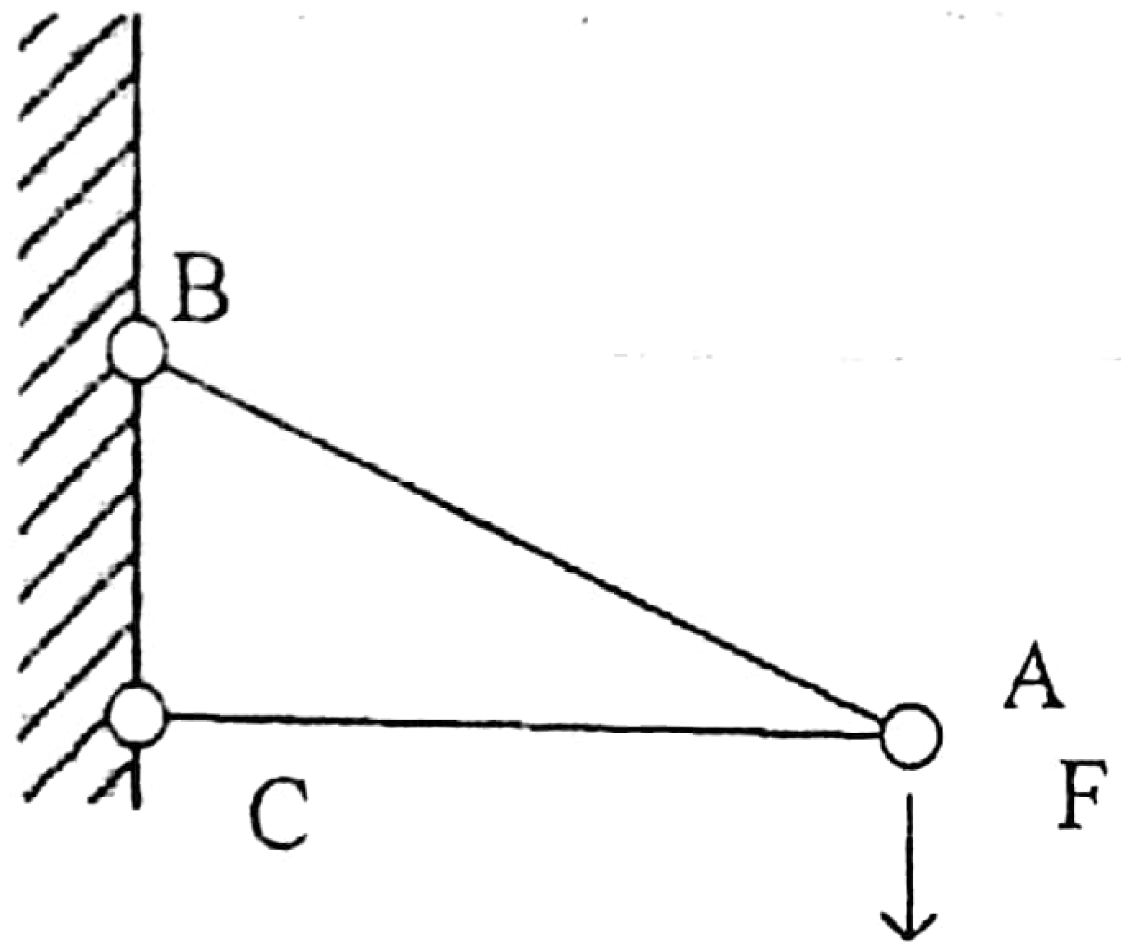
二〇〇五年答案解析

一、解：



（1）静力分析，$F_{NAC}=F\cot\alpha=-\sqrt{3}F$（压应力）

$$F_{NAB}=\frac{F}{\sin\alpha}=2F$$

故，$\sigma_{\max}=\frac{F}{A}=\frac{2F}{\frac{1}{4}\pi d^2}=\frac{8F}{\pi d^2}$

（2）在 A 端虚设水平力 F_1

静力分析，

$$F_{NAC}=-\sqrt{3}F+F_1;\frac{\partial F_{NAC}}{\partial F}=-\sqrt{3};\frac{\partial F_{NAC}}{\partial F_1}=1$$

$$F_{NAB}=2F;\frac{\partial F_{NAB}}{\partial F}=2;\frac{\partial F_{NAB}}{\partial F_1}=0$$

