Predavanje 2

Ponavljanje:

- asimptotska analiza/notacija (O, Ω, Θ)
- ideja: izraziti VSA pomoću klase f-ja parametriziranih pomoću duljine/veličine inputa

npr.: Insertion Sort $T(n) = \underbrace{\Theta(n^2)}_{\text{KLASA F-ja}}$ (worst-case)

Možemo li sortirati brže od $\Theta(n^2)$?

Merge Sort algoritam

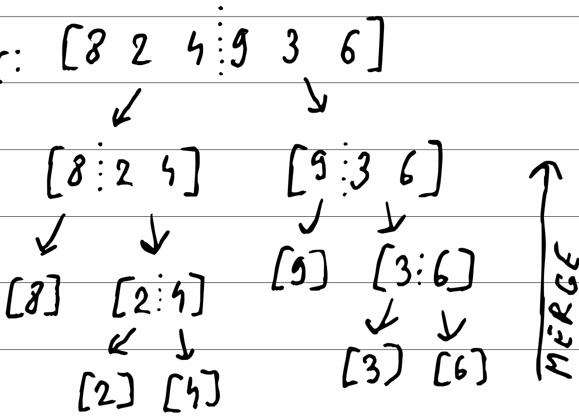
PSEUDOKOD:

Merge Sort $(A[1 \ldots n])$

1) if $n = 1$ done!
2) rekurzivno sortiraj $A[1 \ldots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$ i $A[\lceil \frac{n}{2} \rceil \ldots n]$ (floor, ceiling)
3) spoji (MERGE) dva sortirana niza

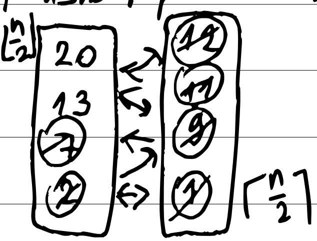
Napomena: Merge Sort 'gradi' stablastu strukturu dok ne dođe do listova i tek tada počinje sortiranje (MERGE)

Primjer:



Kako efikasno implementirati MERGE?

Primjer:



1, 2, 7, 9, 11, 12, 13, 20

$$T(n) = \Theta(n)$$

DZ.: Implementirajte MergeSort algoritam

VSA od MergeSorta? $T(n)$

KORAK 1: $\Theta(1)$ (nekakvo konstantno vrijeme)

KORAK 2: $T\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) + T\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1\right) \approx 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right)$

KORAK 3: $\Theta(n)$

$$\Rightarrow T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \underbrace{\Theta(n)}_{\text{MERGE I KORAK 1}} \quad \text{(REKURZIJA)}$$

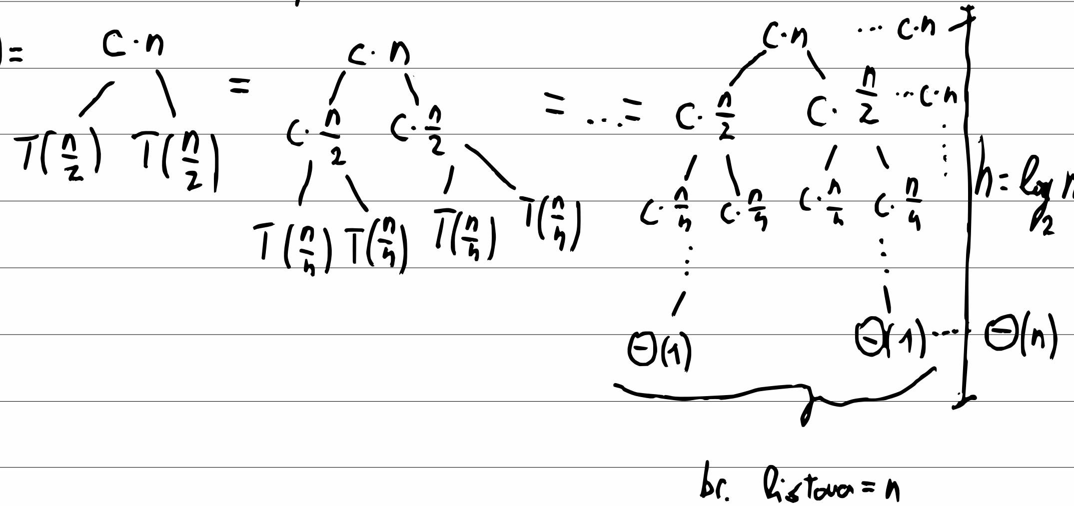
Precizniji zapis rekurzije (s rubnim uvjetom)

