Kolokvij 1 rješenja

Branimir Brekalo

Zadatak 1

a) $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n^2$

Rješenje: $a = 9$, $b = 3$, $f(n) = n^2$, $n^{\log_b a} = n^2$

Usporedimo $f(n)$ i $n^{\log_b a}$: $f(n) = n^{\log_b a}$

2. Slučaj

$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$n^2 = \Theta(n^2)$

Konačno: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot lgn) = \Theta(n^2 \cdot lgn)$

b) $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n^3$

Rješenje: $a = 9$, $b = 3$, $f(n) = n^3$, $n^{\log_b a} = n^2$

Usporedimo $f(n)$ i $n^{\log_b a}$: $f(n) > n^{\log_b a}$

3. Slučaj

$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$

$n^3 = \Omega(n^{2+\epsilon})$ $\forall \epsilon \in (0, 1]$

Provjera: $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$, $c < 1$

$9 \cdot f(\frac{n}{3}) \leq c \cdot f(n)$

$9 \cdot \frac{n^3}{3^3} \leq c \cdot n^3$

$\frac{1}{3} \cdot n^3 \leq c \cdot n^3$

$\frac{1}{3} \leq c$

Vrijedi za $c \in [\frac{1}{3}, 1)$

Konačno: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^3)$

c) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$

Rješenje: $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n$, $n^{\log_b a} = n^1$

Usporedimo $f(n)$ i $n^{\log_b a}$: $f(n) = n^{\log_b a}$

2. Slučaj

$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$n = \Theta(n)$

Konačno: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot lgn) = \Theta(n \cdot lgn)$

d) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + c$

Rješenje: $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = c = O(1) = n^0$, $n^{\log_b a} = n^1$

Usporedimo $f(n)$ i $n^{\log_b a}$: $f(n) < n^{\log_b a}$

1. Slučaj

$f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$

$n^0 = O(n^{1-\epsilon})$ $\forall \epsilon \in (0, 1]$

Konačno: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n)$

e) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n$

Rješenje: $a = 3$, $b = 2$, $f(n) = n$, $n^{\log_b a} = n^{\log_2 3}$

Usporedimo $f(n)$ i $n^{\log_b a}$: $f(n) < n^{\log_b a}$

1. Slučaj

$f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$

$n = O(n^{\log_2 3 - \epsilon})$ $\forall \epsilon \in (0, \log_2 3 - 1]$

Konačno: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n)$

f) $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n^4$

Rješenje: $a = 16$, $b = 4$, $f(n) = n^4$, $n^{\log_b a} = n^2$

Usporedimo $f(n)$ i $n^{\log_b a}$: $f(n) > n^{\log_b a}$

3. Slučaj

$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$

$n^4 = \Omega(n^{2+\epsilon})$ $\forall \epsilon \in (0, 2]$

Provjera: $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$, $c < 1$

$16 \cdot f(\frac{n}{4}) \leq c \cdot f(n)$

$16 \cdot \frac{n^4}{4^4} \leq c \cdot n^4$

$\frac{1}{16} \cdot n^4 \leq c \cdot n^4$

$\frac{1}{16} \leq c$

Vrijedi za $c \in [\frac{1}{16}, 1)$

Konačno: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^4)$

Zadatak 2

procedure LOOP(A, n)

1. **for** $i = 0...n-1$
2. **for** $j = i+1...n-1$
3. **if** $(A[i] > A[j])$
4. SWAP(A, i, j);

Vanjska for petlja se izvršava $n - 1 - 0 + 1 + 1 = n + 1$ puta. Unutarnja petlja ovisi o vanjskoj odnosno do nje ce se doći n puta i ona se svaki puta provrti $n-1$, $n-2$, $n-3$,..itd. Nadalje linije 3. i 4. su obje $\Theta(1)$ pa one ne pridonose složenosti. Ukupno onda imamo (ako svaku ovu unutarnju zaokružimo od gore sa n, da ne pišemo dvije sume):

$\mathrm{T(n)} = \sum_{i=0}^{n} n = \mathrm{n}^2$

Zadatak 3

a) Rješenje:

MergeSort(A, l, r)

1. if $l > r$:
2. return
3. $MergeSort(A, 1, \frac{n}{4})$
4. $MergeSort(A, \frac{n}{4} + 1, \frac{n}{2})$
5. $MergeSort(A, \frac{n}{2} + 1, \frac{3n}{4})$
6. $MergeSort(A, \frac{3n}{4} + 1, n)$
7. A5 = Merge(A1, A2)
8. A6 = Merge(A3, A4)
9. A7 = Merge(A5, A6)

b) Rješenje:

Stablo rekurzije za a) dio zadatka: $T(n) = 4T(\frac{n}{4}) + \Theta(n)$

Visina stabla: $h = \log_4 n$

Cijena po razini: $c \cdot n$

Ukupno: $T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n} c \cdot n = \Theta(n \cdot \log_4 n)$