用能量法

$$\Delta_{竖直}=\int\frac{F_{Ni}}{EA_i}\frac{\partial F_{Ni}}{\partial F}ds=\frac{2F\times2\times a}{EA}+\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times a\cos30^\circ}{EA}=\left(16+6\sqrt{3}\right)\frac{Fa}{\pi d^2}(\downarrow)$$

$$\Delta_{水平}=\int\frac{F_{Ni}}{EA_i}\frac{\partial F_{Ni}}{\partial F_1}ds=\frac{-\sqrt{3}F\times1\times a\times\cos30^\circ}{EA}=\frac{-6Fa}{E\pi d^2}(\leftarrow)$$

（3）AC 为受压杆，$F_{NAC}=-\sqrt{3}F$

两端铰支，故 $\mu=1$

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2 E\frac{1}{64}\pi d^4}{\left(1\times a\cos 30^\circ\right)^2}=\frac{\pi^3 Ed^4}{48a^2}$$

（4）要考虑 AB、AC 的强度校核，AC 的稳定性校核。

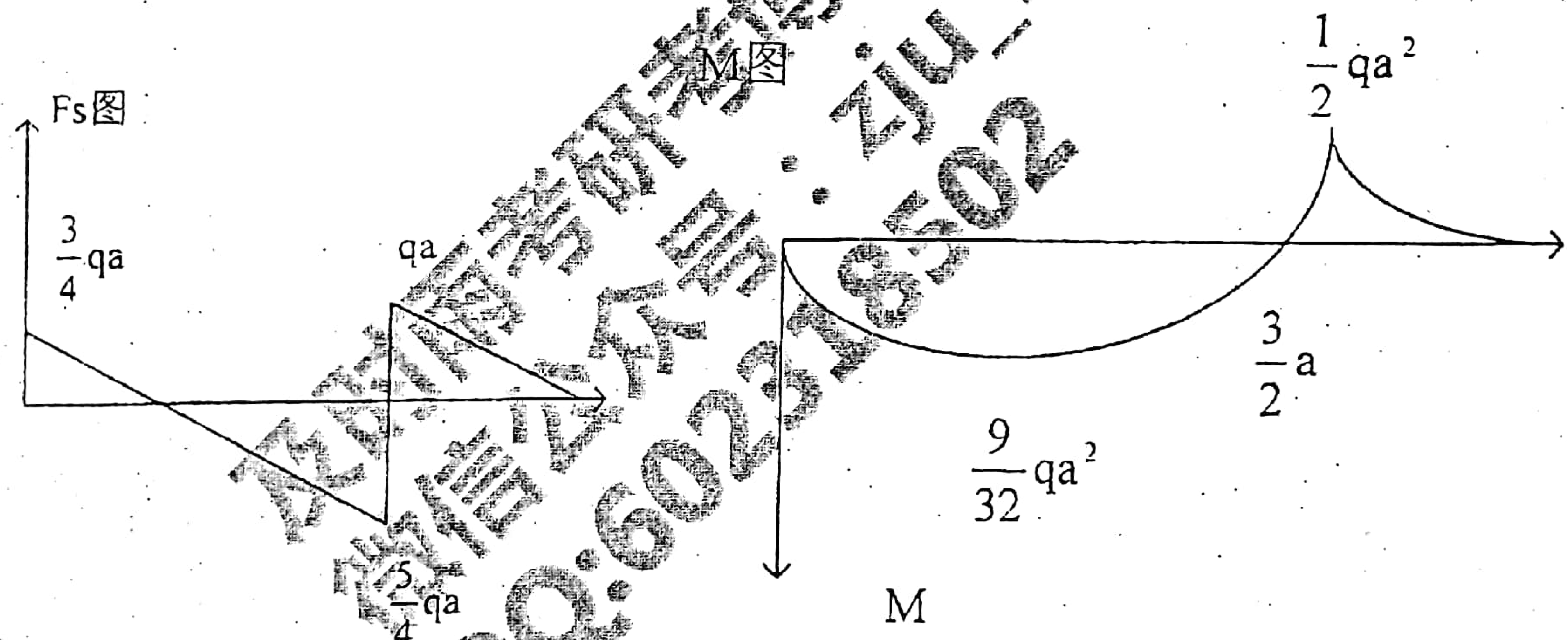
二、有争议的题，即集度 q 为单位面积的大小，但我人为何 04 年的 2 题相比，q 就是单位长力，查阅资料，集度可以指以上两种，

