

Domaća zadaća 3

Strukture podataka i algoritmi I - I053

31. listopada 2022.

Upute za rješavanje domaće zadaće

Domaća zadaća se predaje preko Teams platforme. Rok predaje je 4. studenog 2022. u 23:59. Za predaju teorijskih zadatak možete skenirati rješenja ili ih natipkati u \LaTeX -u i sve ih zajedno predati u jednoj pdf datoteci. Programerski zadaci se predaju kao .cpp datoteke.

Zadatak 1 (20 bodova). Implementirajte funkciju **quicksort** koja prima vektor brojeva i sortira ga 'in-place'. Za pivot uzmite prvi element liste.

```
vector<int> quicksort(vector<int> &A)
```

Argumentirajte vremensku i prostornu složenost algoritma (dovoljno dati asimptotsku ocjenu i obrazložiti za oboje).

Zadatak 2 (15 bodova). Inverzija u polju A od n elementata je uređeni par indeksa (i, j) za koji vrijedi $i < j$ i $A[i] > A[j]$. Implementirajte funkciju

```
int inversions(const vector<int> &A)
```

koja vraća broj inverzija u danom vektoru brojeva. (Hint: rješenje je modifikacija merge_sort algoritma.)

Zadatak 3 (20 bodova). Koristeći algoritam za bro potenciranje izračunajte n -ti Fibonaccijev broj. Iskoristite jednakost

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Algoritam implementirajte u C++ jeziku.

Zadatak 4 (30 bodova). Martin radi za trakom u tvornici kocaka. Za vrijeme svoje smjene Martin će dobiti n kocaka različitih težina koje treba poslagati u skladište u obliku tornjeva. Kad god su dvije kocke jedna na drugoj, gornja mora biti strogo lakša od one ispod. Martin dolazeće kocke mora uzimati danim redoslijedom. Kada mu dođe nova kocka, nju može staviti na vrh postojećeg tornja, čija kocka na vrhu je strogo teža od uzete, ili trenutnom kockom može započeti novi tornja tako da ju stavi na pod. Pomozite Martinu naći najmanji broj tornjeva koje može napraviti ako kocke uzima danim redoslijedom.

Implementirajte funkciju

```
int towers(const vector<int> &A)
```

koja u vremenu $O(n \log n)$ rješava Martinov problem.

Uzmite da težina svake kocke je prirodan broj $1 \leq A[i] \leq 10^9$ i da će ih biti najviše $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$.

Primjerice za $A = \{3, 8, 2, 1, 5\}$ Martin može najmanje naslagati dva tornja jer kad stavi kocku težine 3 na pod i dobije kocku težine 8, nju ne može staviti na 3 jer je teža, nego ona mora ići na pod.