Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta. Ukupno je moguće ostvariti 100 bodova. Rezultati će biti objavljeni na Teams kanalu kolegija. Sve kodove spremite u jedinstvenu zip ili rar datoteku s imenom "KOL_1_PREZIME_IME" te ju predajte na e-mail adresu tprusina@mathos.hr.

Teorijski zadaci

Zadatak 1 (15 bodova). Primjenom master teorema asimptotski omeđite sljedeće funkcije.

a) $T(n) = 9T(n/3) + n^2$,

b) $T(n) = 9T(n/3) + n^3$,

c) $T(n) = 2T(n/2) + n$,

d) $T(n) = 2T(n/2) + c$,

e) $T(n) = 3T(n/2) + n$,

f) $T(n) = 16T(n/4) + n^4$.

Zadatak 2 (15 bodova). Dan je algoritam 1.1.

Program 1.1. Dvije for petlje

```
procedure LOOP(A, n)
  for i = 0 ... n − 1
    for j = i + 1 ... n − 1
        if (A[i] > A[j])
          SWAP(A, i, j);

  return
```

Izrazite vrijeme izvršavanja algoritma 1.1 u Θ notaciji i svoju tvrdnju argumentirajte. Pretpostavite da procedura $SWAP$ radi u vremenu $\Theta(1)$.

Zadatak 3 (10 + 10 bodova). Standardni merge sort algoritam (dan kao procedura merge-sort) sortira polje tako da ga razdvoji na dva polja jednake duljine, rekurzivno ih sortira te ih spoji koristeći proceduru merge. U ovom zadatku potrebno je analizirati algoritam koji polje razdvoji na **četiri** polja jednakih duljina, rekurzivno ih sortira i spaja u polazni niz.

a) Napišite pseudokod procedure merge-sort opisane u tekstu zadatka. Procedura merge i dalje prima dva sortirana polja. Pretpostavite da vam je takva merge procedura dana na korištenje i nju ne morate dodatno pojašnjavati.

b) Dajte asimptotske granice na vrijeme izvršavanja ovako definiranog algoritma. Tvrdnje dokažite koristeći stablo rekurzije.

Programerski zadaci

Zadatak 4 (15 + 5 bodova). Dan je vektor duljine n čiji elementi su brojevi od 0 do k ali točno jedan broj iz tog intervala nedostaje. Napišite mali program koji će pronaći koji točno broj nedostaje.

```
int missing(vector<int> A, int k);
```

Pretpostavite da će uvijek biti dan $k \leq n$. Za dodatnih 5 bodova veše rješenje mora raditi u vremenu $\Theta(n)$.

Primjeri

Input	Output
A = { 2, 2, 3, 0, 3 } k = 3	1
A = { 2, 1, 3, 0, 3 } k = 4	4
A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } k = 7	0

Tablica 1.1: Test primjeri za zadatak 4

Zadatak 5 (15 + 5 bodova). Dan je vektor A od n brojeva. Implementirajte funkciju

```
int closest(vector<int> A);
```

koja vraća najmanju apsolutnu razliku između dva elementa na različitim pozicijama vektora, tj. vratite $\min_{i \neq j} |A[i] - A[j]|$. Za dodatnih 5 bodova vaše rješenje se mora izvršavati u vremenu $\Theta(n \log n)$.

Primjeri

Input	Output
`A = { 4, 2, 5, 10 }`	1
`A = { 1, 3, 5, 10, 1 }`	0
`A = { 2000, 100, 1000, 10 }`	90

Tablica 1.2: Test primjeri za zadatak 4

Zadatak 6 (10 bodova). Implementirajte funkciju

```
int subarray_sum(vector<int> A, int x);
```

koja za dani vektor prirodnih brojeva A od $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$ elemenata $1 \leq A[i] \leq 10^9$ i prirodan broj $1 \leq x \leq 10^9$, izbroji koliko postoji parova (i, j) takvih da vrijedi $i \leq j$ i

$$\left(\sum_{k=i}^{j} A[k] \right) == x.$$

Vrijeme izvršavanja dane funkcije mora biti $\Theta(n)$.

Primjeri

Input	Output
`A = { 2, 4, 1, 2, 7 }` `x = 7`	3
`A = { 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4 }` `k = 7`	4
`A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }` `x = 8`	0

Tablica 1.3: Test primjeri za zadatak 5