解：（1）$\sum M_A=0$，$-\frac{1}{2}q(3a)^2+F_B 2a=0$，$F_B=\frac{9qa}{4}(\uparrow)$

$\sum F_A=0$，$F_A=3qa-\frac{9qa}{4}=\frac{3qa}{4}(\uparrow)$

$$F_S(x)=\begin{cases}\frac{3qa-qx}{4},0\le x\le 2a\\ 3qa-qx,2a\le x\le 3a\end{cases}$$

$$M(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}qax-\frac{1}{2}qx^2,0\le x\le 2a\text{从右向左}\\ -\frac{1}{2}qx^2,0\le x\le a\text{从左向右}\end{cases}$$



——画法箭头向下是孙训芳版本的标准画法，而向上是刘鸿文版本的画法，这里我建议选择孙训芳版本，因为曾有真题题干的画法就是向下

（2）由 M 图知，

$M_{\max}=\frac{1}{2}qa^2$，$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{\frac{1}{2}qa^2}{\frac{1}{6}b(2b)^2}=\frac{3qa^2}{4b^3}$

$$\tau_{\max}=\frac{3F_{s,\max}}{2A}=\frac{15qa}{16b^2}$$

（3） $\varepsilon(x) = \dfrac{M(x)}{WE} = \begin{cases} \dfrac{3}{2b^3E}\left(\dfrac{3}{4}qax - \dfrac{1}{2}qx^2\right), 0 \le x \le 2a \\ \dfrac{3qx^2}{4b^3E}, 0 \le x \le a \end{cases}$

则

$$I = \int_L \varepsilon(x)ds = \int_0^{2a} \frac{3}{2b^3E}\left(\frac{3}{4}qax - \frac{1}{2}qx^2\right)dx + \int_0^a \frac{3qx^2}{4b^3E}dx$$

$$= \frac{3qa^3}{2b^3E}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{6}\cdot 8 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\right) = 0$$

三、解：（1）由题可知，σ_z 可以作为一个主应力，$\sigma_z = -50MPa$

$\sigma_x = 80MPa$，$\sigma_{xy} = 40MPa$，$\sigma_y = 20MPa$

$$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}} = \frac{80+20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80-20}{2}\right)^2 + 40^2} = 50 \pm 50\begin{cases}100MPa \\ 0\end{cases}$$

故，$\sigma_1 = 100MPa$，$\sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -50MPa$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \upsilon(\sigma_2 + \sigma_3)\right] = \frac{1}{200\times 10^9}\left[100 - 0.3(0 - 50)\right]\times 10^6 = 5.75\times 10^{-4}$$

