frac{Pa^3}{2}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot 2a+\frac{Pa}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}a^2\right)-Pa^2\frac{a}{2}-Pa\frac{a^2}{4}\right)$$

$$= \frac{21Pa^3}{128EI}$$

（3）、B 点水平位移

对于图一， $\omega_{B1}=0$

对于图二，对于 B 点施加一水平向左单位力



$\overline{M}(x)=x$, $0\le x\le a$

则

$$\Delta_B = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\left(\frac{Pa}{2}+\frac{5}{8}Px\right)x}{EI}dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{x\left(\frac{5}{8}Px+\frac{Pa}{2}-P\left(x-\frac{a}{2}\right)\right)}{EI}dx$$

$$= \frac{Pa^3}{EI}\left(\frac{1}{16}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{3}\frac{7}{24}+\frac{3}{16}\right)=\frac{Pa^3}{6EI}$$

$$\sigma(x)=\frac{M(x)}{W}=\frac{\frac{1}{2}pbx^2}{\frac{1}{6}bh^2}=\frac{3px^2}{h^2}$$

$$\varepsilon(x)=\frac{\sigma(x)}{E}=\frac{3px^2}{h^2E}$$

故下层 $\Delta l=\int_0^L\varepsilon(x)dx=\frac{pL^3}{h^2E}$(伸长)

（4）当 L=10h 时，$\frac{\sigma_{\max}}{p}=\frac{3pL^2}{h^2p}=300$

（5）可以，B 截面施加适当水平力，即 $\sigma=\frac{M}{W}+\frac{F}{A}$，产生预应力效果，这样可以抵消掉部分弯曲应力，使所能承受的最大压应力增大，最大拉应力减小，从而提高强度。

答题分析：自主命题都是校内老师自己判卷，答案一定要回答出水平，答案错不一定错，就是说如果说的有道理，仍然会给你分。就拿前年(15 年)来说，考生的分数都是 90 分右，部分原因就是其实真实水平并没有 90 分以上，只是这样子的话大部分人都不会达标准。这是我的猜测。

