Predavanje 5

- alternativne metode: $\underbrace{\text{accouting method, } \boxed{\text{potentional method}}}_{\text{općenitije}}$

Potentional method

- Neka je D_0 inicijalno stanje
- Korak transformira D_{i-1} u D_i
- Neka C_i označava broj operacija i-tog koraka
- Neka je $\Phi : \{D_i\} \to \mathbb{R}$ označava potencijalnu funkciju t.d. vrijedi:
  1) $\Phi(D_0) = 0$
  2) $\Phi(D_i) \geq 0, \forall i$

Def: "Amortized cost" se definira kao

$$\hat{C}_i = C_i + \underbrace{\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})}_{\text{razlika pot. } \Delta\Phi_i}$$

$\Delta\Phi > 0 \Rightarrow \hat{C}_i > C_i \rightarrow$ POTENCIJAL se nakuplja

$\Delta\Phi < \Rightarrow \hat{C}_i < C_i \rightarrow$ POTENCIJAL SE troši

U kakvom su odnosu $\sum_{i=1}^{n} c_i$ i $\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i$

preživjet će $\Phi(D_0), \Phi(D_n)$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{C}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i + \underbrace{\Phi(D_n)}_{\geq 0} - \underbrace{\Phi(D_0)}_{=0} \geq \sum_{i=1}^{n} C_i$$

- želimo analizirati $\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i$ s direktnom posljedicom na $\sum_{i=1}^{n} c_i$

Metoda potencijala u problemu dinamičkog polja

Def: potencijal nakon i-tog INSERTA

$$\Phi(D_i) = 2i - 2^{\lceil \lg i \rceil}$$

1) $\Phi(D_0) = 0$ uz pretp. da je $2^{\lceil \lg 0 \rceil} = 0$

2) $\Phi(D_i) \geq 0$ (uz pretp. $2^{\lceil \lg 0 \rceil} = 0$)

$$2i - 2^{\lceil \lg i \rceil} = 2i - 2^{\lg i} = i \quad (i \text{ pot. br. } 2)$$

$$2i - 2^{\lceil \lg i \rceil} \leq 2i - 2^{\lg i + 1} = 0$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\Phi(D_i)$	0	1	2	3	4	2	4	6	8	2	...

$2i - 2^{\lceil \lg i \rceil}$

Zanima nas 'amortized cost' i-tog INSERTA

$$\hat{c}_i = c_i - \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

$$= c_i + (2i - 2^{\lceil \lg i \rceil}) - (2(i-1) - 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil})$$

$$= c_i + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil}$$

PRISJETIMO SE:

$$c_i = \begin{cases} i, & (i-1) \text{ pot. br. } 2 \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$$

SLUČAJ 1: $(i-1)$ pot. br. 2

$$\hat{c}_i = i + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg(i-1) \rceil}$$

$$= i + 2 + (i-1) - 2(i-1) = 3$$

SLUČAJ 2: $(i-1)$ nije pot. br. 2

$$\hat{c}_i = 1 + 2 - \underbrace{2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg(i-1) \rceil}}_{0} = 3$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = 3 \cdot n \geq \sum c_i \Rightarrow \Theta(n)$$

Samoorganizirajuće liste

- lista L od n elemenata
- operacija Access(x) koja pristupa elementu x liste L i košta nas $rang_L(x)$ koraka

$rang_L(x)$ = udaljenost elementa x od početka liste

- operacija Transpose(x, y) zamjenjuje mjesta bilo koja dva uzastopna elementa x, y liste L i košta nas 1

<u>Primjer:</u>

$$\rightarrow \boxed{12} \rightarrow \boxed{50} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{14} \rightarrow \boxed{17} \rightarrow \boxed{4}$$

Access(14) ← pristup elementu 14

$$rang_L(14) = 4$$

Transpose(50, 3)

$\to \boxed{12} \to \boxed{3} \to \boxed{50} \to \boxed{14} \to \boxed{17} \to \boxed{4}$

košta 1

Def.: Neka je S niz Access operacija na listi L

"On-line" alg. izvršava operaciju za operacijom iz S, bez ikakve informacije koje operacije slijede (TETRIS)

"Off-line" ima potpuni uvid u S

U problemu samoorganizirajućih lista želimo minimizirati ukupan broj koraka nekog algoritma A koji se sastoji od Access operacija iz S i Transpose operacija na listi L duljine n

Dakle, želimo

$$\min C_A(S)$$

- ako bi alg. A bio off-line onda je stvar trivijalna
- promatramo 'on-line' problem

"worst case" analiza:

- svaki put operacija Access iz S pristupa zadnjem elementu iz liste L

$$\Rightarrow \Omega(n \cdot |S|)$$

"Move-to-front" alg. (M2F):

IDEJA: Nakon Access(x), prebacimo x na početak liste L pomoću Transpose operacije

$$\text{broj koraka} = (\underset{\text{Access}}{1}+\underset{\text{Transpose}}{1})\cdot \text{rang}_L(x)$$

Def.: Za neki "on-line" alg. A kažemo da je α kompetitivan ako postoje takve konstante α i $k \geq 0$ t.d. za svaki niz operacija S vrijedi:

$$C_A(S) \leq \alpha \cdot \underbrace{C_{OPT}(S)}_{\text{cijena "off-line" alg.}} + k$$

Tm.: M2F je 4 kompetitivan alg.