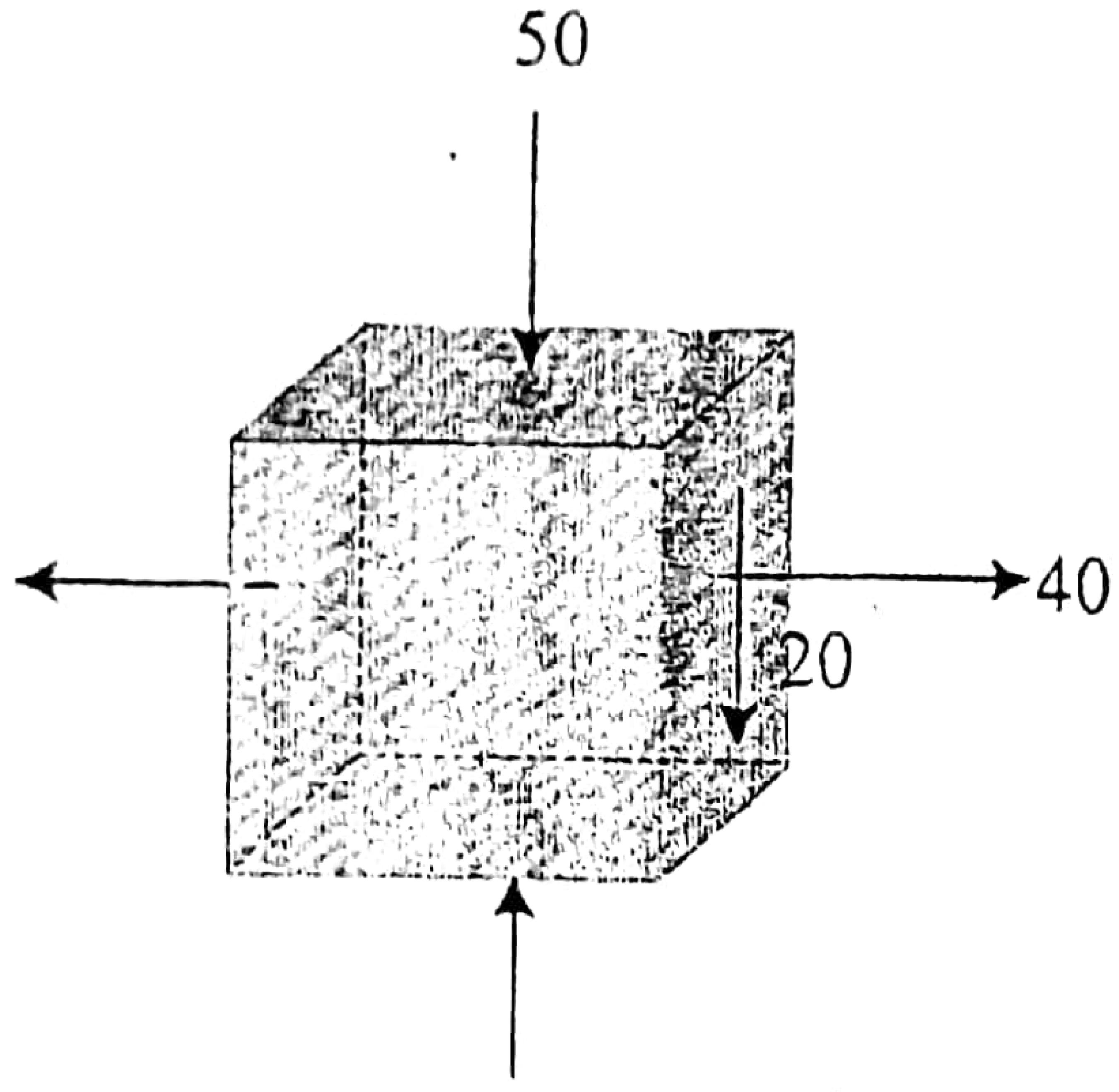
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \upsilon(\sigma_1 + \sigma_3)\right] = -7.5\times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \upsilon(\sigma_1 + \sigma_2)\right] = -4\times 10^{-4}$$

（2）$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 150MPa$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} = 132.29MPa$$

（3）即将 xoz 面应力叠加至 yox 和 yoz 面，即



故，$\sigma_{45^\circ} = \dfrac{40-50}{2} + \dfrac{40+50}{2}\cos 90^\circ + \tau \sin 90^\circ = -5 + 20 = 15MPa$

四、解：（1）

$$E_p = P(h + \Delta_{st})$$

$$V_{\varepsilon d} = \frac{1}{2} F_d \Delta_d = \frac{\Delta_d^{\ 2}}{2\Delta_{st}} P$$

因 $E_p = V_{\varepsilon d}$，得到 $\Delta_d = \Delta_{st}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2h}{\Delta_{st}}}\right)$