三、解：

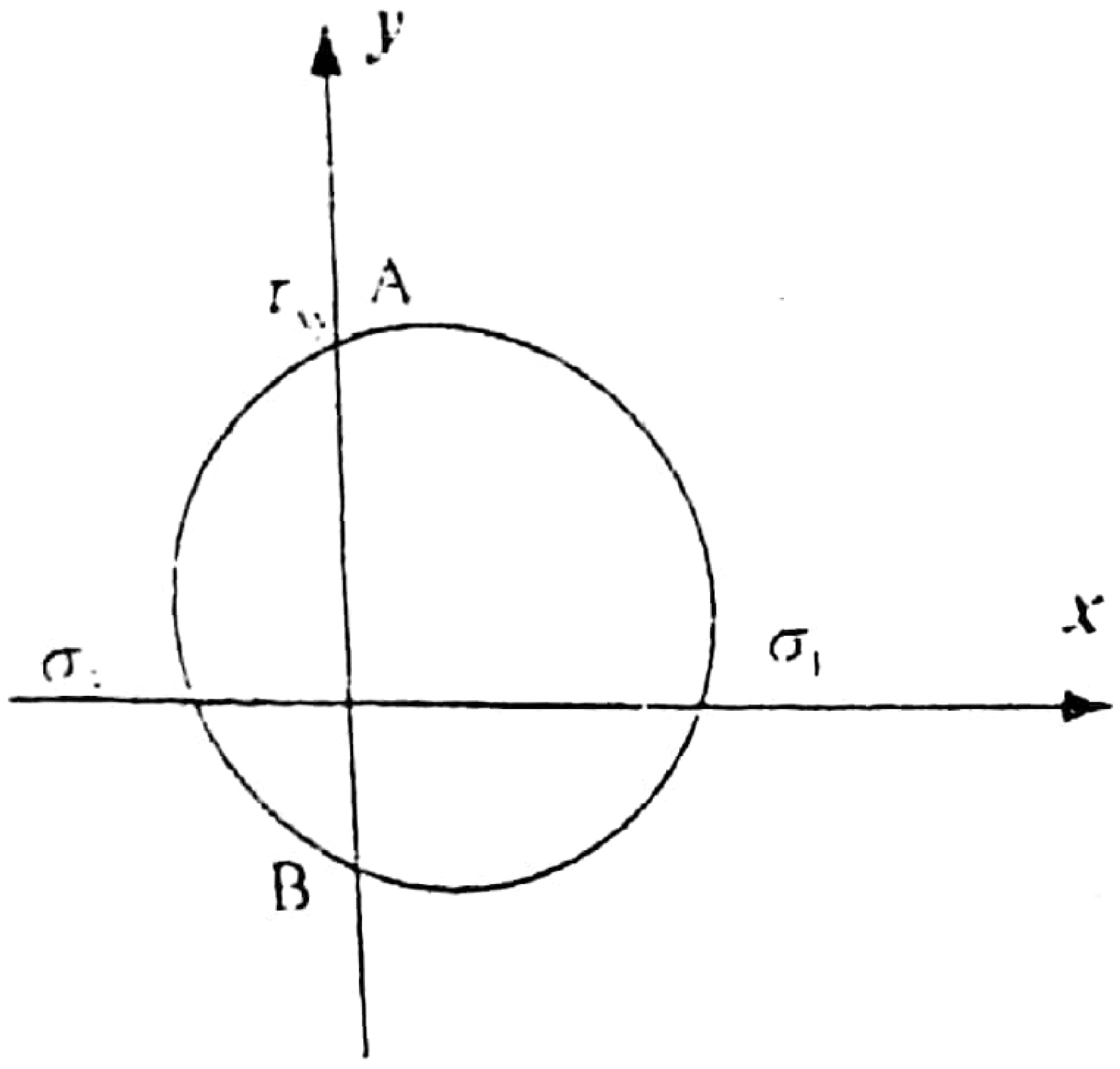
（1）$\sigma_x=8MPa$，$\tau_{xy}=6MPa$，$\sigma_y=4MPa$

$$\left.\begin{matrix}\sigma'\\ \sigma''\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\begin{cases}6+2\sqrt{10}\\ 6-2\sqrt{10}\end{cases}\approx\begin{cases}12.32MPa\\ -0.32MPa\end{cases}$$

故，$\sigma_1=12.32MPa$；$\sigma_2=0$；$\sigma_3=-0.32MPa$

（2）$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=12.65MPa$。最大正应力所在两个相互垂直方向面上的正应力为 $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$ 和 $-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$，其值为 $\pm6MPa$

（3）由题可做应力圆简图



即求 A、B 两点的切应力。

$$故、\tau = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2} = \pm 2MPa$$

备注：计算题最好算出小数点来，浙大材力是要用计算机的，在应力状态这部分常常计算量很大。

四、解：

（1）危险截面为 A 截面。

BD 段 $M(x_1) = Fx_1; 0 \le x_1 \le a$

AB 段 $M(x_2) = Fx_2; 0 \le x_1 \le 2a$

$T = Fa$

因此，$M_A = 2Fa$

（2）$\sigma_A = \frac{M_A}{W} = \frac{32 \times 2Fa}{\pi d^3} = \frac{64Fa}{\pi d^3}$

$\tau_A = \frac{T}{W_t} = \frac{16Fa}{\pi d^3}$

（3）$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \tau_A^2} = \begin{cases} \frac{16Fa}{\pi d^3} \\ \frac{16Fa}{\pi d^3}\left(2 - \sqrt{5}\right) \end{cases}$

故，$\sigma_1 = \frac{16Fa}{\pi d^3}\left(2+\sqrt{5}\right)$；$\sigma_2 = 0$；$\sigma_3 = \frac{16Fa}{\pi d^3}\left(2-\sqrt{5}\right)$

（4）$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{32\sqrt{5}Fa}{\pi d^3}$

