ljež

ASIMPTOTSKA ANALIZA I REKURZIJE

Zadatak 1.

Neka su f i g asimptotski nenegativne funkcije na $\mathbb{N}$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : f(n) \geq 0,\ g(n) \geq 0 \ \forall n \geq n_0)$. Dokažite da je

$\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$

Zadatak 2.

Pokaži da za bilo koje konstante a i b, $b>0$

vrijedi $\quad (n+a)^b = O(n^b)$

Zadatak 3.

a) $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n \qquad f(n) \in \Theta(n^2)$

b) $g(n) = 10 n \lg n + 5n^2 + 3 \qquad g(n) \in O(n^2)$

c) $O(1) + O(n) = O(n)$

Zadatak 4.

Neka su f i g asimptotski pozitivne funkcije na $\mathbb{N}$ ($\exists n_0 \in \mathbb{N} : f(n), g(n) > 0 \ \forall n \geq n_0$). Dokažite ili opovrgnite svaku od sljedećih tvrdnji

a) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))$

b) $f(n) = O(f(n)^2)$

c) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$

d) $f(n) = \Theta(f(n/2))$

e) $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$

Zadatak 5. (Asimptotsko ponašanje polinoma)

Neka je

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

gdje je $a_d > 0$, $k \in O(1)$ (tj. k je konstanta)

a) $k \geq d \Rightarrow p(n) = O(n^k)$

b) $k \leq d \Rightarrow p(n) = \Omega(n^k)$

c) $k = d \Rightarrow p(n) = \Theta(n^k)$

Zadatak 6.

Ako je $A = \Theta(B)$, DA

inače, NE

A	B	O	Ω	Θ	
$\lg^k n$	n^ε				
n^k	c^n				
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$				
2^n	$2^{n/2}$				
$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$				
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$				

$k \geq 1$
$\varepsilon > 0$
$c > 1$

$\left.\begin{matrix} k \geq 1 \\ \varepsilon > 0 \\ c > 1 \end{matrix}\right\}$ konstante

Zadatak 7.

Koristeći metodu stabla rekurzije odredite dobru gornju asimptotsku među za rekurziju

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$

Zadatak 8.

Koristeći master metodu odredite oštru asimptotsku među za sljedeće rekurzije.

a) $T(n) = 2T(n/2) + n^3$

b) $T(n) = T(9n/10) + n$

c) $T(n) = 16T(n/4) + n^2$

d) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

zdatak 9.

Riješite sljedeće rekurzije:

a) $T(n) = T(n-1) + n.$

b) $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

c) $T(n) = T(n-1) + 1/n$

d) $T(n) = T(n-1) + \lg n$

e) $T(n) = T(n-2) + 2\lg n$

etpostavite da je $T(n) = \Theta$ za $n \leq 2$

ZADATAK 8.

a) $T(n) = 2T(n/2) + n^3$

$a = 2,\ b = 2 \qquad n^{\log_b a} = n^{\lg 2} = n^1$

$f(n) = n^3 = \Omega(n^{1+\varepsilon}) \qquad \varepsilon = 2 \qquad \rightsquigarrow$ 3. slučaj MT

Regularnost:

$$2f(n/2) = 2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}n^3 = \frac{1}{4}f(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \quad T(n) = \Theta(n^3)$

d) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

$a = 2,\ b = 4 \qquad n^{\log_4 2} = n^{1/2}$

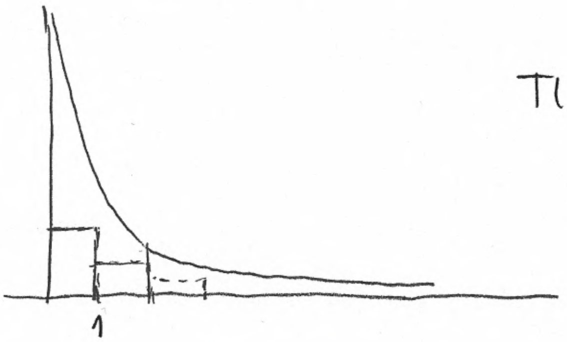
$f(n) = \sqrt{n} = \Theta(n^{1/2}) \quad \overset{\text{2. slučaj}}{\Rightarrow} \quad T(n) = \Theta(\sqrt{n} \lg n)$

ZADATAK 9.

a) $T(n) = T(n-1) + n = T(n-2) + n-1 + n = 0 + 1 + 2 + \dots + n-1 + n$

$$= \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

c) $T(n) = T(n-1) + 1/n = T(n-2) + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$



$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^n = 1 + \ln n$$

$T(n) = O(\ln)$

Stablo rekurzije za

3. zadatak a)

n

|

n-1

|

n-2

⋮

$\Theta(1)$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

Nakon ovog koraka potrebno je provesti metodu supstitucije.