又因为 $\Delta_{st} = \dfrac{PL}{EA} = \dfrac{PL}{Ea^2}$

$$K_d = 1 + \sqrt{1+\frac{2Ea^2h}{PL}}$$

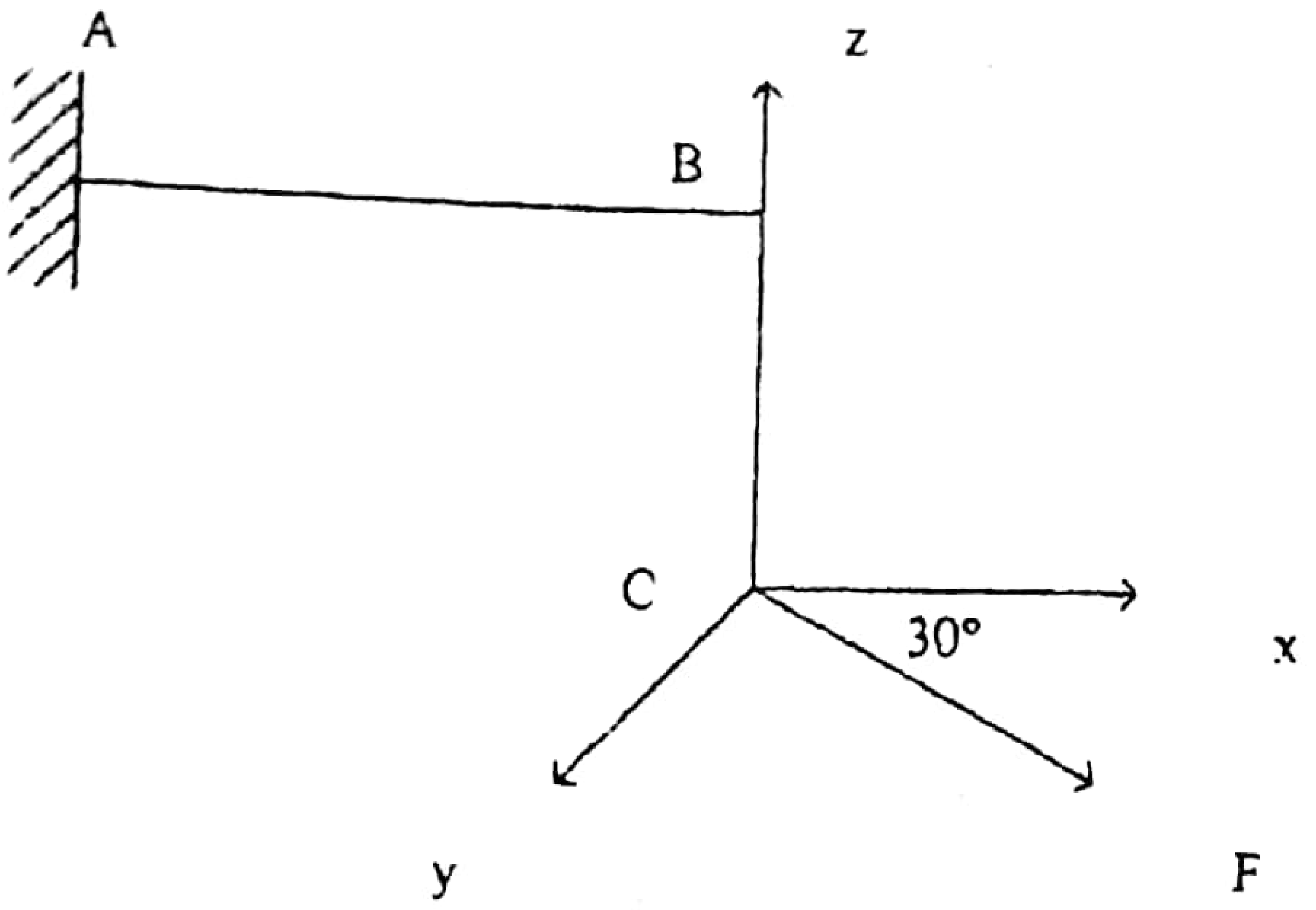
$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{st,\max} \cdot K_d = \frac{P}{a^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2Ea^2h}{PL}}\right)$$

（2）能量守恒原理，由于为微小变形，不考虑轴向引起的能量变化，那么

$E_p = V_{\varepsilon d}$，$Ph = \dfrac{(K_d Pe)^2 L}{2EI}$，得 $K_d{}' = \sqrt{\dfrac{2EIh}{PLe^2}}$

$$\sigma_{d,\max}{}' = \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{2PEIh}{Le^2}} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{PEh}{6L}}$$