（5）当 D 受到向下集中力 F 时，此时 A 端 T=2Fa;M=0

故 $\sigma'_{r3} = \sqrt{4\tau^2} = 2 \times \frac{2Fa \times 16}{\pi d^3} = \frac{64Fa^3}{\pi d^3}$

$\dfrac{\sigma_{r3}-\sigma'_{r3}}{\sigma'_{r3}}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}\times100\%\approx11.8\%$，即安全性提高了 11.8%

五、解：

（1）①AB 杆为弯曲压缩变形

（2）②危险截面是 A 截面，危险左右两边缘：

BD 段 $M(x_1)=Fx_1;0\le x_1\le a;$

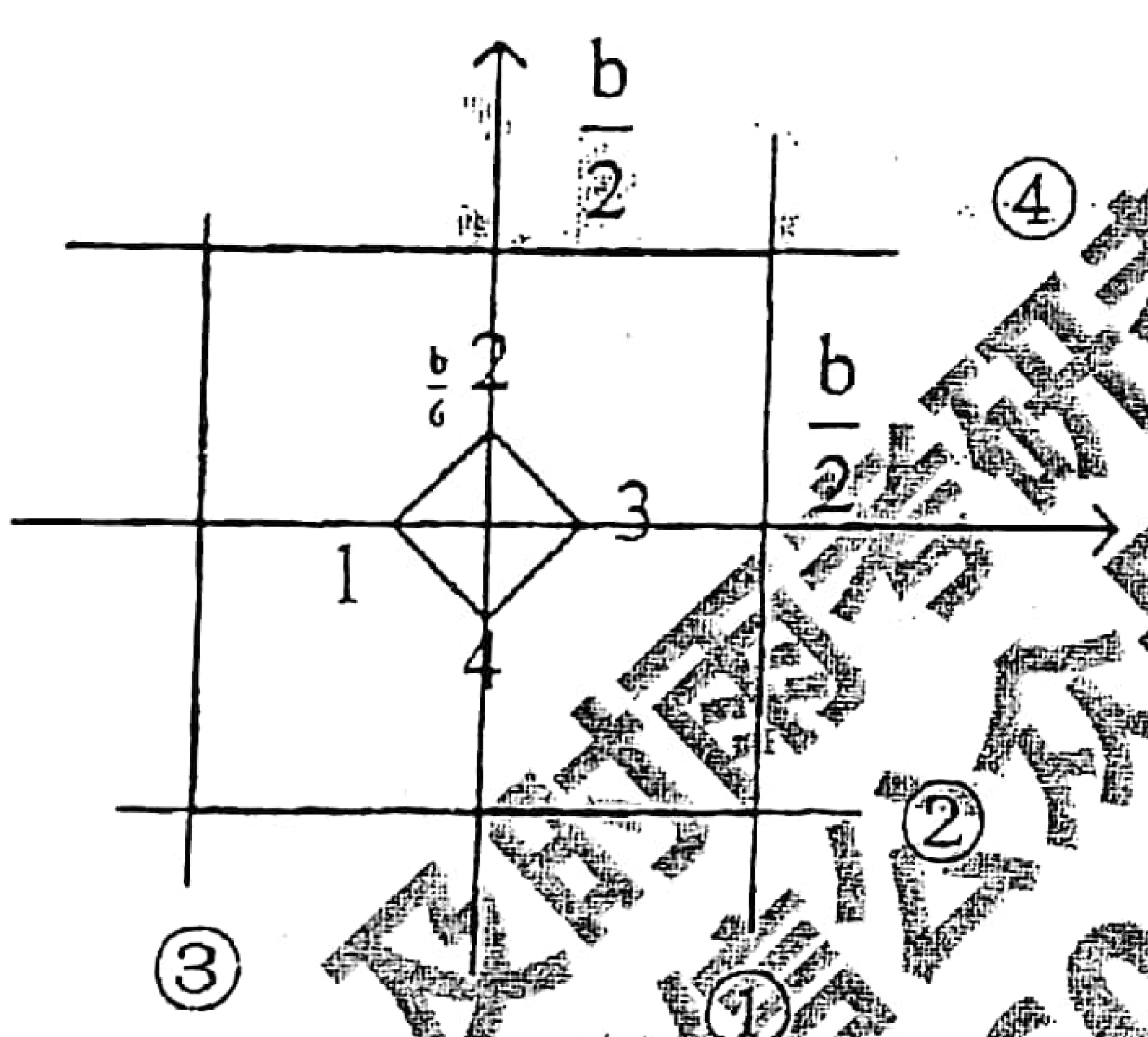
BA 段 $M(x_2)=Fx_2;0\le x_2\le 2a;$

$$F_N=-F$$

故，A 截面上，$M_A=Fa,F_N=-F$