DOKAZ:

$C_i \to$ broj koraka alg. A nakon i-te Access operacije iz S

$C_i^* \to$ broj koraka optimalnog alg. nakon i-te Access op. iz S

Ideja 1: pronaći vezu između c_i i c_i^* (preoptimistično)

Ideja 2: Pronaći vezu između $\hat{c}_i$ i c_i^*

Neka L_i označava listu nakon i-te Access op. alg. A

Neka L_i^* -||- optimalnog alg. A

$c_i = 2\cdot \text{rang}_{L_{i-1}}(x)$ naš M2F

$$c_i^* = \text{rang}_{L_{i-1}^*}(x) + \underbrace{t_i}_{\text{transpose op. optimalne strategije}}$$

Želimo kontrolirati različitost L_i i L_i^* lista

Def.: $\Phi(L_i) = 2 \cdot |\{(x,y) \mid \underbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ispred}}}{x <_{L_i} y} \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ y \text{ ispred } x \\ \text{u listi } L_i^*}}{y <_{L_i^*} x}}_{\text{INVERZIJA}}\}| = 2 \cdot (\text{br. inverzija})$

Primjer:

$L_i \to \boxed{E} \to \boxed{C} \to \boxed{A} \to \boxed{D} \to \boxed{B}$

$L_i^* \to \boxed{C} \to \boxed{A} \to \boxed{B} \to \boxed{D} \to \boxed{E}$

$\Phi(L_i) = 2 \cdot |\{(E,C), (E,A), (E,D), (D,B)\}|$

SVOJSTVA:

1) $\Phi(L_0) = 0 \; (L_0 = L_0^*)$

2) $\Phi(L_i) \geq 0, \forall i$

Napomena: Za koliko se promjeni potencijal nakon jedne Transpose op.?

$\Delta \Phi = \pm 2$ (jedna inverzija više ili manje)

Promotrimo i-ti Access(x)

$A = \{y \in L_{i-1} \mid y <_{L_{i-1}} x \text{ i } y <_{L_{i-1}^*} x\}$

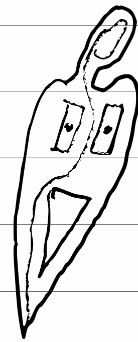
$B = \{y \in L_{i-1} \mid y <_{L_{i-1}} x \text{ i } y >_{L_{i-1}^*} x\}$

$C = \{ y \in L_{i-1} \mid y >_{L_{i-1}} x \text{ i } y <_{L^*_{i-1}} x \}$

$D = \{ y \in L_{i-1} \mid y >_{L_{i-1}} x \text{ i } y >_{L^*_{i-1}} x \}$

$L_{i-1}: \; \boxed{A \cup B \mid \underset{\downarrow r}{\overset{rang_L(x)}{x}} \mid C \cup D}$

$L^*_{i-1}: \; \boxed{A \cup C \mid \underset{\downarrow r^*}{x} \mid B \cup D}$



$r = |A| + |B| + 1$

$r^* = |A| + |C| + 1$

M2F i-ti Access(x), prebaci x na početak

$|A|$ novih inverzija se kreira

$|B|$ inverzija nestaje

Što radi optimalan alg.? TO NE ZNAMO

Ali znamo da Transpose kreira ili obriše jednu inverziju

$\Rightarrow \Phi(L_i) - \Phi(L_{i-1}) \leq 2 \cdot (|A| - |B| + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{broj Transpose op. opt. strategije}}}{t_i})$

Amortizirana cijena

$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) \leq 2 \cdot r + 2 \cdot (|A| - |B| + t_i)$

$= 2 \cdot r + 2(|A| - (r - 1 - |A|) + t_i) = 4|A| + 2 + 2t_i$

$$\leq 4(|A|+1) + 4t_i \leq 4(r^* + t_i) = 4\cdot C_i^*$$

BR. KORAKA OPT. ALG.

Prisjetimo se:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i}_{C_A(s)} \leq \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \leq 4 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i^*} = 4\cdot C_{OPT}(s)$$