五、解：（1）



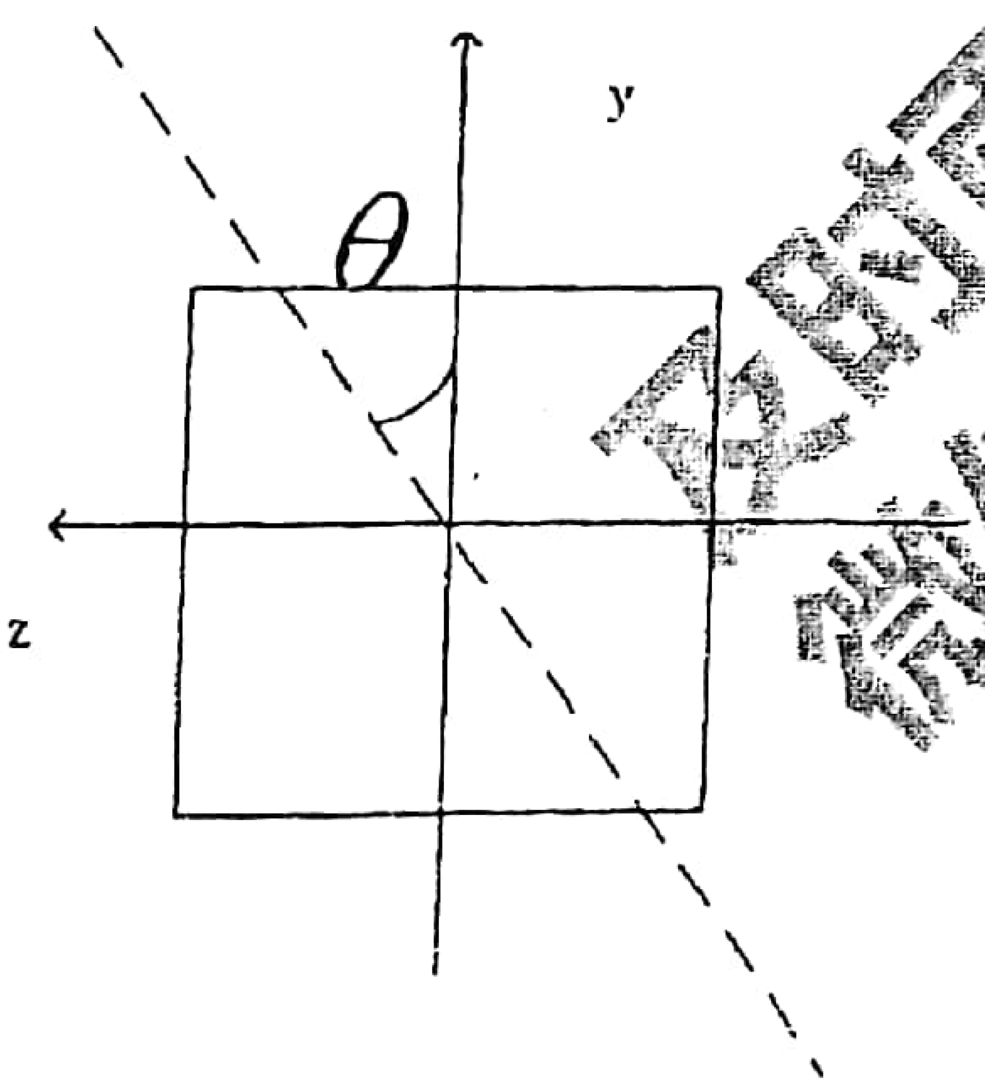
BC 段：$M_y(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}Fx_1, 0 \le x_1 \le a$

$$M_x(x_1) = \frac{1}{2}Fx_1, 0 \le x_1 \le a$$

AB 段：$M_z(x_2) = \frac{1}{2}Fx_2, 0 \le x_2 \le 2a$

$$M_y = \frac{\sqrt{3}}{2}Fa,\ T = \frac{1}{2}Fa$$

故 A 端截面上的内力为 $M_z = Fa$，$M_y = \frac{\sqrt{3}}{2}Fa$，$T = \frac{1}{2}Fa$



设夹角为 θ，则 $\tan\theta = \frac{M_z}{M_y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$，故 $\theta = \arctan\frac{2}{\sqrt{3}}$

（2）由于 A 截面为圆，故 $\sigma_{\max} = \frac{1}{W}\sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \frac{32}{\pi d^3}\sqrt{1+\frac{3}{4}}Fa = \frac{16\sqrt{7}Fa}{\pi d^3}$