（3）$\sigma_{\max}=\dfrac{M}{W}+\dfrac{F}{A}=\dfrac{6Fb}{b^3}+\dfrac{F}{b^2}=\dfrac{7F}{b^2}$

（4）截面核心；只要求形状，即答出长为$\dfrac{\sqrt{2}b}{6}$的正方形，画出大致位置即可。



$I_y=I_z=\dfrac{b^4}{12}$， $A=b^2$

$i_y^{\ 2}=i_z^2=\dfrac{b^2}{12}$

取①为中性轴，则中性轴①与 y、z 轴交点分别为$a_{z1}=\infty,a_{y1}=\dfrac{b}{2}$

则对应截面核心边界点$y_1=-\dfrac{i^2}{a_{y1}}=-\dfrac{b}{6},z_1=-\dfrac{i_y^{\ 2}}{a_{y1}}=0$

分别将②③④视为中性轴，可得对应的截面核心边界点 2、3、4 的坐标依次为

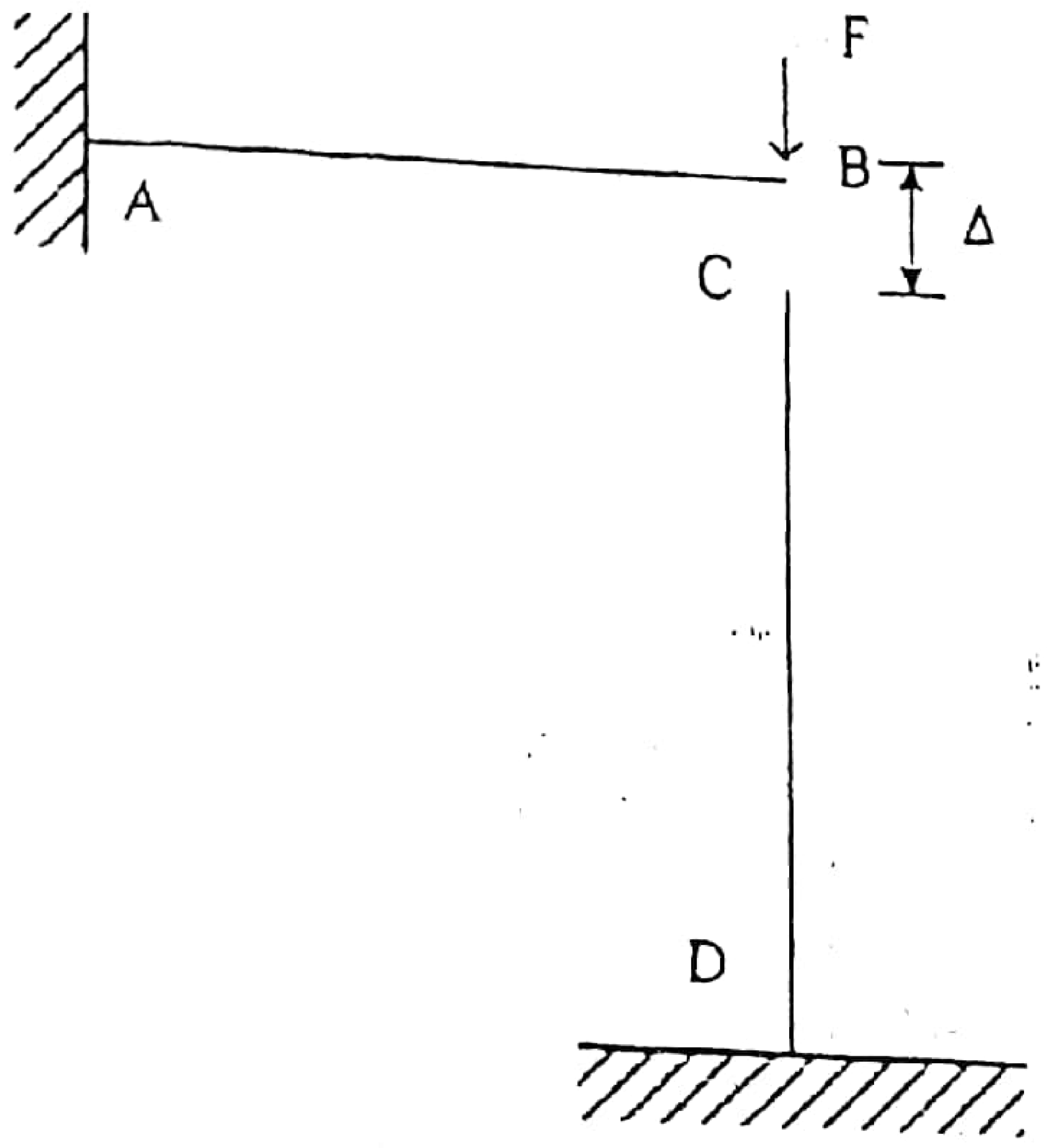
$\left(0,\dfrac{b}{6}\right),\left(\dfrac{h}{6},0\right)\left(0,-\dfrac{b}{6}\right)$，连结各点所得图形即所求截面核心形状。