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{za } n=1 \text{ (Rubni uvjet)} \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n), & \text{inače} \end{cases}$$

Stablo rekurzije (vizualizacija rekurzije)

$T(n) = 2\cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + c\cdot n$, za neki $c > 0$

$T(n) =$



UKUPNO: $T(n) = \underbrace{c\cdot n\cdot h}_{\text{nivoi}} + \underbrace{\Theta(n)}_{\text{zadnji nivo listovi}} = c\cdot n\cdot \log_2 n + \Theta(n) = \Theta(n\cdot \log_2 n) + \Theta(n)$

$= \Theta(n\cdot \log_2 n)$ → vremenska složenost od MergeSort alg.

→ $\Theta(n\cdot\log_2 n)$ raste puno sporije od $\Theta(n^2)$
$n \to \infty$

→ Merge Sort je asimptotsko bolje dizajniran od Insertion Sort alg.

Master metoda za rješavanje rekurzija oblika

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), \text{ za } a \geq 1, b > 1 \text{ i neku f-ju } f(n)$$

-usporedujemo f-ju $f(n)$ s $n^{\log_b a}$

SLUČAJ 1: Ako $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, za neki $\varepsilon > 0$, tada $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

SLUČAJ 2:

Ako $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ tada $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log_2 n)$

SLUČAJ 3: Ako $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, za neki $\varepsilon > 0$ i ako

$a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$ za neku konstantu $c < 1$

<u>Primjeri:</u>

1) $T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$a = 4, b = 2, n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2, f(n) = n$

SLUČAJ 1: $\underset{f(n)}{n} = O(\underset{(n^{\log_b a - \varepsilon})}{n^{2-\varepsilon}}) \; \forall \varepsilon \in \langle 0, 1]$ $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

2) $T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

$a = 4, b = 2, n^{\log_b a} = n^2, f(n) = n^2$

SLUČAJ 2:

$\underset{f(n)}{n^2} = \Theta(\underset{n^{\log_b a}}{n^2}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2 \lg n)$

3) $T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

$a = 4,\ b = 2,\ n^{\log_b a} = n^2,\ f(n) = n^3$

SLUČAJ 3: $n^3 = \Omega\left(n^{2+\varepsilon}\right),\ \forall \varepsilon \in \langle 0, 1] \checkmark$

$4 \cdot f\left(\frac{n}{2}\right) \leq c \cdot f(n)$, za neki $c < 1$

$4 \cdot \frac{n^3}{2^3} \leq c = n^3,\ c = \frac{1}{2} \checkmark$

$\Big\}\ T(n) = \Theta(n^3)$

4) $T(n) = 2\,T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot n$

$a = 2,\ b = 2,\ n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n,\ f(n) = c \cdot n$

SL. 2: $n = \Theta(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$

Podijeli-pa-vladaj alg. (Divide & Conquer)

- tehnika dizajna algoritma

1. podijeli problem u jedan ili više nepreklapajućih potproblema
2. vladaj - riješi potprobleme rekurzivno
3. kombiniraj rješenja potproblema u rješenje originalnog problema

- MERGE SORT: (A, i, j, k)

Podijeli: trivijalno $\Theta(1)$

Vladaj: $2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right)$

Kombiniraj: (Merge procedura) $\Theta(n)$

$$\Big\}\ T(n) = \underset{\text{broj potproblema}}{2} \cdot T\Big(\underbrace{\tfrac{n}{2}}_{\text{veličina potproblema}}\Big) + \overbrace{\Theta(n)}^{\text{podijeli + kombiniraj}}$$

DZ.: Razmislite o prostornoj složenost Merge Sort alg.
MS nije "in-place" alg.

Problem binarnog pretraživanja (Binary search)
Pronađi x u sortiranom nizu
Pr.: $x=9$ 3 5 7 $\boxed{8}$ 9 12 15
9 $\boxed{12}$ 15

Podijeli: Usporedi x sa srednjim elementom niza
Vladaj: Rekurzivno 'podijeli' na odgovarajućoj polovici
Kombiniraj: Return (trivijalno)

VSA: Binary Search

$$T(n) = 1 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1)$$

br. potp. ↗ ↑ veličina potp.

$a=1,\ b=2,\ n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = 1,\ f(n) = c$
Sl. 2: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
$c = \Theta(1)$

$$\boxed{T(n) = \Theta(\log_2 n)}$$