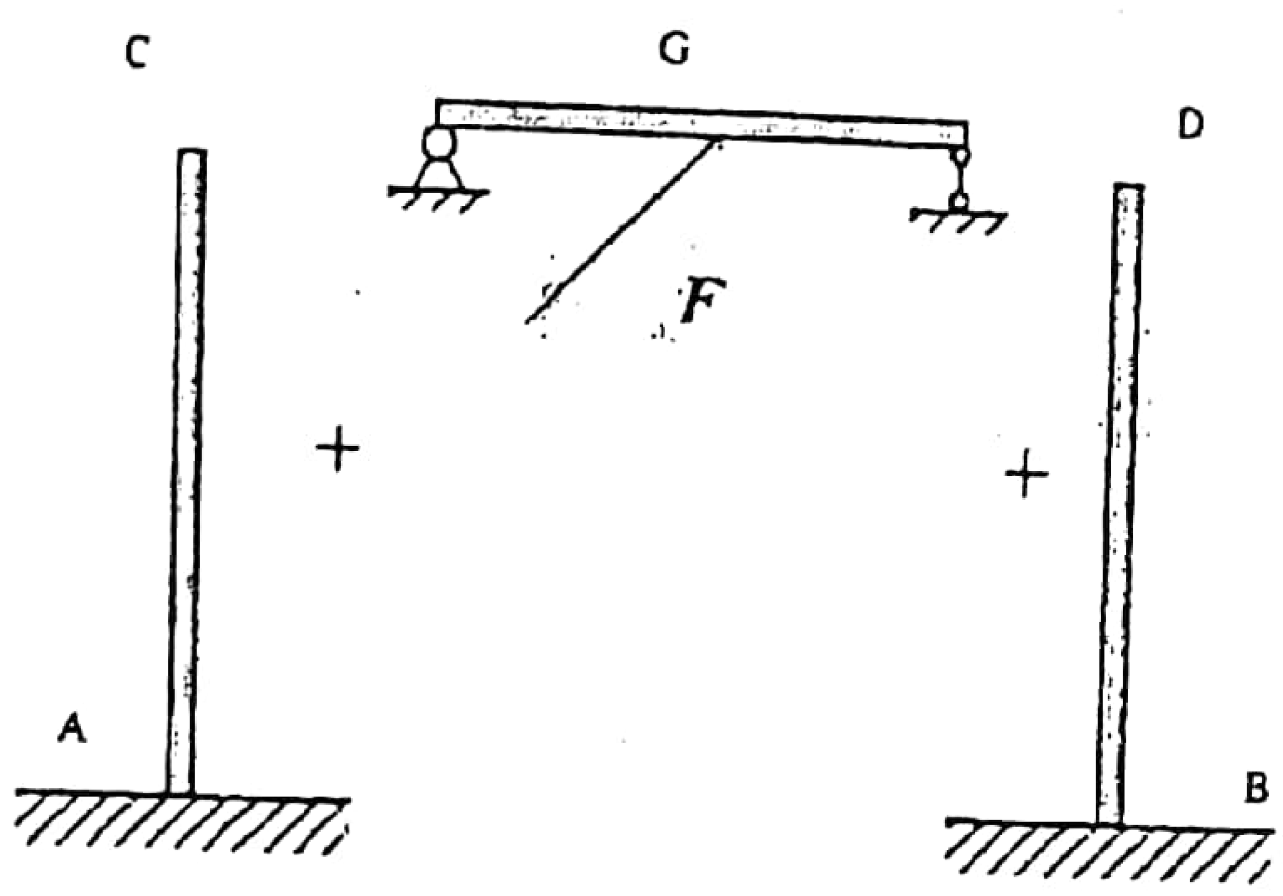
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16 \cdot \frac{1}{2}Fa}{\pi d^3} = \frac{8Fa}{\pi d^3}$$

（3） $\tau_{max}=\frac{4F}{3A}=\frac{4\cdot\frac{1}{2}F}{3\cdot\frac{1}{4}\pi d^3}=\frac{8F}{3\pi d^3}$

六、浙大特色的题型，考验基本功。

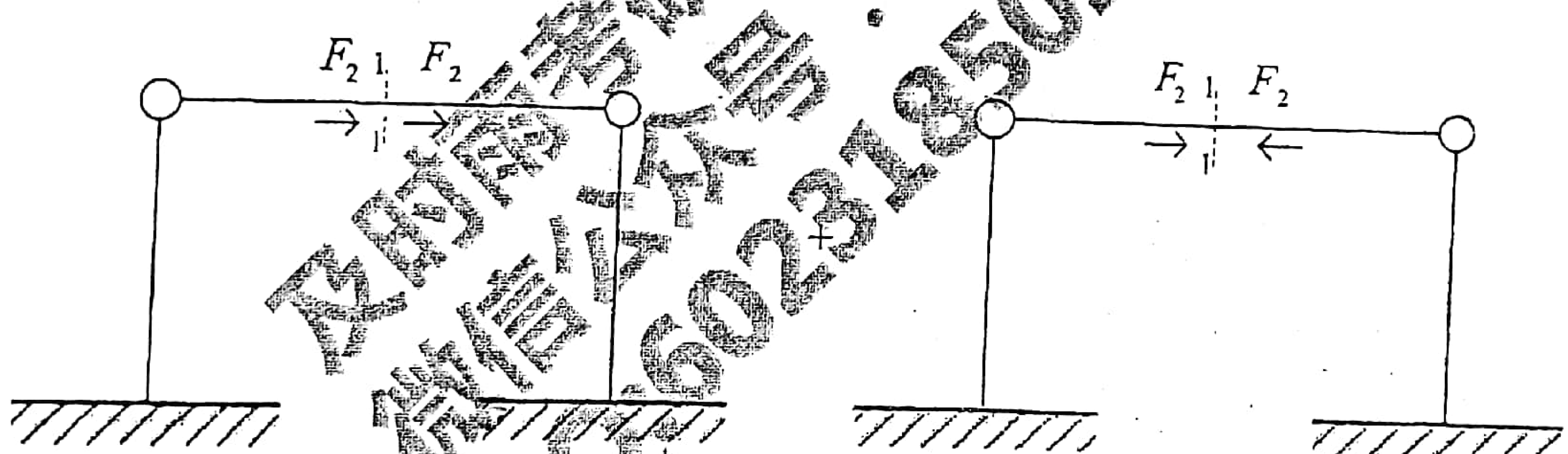
近年来最后一道大题都是结构正反对称题，如果没有熟练掌握（即按部就班的写），题一难就很难作对，如果不利用对称性解题的话运算量也会变大，所以一遇到有对称性问题的大题，十有八九都是要利用一下对称性。