备注：关于截面核心，在九几年的考题中有一道难题，其原理和易错点必须学会。

六、解：

分析：这是孙训方及刘鸿文教材上的一道改编题，概念要弄清楚，即在第 3 题中为什么 $\omega_B=\dfrac{(F-X)a}{EI}$，即孙训方（下）3-2 题弄懂，注意这是终态 F，实际上 F 是一个变化值，如果看不懂的话仔细过课后题的答案，多想。

（1）



AB 段 ： $M(x)=-Fx;0\le x\le a$

$$\upsilon_\varepsilon=\int_0^a\frac{M^2(x)}{2EI}dx=\frac{F^2a^3}{6EI}=\frac{32F^2a^3}{3E\pi d^4}$$

（2）材料弹性杆（E 确定，这里要注意两点：1 以后会遇到，而 16 年考研题就
遇到了，第一题给出材料首先是刚性杆，如果还去算弯曲应力的话就走远了，因
为刚性杆 EI=正无穷，16 年题太简单了 2 是注意使用微观的余能定理和卡氏第一
定理，15 年就考出一道单元体的能量题，这处是难点，要多加练习一定要学会。
这绝对也是出难题的方向）

这道题是弹性杆，直接用余能定理。

$$\omega_B=\frac{\partial\upsilon_\varepsilon}{\partial F}=\frac{Fa^3}{EI}=\frac{64Fa^3}{3E\pi d^4}$$

（3）因为 $\omega_B>\Delta$，故 B 端会碰到 C 端。

设 C 对 B 的力为 X，位移关系：$w_B'=\Delta+\Delta l_c$

$$\omega_B'=\frac{(F-X)a^3}{3EI}=\frac{64(F-X)a^3}{3E\pi d^3}$$

$$\Delta=\frac{20Fa^3}{\pi Ed^3}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{X\frac{a}{2}}{EA} = \frac{X\frac{a}{2}}{E\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{4}\right)^2} = \frac{512Xa^3}{E\pi d^4}$$

代入各值，解得 $X = \frac{2}{35}F$，$\omega_B{}' = \frac{(F-X)a^3}{3EI} = \frac{64\left(F-\frac{2X}{35}\right)a^3}{3E\pi d^3} = \frac{45056F}{32\pi d}$