ZADATAK 10.

3-way-MERGE-SORT: Pretpostavite da umjesto podjele na dva potpolja dijelite na tri potpolja u MERGE-SORT algoritmu, sortirate ih i spojite koristeći odgovarajuću rutinu. Odredite asimptotsku međa na vrijeme izvršavanja.

ZADATAK 11.

Neka su dane funkcije f i g takve da je $f(n) = O(g(n))$. Dokažite da je $f(n) \cdot \lg(f(n)^c) = O(g(n) \cdot \lg(g(n)))$? Ovdje je c nekakva pozitivna konstanta c. Možete pretpostaviti da su f i g monotono rastuće funkcije uvijek veće od 1.

ZADATAK 12.

Pretpostavite da su f i g dvije monotono rastuće pozitivne funkcije f i g t.d. $f(n) = O(g(n))$. Je li $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$?

ZADATAK 13.

k-way-Merge-Sort. Pretpostavite da su vam dana k sortirih polja, svako polje ima n elemenata, te da ih je potrebno spojiti u jedno sortirano polje koje ima kn elemenata. Pretpostavite da koristite sljedeći algoritam:

- koristi MERGE proceduru s predavanja kako biste spojili 1. i 2. polje
- koristite MERGE proceduru kako biste spojili 3. polje s poljem iz prethodnog koraka
- nastavite postupak dok ne spojite svih k polja.

Odredite oštru asimptotsku među na vrijeme izvršavanja algoritma kao funkciju od k i n.
Možete li ponuditi brži algoritam? Ako možete, dokažite da je brži.

ADATAK 14.

Sortirajte sljedeće funkcije u rastućem poretku prema asimptotskoj stopi rasta, tj. $g(n)$ dolazi nakon $f(n)$ akko $f(n) = O(g(n))$.

a) $n^2 \log(n)$

b) 2^n

c) 2^{2^n}

d) $n^{\log(n)}$

e) n^2

RJEŠENJA

ZADATAK 1.

$$\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$$

I

$$\max(f(n), g(n)) = O(f(n) + g(n))$$

Kako f i g asimptotski nenegativne funkcije, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\left.\begin{array}{ll} f(n) \geq 0 & \forall n \geq n_0 \\ g(n) \geq 0 & \forall n \geq n_0 \end{array}\right\} \quad f(n) + g(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$$

Budući je

$$\max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n) \qquad \forall n \geq n_0,$$

vidimo da je

$$0 \leq \max(f(n), g(n)) \leq c_1 (f(n) + g(n)) \qquad \forall n \geq n_0$$

za $c_1 = 1$, iz čega slijedi da je $\max(f(n), g(n)) = O(f(n) + g(n))$

I $\max(f(n), g(n)) = \Omega(f(n) + g(n))$

Iz nejednakosti

$$\max(f(n), g(n)) \geq \frac{1}{2}(f(n) + g(n)) \geq 0 \qquad \forall n \geq n_0$$

slijedi da je

$$\max(f(n), g(n)) \geq c_2 (f(n) + g(n)) \geq 0 \qquad \forall n \geq n_0$$

za $c_2 = \frac{1}{2}$ iz čega slijedi da je $\max(f(n), g(n)) = \Omega(f(n) + g(n))$

Teorem s predavanja
$\Rightarrow$

$$\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$$

) $T(n) = 4T(n/2) + n^3$

$a = 4, \quad b = 2 \quad \Rightarrow \quad n^{\log_2 4} = n^2 \qquad f(n) = n^3$

slučaj 3: $\quad f(n) = \Omega(n^{\log_2 4 + \varepsilon}) = \Omega(n^{2+\varepsilon}) \qquad \varepsilon = 1$

Uvjet regularnosti: $\quad 4\left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{4}{8} n^3 = \frac{1}{2} n^3 \le c n^3$ za $c = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad T(n) = \Theta(n^3)$

) $T(n) = 4T(n/2) + n^2/\lg n$

$a = 4, \quad b = 2 \quad \Rightarrow \quad n^{\log_2 4} = n^2 \qquad f(n) = n^2/\lg n$

$\Rightarrow$ Master metoda se ne može primijeniti? Zašto?

Može se primijeniti samo ako je $f(n)$ "polinomijalno manji" od n^2, tj. ako je $f(n) \in O(n^{2-\varepsilon})$ za neki $\varepsilon > 0$

a to nije slučaj!