解：（1）当 $F_2=0$ 时，可将结构看作



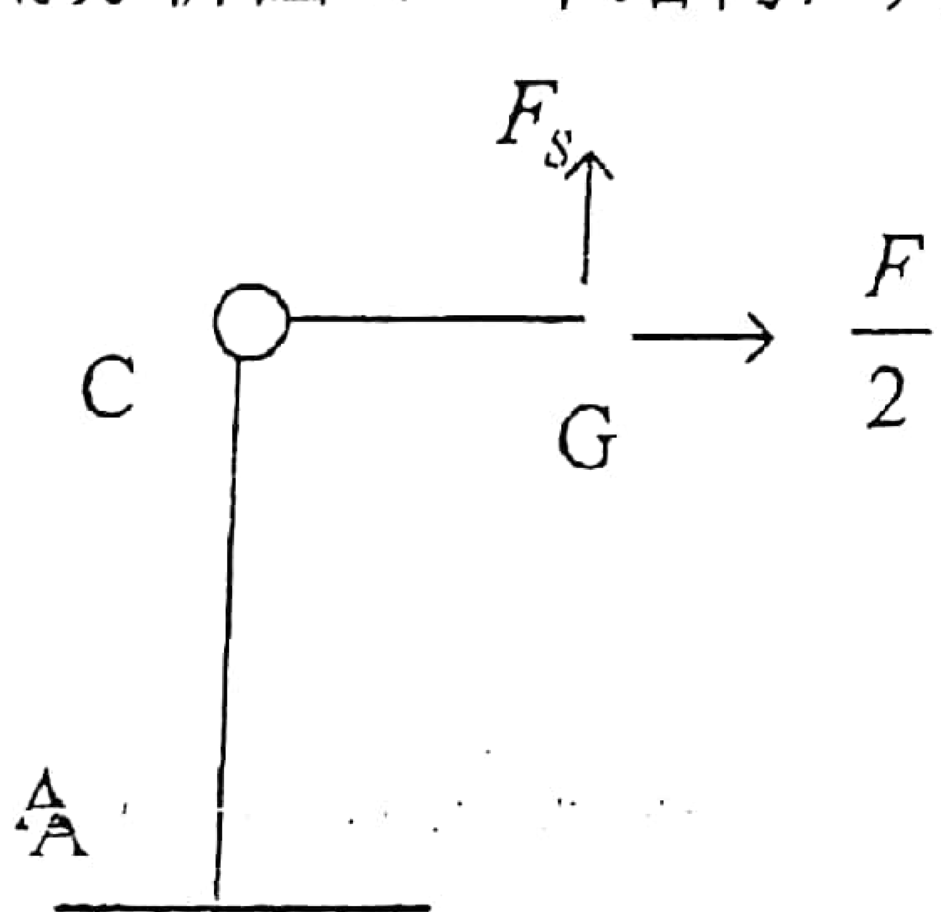
故，$W_C=\frac{Fa^3}{3EI\times 2}+\frac{Fa^3}{48EI}=\frac{3Fa^3}{16EI}=\frac{12Fa^3}{\pi d^4}$

（2） $F_1=0, F_2\neq 0$，此时将结构分为正反对称的叠加



图A

则分析图 A 一半结构，只存在反对称力剪力 Fs



由图可知，即可等效为 A 图，B 图各杆力为 0，

故 C 铰 X 方向约束力为 0.5F，